

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по дисциплине

"Физика"

семестр II (механика и молекулярная физика)

Конспект лекций подготовлен к.т.н. доц. О.И.Бурцевой, к.т.н. ст. преп.
О.А.Герасимовой, к.т.н. доц. О.Ю.Горбуновой, к.т.н. доц. Е.Е.Диковой, к.т.н. доц.
К.В.Жигуновым, ст. преп. С.Е.Кажарской, к.т.н. доц. И.Ю.Канунниковой, к.ф.-м.н.
доц. Ю.Н.Колмаковым (ред), к.ф.-м.н. доц. А.М.Кузнецовым, д.т.н. проф.
Р.Н.Ростовцевым, к.т.н., доц. О.В.Шуваевой, к.т.н. доц. Е.В.Якуновой

Тула - 2023

1. ВВЕДЕНИЕ

Физика как наука. Связь физики с математикой. Общая структура и задачи курса физики

Все природные явления и процессы взаимосвязаны и взаимообусловлены. Курс физики – это единственная возможность для студента изучить и понять эту взаимосвязь, ознакомиться с приложениями физических явлений в разных областях науки и техники, с новейшими достижениями физики. В противном случае, закончив обучение в вузе, студент приобретает умение решать только конкретные, узкопрофессиональные задачи, что не соответствует стандарту высшего образования. Развитие техники и науки показывает, что знания, казалось бы относившиеся чисто к сфере интересов физики, становятся совершенно необходимыми в практических применениях. Примером может служить быстрое развитие всех областей техники, связанных с квантовой физикой: IT-технологии, микро- и нанoeлектроника, лазерная техника, разнообразные приложения современного материаловедения и т.п.

Роль физики в работе специалиста любого профиля заключается в том, чтобы обеспечить общее понимание механизма протекающих процессов и снабдить его зависимостями и формулами, которые позволяют предсказать и рассчитать результаты этих процессов без лишних проб и измерений. Без такого понимания любая деятельность бесполезна, или даже вредна.

Любые зависимости в реальных физических процессах и в технических устройствах функциональны. В этом мире функциональны **все** зависимости. Истинные связи между различными явлениями и состояниями можно описать языком математики: и в физике, и в технике, и в медицине, и в экономике, и в политике, и в психологии, и в лингвистике. Знание этих функциональных или статистических зависимостей позволяет понимать протекающие процессы и управлять ими.

Наиболее адекватный язык для описания физических явлений – язык математики, позволяющий быстро и точно описать результат любого физического процесса. Задача физики – найти подобные зависимости, исследовать их и дать конкретные практические рекомендации.

Данный конспект лекций включает описание большинства тем и разделов, изучаемых в вузовском курсе общей физики. Конкретный выбор разделов этого конспекта для подготовки студентов должен соответствовать рабочей программе для каждого направления (специальности) обучения.

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Системы отсчета. Скалярные и векторные физические величины

Классическая механика изучает механическое движение частиц (материальных точек) и тел, т.е. изменение положения их в пространстве с течением времени.

Частица (материальная точка) – это тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь. Одно и то же тело в различных условиях либо может считаться частицей, либо – нет.

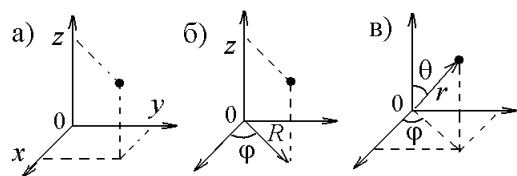
Вопрос: при каких условиях материальной точкой можно или нельзя считать отдельный атом? человека? планету?



Другая абстракция – абсолютно твердое тело – это система частиц, расстояния между которыми в процессе движения тела остаются неизменными.

При этом постулируется, что:

- 1) пространство является бесконечным, однородным (все точки его одинаковы), изотропным (все свойства пространства одинаковы во всех направлениях), а свойства пространства не зависят от находящихся в нем тел;
- 2) время является однородным, течет только в одном направлении, и ход времени не зависит от состояния движения тел.



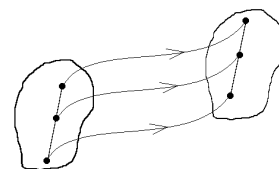
Так как все точки пространства одинаковы, то определить, изменили ли частица (тело) положение или нет, возможно только по отношению к какому-либо другому телу, называемому телом отсчета. Например, в простых задачах механики в качестве тела отсчета часто принято рассматривать Землю. Обычно с телом отсчета связывают некоторую систему координат: декартову, цилиндрическую, сферическую (см. рисунок).

Совокупность системы пространственных координат, жестко связанной с телом отсчета, и системы отсчета времени называется системой отсчета. Система отсчета времени представляет собой совокупность синхронизованных часов, находящихся в каждой точке системы координат. Понятие синхронизованные означает: "одинаково идущие". Механическое движение тел рассматривается в выбранной системе отсчета.

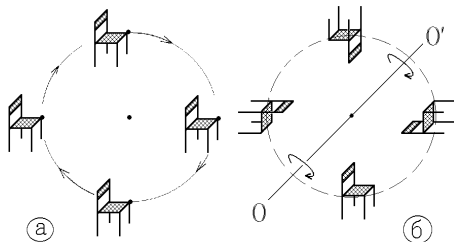
2.2. Разложение произвольного движения физического тела на поступательное и вращательное движение

Рассматривают несколько видов движений абсолютно твердого тела: поступательное, вращательное движение вокруг оси (в частности – закрепленной), плоское движение, вращательное движение вокруг точки и свободное движение. Первые два вида – основные: любое движение твердого тела можно свести к поступательному движению и вращению относительно некоторой оси.

Поступательным движением называется такое движение, при котором все точки тела движутся по одинаковым траекториям, или, иначе говоря, любая прямая, связанная с телом, перемещается параллельно самой себе (рисунок справа).



При вращении вокруг закрепленной оси все точки движутся по соосным окружностям (рисунок слева). За время dt происходит поворот тела на угол $d\varphi$. Поэтому вместо линейных характеристик вводятся угловые характеристики: поворот тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ характеризуется вектором угла поворота $d\vec{\varphi}$, направленным по оси вращения по правилу правого винта.



Пример: движение стула на рисунке “а” не будет вращательным. Это поступательное криволинейное движение по окружности, когда все точки тела движутся по одинаковым траекториям, но положение центра кривизны для них различно. На рисунке “б” изображено вращательное движение стула: все его точки описывают окружности вокруг общей оси вращения OO' , но радиусы этих окружностей различны.

Любое произвольное движение физического тела или системы материальных точек можно представить в виде суммы двух простых движений:

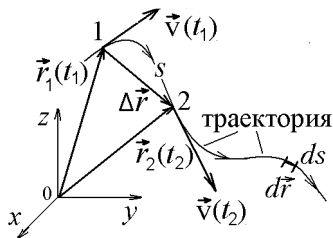
поступательного и вращательного.

2.3. Кинематика поступательного движения в трехмерном пространстве.

Перемещение, скорость, ускорение

Существуют различные способы определения положения частицы. В первую очередь это **векторный способ описания движения**.

В этом случае положение частицы задается её радиус-вектором \vec{r} . Геометрическое место концов радиус-вектора представляет кривую, называемую траекторией частицы в пространстве. Зависимость радиус-вектора частицы от времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется кинематическим законом движения. С геометрической точки зрения – это уравнение траектории.



Изменение радиус-вектора \vec{r} за время Δt называется перемещением: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Очевидно, что перемещение (вектор!) совпадает по величине с хордой, проведенной из точки 1 в точку 2 (см. рисунок). Длина дуги траектории между этими точками Δl называется путем. Для бесконечно малого временного интервала dt соответствующее бесконечно малое (элементарное) перемещение $d\vec{r}$ направлено по касательной к траектории в точке 1. Модуль элементарного перемещения равен элементарному пути: $|d\vec{r}| = dl$.

Важнейшей кинематической характеристикой движения является скорость. Скоростью частицы называется векторная величина, определяемая равенством

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

иначе говоря, **скорость – это производная от радиус-вектора по времени**.

Из определения следует, что скорость \vec{v} направлена по касательной к траектории (см. рисунок). Величина скорости

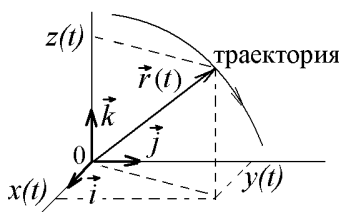
$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{dl}{dt},$$

где l - путь, пройденный вдоль траектории. Иногда используется понятие средней скорости: это векторная величина, равная отношению перемещения ко времени, т.е. $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Производная скорости частицы по времени, т.е. вектор $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ называется ускорением частицы. О направлении вектора \vec{a} и о его величине $a = |\vec{a}|$ разговор пойдет чуть позже.

2.4. Применение производных и интегралов в кинематике произвольного движения

Таким образом, зная кинематический закон движения, можно простым дифференцированием по времени найти скорость и ускорение в любой момент времени (так называемая прямая задача кинематики). Наоборот, зная ускорение частицы, а также начальные условия, т.е. положение \vec{r}_0 и скорость \vec{v}_0 частицы в начальный момент времени $t_0 = 0$, можно найти траекторию движения частицы $\vec{r}(t)$ (обратная задача кинематики). Действительно, $d\vec{v} = \vec{a} dt$ и $d\vec{r} = \vec{v} dt$, поэтому определить скорость и положение частицы в пространстве можно с помощью интегралов (операция интегрирования обратна операции вычисления производной): $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$ и далее $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$.



Если с телом отсчета жестко связать какую-нибудь координатную систему (например, декартову), то положение частицы в любой момент времени определяется тремя ее координатами x, y, z .

Проектируя радиус-вектор на координатные оси, получим три зависимости координат частицы от времени:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

которые представляют кинематический закон движения в координатной форме. Из рисунка видно, что $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы, или орты декартовой системы координат. Отсюда следует принцип независимости движений: произвольное движение частицы можно рассматривать как сумму независимых движений по координатным осям x, y, z .

Зная формулы для векторов скорости и ускорения частицы, можно найти их проекции на координатные оси:

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}}.$$

Следовательно, модулями (величинами) скорости и ускорения будут

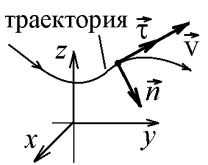
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{и} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Обратная задача вычисления проекций скорости и координат решается с помощью интегрирования:

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x dt \quad \text{и} \quad x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t) dt. \quad \text{Проекция на оси } y \text{ и } z \text{ вычисляются аналогично.}$$

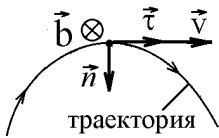
2.5. Кинематика криволинейного поступательного движения.

Нормальное и тангенциальное ускорение



Этот способ обычно используется, если известна траектория движения точки. При этом начало отсчета (точка O) выбирается на траектории. Выбирается также положительное направление движения вдоль траектории, а положение частицы описывается криволинейной координатой $l(t)$, представляющей не что иное, как длину дуги кривой линии, отсчитанной вдоль траектории от начальной точки O , т.е. пути, пройденный точкой (см. рисунок). В этом случае $l = l(t)$ - кинематический закон движения.

Из формулы для скорости следует, что $dl = v \cdot dt$ и $\boxed{l(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt}.$



Свяжем с траекторией естественную систему координат, состоящую из трех взаимно перпендикулярных осей: касательной (единичный вектор $\vec{\tau}$, направленный вдоль вектора скорости частицы), нормали (единичный вектор \vec{n} , направленный к центру кривизны траектории), и бинормали (единичный вектор $\vec{b} = [\vec{\tau}, \vec{n}]$) (см. рисунок). По определению $\vec{\tau} \perp \vec{n} \perp \vec{b}$ и $|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1$.

Как следует из этого рисунка, $\boxed{\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}}$ - вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории.

Чтобы найти ускорение частицы, продифференцируем последнюю формулу по времени, учитывая, что как v , так и

$$\vec{\tau} \text{ являются функциями времени: } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

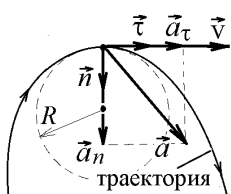
Первое слагаемое направлено по касательной к траектории и называется тангенциальным (касательным) ускорением:

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}}.$$

Его модуль $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ равен производной от величины (модуля) скорости по времени, поэтому тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине.

Второе слагаемое направлено по нормали к траектории, характеризует изменение скорости по направлению, называется нормальным ускорением. Можно показать, что оно определяется выражением: $\boxed{\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}}$, где R - радиус окружности,

вписанной в траекторию в той точке, в которой определяется нормальное ускорение. Его модуль $a_n = \frac{v^2}{R}$. (Заметим, что в случае движения частицы по окружности - это хорошо известное центростремительное ускорение.)



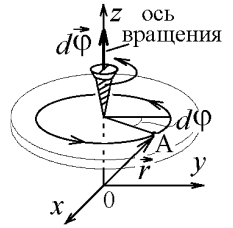
В итоге оказывается, что полное ускорение точки \vec{a} можно разложить на две составляющие: тангенциальное ускорение \vec{a}_τ и нормальное ускорение \vec{a}_n (см. рисунок): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, причем модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. Что касается бинормальной составляющей ускорения, то она равна нулю.

В частности, при движении частицы по прямой $R \rightarrow \infty$, $\vec{a}_n = 0$ и $\vec{a} = \vec{a}_\tau$. А при равномерном движении частицы по окружности $\vec{a}_\tau = 0$ и $\vec{a} = \vec{a}_n$.

2.6. Кинематика вращательного движения вокруг закрепленной оси.

Угловая скорость и угловое ускорение

Предположим, что вращающееся тело поворачивается за время dt на угол $d\varphi$ (см. рисунок). Поворот происходит вокруг оси вращения, определенным образом ориентированной в пространстве. Кроме величины угла поворота надо знать направление оси вращения. Поэтому поворот тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ характеризуют вектором угла поворота $d\vec{\varphi}$, направленным по оси вращения по правилу правого винта: винт надо установить вдоль оси вращения и вращать по направлению вращения тела. Вектор угла поворота будет направлен вдоль поступательного движения винта, как показано на рисунке. Обычно ось z декартовой системы координат выбирают направленной вдоль оси вращения.



Угол поворота в системе СИ задают в радианах (рад).

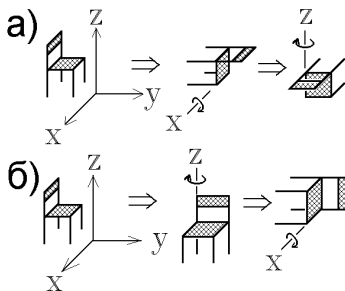
Быстрота изменения угла поворота характеризуется вектором угловой скорости $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, направленным так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$, т.е. по оси вращения по правилу правого винта.

Еще одна кинематическая характеристика вращательного движения – вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, который совпадает по направлению с вектором угловой скорости при ускоренном вращении и направлен противоположно ему при замедленном вращении вокруг неподвижной оси. Единицы измерения этих величин $[\omega] = \text{рад/с} = \text{с}^{-1}$, $[\varepsilon] = \text{рад/с}^2 = \text{с}^{-2}$.

Вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости при ускоренном вращении и противоположен ему при замедленном вращении.

Замечание. Конечный угол поворота не является вектором! Он не подчиняется принципу коммутативности, т.е. результат сложения двух конечных углов поворота (двух последовательных вращений) зависит от порядка слагаемых (от последовательности вращений): $\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2 \neq \vec{\varphi}_2 + \vec{\varphi}_1$.

