

# Introduction to Statistic

Written by Eun Taek Kang\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Department of Physics, Sogang University, Seoul 04107, Korea*

Summer 2025, Sogang University

## Abstract

본 문서는 서강대학교의 2025년 하계학기 통계학입문 강의의 내용을 필기하고 정리한 노트입니다. 모든 내용은 임경필 교수님의 강의를 바탕으로 작성되었습니다.

---

\*email: etkang03@gmail.com

# 1 확률

## 1.1 확률의 정의

### 확률현상, 확률실험

- 확률현상(random phenomenon) : 불확실성에 의해서 좌우되는 현상
- 확률실험(random experiment) : 결과가 불확실성에 의해 좌우되는 실험이나 조사

**Example 1.1** (확률현상의 예). 확률 현상의 예시들은 다음과 같다.

1. 동전이나 주사위를 던질 때 결과가 나타나는 현상
2. 각 지역에서의 연 강수량의 변동 현상
3. 수시로 달라지는 주가의 변동 현상
4. 월 생산품에 포함되는 불량품(수)의 출현 현상

### 표본공간, 표본점, 사건

1. **표본공간**(sample space;  $\Omega$ ) : 한 확률실험에서 일어날 수 있는 가능한 모든 결과의 집합. 표본공간 = 전공간
2. **표본점**(sample point;  $\omega_i$ ) : 표본공간의 원소 하나
3. **사건**(event) = **사상** : 표본공간의 부분집합
4. **근원사건**(elementary event) = **단순사건**(simple event) : 표본점 하나하나로 이루어지는 사건

**Example 1.2.** 확률실험에 대한 표본공간의 예시는 다음과 같다.

1. 하나의 동전을 던지고 윗면에 나타나는 상태를 관찰하는 확률실험: (단, Heads(앞면-그림), Tails(뒷면-금액))  
표본공간 :  $\Omega = \{H, T\}$
2. 하나의 주사위를 던지고 윗면에 나타나는 점의 개수를 관찰하는 확률실험:  
표본공간 :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

우리는 셀 수 있는 공간(countable)뿐 아니라 셀 수 없는 공간(uncountable)에서의 확률도 고려해야 한다. 이때 등장하는 것이 **기하적 확률**(Ex. 길이, 넓이, 부피)이다.<sup>1</sup>

주사위를 굴려서 짝수가 나온다는 확률을 쥔 때,  $\{2\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{6\}$ 으로 쪼개지  $\{2, 4\}$ ,  $\{4, 6\}$ 으로 굳이 쪼개어 생각하지 않는다. 따라서 이후 나올 배반사건으로 쪼개서 생각하는 것이 상당히 중요한 사고로 작용한다.

<sup>1</sup>이런 부분은 실해석학(Real Analysis)의 공부에 도움이 된다.

### 사건의 결합(combination of events)

1. 여사건:  $E_1^c$
2. 합사건:  $E_1 \cup E_2$
3. 교사건:  $E_1 \cap E_2 = E_1 E_2$ <sup>2</sup>
4. 차사건:  $E_1 - E_2$
5. 무한가산합사건:  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in \mathbb{N}, \omega \in E_i\}$
6. 무한가산교사건:  $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N}, \omega \in E_i\}$

### 사전확률, 사후확률

- **사전확률** : 확률실험에서 모든 결과가 같은 가능성을 갖고 일어난다고 하자. 이 실험에서 일어날 수 있는 가능한 모든 결과의 수가  $N$ , 또 한 사건  $E$ 를 일어나게 하는 결과의 수가  $n$ 이면, 이때 사건  $E$ 가 일어날 확률은  $P(E) = n/N$ 이다.
- **사후확률** : 한 확률실험을 반복한 총 횟수를  $N$  이라 하고, 또 그 중 사건  $E$ 를 일어나게 한 실험의 횟수를  $n$  이라 하면, 이때 사건  $E$ 가 일어날 확률은  $P(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} n/N$ 이다.

### 배반사건(mutually exclusive events)

**Definition 1.3.** 두 사건  $E_1$ 과  $E_2$ 가  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ 을 만족할 때,  $E_1$ 과  $E_2$ 는 상호 **배반사건**이라 한다.