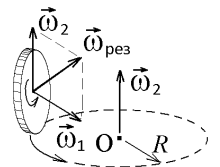
В качестве примера рассмотрим два последовательных поворота предмета (стула) по часовой стрелке на угол $\pi/2$. На рисунке а) изображен вначале поворот стула вокруг оси x , а затем – вокруг оси z . На рисунке б) стул вначале вращают вокруг оси z , а затем – вокруг оси x . Конечные положения стула заметно отличаются друг от друга. Тем не менее, бесконечно малые углы поворота можно складывать векторно:



$$d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2 \approx d\vec{\varphi}_2 + d\vec{\varphi}_1,$$

так как при изменении порядка сложения бесконечно малых векторов результат будет отличаться на бесконечно малую второго порядка $O((d\varphi)^2)$, которой можно пренебречь. Поэтому векторы угловой скорости и углового ускорения можно складывать обычным образом: если тело участвует в двух вращениях, то результирующая угловая скорость равна векторной сумме двух составляющих векторов: $\vec{\omega}_{\text{рез}} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ (то же самое относится и к угловому ускорению).

Например, диск катится по кругу радиуса R по горизонтальной плоскости, совершая вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг своей собственной оси и с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ вокруг вертикальной оси O .



В простейших случаях, особенно при вращении вокруг закрепленной оси, в уравнениях можно не использовать векторные величины, ограничиваясь единственной проекцией угловых векторов на ось вращения, вдоль которой направляют ось z : $\omega_z = d\varphi/dt$, $\varepsilon_z = d\omega_z/dt = d^2\varphi/dt^2$.

Так же, как и при поступательном движении, при вращательном существуют прямая и обратная задачи кинематики.

Прямая задача: по заданному как функция времени углу поворота $\varphi = \varphi(t)$ найти ω_z и ε_z ; решается она дифференцированием по времени:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

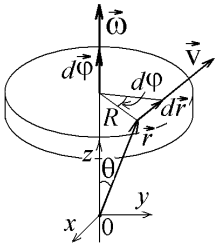
Обратная задача: по заданному как функция времени угловому ускорению $\varepsilon_z = \varepsilon_z(t)$ и начальным условиям ($\omega_z(t=0) = \omega_0$ и $\varphi(t=0) = \varphi_0$) найти кинематический закон вращения; она решается с помощью интегрирования:

$$\omega_z(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon_z(t) dt, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega_z(t) dt.$$

Отсюда, в частности, получаются простые формулы равнопеременного вращения ($\varepsilon_z = \text{const}$):

$$\omega_z = \omega_0 + \varepsilon_z t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_z t^2/2.$$

2.7. Связь линейных и угловых кинематических переменных



Рассмотрим произвольную точку в твердом теле, которое вращается вокруг закрепленной оси. Установим связь между векторами \vec{v} и $\vec{\omega}$. Как следует из рисунка, величина элементарного перемещения точки (или путь) будет практически равна длине дуги окружности $|d\vec{r}| = R d\varphi = r \sin \theta d\varphi$, поэтому $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$, т.е. элементарное перемещение равно векторному произведению элементарного угла поворота на радиус-вектор точки. Разделив эту формулу почленно на dt , немедленно получим $\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r} \right]$ или $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$.

Отсюда вытекает, что величины линейной и угловой скоростей связаны соотношением: $v = |\vec{v}| = \omega r \sin \theta = \omega R$, где R – расстояние от выделенной точки до оси вращения.

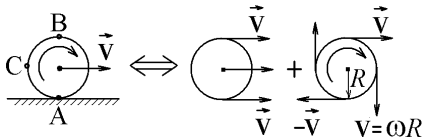
Теперь продифференцируем полученную формулу по времени. Это дает:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] \quad \text{или} \quad \vec{a} = [\vec{\epsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}].$$

Первое слагаемое направлено по касательной к траектории и равно по модулю $|\vec{\epsilon}, \vec{r}| = \epsilon r \sin \theta = \epsilon R$ – это не что иное, как тангенциальное ускорение: $\vec{a}_\tau = [\vec{\epsilon}, \vec{r}]$.

Второе слагаемое направлено по радиусу к центру вращения, равно по модулю $|\vec{\omega}, \vec{v}| = \omega v = \omega^2 R \equiv \frac{v^2}{R}$ и является нормальным ускорением: $\vec{a}_n = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]]$. В результате:

$$a_\tau = \epsilon R, \quad a_n = \omega^2 R \quad \text{и} \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$



Пример: качение колеса со скоростью v без проскальзывания можно представить в виде суммы двух движений, поступательного со скоростью \vec{v} и вращательного с угловой скоростью $\omega = v / R$ вокруг оси колеса (см. рисунок). При этом нижняя точка колеса неподвижна ($v_A = 0$), т.е. сцеплена с дорогой, а скорость верхней точки $v_B = 2v$. Если колесо будет быстрее двигаться поступательно, чем вращаться, то оно начнет проскальзывать (скорость точки A на рисунке будет направлена вправо). При более быстром вращении колесо пробуксовывает (точка A движется влево).

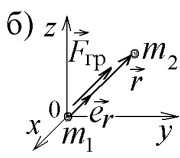
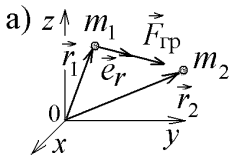
Если колесо будет быстрее двигаться поступательно, чем вращаться, то оно начнет проскальзывать (скорость точки A на рисунке будет направлена вправо). При более быстром вращении колесо пробуксовывает (точка A движется влево).

3. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1. Импульс материальной точки (частицы). Разновидности сил в классической механике

Если кинематика отвечает на вопрос "по какой траектории движется тело?", то динамика изучает другую сторону вопроса: "почему движение происходит именно так?". А так как вид траектории или изменение движения частицы связаны только с ее взаимодействием с другими телами, то приходится вводить такие понятия, как сила, масса, импульс и т.п., позволяющие описать это взаимодействие.

Силой называют количественную меру взаимодействия тел друг с другом. В разных случаях оно происходит по-разному, поэтому существует множество разновидностей сил, и каждый вид описывается своим силовым законом. Рассмотрим силы, наиболее часто встречающиеся в задачах механики.



1. Гравитационная сила (сила притяжения между двумя частицами) определяется

$$\vec{F}_{\text{гр}} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \vec{e}_r, \quad \text{где}$$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \text{единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей}$$

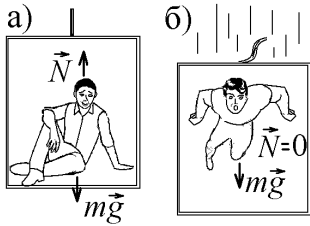
частицы. Если частицу m_1 поместить в начало координат O, то этот закон примет вид:

$$\vec{F}_{\text{гр}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad \text{где} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Гравитационную силу притяжения частицы планетой записывают также в виде $\vec{F}_{\text{гр}} = m \vec{g}$, где \vec{g} – ускорение свободного падения.

Заметим, что аналогичным законом (законом Кулона) определяется сила электростатического взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме:

$$\vec{F}_{\text{кул}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \vec{e}_r \text{ или по модулю } F_{\text{кул}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}.$$



Это означает, что задача о движении заряженной частицы в электростатическом поле имеет решение, аналогичное решению задачи о движении частицы в гравитационном поле.

2. Вес – это вертикальная сила, с которой тело действует на опору или подвес. Как правило, она по величине равна силе \vec{N} нормальной реакции опоры.

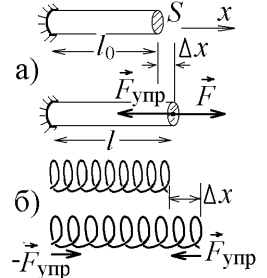
Пример: в свободно падающем лифте вес пассажира равен нулю (состояние невесомости), хотя гравитационная сила тяжести $m\vec{g}$ на него по-прежнему действует.

3. Сила упругости определяется законом Гука:

$\vec{F}_{\text{упр}} = -k \Delta \vec{r}$, или в проекции на ось x : $F_{\text{упр}x} = -k \Delta x$, где $\Delta \vec{r}$ или Δx – смещение точки приложения силы относительно положения равновесия (рис.а). Следует заметить, что если сила упругости действует на растягиваемое или сжимаемое упругое тело, то коэффициент жесткости

k , входящий в этот закон, имеет вид $k = \frac{ES}{l_0}$, где l_0 – длина нерастянутого стержня, S –

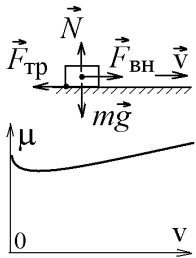
площадь его поперечного сечения, E – модуль Юнга, или модуль упругости, зависящий только от материала стержня. Так, если упругую резину или пружину (рис.б) разрезать пополам, то ее жесткость возрастет в два раза.



Строго говоря, закон Гука действует только при малых деформациях: $\Delta x / l_0 \ll 1$. Однако, существуют силы, не

связанные с деформацией упругого тела и имеющие общий вид: $F_x = -kx$, где $k = \text{const}$, а x – смещение от положения равновесия (не обязательно малое). Такие силы называют квазиупругими.

4. Силы трения весьма разнообразны. Если лежащее на твердой поверхности тело тянуть вдоль поверхности со все большим усилием, то вначале оно не перемещается из-за возникающей силы трения покоя, направленной противоположно внешней силе. Эта сила трения зависит от прилагаемой внешней силы $\vec{F}_{\text{внеш}}$ и может иметь величину от нуля до некоторого максимального значения $F_{\text{тр max}}$. Если $F_{\text{внеш}} > F_{\text{тр max}}$, то тело начинает скользить, и на него уже действует сила трения скольжения



$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}, \text{ или по модулю } F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Здесь N – нормальная реакция опоры, μ – коэффициент трения скольжения, который зависит от материала тела и поверхности и очень незначительно от относительной скорости тела (см. рисунок).

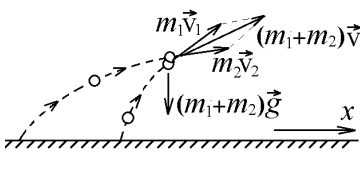
Когда тело скользит по жидкому слою смазки или движется в жидкой или газообразной среде, то на него действует сила вязкого трения. Во многих случаях ее можно считать пропорциональной относительной скорости тела и направленной против движения:

$$\vec{F}_{\text{вяз}} = -\eta \vec{v},$$

где коэффициент η зависит от свойств среды и размеров тела.

И, наконец, еще одна динамическая величина – импульс частицы, равный произведению массы частицы на ее скорость:

$$\vec{p} = m \vec{v}.$$



Не следует забывать, что импульс – величина векторная, поэтому величина полного импульса двух частиц не равна сумме величин импульсов каждой из них, о чем свидетельствует следующий пример столкновения двух слипающихся при ударе пластилиновых шариков (см. рисунок). Грубой ошибкой будет складывать величины их импульсов: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$. Закон сохранения импульса при ударе имеет вид векторного уравнения $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}'$.

3.2. Инерциальные системы отсчета. Законы Ньютона в инерциальных системах и их следствия

Первый закон Ньютона постулирует существование особого класса систем отсчета. Вообще говоря, описывать движение можно в любой системе отсчета, но наиболее просто это сделать в инерциальной системе отсчета (ИСО).

Современная формулировка первого закона Ньютона такова:

существуют такие системы отсчета, в которых свободная частица, на которую не действуют силы, движется с постоянной скоростью \vec{v} (т.е. равномерно и прямолинейно). Такие системы отсчета называются инерциальными, а движение свободной частицы в них – движением по инерции.

Если инерциальная система отсчета найдена, то любая другая, движущаяся относительно нее неускоренно, тоже будет инерциальной. Поэтому можно говорить о бесконечном множестве ИСО.

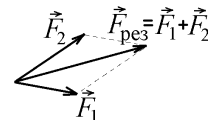
Формулировка второго закона Ньютона такова:

скорость изменения импульса частицы в инерциальной системе отсчета равна результирующей силе, действующей на

частицу:
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{рез}} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Эта формула нуждается в комментариях.

1) Результирующая сила $\vec{F}_{\text{рез}}$ – это векторная сумма всех сил, действующих на частицу, т.е. $\sum_i \vec{F}_i$. Определяется она по правилу параллелограмма (опытный факт).



2) Второй закон **не является определением** силы; он только устанавливает связь между кинематическими и динамическими величинами, позволяя найти траекторию частицы, если известны действующие на нее силы. Поэтому его называют уравнением движения частицы.

3) Так как частица имеет постоянную массу, то подстановка $\vec{p} = m\vec{v}$ в уравнение приводит к формуле:

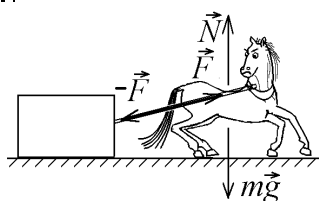
$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i.$$

4) Любой физический закон имеет область применимости, т.е. совокупность условий, при выполнении которых закон можно применять. Попытка использовать одну и ту же формулировку закона в любых условиях может привести к грубым ошибкам. Попробуйте, например, применить закон Ньютона в записанной выше форме к брошенному камню. Получая траекторию движения, нельзя предсказать вращения камня, которое может изменить траекторию в реальной воздушной среде. Дело в том, что записанные уравнения мы определили для классических частиц, не имеющих размера, не меняющих свою массу и движущихся поступательно. Поэтому из этих уравнений можно получить только траекторию криволинейного поступательного движения.

Формулировка третьего закона Ньютона такова:

силы взаимодействия двух частиц равны по величине, противоположны по направлению и направлены по прямой, соединяющей частицы, т.е.

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}.$$



Вопрос: лошадь тянет груз с такой же силой, с какой груз тянет лошадь. Почему же груз трогается с места?

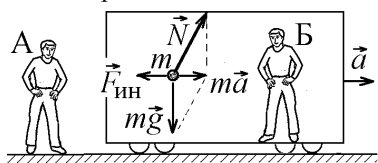
Ответ: на абсолютно гладком льду все попытки лошади сдвинуть груз с места были бы так же неудачны, как и попытка штангиста поднять в воздух вместо штанги самого себя. Причиной движения будет сила, действующая со стороны опоры. Попробуйте объяснить, почему при малом усилии лошади не удастся сдвинуть груз, а при большом – удастся.

Тот же вопрос можно задать и для стоявшего человека, который начинает двигаться вперед с ускорением \vec{a} . Согласно законам Ньютона на пешехода должна действовать **внешняя** сила, толкающая его вперед. Это будет горизонтальная составляющая силы реакции со стороны земли. Если пешеход толкает ногой землю с силой \vec{F}_1 , то со стороны земли на него будет действовать противоположно направленная сила $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, заставляющая пешехода ускоряться.



3.3. Неинерциальные системы отсчета и уравнения динамики поступательного движения в неинерциальных системах отсчета

Неинерциальной системой отсчета называется любая система отсчета, **движущаяся с ускорением относительно ИСО**. Например, трогаящийся с места или тормозящий поезд, поворачивающий на закруглении шоссе автомобиль, взлетающая ракета с космическим аппаратом, вращающаяся Земля и т.п.



В неинерциальной системе закон Ньютона, записанный в ранее, должен измениться. Действительно, для неподвижного наблюдателя "А" (связанного с инерциальной системой отсчета) математический маятник в движущемся с ускорением \vec{a} вагоне отклонится от вертикального положения, так как должно выполняться векторное равенство

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{N}$$

где \vec{N} – сила натяжения нити. Но для наблюдателя "Б" в неинерциальной системе (связанной с вагоном) маятник неподвижен ($\vec{a}' = 0$), а силы $m\vec{g}$ и \vec{N} не меняются: $m\vec{a}' \neq m\vec{g} + \vec{N}$!

Используя формулу преобразования ускорений $d\vec{v}/dt = [\vec{e}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}]$, можно записать закон движения частицы так, чтобы он выполнялся и в неинерциальной системе отсчета. С помощью преобразований координат при переходе от инерциальной системы отсчета к неинерциальной получаем уравнение движения частицы в неинерциальной системе отсчета:

$$m\vec{a}' = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_0 + 2m[\vec{v}', \vec{\omega}] + m\omega^2 \vec{R},$$

где \vec{R} – вектор, проведенный к частице от оси вращения неинерциальной системы, которая вращается относительно инерциальной системы с угловой скоростью ω , \vec{a}_0 – ускорение поступательного движения неинерциальной системы относительно инерциальной, \vec{v}' и \vec{a}' – скорость и ускорение частицы m в неинерциальной системе.

Три последних слагаемых в записанном выражении называются силами инерции.

Первая из них, $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0$ – это сила инерции, возникающая при поступательном движении системы отсчета с ускорением \vec{a}_0 . Для наблюдателя "Б" на предыдущем рисунке выполнен закон Ньютона: $m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0$.

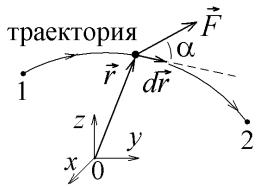
Вторая и третья – силы инерции, возникающие при вращении неинерциальной системы отсчета с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Одна из них – кориолисова сила инерции – действует только на движущиеся частицы: $\vec{F}_{\text{кор}} = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]$. Другая – центробежная сила инерции, $\vec{F}_{\text{цб}} = m[\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{\omega}]] = m\omega^2 \vec{R}$, действует как на движущиеся, так и на неподвижные частицы.

Силы инерции отличаются от "обычных" сил тем, что они обусловлены не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчета. Они существуют только в неинерциальных системах отсчета и направлены противоположно ускорению системы! Но, с другой стороны, у них есть удивительное свойство, роднящее их с гравитационной силой – всем телам, независимо от их массы, они сообщают **одинаковое** ускорение.

Чтобы записать уравнение движения в неинерциальной системе отсчета, следует к векторной сумме "обычных" сил добавить силы инерции:

$$\frac{d\vec{p}'}{dt} = m\vec{a}' = \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{ин}} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{кор}}.$$

3.4. Работа силы при поступательном движении. Мощность



Обычно приходится иметь дело с силой, переменной как по величине, так и по направлению, и действующей на частицу, движущуюся по криволинейной траектории. Направление силы \vec{F} составляет с траекторией угол α (вообще говоря, переменный). За время dt частица переместится на $d\vec{r}$, и сила совершит над ней элементарную работу, которая по определению равна скалярному произведению вектора силы на вектор бесконечно малого перемещения: $dA = \vec{F} d\vec{r}$.

Эту формулу можно записать и по-другому: $dA = F |d\vec{r}| \cos \alpha = F dl \cos \alpha = F_l dl$,

где F_l – проекция силы на направление траектории, dl – элементарный путь. Выражение для работы при конечном перемещении из точки 1 в точку 2 будет выражаться интегралом: $A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$.

Если же на тело одновременно действуют несколько сил, то их суммарная работа равна **алгебраической** сумме работ каждой силы, или, иначе, равна работе результирующей силы

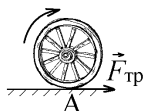
$$A_{\text{рез}} = \int \vec{F}_{\text{рез}} d\vec{r} = \int \sum_i \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_i A_i.$$

Знак работы каждой силы в этой сумме зависит от направления векторов \vec{F}_i и $d\vec{r}_i$. Сила совершает положительную работу, когда она направлена "по движению" ($\alpha < \pi/2$), и отрицательную – когда она направлена "против движения" ($\alpha > \pi/2$).

Сила, перпендикулярная к траектории частицы, работы не совершает. Так, в частности, всегда равна нулю работа силы, действующей на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля:

$$A_{\text{магн}} = \int \vec{F}_{\text{магн}} d\vec{r} = \int q[\vec{v}, \vec{B}] \cdot \vec{v} dt = 0.$$

Кроме того, надо учитывать, что $d\vec{r}$ – это **перемещение точки приложения силы**. Например, при качении колеса **без проскальзывания** на точку А касания колеса с плоскостью действует сила трения, но скорость этой точки равна нулю, она не перемещается, и поэтому **при качении без проскальзывания сила трения не совершает работу**.



Помимо работы можно определить мощность силы, которая равна работе, совершенной за единицу времени:

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

В системе СИ работа измеряется в джоулях (1 Дж = 1 Н·м), а мощность – в ваттах (1 Вт = 1 Дж/с).

3.5. Кинетическая энергия движущейся частицы

Пусть на движущуюся частицу действует некоторая сила \vec{F} . В результате движение частицы изменяется (меняется скорость \vec{v}). Найдем, чему равна работа силы по изменению скорости частицы. Для этого запишем второй закон Ньютона на $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$ и умножим каждую его часть скалярно на элементарное перемещение $d\vec{r}$. В итоге получим:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = m \vec{v} d\vec{v} = \sum \vec{F} d\vec{r} = dA. \text{ Но } \vec{v} d\vec{v} = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = d\left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

и поэтому $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$. Величину $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$ называют кинетической энергией поступательного движения час-

тицы или физического тела. Таким образом, **работа всех сил, действующих на частицу (тело), идет на изменение ее**

кинетической энергии, т.е. $dE_{\text{кин}} = dA$ или $E_{\text{кин}2} - E_{\text{кин}1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \sum \vec{F} d\vec{r}$.

3.6. Консервативные и неконсервативные силы. Диссипативные силы



траектории разные,
работа A_{12} одинакова



замкнутая траектория

Определение: сила, работа которой не зависит от формы и длины пути (от траектории точки приложения силы), называется консервативной силой (рисунок сверху.)

Математически условие консервативности силы выражается в виде: $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$.

Действительно, как следует из рисунка снизу, работа консервативной силы на замкнутом пути в силу определения будет равна $A_{\text{замкн}} = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0$. Величина $\oint \vec{a} d\vec{r}$ называется циркуляцией вектора \vec{a} . Записанное условие читается так: **циркуляция консервативной силы по любому замкнутому контуру равна нулю.**

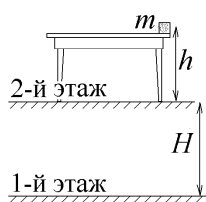
Из определения консервативной силы вытекает и еще одно важнейшее свойство: работу консервативной силы можно представить, как изменение (убыль) некоторой скалярной функции $E_{\text{пот}}(\vec{r})$, зависящей только от положения частицы (тела), которая называется потенциальной

энергией:

$$dA_{\text{конс}} = \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = -dE_{\text{пот}}, \text{ или}$$

$$E_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - E_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = -\Delta E_{\text{пот}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r}.$$

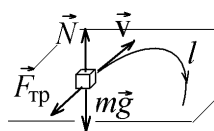
Последняя из этих формул является определением потенциальной энергии. Из нее следует, что **потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной**. Так как определена только ее разность, то к выражению $E_{\text{пот}}$ можно добавить или вычесть любую постоянную величину.



Например, потенциальную энергию тела можно вычислять относительно уровня любого этажа здания $E_{\text{пот}} = mgh$ или $E_{\text{пот}} = mg(h + H)$, относительно уровня моря, относительно центра Земли и т.д.; величина ее при этом, конечно, будет разной, но работа консервативной силы тяжести при перемещении тела m во всех случаях будет одной и той же!

Поэтому в каждом конкретном случае договариваются о начале отсчета потенциальной энергии (в какой именно точке следует считать $E_{\text{пот}} = 0$ из соображений удобства).

Неконсервативными называются силы, работа которых зависит от длины и формы пути. Отсюда следует, что на замкнутом пути работа неконсервативных сил не равна нулю, и с ними не связана потенциальная энергия.



Примерами неконсервативных сил являются: сила трения скольжения и силы вязкого трения. Так, из приведенного рисунка видно, что работа силы трения скольжения зависит не от перемещения тела, а от длины пути: $A_{\text{тр}} = -\mu N l$, и не равна нулю при возвращении тела в исходную точку.

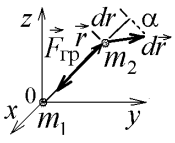
Важным частным случаем неконсервативных сил являются диссипативные силы – силы, зависящие от скорости частицы и направленные против скорости:

$$\vec{F}_{\text{дис}} = -f(v)\vec{v}.$$

Примером может служить сила вязкого трения. Как следует из записанного ранее уравнения для мощности, мощность диссипативных сил всегда отрицательна: $P_{\text{дис}} = \vec{F}_{\text{дис}} \vec{v} = -f(v)v^2 < 0$, поэтому при действии диссипативных сил механическая энергия всегда убывает (и превращается во внутреннюю, в тепло). Отсюда и название: “dissipare” (лат.) – рассеивать.

3.7. Потенциальная энергия частицы. Потенциальная энергия в поле сил тяжести и потенциальная энергия упругого взаимодействия. Эквипотенциальные поверхности

Вычислим потенциальную энергию различных консервативных сил.

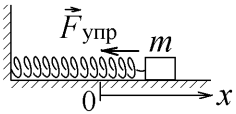


1) Сила гравитационного притяжения: $\vec{F}_{\text{гр}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$, поэтому проекция силы, действующей на перемещающуюся материальную точку с массой m_2 , на направление радиус-вектора будет

$F_{\text{гр}r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$. Выберем $E_{\text{пот гр}} = 0$ при $r = \infty$. Тогда работой перемещения частицы 2 из бесконечности в точку с радиус-вектором \vec{r} будет

$$A_{\text{гр}} = \int_{\infty}^r \vec{F}_{\text{гр}} d\vec{r} = \int_{\infty}^r F_{\text{гр}r} |d\vec{r}| \cdot \cos \alpha = \int_{\infty}^r \left(-G \frac{m_1 m_2}{r^2} \right) dr = G \frac{m_1 m_2}{r} = 0 - E_{\text{пот гр}}(r).$$

Следовательно, потенциальная энергия притяжения двух точечных масс $E_{\text{пот гр}}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$.



2) проекция силы упругости растягиваемой пружины на направление смещения её конца x равна $F_{\text{упр}x} = -kx$ (эта сила стремится сократить пружину, уменьшить её удлинение x). Поэтому потенциальная энергия упругой деформации (растяжения пружины с жесткостью k на длину x) равна

$$E_{\text{пот упр}}(x) = -A_{\text{упр}} = -\int_0^x (-kx) dx = kx^2/2.$$

При этом $E_{\text{пот упр}} = 0$ для нерастянутой пружины ($x = 0$).

Отсюда, в частности, следует, что работа, которую надо совершить для удлинения пружины на x , равна $kx^2/2$.

Преобразуем определение потенциальной энергии, $dA_{\text{конс}} = \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = -dE_{\text{пот}}$. С учетом $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ получим: $-dE_{\text{пот}} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$. Отсюда, при перемещении вдоль оси x , когда $dy = dz = 0$, находим

$$-dE_{\text{пот}} = F_x dx, \text{ т.е. } F_x = -\frac{dE_{\text{пот}}}{dx} \Big|_{y,z=\text{const}} \equiv -\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial x}.$$

Проекция консервативной силы на ось x равна **частной производной** от потенциальной энергии по x -координате (частная производная берется по одной переменной в предположении, что все остальные переменные не изменяются).

Аналогично $F_y = -\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial y}$ и $F_z = -\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial z}$.

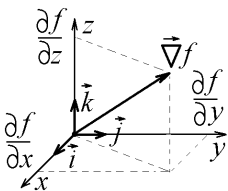
Таким образом, консервативная сила выражается через потенциальную энергию следующим образом:

$$\vec{F}_{\text{конс}} = -\vec{i} \frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial z}.$$

Чтобы упростить запись подобных выражений, вводят дифференциальный оператор “набла”:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Им можно подействовать на любую скалярную функцию $f(x, y, z)$.



В результате получается вектор с проекциями $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, который называется градиентом функции f :

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) \equiv \text{grad } f(x, y, z) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z).$$

Вектор $\vec{\nabla} f(x, y, z) \equiv \text{grad } f(x, y, z)$ направлен в сторону наискорейшего увеличения функции f .

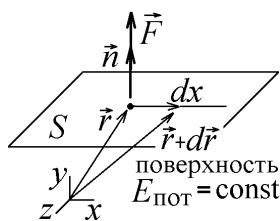
Итак, зная потенциальную энергию частицы, можно простым дифференцированием найти действующую на нее консервативную силу:

$$\vec{F}_{\text{конс}} = -\vec{\nabla} E_{\text{пот}} \equiv -\text{grad } E_{\text{пот}}.$$

Наоборот, по выражению для силы можно интегрированием найти изменение потенциальной энергии частицы

$$\Delta E_{\text{пот}} = E_{\text{пот}}(\vec{r}_2) - E_{\text{пот}}(\vec{r}_1) = -\int_1^2 \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r}.$$

Геометрическое место точек, в которых потенциальная энергия частицы (или потенциал) одинакова, называется эквипотенциальной поверхностью. Уравнение такой поверхности имеет вид: $E_{\text{пот}}|_S = \text{const}$.



При перемещении по этой поверхности $dE_{\text{пот}} = 0$, и из выражения $\vec{F} d\vec{r} = F_x dx = -dE_{\text{пот}} = 0$ следует, что проекция силы F_x на эквипотенциальную поверхность всегда равна нулю. Поэтому

вектор консервативной силы всегда перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

Если \vec{n} – единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности, то

$$F_n = -\frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial n}, \text{ и при } dE_{\text{пот}} > 0 \text{ проекция силы на нормальное направление } F_n < 0,$$

следовательно,

вектор консервативной силы направлен в сторону убывания (уменьшения) потенциальной энергии, и в этом же направлении под действием силы будут ускоряться все тела. Вектор $\text{grad } E_{\text{пот}}$ также направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности, но в сторону возрастания $E_{\text{пот}}$, т.е. **противоположно силе**.

3.8. Условия сохранения и изменения механической энергии движущейся частицы

Полной механической энергией E частицы называется сумма её кинетической и потенциальной энергии. Так как изменение кинетической энергии равно суммарной работе всех действующих на частицу консервативных и неконсервативных сил, то согласно работы консервативной силы,

$$dE_{\text{кин}} = dA_{\text{конс}} + dA_{\text{неконс}} = -dE_{\text{пот}} + dA_{\text{неконс}}.$$

Отсюда получаем закон изменения механической энергии частицы, складывающейся из её кинетической и потенциальной энергий:

$$dE = dE_{\text{кин}} + dE_{\text{пот}} = dA_{\text{неконс}}.$$

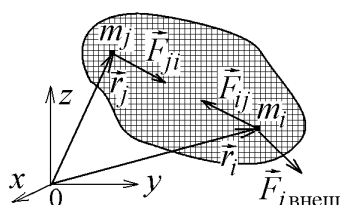
Изменение механической энергии частицы равно суммарной работе всех действующих на неё неконсервативных сил. Сохраняется механическая энергия при условии действия на частицу только консервативных сил, когда $dA_{\text{неконс}} = 0$.

3.9. Полный импульс системы материальных точек (физического тела).

Условия его сохранения и изменения

Система частиц может представлять собой любое агрегатное состояние вещества – газ, жидкость или твердое тело. Любой выделенный участок такой конденсированной среды называют физическим телом.

Систему (физическое тело) всегда можно разбить на столь малые участки (линейные, плоские или объемные) с массами m_i , что их размерами можно пренебречь и рассматривать эти участки как частицы (материальные точки).



Положение каждой из этих частиц задается радиус-вектором \vec{r}_i (см. рисунок).

Масса всей системы определяется как $m = \sum_i m_i$. Строго говоря, в этом выражении

должна стоять не сумма, а интеграл: если ρ – плотность системы (тела), а dV – объем маленького участка, то его масса $dm = \rho dV$, а масса всей системы $m = \int dm = \int_V \rho dV$,

где интеграл берется по всему объему системы.

На i -ю частицу системы действуют, вообще говоря, как внешние силы \vec{F}_i со стороны окружающих систему тел или полей, так и сумма внутренних сил $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$ со стороны всех остальных частиц системы. Поэтому закон движения

$$i\text{-й частицы запишется в виде } \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}.$$

Число таких уравнений равно числу частиц в системе. Просуммируем эти уравнения для **всех** частиц системы (т.е. попросту сложим векторно все левые и все правые части). Так как в силу третьего закона Ньютона $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, то сумма всех внутренних сил, действующих на все частицы системы, обращается в нуль: $\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = 0$. В результате получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \right) = \sum_i \vec{F}_i.$$

Векторная сумма импульсов всех частиц системы называется полным импульсом системы: $\sum_i \vec{p}_i \equiv \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}$.