경우의 수와 확률을 분석할 때, 상호 배반사건 관계에 있는 것들로 쪼개주는 것이 중요하다. 웃놀이 예시가 있는데 한 번쯤 분석해보도록 합시다.

### 공리론적 확률

정의역때문에 설명이 어려워서 그냥 대충 받아들이고 가도 무방하나, 실해석학할 때 도움된다. (실사뵈하;;)

**Definition 1.4.**  $\Omega$ 를 확률실험의 표본공간이라 하고,  $\mathcal{F}$ 를  $\Omega$  위에서 정의된 사건들의 ' $\sigma$ -집합체'라고 할 때, 집합함수  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\mathcal{F} \subset P(\Omega)$ )가 다음 세 가지 조건을 만족할 때  $P$ 를 **확률함수**(probability function)라 하고,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 를 **확률공간**(probability space)이라 한다.

$$(A1) \quad \forall E \in \mathcal{F}, P(E) \geq 0$$

$$(A2) \quad \text{임의의 배반사건인 } \{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \text{에 대하여,}$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

$$(A3) \quad P(\Omega) = 1$$

상호 배반 합집합의 경우, (A2)의  $\cup$ 의 중간에 점을 찍어 표현하기도 한다. 이러한 공리론적 확률덕분에 배반사건에 대해서 합을 구하는 것은 상당히 쉽게 된다.

<sup>2</sup>중간의 교집합 기호를 생략할 수 있다. Cartesian product가 아님에 유의하자.

$\sigma$ -집합체( $\sigma$ -field),  $\sigma$ -집합대수( $\sigma$ -algebra)

**Definition 1.5.**  $\Omega$ 를 확률실험의 표본공간이라 하고,  $\mathcal{F}$ 를  $\Omega$ 의 부분 집합족이라 할 때, 다음 세가지 조건을 만족할 때  $\mathcal{F}$ 를  $\Omega$  위에서의  $\sigma$ -집합체 또는  $\sigma$ -집합대수라 한다.

(i)  $E \in \mathcal{F} \Rightarrow E^c \in \mathcal{F}$

(ii) 임의의  $\mathcal{F}$ 의 가산무한 사건열  $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 에 대하여

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$$

(iii)  $\emptyset \in \mathcal{F}$

**Theorem 1.6** ( $\sigma$ -집합체의 기본 성질).  $\mathcal{F}$ 를  $\Omega$  위에서의  $\sigma$ -집합체라 하자.

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$

2. 임의의  $\mathcal{F}$ 의 가산무한 사건열  $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 에 대하여

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$$

**Definition 1.7** (Borel  $\sigma$ -집합체).  $\mathbb{R}$ 의 부분집합들의 집합족  $\{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ 를 포함하는  $\mathbb{R}$  위에서의 가장 작은  $\sigma$ -집합체  $\mathcal{B}$ 를 **Borel  $\sigma$ -집합체**라고 한다. Borel  $\sigma$ -집합체  $\mathcal{B}$ 는  $\mathbb{R}$ 의 모든 형태의 구간, 즉, 다음과 같은 형태의 구간을 포함한다.

$$(-\infty, a], \quad (-\infty, a), \quad [a, \infty), \quad (a, \infty), \quad (a, b), \quad (a, b], \quad [a, b), \quad [a, b]$$

여기서,

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( -\infty, a - \frac{1}{n} \right]$$

**Theorem 1.8.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 가 확률공간일 때,

1. 임의의 상호 배반인  $\mathcal{F}$ 의 유한 사건열  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ 에 대하여

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

2.  $\forall E \in \mathcal{F}, \quad P(E^c) = 1 - P(E)$

3.  $\forall E \in \mathcal{F}, \quad 0 \leq P(E) \leq 1$

4.  $P(\emptyset) = 0$

*Proof.*  $(\Omega, \mathcal{P}, P)$  : 확률 공간

(2) :  $E \cup E^c = \Omega$ 이고,  $E \cap E^c = \emptyset$  (상호 배반)이므로, (A2)에 의해  $P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$ 이고, (A3)에 의해  $P(\Omega) = 1$ 이다.  $P(E \cup E^c) = P(\Omega)$ 이므로,  $P(E^c) = 1 - P(E)$ 이 증명된다.

(3)

□

[\[Lecture 1 to here\]](#)