Векторная сумма всех внешних сил является результирующей внешних сил: $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внеш}}$. Таким образом, закон движения системы частиц (физического тела) или закон изменения полного импульса системы читается так:

производная по времени полного импульса системы частиц (физического тела) равна результирующей всех внешних сил (включая силы инерции в неинерциальных системах отсчета):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}.$$

Это уравнение можно записать и прочесть по-иному, если ввести еще одно понятие – **импульс силы** за время dt :

это $\vec{F} dt$. Тогда, умножая на dt и интегрируя по времени от t_1 до t_2 , получаем:

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 \equiv \Delta \vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{внеш}} dt,$$

т.е. изменение полного импульса системы за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равно импульсу внешних сил за то же время.

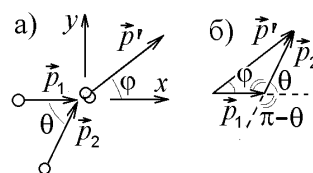
Если все внешние силы, действующие на систему, уравновешиваются, т.е. $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ то система называется **замкнутой**. Для нее $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ или $\vec{P} = \text{const}$ – **полный импульс замкнутой системы сохраняется**. Это – **закон сохранения импульса**.

Ошибочно говорить, что "импульс сохраняется, если на систему не действуют силы" – они действуют практически всегда, но **могут быть уравновешены**.

Часто $\vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$, но действие внешних сил длится столь малое время $\Delta t \rightarrow 0$, что импульс не успевает заметно измениться: $\Delta \vec{P} = \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t \rightarrow 0$. В этих случаях (быстрое столкновение, взрыв и т.п.) также можно применять закон сохранения импульса, записанный в векторной форме: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots = \text{const}$.

Пример – столкновение летевших с импульсами \vec{p}_1 и \vec{p}_2 и слипшихся пластилиновых шаров (рисунок а). Их суммарный импульс $\vec{p}' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ после столкновения определяется по правилу сложения векторов (правило параллелограмма, рисунок б).

Заметим, что возможны случаи, когда $\vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$, но $F_{\text{внеш}x} = 0$. Тогда сохраняется только проекция импульса на соответствующую ось: $P_x = \text{const}$, что также широко используется в приложениях.



3.10. Центр масс системы материальных точек (физического тела).

Уравнение движения центра масс

Центром масс системы называется точка с радиус-вектором $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$, где сумма берется по всем частицам системы.

Для непрерывного распределения массы с плотностью ρ эта формула принимает вид: $\vec{r}_C = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} dm = \frac{1}{m} \int_V \rho \vec{r} dV$.

Из записанной формулы следует, что декартовыми координатами центра масс будут

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}; \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}.$$

Взяв производную по времени от \vec{r}_C , получим: $\frac{d\vec{r}_C}{dt} \equiv \vec{v}_C = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{m} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m} \sum_i \vec{p}_i$

или

$$m \vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P},$$

т.е. **полный импульс системы равен произведению ее массы на скорость центра масс \vec{v}_C** .

Подставляя это выражение в закон изменения полного импульса, находим уравнение поступательного движения системы материальных точек или физического тела. Произведение массы системы на ускорение её центра масс равно векторной сумме всех действующих на систему внешних сил:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}_C) = m \vec{a}_C = \vec{F}_{\text{внеш}}.$$



Центр масс системы движется как частица, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена результирующая **внешних** сил.

Рассмотрим примеры систем, изображенных на следующих рисунках. После подрыва ракеты центр масс облака разлетающихся осколков продолжает лететь по прежней траектории, что позволяет поразить цель. Точно так же при прыжке с вышки в воду прыгун может совершать различные кульбиты, но его центр масс движется приблизительно по параболе.

Таким образом, используя внешнюю силу трения, можно заставить закрытый ящик ползти вверх по наклонной плоскости (попробуйте объяснить, как при этом движутся тела внутри этого ящика).



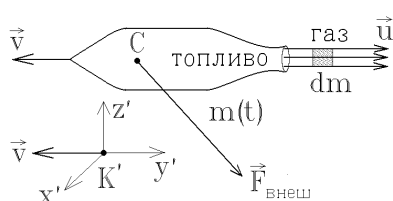
Наконец, заметим, что при **поступательном** движении все точки твердого тела движутся так же, как и центр масс (по таким же траекториям), поэтому для описания поступательного движения достаточно записать и решить уравнение движения центра масс.

Так как $\vec{P} = m \vec{V}_C$, то центр масс **замкнутой системы** должен сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, т.е. $\vec{V}_C = \text{const}$. Но при этом вся система может вращаться, разлетаться, взрываться и т.п. в результате действия **внутренних сил**.

3.11. Реактивное движение. Сила тяги и уравнение Мещерского

Реактивным называется движение тела, при котором его масса изменяется. Пусть в процессе движения за время dt тело массы m присоединяет (поглощает) или отбрасывает (испускает) массу dm со скоростью \vec{u} **относительно тела**; в первом случае $dm > 0$, во втором $dm < 0$.

Рассмотрим такое движение на примере ракеты, испускающей газообразные продукты горения топлива.



Перейдем в инерциальную систему отсчета K' , которая в данный момент времени t движется с той же скоростью \vec{V} , что и ракета – такая ИСО называется сопутствующей, и ракета в этой системе отсчета в данный момент t **покоится**.

Если сумма внешних сил, действующих на ракету, не равна нулю, то изменение полного импульса системы "ракета – газ" за время dt будет равно

$$d\vec{P} = \underbrace{m d\vec{V}}_{\text{изменение импульса ракеты}} - \underbrace{dm \cdot \vec{u}}_{\text{импульс газа}} = \vec{F}_{\text{внеш}} dt.$$

Разделив это выражение почленно на dt , получим уравнение движения ракеты в системе K' , но, так как все ИСО эквивалентны, то и в системе K уравнение будет иметь тот же самый вид:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

Это – уравнение Мещерского, описывающее движение **любого тела** с переменной массой в поле внешних сил с результирующей $\vec{F}_{\text{внеш}}$.

В уравнении Мещерского масса m – величина переменная, и ее нельзя внести под знак производной. Второе слагаемое в правой части уравнения называется реактивной силой:

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = \frac{dm}{dt} \vec{u}.$$

Для ракеты реактивная сила играет роль **силы тяги**, но в случае присоединения массы $dm/dt > 0$, и реактивная сила будет **силой торможения** (например, при движении в облаке космической пыли ракета замедляется).

3.12. Механическая энергия системы частиц

Для каждой i -й частицы (материальной точки) системы изменение кинетической энергии будет равно работе всех действующих на частицу сил:

$$dE_{\text{кин } i} = dA_i.$$

Суммируя эти равенства почленно, получаем закон изменения кинетической энергии всей системы: **приращение кинетической энергии системы равно работе всех сил, действующих на все частицы системы**, т.е.

$$dE_{\text{кин сист}} = dA_{\text{конс}} + dA_{\text{неконс}} = -dE_{\text{пот}} + dA_{\text{неконс}},$$

Откуда

$$dE_{\text{сист}} = dE_{\text{кин сист}} + dE_{\text{пот}} = dA_{\text{неконс}}$$

Это – **закон изменения полной механической энергии системы: изменение механической энергии системы равно суммарной работе всех неконсервативных сил.**

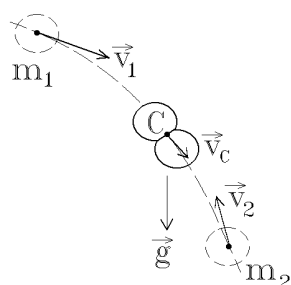
Консервативной называется система, полная механическая энергия которой сохраняется: $E_{\text{сист}} = \text{const}$. В такой системе отсутствуют любые неконсервативные силы (и внешние, и внутренние).

Заметим, что консервативность системы и закон сохранения механической энергии не связаны с замкнутостью системы.

Пример: лобовое столкновение двух летящих упругих резиновых мячей. Система не замкнута (центр масс падает с ускорением \vec{g}), но консервативна. Часть кинетической энергии мячей в момент удара переходит в собственную потенциальную энергию упругой деформации, но полная энергия не меняется:

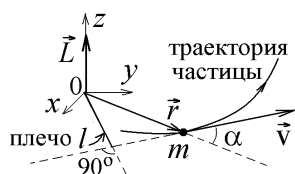
$$E = \frac{(m_1 + m_2) v_C^2}{2} + E_{\text{потсобст}} + (m_1 + m_2) g h_C = \text{const}$$

(в момент наибольшего сближения мячи движутся с одной и той же скоростью \vec{V}_C).



4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОКРУГ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСИ

4.1. Момент силы и момент импульса материальной точки



Пусть частица движется по некоторой траектории и в данный момент времени ее радиус-вектор равен \vec{r} , а импульс $\vec{p} = m\vec{v}$. Кроме импульса, существует еще одна векторная характеристика движения (динамическая переменная) – момент импульса.

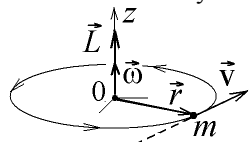
Моментом импульса частицы относительно точки (центра) О называется векторное произведение радиус-вектора на импульс частицы: $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$.

Согласно определению, $\vec{L} \perp \vec{r}$, и $\vec{L} \perp \vec{p}$, и направление вектора \vec{L} определяется по правилу правого винта. Векторное произведение любых двух векторов \vec{a} и \vec{b} вычисляется по правилу:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \text{ Поэтому } \vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix},$$

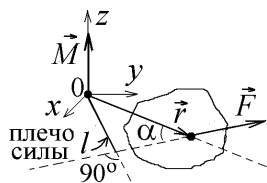
$$\text{или } \vec{L} = \vec{i}(\underbrace{yp_z - zp_y}_{=L_x}) + \vec{j}(\underbrace{zp_x - xp_z}_{=L_y}) + \vec{k}(\underbrace{xp_y - yp_x}_{=L_z}).$$

Момент импульса определен как для криволинейного, так и для прямолинейного движения: на рисунке слева пока-



зана частица, вращающаяся по окружности радиуса r . Для нее $L = pr \sin 90^\circ = mvr$. На рисунке сверху частица, движется по прямой. Для нее $L = mvr \sin \alpha = mvl$.

Заметим, что величина \vec{L} зависит от положения точки О, которую, вообще говоря, можно выбрать, где угодно. Поэтому вектор \vec{L} проводят из точки О. Если имеется ось вращения, точку О помещают на этой оси.



Вектор, равный векторному произведению радиус-вектора на силу, $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$, называется моментом силы. Вектор момента силы \vec{M} перпендикулярен к векторам \vec{r} и \vec{F} и вычисляется по правилу векторного произведения

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \text{ или } \vec{M} = \vec{i}(\underbrace{yF_z - zF_y}_{=M_x}) + \vec{j}(\underbrace{zF_x - xF_z}_{=M_y}) + \vec{k}(\underbrace{xF_y - yF_x}_{=M_z}).$$

Величина (модуль) момента силы, согласно определению, будет равен $|\vec{M}| = rF \sin \alpha$ или $|\vec{M}| = lF$.

Кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы $l = r \sin \alpha$ называется плечом силы. Отсюда следует, что точку приложения силы (если речь идет о твердом теле) можно сдвигать **вдоль линии действия силы** – при этом ни l , ни \vec{M} не изменятся. Но величина и направление \vec{M} зависят от выбора точки О.

4.2. Момент импульса системы материальных точек (физического тела)

Моментом импульса системы называется векторная величина, равная векторной сумме моментов импульса всех частиц системы:

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \sum_i \vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i].$$

В случае непрерывного распределения массы с плотностью ρ в этой формуле вместо суммы надо вычислять интеграл по объему системы V :

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \int_V [\vec{r}, \rho \vec{v}] dV.$$

4.3. Момент инерции материальной точки и физического тела.

Примеры вывода момента инерции симметричных тел. Теорема Штейнера

Рассмотрим вращение тела вокруг закрепленной, т.е. неподвижной в пространстве оси (вообще говоря, не проходящей через центр масс). Инерциальную систему отсчета всегда будем выбирать так, чтобы ее ось Oz совпадала с закрепленной осью вращения.



Если разбить систему на отдельные материальные точки с массами m , вращающиеся по окружностям радиуса R вокруг оси, то величина $I = mR^2$ называется моментом инерции материальной точки (частицы с массой m) относительно оси вращения. Рассматривая твердое тело, как систему частиц, определяем

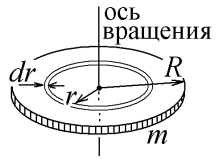
$$I = \sum_i m_i R_i^2 \text{ - это момент инерции тела физического}$$

тела относительно оси он равен сумме произведений масс его материальных точек на квадраты их расстояний R_i до оси вращения.

Но так как масса твердого тела распределена непрерывно, то сумму следует заменить на интеграл. Для вычисления момента инерции тело разбивают на бесконечно малые объемы dV с массой $dm = \rho dV$. Тогда

$$I = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV,$$

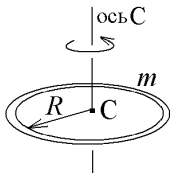
где R – расстояние элемента dV от оси вращения.



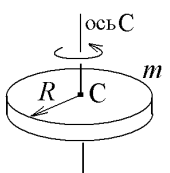
Понятно, что момент инерции тонкого обруча или кольца с радиусом R и с массой m , все точки которого находятся на одинаковом расстоянии R от оси симметрии, равен $I = mR^2$ относительно этой оси. Вычислим для примера момент инерции сплошного диска или цилиндра. Выделим на диске бесконечно узкое кольцо радиуса r ширины dr и массы $dm = \rho 2\pi r dr$, где $\rho = m/(\pi R^2)$ – масса единицы площади поверхности. Моментом инерции этого кольца будет $dI = r^2 dm = 2mr^3 dr / R^2$.

Суммируя (интегрируя) по всему диску, находим выражение для момента инерции сплошного диска относительно оси симметрии, перпендикулярной плоскости диска: $I_{\text{диска}} = \int dI = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}$. Такое же выражение будет иметь

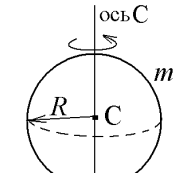
цилиндр той же массы и радиуса.



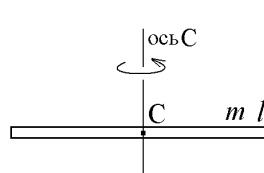
тонкий обруч
массы m
с радиусом R
 $I_{\text{обруча}} = mR^2$



диск (цилиндр)
массы m
с радиусом R
 $I_{\text{диска}} = \frac{1}{2} mR^2$



шар
массы m
с радиусом R
 $I_{\text{шара}} = \frac{2}{5} mR^2$



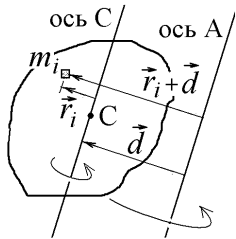
тонкий стержень
массы m длины l
 $I_{\text{стержня}} = \frac{1}{12} ml^2$

Момент инерции шара с радиусом R и массой m относительно оси симметрии

равен $I_{\text{шара}} = \frac{2}{5} mR^2$, а момент инерции

тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину

$$I_{\text{стержня}} = \frac{1}{12} ml^2.$$



Если известен момент инерции I_C относительно оси, проходящей через центр масс тела, то можно легко вычислить момент инерции относительно любой параллельной оси O , проходящей на расстоянии d от центра масс. Как видно из приведенного слева рисунка, расстояния произвольной частицы твердого тела m_i от обеих осей равны соответственно r_i и $r_i + d$. Поэтому

$$I_0 = \sum_i m_i (r_i + d)^2 = \sum_i m_i r_i^2 + 2 \sum_i m_i r_i d + \sum_i m_i d^2.$$

Второе слагаемое в полученном выражении обращается в нуль в силу того, что $d = \text{const}$ и $2 \sum_i m_i r_i d = 2d \sum_i m_i r_i = 2mr_c = 0$

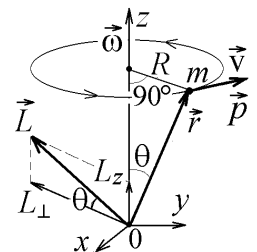
(r_c – расстояние от оси C до центра масс).

Полученное соотношение или $I_0 = I_C + md^2$ называется теоремой Штейнера:

момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной ей и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

4.4. Тензор момента инерции и главные оси инерции

Пусть закрепленная ось вращения совпадает с осью z декартовой системы координат. Из рисунка видно, что при вращении материальной точки m по кругу радиуса R вектор её момента импульса \vec{L} , определенного относительно начала координат O , и перпендикулярный к векторам \vec{r} и $\vec{p} = m\vec{v}$, не направлен вдоль оси вращения z . Так как вектор $\vec{r} \perp \vec{p}$, то проекция вектора \vec{L} на ось вращения, как видно из рисунка, равна $L_z = L \sin \theta = mv \cdot r \sin \theta = mvr$. Но скорость вращения точки по окружности связана с угловой скоростью вращения: $v = R\omega$. Поэтому $L_z = mR^2\omega = I\omega$, где $I = mR^2$ – момент инерции материальной точки относительно оси z .



Рассмотрим теперь общий случай: вращение твердого тела вокруг незакрепленной оси. Вычислим полный момент импульса тела. Подставляя связь линейной и угловой скорости $\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$, каждой материальной точки, получаем

$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]].$$

Раскроем двойное векторное произведение по правилу $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$. Полагая $\vec{a} = \vec{r}_i$, $\vec{b} = \vec{\omega}$ и

$\vec{c} = \vec{r}_i$, получим:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{\omega} (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \sum_i m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i).$$

Первое слагаемое в этой формуле параллельно вектору угловой скорости $\vec{\omega}$, который по определению направлен вдоль оси вращения, тогда как второе – вообще говоря, направлено под некоторым углом к $\vec{\omega}$.

Поэтому **при вращении тела вокруг произвольной оси вектор момента импульса, вообще говоря, не параллелен вектору угловой скорости.**

Запишем найденную формулу в проекциях на координатные оси: $L_x = \omega_x I_{xx} + \omega_y I_{xy} + \omega_z I_{xz}$,

где $I_{xx} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2)$, $I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$, $I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i$.

Аналогично запишутся и две другие проекции: $L_y = \omega_x I_{yx} + \omega_y I_{yy} + \omega_z I_{yz}$, $L_z = \omega_x I_{zx} + \omega_y I_{zy} + \omega_z I_{zz}$.

Таким образом, коэффициенты I_{mn} (индексы m и n принимают значения x, y, z) образуют квадратную матрицу:

$$I_{mn} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

которая называется тензором момента инерции или просто тензором инерции. Сами же коэффициенты I_{mn} являются компонентами тензора: I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} – диагональными, остальные – недиагональными.

Как следует из их определения, если $I_{mn} = I_{nm}$ (т.е. $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{zy} = I_{yz}$) – недиагональные коэффициенты симметричны. Такой тензор называется симметричным.

В тензорных обозначениях данные формулы запишутся очень компактно:

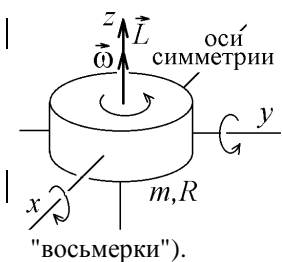
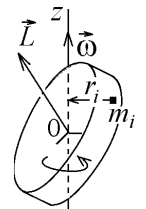
$$L_m = \sum_n I_{mn} \omega_n, \quad \text{где } m, n = x, y, z.$$

Любой симметричный тензор или матрицу можно диагонализировать, т.е. для любого тела можно выбрать три такие

взаимно перпендикулярные оси x, y, z , для которых тензор инерции имеет вид: $I_{mn} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$, а все не-

диагональные компоненты исчезают.

Такие оси называются главными осями инерции тела, а сохранившиеся диагональные компоненты тензора инерции называются главными моментами инерции. Проекции момента импульса на главные оси инерции имеют вид: $L_x = I_{xx} \omega_x$, $L_y = I_{yy} \omega_y$, $L_z = I_{zz} \omega_z$. Как следует из этих формул, даже в этом случае векторы \vec{L} и $\vec{\omega}$ вообще говоря не параллельны. Их проекции связаны матричным уравнением $L_m = \sum_n I_{mn} \omega_n$, где $m, n = x, y, z$



Но если тело симметрично относительно поворота, то одна из главных осей инерции обязательно совпадает с осью симметрии (пусть это будет ось z , тогда две другие главные оси, перпендикулярны к оси z).

Если тело вращается вокруг главной оси z (оси симметрии), то $L_x = L_y = 0$, $L_z = I_{zz} \omega$.

Только в этом случае векторы \vec{L} и $\vec{\omega}$ будут параллельными, т.е. можно записать $\vec{L} = I \vec{\omega}$ и считать I скаляром. Следует заметить, что при работе приборов и механизмов такая ситуация вполне обычна (если не рассматривать колесо на разболтанной оси, описывающее при вращении "восьмерки").

4.5. Основное уравнение динамики вращательного движения вокруг закрепленной оси

Найдем закон изменения момента импульса, для чего продифференцируем по времени выражение для \vec{L} :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{v}, \vec{p}] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right].$$

Так как векторы \vec{v} и $\vec{p} = m\vec{v}$ параллельны, то первое слагаемое в уравнении обращается в нуль, а $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ в

силу второго закона Ньютона. Поэтому $\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$, где $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ – момент силы.

Скорость изменения момента импульса частицы относительно некоторой точки равна моменту силы относительно

но той же точки.

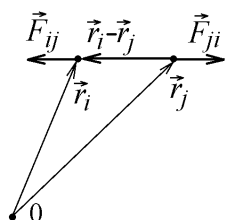
В случае системы материальных точек (физического тела) закон изменения момента импульса можно записать для каждой частицы системы:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i + \sum_{j \neq i} \vec{M}_{ij}.$$

Здесь первое слагаемое в правой части – это момент внешних сил, действующих на i -ю частицу, а второе слагаемое – сумма моментов внутренних сил.

Суммируя эти уравнения по всем частицам, получим закон изменения полного момента импульса системы:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{M}_{ij}.$$



Двойная сумма в правой части уравнения обращается в нуль, так как содержит парные слагаемые вида $[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}] = [\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{F}_{ij}]$ (если учесть, что по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$). Но векторы $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ и \vec{F}_{ij} параллельны, как видно на рисунке, поэтому двойная сумма обращается в нуль. Внутренние силы не могут изменить полного момента импульса системы.

Окончательно имеем:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}.$$

Это уравнение называется основным уравнением динамики вращательного движения: **производная по времени полного момента импульса системы равна результирующему моменту внешних сил.**

Проекция на ось вращения z дает:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(I\omega) = \sum M_z.$$

Так как для абсолютно твердого тела $I = \text{const}$, то это уравнение еще более упрощается и принимает вид:

$$I \frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon = \sum M_z$$

произведение момента инерции на угловое ускорение равно проекции результирующего момента внешних сил на закрепленную ось вращения z .

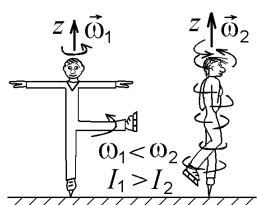
Такое уравнение называется основным уравнением вращательного движения твердого тела относительно закрепленной оси.

Полученное уравнение аналогично уравнению, описывающему поступательное движение тела $m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$, поэтому момент инерции играет роль меры инертности при вращательном движении тела (как масса – при поступательном движении). При сложном движении, когда система совершает и поступательное, и вращательное движения, уравнения динамики вращательного и поступательного движения надо использовать совместно.

4.6. Закон сохранения и изменения момента импульса физической системы

Как следует из уравнения динамики вращательного движения $\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{внеш}}$,

полный момент импульса системы сохраняется, если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю. В частности при вращении вокруг закрепленной оси $L_z = I\omega = \text{const}$. Это частный случай закона сохранения момента импульса.



Примером такого закона будет вращение фигуриста (так называемый "волчок"). Действующие на фигуриста сила тяжести и сила нормальной реакции направлены вдоль вертикальной оси вращения, и проекции моментов этих сил на вертикальную ось равны нулю. Вращение начинается при вытянутых в стороны руках, после чего фигурист прижимает руки к туловищу. В результате его момент инерции уменьшается, а угловая скорость увеличивается.

Замкнутой называется система, в которой уравновешены не только внешние силы, но и моменты внешних сил. В замкнутой системе сохраняется импульс и момент импульса.

При малом времени воздействия внешних моментов сил уравнение динамики вращательного движения можно переписать в следующем виде:

$$\Delta \vec{L}_{\text{сист}} \approx \vec{M}_{\text{внеш}} \cdot \Delta t.$$

Отсюда следует, что закон сохранения момента импульса системы можно применять и в том случае, когда суммарный результирующий момент внешних сил не равен нулю, но его воздействие кратковременно

($\vec{L}_{\text{сист}} \approx \text{const}$ при $\Delta t \rightarrow 0$) (происходит столкновение, взрыв).

4.7. Кинетическая энергия вращательного движения вокруг закрепленной оси

При вращательном движении системы вокруг закрепленной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$ перемещение каждой её точки, в соответствии с формулами кинематики, имеет вид $d\vec{r}_i = [d\vec{\phi}, \vec{r}_i]$ (см. §2.7), где $d\vec{\phi} = \vec{\omega} dt$ – бесконечно малый угол поворота. Суммарная работа сил при таких перемещениях

$$dA = \sum_i \vec{F}_i d\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot [d\vec{\phi}, \vec{r}_i] = \sum_i d\vec{\phi} \cdot [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \sum_i \vec{M}_i d\vec{\phi} = \vec{M}_{\text{рез}} d\vec{\phi}.$$

Это – выражение для работы результирующего момента сил при повороте системы (физического тела) вокруг закрепленной оси. При повороте системы на конечный угол эта работа равна $A = \int \vec{M} d\vec{\phi}$.

Если R_i – расстояние от i -й материальной точки до оси вращения, то кинетическая энергия вращающегося

вокруг закрепленной оси твердого тела

$$E_{\text{кин вращ}} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (R_i \omega)^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Дифференцируя это выражение по времени и используя уравнение динамики вращательного движения, получим закон изменения кинетической энергии вращающегося вокруг закрепленной оси z твердого тела:

$$\frac{dE_{\text{кин вращ}}}{dt} = I \omega \frac{d\omega}{dt} = I \omega \varepsilon = M_z \omega -$$

скорость изменения кинетической энергии вращательного движения равна мощности результирующего момента сил относительно оси вращения. Отсюда $dE_{\text{кин вращ}} = M_z \omega dt = M_z d\phi$. **Изменение кинетической энергии вращательного**

движения равно работе момента сил $\Delta E_{\text{кин вращ}} = E_{\text{кин вращ } 2} - E_{\text{кин вращ } 1} = \int_1^2 M_z d\phi$.

4.8. Полная механическая энергия системы и условия её сохранения и изменения

Полной механической энергией произвольной системы материальных точек (физического тела) называется сумма кинетической энергии её поступательного и кинетической энергии вращательного движения, а также суммарной потенциальной энергии (как потенциальной энергии взаимодействия частиц внутри системы, так и потенциальной энергии в поле внешних сил): $E_{\text{мех}} = E_{\text{кин пост}} + E_{\text{кин вращ}} + E_{\text{пот}}$.

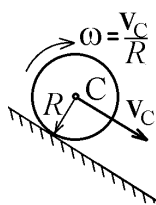
Так как изменение кинетической энергии равно работе всех внешних сил и всех моментов внешних сил,

$dE_{\text{кин пост}} + dE_{\text{кин вращ}} = dA_{\text{конс}} + dA_{\text{неконс}} + \sum \vec{M} d\vec{\phi}$, а $dA_{\text{конс}} = -dE_{\text{пот}}$, то изменение полной механической энергии равно суммарной работе всех действующих на систему неконсервативных сил (например – сил трения), а также работе внешних моментов сил, которые раскручивают систему, изменяя угловую скорость её вращения и кинетическую энергию вращательного движения:

$$dE_{\text{мех}} = dA_{\text{неконс}} + \sum \vec{M} d\vec{\phi}.$$

Полная механическая энергия любой системы сохраняется, если все действующие на неё силы консервативны, а сумма моментов этих сил равна нулю.

4.9. Плоское движение и законы сохранения



Движение твердого тела, при котором центр масс перемещается в одной плоскости, а ось вращения тела, проходящая через его центр масс, остается перпендикулярной к этой плоскости, называется плоским движением. Типичный пример – качение симметричного тела – цилиндра или шара с радиусом R . Это движение можно свести к совокупности поступательного движения со скоростью v_C его центра масс и вращения с угловой скоростью $\omega = v_C / R$ вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс C , которая не меняет своей ориентации в пространстве. Поэтому плоское движение описывается упрощенной системой двух уравнений движения:

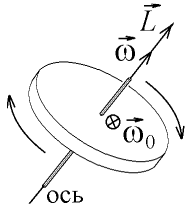
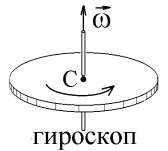
$$\begin{cases} m \vec{a}_C = \vec{F}_{\text{внеш}}, \\ I \varepsilon = M_z. \end{cases}$$

Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение, запишется в виде суммы кинетических энергий по-

ступательного и вращательного движения: $E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$.

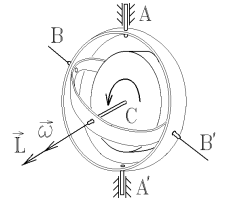
4.10. Гироскопы и гироскопический эффект. Прецессия оси гироскопа

Симметричное вращающееся тело, у которого два главных момента инерции (например – моменты инерции относительно осей Ox и Oy) совпадают, называется симметричным волчком. Если это тело **массивно** и вращается с **очень большой угловой скоростью** $\vec{\omega}$ вокруг третьей перпендикулярной оси Oz , то оно называется гироскопом. Ось вращения – это ось симметрии. Если она закреплена, то направления



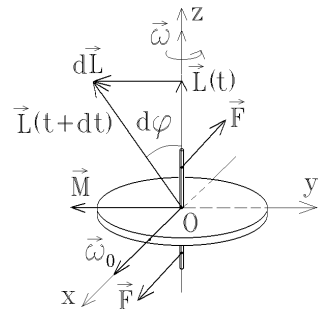
вектора момента импульса гироскопа \vec{L} совпадает с направлением $\vec{\omega}$. Но даже если ось гироскопа поворачивать в пространстве с угловой скоростью ω_0 , то из-за огромной скорости вращения вокруг оси симметрии $\omega \gg \omega_0$, и можно считать, что **момент импульса гироскопа направлен по оси вращения (оси симметрии) $\vec{\omega}$** : $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Рассмотрим сначала свободный гироскоп - волчок в карданном подвесе. В таком подвесе кольца могут свободно поворачиваться вокруг осей AA' и BB' , и ось гироскопа может принять любое направление, проходящее через его центр масс C .

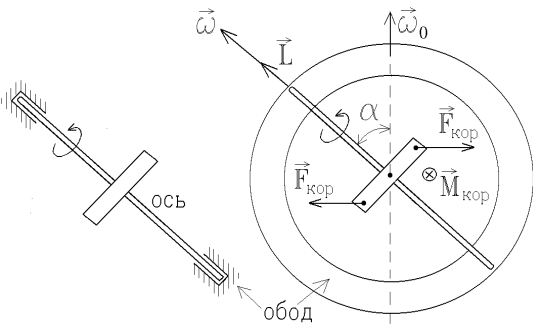


Приложим к оси Oz гироскопа пару сил \vec{F} , направленных вдоль оси Ox . Эти силы стараются повернуть гироскоп вокруг оси Oy , но поворачиваться гироскоп начнет вокруг оси Ox . Это – гироскопический эффект.

Действительно, так как момент пары сил \vec{M} направлен по оси Oy , то из уравнения динамики вращательного движения $d\vec{L} = \vec{M}dt$ следует, что приращение вектора момента импульса $d\vec{L}$ тоже направлено по оси Oy . За время dt вектор \vec{L} , а вместе с ним и ось гироскопа, повернутся вокруг оси Ox на угол $d\phi$, причем $|d\vec{L}| = Ld\phi$. Подставляя $d\vec{L} = \vec{M}dt$, находим: $d\phi = \frac{Mdt}{L}$ или $M = L \frac{d\phi}{dt} = L\omega_0$ (где $d\phi/dt = \omega_0$ – угловая скорость вращения оси гироскопа). С учетом направлений векторов \vec{M} , \vec{L} и $\vec{\omega}_0$ полученная формула может быть записана в векторном виде: $\vec{M} = [\vec{\omega}_0, \vec{L}]$.



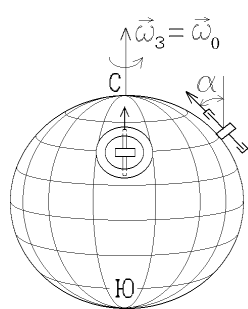
Если ось быстро вращающегося свободного гироскопа с моментом импульса \vec{L} стараться повернуть моментом сил \vec{M} , то она начнет вращаться с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ в таком направлении, чтобы векторы $\vec{\omega}_0$, \vec{L} и \vec{M} составляли правую тройку векторов.



Гироскопический эффект используется для создания гироскопического компаса, простейшая модель которого показана на рисунке слева.

Ось гироскопа может свободно скользить внутри кольцообразного обода. Если вращать сам обод со скоростью $\vec{\omega}_0$, то в неинерциальной системе, связанной с ободом, на гироскоп будет действовать момент кориолисовых сил инерции $\vec{M}_{кор}$. Как видно из рисунка, этот момент начнет поворачивать ось гироскопа до тех пор, пока она не станет параллельна $\vec{\omega}_0$ (при $\vec{L} \parallel \vec{\omega}_0$ момент кориолисовых сил обращается в нуль).

Ось гироскопического компаса всегда старается установиться так, чтобы угол α между векторами \vec{L} и $\vec{\omega}_0$ стал наименьшим.

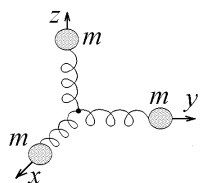


Гирокомпас, находящийся на Земле, вращается вместе с Землей $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_3$. В результате его ось будет разворачиваться в строго меридиональном направлении с юга на север, чтобы угол α между вектором \vec{L} и вектором угловой скорости вращения Земли $\vec{\omega}_3$ принял минимальное возможное значение. Гирокомпасы широко используют в навигации, так как в отличие от магнитных компасов они указывают направление точно, не реагируя на магнитные аномалии.

Отметим еще одно свойство гироскопа. Если свободный волчок не вращается ($\vec{L} = 0$), то его ось легко повернуть в любом направлении. Но быстро вращающийся гироскоп обладает очень большим моментом импульса \vec{L} , и за непродолжительное время действия момента внешних сил его ось может повернуться только на ничтожно малый угол $\phi_0 = \int \omega_0 dt \ll 1$ рад.

ось свободного гироскопа обладает способностью сохранять свою ориентацию в пространстве. Эту способность используют для создания гироскопических систем ориентации.

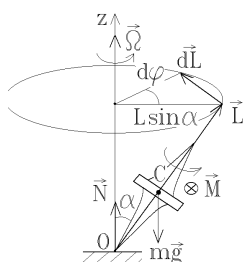
Пример: в американских крылатых ракетах свободным гироскопом служит заряженный бериллиевый шарик диаметром 1 см, висающий в электростатическом поле (для исключения трения) и раскрученный до $\omega = 10^5 - 10^6 \text{ с}^{-1}$. Когда ракета меняет направление полета (а она летит по извилистому маршруту заданной формы, облетая препятствия), то сохраняющееся направление оси гироскопа позволяет точно определить направление осей x , y и z (меридиональной, широтной и высотной).



Акселерометры, установленные на ракете, непрерывно измеряют ее ускорение. Простейшим акселерометром будут, например, три взаимно перпендикулярные пружинки с закрепленными на их концах грузиками массы m . При движении они растягиваются силами инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a} = -\vec{F}_{\text{упр}}$, и по их растяжениям в любой момент времени можно измерить величины проекций ускорения ракеты a_x , a_y и a_z . В бортовой ЭВМ эти величины интегрируются, т.е. непрерывно определяются проекции истинной скорости $v_x = \int a_x dt$ и координаты ракеты: $x = \int v_x dt$, которые сравниваются с

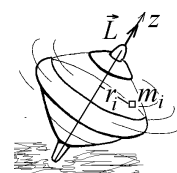
заданными координатами маршрута.

В случае отклонения от маршрута включаются двигатели, и ракета исправляет траекторию. Таким образом обеспечивается большая точность попадания ракеты в цель.



Если на свободный гироскоп постоянно действует момент некоторой внешней силы, то ось гироскопа начинает вращаться вокруг направления этой силы; такое вращение называется прецессией.

Проследим, например, за поведением вращающейся "юлы" (гироскопа, имеющего одну точку опоры), ось которой составляет угол α с вертикалью. На нее действует момент пары сил тяжести и нормальной реакции опоры $\vec{M} = [\vec{l}, m\vec{g}]$, равный по модулю $M = mgl \sin \alpha$, где $l = OC$. Так как, согласно уравнению моментов, $d\vec{L} = \vec{M} dt$, и в данном случае $\vec{M} \perp \vec{L}$ и $d\vec{L} \perp \vec{L}$, то



этот момент сил стремится не изменить, а повернуть вектор \vec{L} (вместе с осью гироскопа) вокруг вертикальной оси Oz .

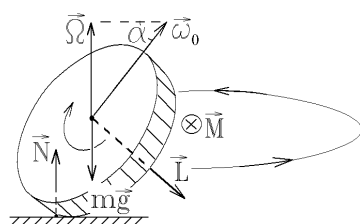
За время dt ось повернется на угол $d\phi = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{M dt}{L \sin \alpha}$. В результате конец вектора \vec{L} будет вращаться вокруг оси

Oz по окружности радиуса $L \sin \alpha$ с угловой скоростью $\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{M}{L \sin \alpha} = \frac{mgl \sin \alpha}{L \sin \alpha}$ или

$$\Omega = \frac{mgl}{L} = \frac{mgl}{I\omega}$$

Это и есть угловая скорость прецессии оси гироскопа в поле сил тяжести. Заметим, что она не зависит от угла α .

Если трения в точке опоры нет, то гироскоп, стоящий на абсолютно гладкой поверхности, будет прецессировать так, что центр масс его останется неподвижным.



В качестве еще одного примера прецессии рассмотрим качение наклонного массивного диска, на который действует опрокидывающий момент \vec{M} сил реакции и тяжести. Легкий диск с малым моментом импульса \vec{L} упадет очень быстро. Тяжелый диск будет катиться по кругу со скоростью прецессии $\Omega = \omega_0 \sin \alpha = m \sin \alpha / L$. Вспомним, что в гонках по льду мотоциклист не поворачивает руль, а наклоняет мотоцикл: быстро вращающиеся массивные колеса начнут описывать по льду такой же круг, как и диск на рисунке слева.

Попытка наклонить легкий велосипед приведет к падению. Из этих примеров видно, что прецессия обеспечивает устойчивость движения. Так, быстро вращающиеся вокруг своей оси пули (снаряды), выпущенные из нарезного оружия, имеют более устойчивые траектории, чем не вращающиеся вокруг своей оси пули, вылетевшие из гладкоствольного оружия.

5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

5.1. Кинематические характеристики колебательного процесса (амплитуда, фаза, частота). Условия возникновения гармонических колебаний

Колебаниями называются движения, повторяющиеся во времени. Если эти повторения следуют через равные промежутки времени, т.е. $x(t+T) = x(t)$, то колебания называются периодическими, а интервал времени T — периодом колебаний. Например, периодически повторяющиеся восходы Луны или Солнца над горизонтом, вызванные ими приливы и отливы и т.п.

Система, совершающая колебания, называется осциллятором (от латинского "oscillare" — колебаться). Колебания, которые совершает система, предоставленная самой себе, называются собственными, а частота колебаний $\nu = \frac{1}{T}$ в этом

случае – собственной частотой. В случае механических колебаний изменяются координаты $x(t)$ или размеры колеблющейся системы.

Гармоническими колебаниями называются колебания, происходящие по синусоидальному или косинусоидальному закону. Например,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $x(t)$ – смещение колеблющейся частицы от положения равновесия, A – максимальное смещение, или амплитуда, $\omega t + \varphi_0$ – фаза колебаний, φ_0 – начальная фаза (при $t = 0$), $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ – циклическая частота колебаний.

Система, совершающая гармонические колебания, называется гармоническим осциллятором. Амплитуда A и частота ω гармонических колебаний постоянны. В механике гармонические колебания возникают при выполнении следующего условия:

на колеблющуюся систему (осциллятор) должна действовать сила (или момент сил), пропорциональные смещению системы из положения равновесия и стремящиеся вернуть ее в положение равновесия. Такая сила (или момент сил) называется квазиупругой.

Часто, для удобства вычислений, уравнение гармонических колебаний записывают в комплексной форме. Напомним, что комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Число, отличающееся знаком перед мнимой частью, т.е. $z^* = x - iy$ называется комплексно-сопряженным числом z .

Любое комплексное число можно записать в следующем виде:

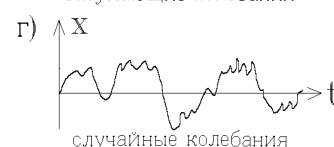
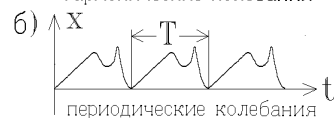
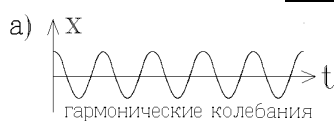
$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}, \quad z^* = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi},$$

где модуль комплексного числа $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а угол $\varphi = \arctg(y/x)$. Эти формулы называются формулами Муавра. Из них следует, что

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Тогда $\cos \varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi}$ (действительная часть комплексного числа $e^{i\varphi}$), а уравнение гармонических колебаний

можно записать в виде $x(t) = \operatorname{Re} A e^{i(\omega t + \varphi_0)}$.



Большинство периодических процессов в реальных системах гармоническими не являются. Так, из-за наличия диссипативных сил трения амплитуда смещения колеблющейся частицы должна уменьшаться со временем:

$$x(t) = \underbrace{A e^{-\beta t}}_{\text{амплитуда}} \underbrace{\cos(\omega t + \varphi_0)}_{\text{фаза}}, \quad \text{где } \beta = \text{const}.$$

Эти колебания не только не гармонические, но и не периодические, так как $x(t+T) \neq x(t)$. И все же повторяемость движений очевидна (рисунок в), и подобные колебания, называемые затухающими, по-прежнему характеризуют периодом $T = 2\pi/\omega$. Рассматривают даже движения, не повторяющиеся регулярно, т.е. не имеющие постоянного периода T (рисунок г). Их называют случайными колебаниями.

Как было показано в §3.7, квазиупругой консервативной силе с проекцией

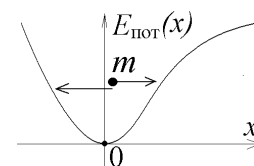
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \quad \text{на направление колебаний соответствует потенциальной энергии}$$

$$E_{\text{пот}}(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad \text{т.е. гармонические колебания может совершать, например, только частица, находящаяся в потенциальной яме параболической формы.}$$

Если зависимость $E_{\text{пот}}(x)$ другая, то колебания осциллятора не могут быть гармоническими. Однако к потенциальной энергии $E_{\text{пот}}(x)$ всегда можно добавить постоянную величину, а начало координат сместить так, чтобы минимум потенциальной кривой приходился на значение $E_{\text{пот}}(0) = 0$ (см. рисунок).

Разложим функцию $E_{\text{пот}}(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x = 0$ и ограничимся первым ненулевым членом ряда:

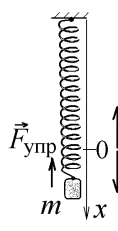
$$E_{\text{пот}}(x) = \underbrace{E_{\text{пот}}(0)}_{=0} + \underbrace{\frac{dE_{\text{пот}}}{dx}}_{=0 \text{ в точке минимума}} \Big|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_{\text{пот}}}{dx^2} \Big|_{x=0} \cdot x^2 + 0(x^3) \approx \frac{kx^2}{2}.$$



Видно, что в случае любой зависимости $E_{\text{пот}}(x)$, т.е. в поле любой консервативной силы, **малые** собственные колебания частицы вблизи положения равновесия, соответствующему минимуму потенциальной энергии, будут гармо-

ническими. При этом коэффициент квазижесткости осциллятора будет равен $k = \left. \frac{d^2 E_{\text{пот}}}{dx^2} \right|_{x=0}$.

5.2. Одномерный гармонический осциллятор (пружинный маятник). Связь характеристик колебания с начальными условиями



В частности, квазиупругой является упругая сила, приводящая в колебания пружинный маятник, колеблющийся вдоль оси x . Уравнение движения такого маятника имеет вид:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kx \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}, \quad \text{где введено обозначение} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что решением данного уравнения является функция $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

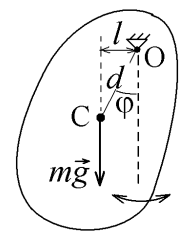
где A и φ_0 – **постоянные величины**, для определения которых следует задать два начальных условия для положения $x(0) = x_0$ частицы и ее скорости $v_x(0) = v_0$ в начальный (нулевой) момент времени, откуда

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi_0, \\ v_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -A \omega_0 \sin \varphi_0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right)^2}, \\ \varphi_0 = -\arctg \left(\frac{v_0}{x_0 \omega_0} \right). \end{cases}$$

Записанное выше дифференциальное уравнение представляет собой динамическое уравнение гармонических колебаний с собственной частотой ω_0 . Для груза на пружинке (пружинного маятника) периодом колебаний будет

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}.$$

5.3. Физический и математический маятник



Физический маятник – это любое физическое тело, совершающее колебания в поле сил тяжести вокруг оси подвеса, не проходящей через центр масс.

Пусть горизонтальная ось вращения проходит через точку подвеса O , находящуюся на расстоянии d от центра масс C . Уравнение динамики вращательного движения маятника в проекции на ось вращения z (направленную перпендикулярно к рисунку) имеет вид: $I_0 \frac{d\omega}{dt} = M_z$ или, так как

$$M_z = -mg \underbrace{d \sin \varphi}_{\text{плечо силы}}, \quad \text{то} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad \text{Здесь } \omega_0^2 = \frac{mgd}{I_0}, \quad \text{где } I_0 \text{ – момент инерции тела относи-}$$

тельно оси подвеса, d – расстояние от оси подвеса до центра масс тела.

Отсюда следует, что колебания физического маятника будут гармоническими только, если $\sin \varphi \approx \varphi$, т.е. при малых углах отклонения или для **малых** амплитуд, когда уравнение колебаний физического маятника принимает вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

Его решением является функция $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$, а период колебаний физического маятника определяется

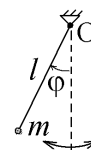
формулой

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgd}}}.$$

Заметим, что квазиупругим здесь является момент силы тяжести $M_z \approx -mgd \cdot \varphi$, пропорциональный угловому отклонению φ .

Частным случаем физического маятника является математический маятник – грузик пренебрежимо малого размера, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длины l . Как видно из рисунка, в этом случае $I_0 = ml^2$, $d = l$, поэтому период **малых** колебаний математического маятника

$$\boxed{T_{\text{мат. м.}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}.$$



5.4. Связь энергии гармонического осциллятора и амплитуды его колебаний

Полная механическая энергия осциллятора складывается из потенциальной энергии, обусловленной наличием консервативной квазиупругой силы $F_x = -kx$ и равной $E_{\text{пот}}(x) = \frac{kx^2}{2}$ и кинетической энергии $E_{\text{кин}} = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$. При вращательном движении осциллятора последняя заменяется на $E_{\text{кин}} = \frac{I}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$.

Для незатухающих колебаний гармонического осциллятора $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Полная механическая энергия $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{m}{2} (-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0))^2 + \frac{k}{2} (A \cos(\omega_0 t + \varphi_0))^2 = \frac{kA^2}{2} = \text{const}$, т.е.

полная механическая энергия гармонического осциллятора всегда пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний.

5.5. Свободные затухающие колебания. Зависимость амплитуды и периода затухающих колебаний от коэффициента затухания. Критическое затухание. Логарифмический декремент

В реальной ситуации на осциллятор со стороны окружающей среды всегда действуют диссипативные силы (вязкого трения, сопротивления среды) $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\eta \vec{v}$, которые замедляют движение. Уравнение движения принимает вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{упр } x} + F_{\text{сопр } x} = -kx - \eta \frac{dx}{dt}.$$

Обозначая $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\frac{\eta}{2m} = \beta$, получаем динамическое уравнение собственных затухающих колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это – общая форма записи уравнения таких колебаний.

Решение этого уравнения ищем в виде $x = Ae^{\lambda t}$, где A и λ – неизвестные константы. Подставляя это выражение и сокращая экспоненту, получаем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$, откуда находим

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Сначала рассмотрим случай $\beta < \omega_0$.

Обозначив $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2 > 0$, находим $\lambda = -\beta \pm \sqrt{-\omega^2} = -\beta \pm i\omega$; поэтому общее решение уравнения имеет вид:

$$x = A_1 e^{-\beta t + i\omega t} + A_2 e^{-\beta t - i\omega t}.$$

Но смещение x должно быть не комплексным, а действительным числом. Поэтому необходимо, чтобы само число равнялось его комплексно-сопряженному, т.е. $x = x^* = A_1^* e^{-\beta t - i\omega t} + A_2^* e^{-\beta t + i\omega t}$, откуда немедленно следует: $A_1 = A_2^*$

и $A_2 = A_1^*$. А так как любое комплексное число можно представить в виде $A_1 = \frac{A_0}{2} e^{i\alpha}$, где A_0 и α – постоянные

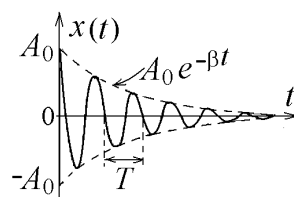
действительные числа, то

$$x(t) = \frac{A_0}{2} e^{-\beta t} \left(e^{i(\omega t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega t + \varphi_0)} \right).$$

Используя формулы Муавра, получаем, что при не слишком большом сопротивлении среды ($\beta < \omega_0$) колебания осциллятора совершаются по закону: $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$.

График функции $x(t)$ при $\varphi_0 = 0$ изображен на следующем рисунке.

Функция $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ представляет собою убывающую по экспоненте амплитуду колебаний. Это уменьшение амплитуды называют релаксацией (ослаблением) колебаний, а коэффициент β – коэффициентом затухания колебаний. Время τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в $e = 2,718$ раз, называется временем релаксации.



Из закона изменения амплитуды со временем следует: $\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e$,

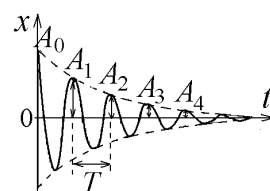
откуда время релаксации $\tau = \frac{1}{\beta}$.

Кроме коэффициента затухания, вводится еще одна характеристика, называемая логарифмическим декрементом затухания – это натуральный логарифм отношения амплитуд (или смещений) через период:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\omega}.$$

Логарифмический декремент можно представить другим способом: $\theta = \frac{1}{N} \ln \left(\frac{A_0}{A_N} \right)$,

где величины амплитуд A_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ показаны на рисунке.

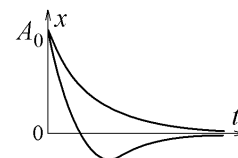


Частота собственных затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ зависит не только от величины квазиупругой силы и массы тела, но и от сопротивления среды.

Поэтому период затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ всегда больше периода незатухающих гармонических колебаний $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

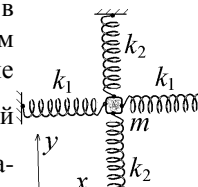
В случае большого сопротивления среды, когда $\beta \geq \omega_0$, несмотря на присутствие квазиупругой силы колебания не возникают. В этом случае общее решение уравнения колебаний представляет собою сумму двух убывающих экспонент (поскольку $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ действительные числа): $x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$.

Если в очень вязкой среде сместить пружинный маятник из положения равновесия на расстояние $x(t=0) = A_0$, то графики его возможного движения к положению равновесия показаны на рисунке. Это движение называют апериодическим.



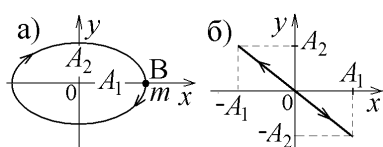
5.6. Сложение взаимно-перпендикулярных и однонаправленных колебаний. Метод векторной диаграммы

Примером сложения взаимно перпендикулярных колебаний могут служить колебания атомов в узлах кубической кристаллической решетки или эквивалентная модель грузика m , прикрепленного к двум взаимно-перпендикулярным парам пружинок. В этом случае вдоль осей x и y действуют по две упругие силы, вызывающие колебания с частотами $\omega_1 = \sqrt{2k_1/m}$ и $\omega_2 = \sqrt{2k_2/m}$. Смещения грузика вдоль осей описываются уравнениями $x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, $y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. Чтобы получить уравнение траектории грузика на плоскости xu , надо исключить из этих уравнений время t .



Проще всего это сделать в случае **кратных частот**: $\omega_1/\omega_2 = n_1/n_2$, где n_1 и n_2 – целые числа. В этом случае траекторией осциллятора должна быть некоторая **замкнутая** кривая, называемая **фигурой Лиссажу**.

Например, пусть частоты колебаний вдоль осей x и y одинаковы ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$), а разность фаз колебаний $\varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi/2$ (для удобства положим $\varphi_1 = 0$). Тогда $x = A_1 \cos(\omega t)$, $y = A_2 \cos(\omega_2 t + 3\pi/2) = -A_2 \sin(\omega t)$. Отсюда находим: $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ – фигурой Лиссажу будет эллипс с полуосями A_1 и A_2 . При $t=0$ грузик

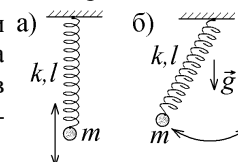


находится в точке В, а затем обе координаты будут уменьшаться, т.е. движение происходит по часовой стрелке.

Докажите, что в случае $\varphi_2 = \pi/2$; $\varphi_1 = 0$ фигура Лиссажу не изменится (рисунок а), но осциллятор будет двигаться по эллипсу в обратном направлении, а в случае $\varphi_2 = \pi$ он будет колебаться вдоль прямой линии $y = -B x/A$ (рисунок б).

При сложении гармонических колебаний траектория осциллятора зависит не только от частот складываемых колебаний, но и от начальных фаз и амплитуд, т.е. от скорости и положения осциллятора в начальный момент времени.

К сожалению, в **реальных** механических системах при сложении колебаний с кратными частотами устойчивой траектории осциллятора в виде фигуры Лиссажу не наблюдается. Для примера рассмотрим висающий пружинный маятник, у которого длина l практически невесомой пружины в положении равновесия такова, что частота малых вертикальных колебаний совпадает с частотой малых горизонтальных колебаний математического маятника: $\omega_2 = \sqrt{k/m} = \omega_1 = \sqrt{g/l}$.



Если заставить маятник колебаться строго вертикально (рисунок а), то это движение не будет сохраняться – амплитуда вертикальных колебаний постепенно уменьшается, но возникают горизонтальные колебания. Со временем маятник начнет колебаться горизонтально, как математический (рисунок б). Затем горизонтальные колебания снова перейдут в вертикальные, и т.д.

Такое движение является примером связанных колебаний, которые возникают при наличии у осциллятора нескольких степеней свободы. Между различными колебаниями существует связь, через которую энергия одного колебания передается другому. В рассмотренной системе такой связью будет пружина – при сжатии она слегка изгибается и заставляет грузик m колебаться горизонтально.

Учет связей очень важен во всех устройствах, где возникают механические колебания. Например, крыло самолета может совершать крутильные и вертикальные (изгибные) колебания. Передача энергии от одного типа колебаний к другому может вызвать разрушение крыла (флаттер).



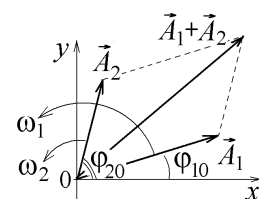
Теперь рассмотрим сложение однонаправленных колебаний, примером которого могут быть колебания мембраны микрофона, на которую одновременно попадают несколько звуковых волн, или грузика на двух соединенных пружинках.

Сложим два гармонических колебания, происходящих вдоль оси x :

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{10}) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{20}).$$

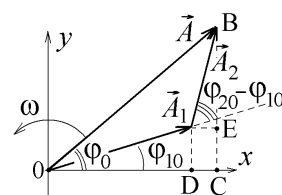
Такую сумму удобнее найти, используя геометрический метод векторной диаграммы. Для этого изобразим на плоскости xy первое слагаемое вектором \vec{A}_1 , направленным под углом φ_{10} к оси x , а второе – вектором \vec{A}_2 под углом φ_{20} , как показано на рисунке справа.

Эти векторы должны вращаться с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 вокруг оси O . Тогда углы их наклона к оси x совпадают с фазами складываемых колебаний $\omega_i t + \varphi_{i0}$, а сумма проекций векторов $\vec{A}_1 + \vec{A}_2$ на ось x равна искомой сумме $x = x_1 + x_2$.



Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то угол между векторами \vec{A}_1 и \vec{A}_2 все время меняется и, следовательно, изменяется длина вектора \vec{A} . В этом случае результирующее движение **не будет гармоническим колебанием**.

Поэтому метод векторной диаграммы применяют при сложении однонаправленных колебаний с одной циклической частотой $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. В этом случае угол между векторами \vec{A}_1 и \vec{A}_2 остается все время постоянным и равным разности фаз колебаний: $\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} = \text{const}$. Так как векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью ω , то длина вектора \vec{A} остается неизменной. Результирующее колебание будет гармоническим:



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Его амплитуду и начальную фазу можно вычислить, складывая векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 в начальный момент времени $t = 0$. Из рисунка видно, что согласно теореме косинусов $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \Delta\varphi)$,

т.е. амплитуда результирующего колебания равна $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$,

а начальная фаза определяется из треугольника OBC : $\tan \varphi_0 = \frac{BC}{OC} = \frac{BE+EC}{OD+DC}$, откуда $\tan \varphi_0 = \frac{A_2 \sin \varphi_{20} + A_1 \sin \varphi_{10}}{A_2 \cos \varphi_{20} + A_1 \cos \varphi_{10}}$.

С помощью векторной диаграммы последовательно можно сложить сколько угодно колебаний одинакового направления.

5.7. Вынужденные колебания. Зависимость амплитуды и начальной фазы вынужденных колебаний от частоты

Вынужденные колебания возникают при действии на осциллятор внешней периодической силы, изменяющейся, например, по гармоническому закону с амплитудой F_0 и частотой $\omega_{\text{вн}}$: $F_{\text{вн}} = F_0 \cos \omega_{\text{вн}} t$.

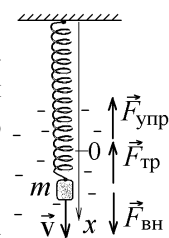
Пусть эта сила действует на пружинный маятник массы m , подвешенный на пружинке с жесткостью k и движущийся в вязкой среде с коэффициентом вязкости η . К силам упругости и вязкого трения добавляется внешняя вынуждающая сила, и уравнение движения маятника в проекции на вертикальную

ось x имеет вид $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \eta \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega_{\text{вн}} t$.

Такое уравнение можно записать в общем виде, который называют динамическим уравнением

вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_{\text{вн}} t.$$



Собственные колебания маятника в вязкой среде быстро затухают со временем, и устанавливаются вынужденные колебания с частотой внешней силы $\omega_{\text{вн}}$ и с постоянной амплитудой A , величина которой должна быть пропорциональной амплитуде внешней силы:

$$x(t) = A \cos(\omega_{\text{вн}} t - \varphi).$$

Чтобы найти неизвестные A и φ (отставание смещения по фазе от вынуждающей силы), подставим это решение в динамическое уравнение вынужденных колебаний,

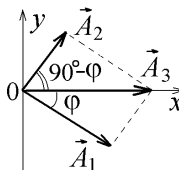
$$-A\omega_{\text{вн}}^2 \cos(\omega_{\text{вн}} t - \varphi) - 2\beta A\omega_{\text{вн}} \sin(\omega_{\text{вн}} t - \varphi) + A\omega_0^2 \cos(\omega_{\text{вн}} t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega_{\text{вн}} t,$$

и сделаем в нем преобразование $-\sin(\varphi(t) + \pi/2) = \cos(\varphi(t) + \pi/2)$:

$$A(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2) \cos(\omega_{\text{вн}} t - \varphi) + 2\beta A\omega_{\text{вн}} \cos(\omega_{\text{вн}} t - \varphi + \pi/2) = \frac{F_0}{m} \cos \omega_{\text{вн}} t.$$

В левой части этого равенства складываются два однонаправленных колебания с одинаковой частотой $\omega_{\text{вн}}$ и с амплитудами $A_1 = A(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)$ и $A_2 = 2\beta A\omega_{\text{вн}}$.

Сложим их методом векторной диаграммы. Сумма двух векторов $\vec{A}_1 + \vec{A}_2$ на этой диаграмме, показанной на рисунке, должна быть равна вектору \vec{A}_3 , соответствующему слагаемому с амплитудой $A_3 = F_0/m$ в правой части.



Из прямоугольных треугольников на этом рисунке видно, что

$$A_3^2 = A_1^2 + A_2^2 \text{ или } A^2(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)^2 + (2\beta A\omega_{\text{вн}})^2 = (F_0/m)^2, \text{ откуда находим амплитуду установившихся вынужденных}$$

колебаний:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{\text{вн}}^2}}.$$

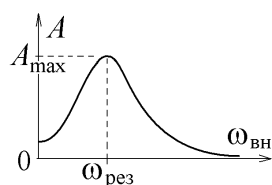
Из этого же рисунка следует, что $\tan \varphi = A_2/A_1$, т.е. установившиеся вынужденные колебания отстают по фазе

от колебаний внешней вынуждающей силы на $\varphi = \arctg \frac{2\beta \omega_{\text{вн}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2}$. Заметим, что при $\omega_{\text{вн}} > \omega_0$ получаем $\varphi < 0$, т.е. вы-

нужденные колебания будут опережать по фазе колебания внешней силы.

Установившиеся вынужденные колебания происходят с постоянной, не зависящей от времени амплитудой, т.е. не затухают, несмотря на сопротивление среды. Это объясняется тем, что работа внешней силы $\int F_0 \cos \omega_{\text{вн}} t \cdot dx$ идет на увеличение механической энергии осциллятора и полностью компенсирует убывание его механической энергии, происходящее из-за действия диссипативной силы вязкого трения.

5.8. Резонанс и резонансные частоты



Как видно из полученной формулы, амплитуда вынужденных колебаний A зависит от частоты внешней вынуждающей силы $\omega_{\text{вн}}$. График этой зависимости называется резонансной кривой или амплитудно-частотной характеристикой осциллятора.

То значение частоты внешней силы, при котором амплитуда колебаний становится максимальной, называется резонансной частотой $\omega_{\text{рез}}$, а резкое возрастание амплитуды при

$\omega_{\text{вн}} = \omega_{\text{рез}}$ – резонансом колебаний.

Условием резонанса будет условие экстремума функции $A(\omega_{\text{вн}})$: $\frac{dA}{d\omega_{\text{вн}}} = \frac{d}{d\omega_{\text{вн}}} \left(\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{\text{вн}}^2}} \right) = 0$.

Амплитуда будет максимальной при минимальной величине знаменателя в этой формуле, то есть при выполнении

условия минимума $\frac{d((\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{\text{вн}}^2)}{d\omega_{\text{вн}}} = 0$, откуда $2(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2) \cdot (-2\omega_{\text{вн}}) + 4\beta^2 \cdot 2\omega_{\text{вн}} = 0$ или $\omega_{\text{вн}}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$.

Поэтому резонансная частота для амплитуды смещения осциллятора имеет величину

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

При таком значении циклической частоты вынуждающей силы смещение осциллятора имеет максимальную резонансную амплитуду

$$A_{\text{max}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Заметим, что в реальных механических системах обязательно присутствует вязкое трение или сопротивление среды. Иначе, при $\beta \rightarrow 0$, получим бесконечное резонансное значение амплитуды смещения $A_{\text{max}} \rightarrow \infty$. При малом сопро-

тивлении среды $\beta \ll \omega_0$ резонансная амплитуда вынужденных колебаний может намного (на несколько порядков!) превосходить смещение осциллятора под действием постоянной силы \vec{F}_0 .

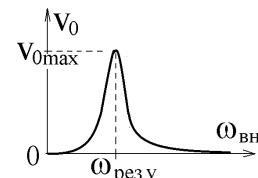
Резонанс существует не только для амплитуды смещения, но и для амплитуд скорости и ускорения. Колебания скорости вынужденных колебаний, $v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_{\text{вн}} \sin(\omega_{\text{вн}}t - \varphi) = v_0 \cos\left(\omega_{\text{вн}}t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, опережают колебания смещения по фазе на $\pi/2$, а амплитуда скорости

$$v_0 = \frac{\omega_{\text{вн}} F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{\text{вн}}^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2/\omega_{\text{вн}} - \omega_{\text{вн}})^2 + 4\beta^2}}$$

всегда имеет

резонанс $v_{0 \text{ max}} = F_0/(2m\beta)$ при выполнении условия $\omega_0^2/\omega_{\text{вн}} - \omega_{\text{вн}} = 0$, т.е. резонансная частота для амплитуды скорости $\omega_{\text{рез } v} = \omega_0$ не совпадает с резонансной частотой для смещения.

Амплитудно-частотная характеристика для скорости осциллятора показана на рисунке справа.



На практике явление резонанса используют для выделения и усиления гармонического колебания с определенной частотой $\omega = \omega_{\text{рез}}$. Такие системы с малым коэффициентом затухания β называют резонаторами. Их амплитудно-частотная характеристика имеет вид очень узкого пика, позволяющего усилить, например, звуковые колебания только с одной или с несколькими кратными частотами.

Подобной системой будет пустой или заполненный **однородной** жидкостью хрустальный бокал. При ударе о стенки бокала возникает долгий мелодичный звук, соответствующий аккорду из усиленных звуковых волн кратных частот. Если заполнить бокал газированной водой, то содержащийся в ней углекислый газ при колебаниях выделяется в виде крошечных пузырьков, на что тратится значительная часть энергии колебаний. Кроме того, среда становится неоднородной, и резонанс сильно ослабевает – при ударе такой бокал издает глухой звук.

Для сравнения: мембраны барабана колеблются независимо друг от друга, и резонанс не возникает (колебания будут связанными – энергия передается через воздух в полости барабана, и поочередно усиливаются колебания то одной, то другой мембраны).

5.9. Характеристики волнового процесса. Длина волны, волновой вектор и фазовая скорость волны. Плоские и сферические волны

Соседние частицы среды взаимодействуют друг с другом, и если одна частица начнет колебаться, то эти колебания передаются остальным частицам с некоторой скоростью v . Процесс распространения таких колебаний в пространстве называется волной.

Волны бывают продольные и поперечные. В продольных волнах частицы колеблются (смещаются) вдоль направления распространения волны, т.е. вдоль вектора скорости \vec{v} волны. Примером будут звуковые волны (колебания плотности среды).

В поперечных волнах смещение \vec{u} частиц среды происходит перпендикулярно к направлению распространения или скорости \vec{v} волны.

Геометрическое место точек, до которых в данный момент времени дошли колебания (волна), называется волновым фронтом (это поверхность, по одну сторону которой частицы среды колеблются, а по другую – еще нет).

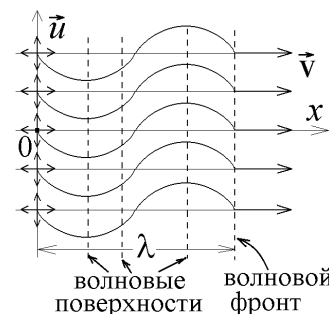
Волновой поверхностью называется геометрическое место точек, в которых частицы среды колеблются в одинаковой фазе или испытывают одинаковые смещения. Волновой фронт и волновые поверхности всегда перпендикулярны к направлению распространения волны \vec{v} .

Если волновой фронт и волновые поверхности являются плоскостями, то волна называется плоской, если сферами, то волна – сферическая.

Пусть колебания распространяются вдоль оси x (плоская волна). Если частицы среды в плоскости $x = 0$ начали колебаться по гармоническому закону $\vec{u}(0, t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t + \varphi)$, то эти колебания, распространяясь со скоростью \vec{v} , достигнут произвольной плоскости $x = \text{const}$ только через время $\tau = x/v$. Следовательно, **колебания частиц в плоскости $x \neq 0$ будут запаздывать на время τ** :

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}_0 \cos\left[\omega(t - \tau) + \varphi\right] = \vec{u}_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi\right)$$

Длина волны λ – это расстояние между двумя соседними точками, колеблющимися в одинаковой фазе (испытывающими одинаковое смещение).



Период колебаний T – это время, за которое волна со скоростью v проходит путь λ : $T = \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{v}$, а величина

$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$ называется волновым числом.

Учитывая это, получаем выражение для волновой функции $\vec{u}(x, t)$ плоской волны, распространяющейся вдоль оси x :

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где $(\omega t - kx + \varphi)$ – фаза волны, зависящая и от времени, и от координаты. В точке с координатой x начальной фазой будет величина $(-kx + \varphi)$.

Волновая функция $\vec{u}(x, t)$ описывает колебания всех частиц среды в произвольный момент времени. Как и в случае смещения осциллятора ее можно записать в комплексном виде: $\vec{u}(x, t) = \vec{u}_0 \exp[i(\omega t - kx + \varphi)]$ (чтобы перейти от комплексной записи волновой функции к действительному значению, достаточно взять действительную часть комплексного выражения).

Для плоской волны, распространяющейся против оси x , имеем: $\vec{u}(x, t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$.

Если плоская волна движется в произвольном направлении, то вводят волновой вектор $\vec{k} = k \frac{\vec{v}}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\vec{v}}{v}$, направленный вдоль скорости \vec{v} волны. Волновая функция такой плоской волны имеет вид $\vec{u}_{\text{плоск}}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$, где \vec{r} – радиус-вектор.

Сферическую продольную волну легко создать точечным источником (возбудителем) колебаний в однородной среде. Волновая функция сферической волны имеет вид $\vec{u}_{\text{сфер}}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0 \cos(\omega t - kr + \varphi)$. Действительно, ее волновая поверхность с одинаковой фазой колебаний $\omega t - kr + \varphi = \text{const}$ в любой фиксированный момент времени образует сферу с радиусом $r = (\omega t + \varphi - \text{const})/k$. Примером сферической волны будет звуковая волна от небольшого динамика, распространяющаяся во все стороны с одинаковой скоростью. Обратите внимание на различие в выражениях для волновых функций плоской $\vec{u}_{\text{плоск}}(\vec{r}, t)$ и сферической $\vec{u}_{\text{сфер}}(\vec{r}, t)$ волн.

Волны с одной фиксированной частотой ω и постоянной амплитудой \vec{u}_0 называют монохроматическими. Для монохроматической волны волновая функция является бесконечной косинусоидой (или синусоидой), распространяющейся в пространстве со скоростью \vec{v} . Такие волны называют бегущими.

5.10. Волновое уравнение. Упругие волны в сплошных средах

Любой процесс распространения волны в среде описывается одним и тем же дифференциальным уравнением, кото-

рое называется волновым уравнением:
$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.$$

Решением волнового уравнения всегда будет волновая функция $\vec{u}(\vec{r}, t)$. Нетрудно подстановкой проверить, что волновая функция распространяющейся вдоль оси x или против оси x плоской волны $\vec{u} = \vec{u}_0 \cos(\omega t \mp kx + \varphi)$ будет реше-

нием одномерного волнового уравнения
$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.$$

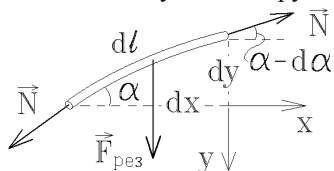
Гармоническая монохроматическая волна – это только простейшее решение волнового уравнения. Его решением будет любая функция, зависящая от переменной $t \pm x/v$: $\vec{u}(t - x/v)$ – это волна, распространяющаяся вдоль оси x ; $\vec{u}(t + x/v)$ – это волна, рас-

пространяющаяся против оси x . Проверить это можно прямой подстановкой:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial (t - x/v)^2} \left(\frac{\partial (t - x/v)}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(-\frac{1}{v} \right)^2.$$

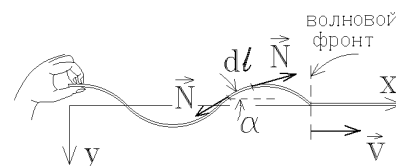
Все результаты, полученные для монохроматической гармонической волны, будут справедливыми и для волн произвольной формы (сумма решений уравнения также является его решением). Поэтому далее можно исследовать только монохроматические гармонические волны.

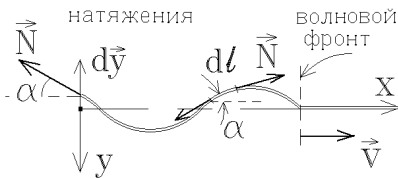
Коэффициент, который стоит при производной $\partial^2 \vec{u} / \partial t^2$ в волновом уравнении, обязательно будет обратным квадратом скорости v волны. Это скорость перемещения волнового фронта и волновых поверхностей, т.е. точек, имеющих одинаковую фазу колебаний. Поэтому скорость v называют фазовой скоростью волны.

Волны упругих колебаний в сплошной среде поперечны. Хорошей иллюстрацией будет появление упругих волн в натянутой струне. Чтобы показать, как они возникают, выделим участок струны длины dl , совершающий поперечные колебания.



Силы натяжения \vec{N} , действующие на оба конца участка dl , практически равны по величине, но направлены по касательной к струне, т.е. под разными углами α . Они создают результирующую силу $F_{\text{рез}} = N \sin \alpha - N \sin(\alpha - d\alpha)$ в поперечном направлении, стремящуюся вернуть участок dl в положение равновесия.





Так как поперечные смещения колеблющейся струны при достаточно большом натяжении N очень малы, то $\alpha \approx \sin \alpha \ll 1$, и уравнение движения (второй закон Ньютона) для участка dl с массой $dm = \frac{m}{l} dl$ (m – масса, l – длина всей струны) запишется в виде $F_{\text{рез}} \approx Nd\alpha = dm \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{m}{l} \frac{d^2 y}{dt^2} dl$, где

$dl \approx \frac{dx}{\cos \alpha} \approx dx$, $\alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{dy}{dx}$. Подставляя эти выражения в уравнения движения, получим $\frac{d\alpha}{dl} \approx \frac{d\alpha}{dx} \approx \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{m}{Nl} \frac{d^2 y}{dt^2}$

или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m}{Nl} \frac{d^2 y}{dt^2}$. Это – волновое уравнение.

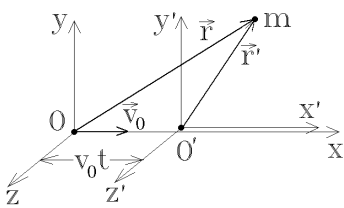
Следовательно, при достаточно большом натяжении струны (при малых смещениях от положения равновесия) в ней возникает поперечная волна смещений $y = y_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$, движущаяся вдоль струны со скоростью, определяемой выражением $\frac{1}{v^2} = \frac{m}{Nl}$, т.е. $v = \sqrt{\frac{l}{m}} N$. Чем больше натяжение струны, тем больше скорость волны в ней.

Аналогично возникновению волны в натянутой струне, упругие волны продольных колебаний будут возникать в любой сплошной среде. Такой волновой процесс, воздействуя на окружающие тела, способен вызвать резонанс, приводящий к сильному усилению амплитуды колебаний. В технике такое явление называется технической реверберацией.

6. ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

6.1. Преобразования Галилея и принцип относительности Галилея.

Экспериментальные факты, противоречащие классической механике



Рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему K и систему K' , движущуюся относительно системы K с постоянной скоростью \vec{v}_0 . Будем считать, что в начальный момент отсчета времени $t=0$ начало координат O' системы K' находилось на удалении \vec{r}_0 от начала координат O системы K . Тогда радиус-векторы любой частицы m в моменты времени t и t' в системах K и K' связаны простыми соотношениями:

$$\vec{r}(t') = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t, \quad t' = t, \quad \text{которые называются преобразованиями координат Галилея.}$$

Обратим внимание на последнее преобразование, которое ниоткуда не следует, а вводится как **постулат классической механики**, утверждающий, что **время абсолютно**, т.е. не зависит от состояния движения и течет одинаково во всех системах отсчета. Пространство в классической (ньютоновской) механике тоже абсолютно, так как расстояние между двумя точками $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |\vec{r}_2' - \vec{r}_1'|$, как следует из преобразований Галилея, одинаково во всех системах отсчета.

Заметим, что оси координат Ox и $O'x'$ систем координат K и K' всегда можно выбрать направленными вдоль скорости \vec{v}_0 , а начала координат O и O' выбрать так, чтобы они совпадали в момент времени $t=0$ (см. рисунок). Тогда преобразования Галилея примут вид:

$$x' = x - v_0 t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Дифференцируя эти соотношения по времени, что легко сделать, так как $t' = t$, получаем **классическую теорему сложения скоростей**: $\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_0$.

В классической механике скорости складываются векторно.

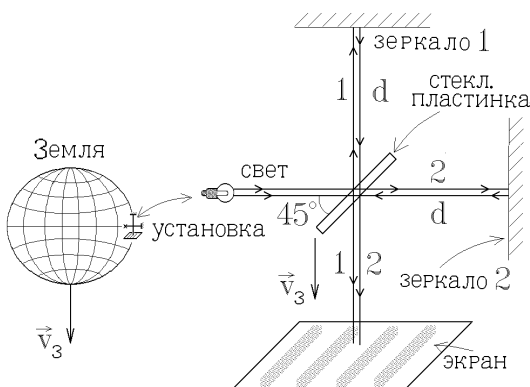
Повторное дифференцирование приводит к очень важному соотношению: $\boxed{\vec{a}' = \vec{a}}$.

Его смысл очевиден: если частица в ИСО (системе K) движется неускоренно ($\vec{a} = 0$), то и система K' , движущаяся относительно системы K с постоянной скоростью, по определению тоже будет инерциальной.

Все инерциальные системы отсчета движутся друг относительно друга с постоянными скоростями.

В течение 19 века свет или электромагнитные волны считались колебаниями особой **неподвижной** среды – эфира, заполняющего всё космическое пространство. Скорость распространения световых волн относительно неподвижного эфира должна была совпадать со скоростью света c в вакууме и быть одинаковой во всех направлениях.

Майкельсон и Морли пытались измерить скорость движения Земли v_3 относительно эфира. Схема их опыта показана на рисунке. Прибор, изображенный на этом рисунке, называется интерферометром Майкель-

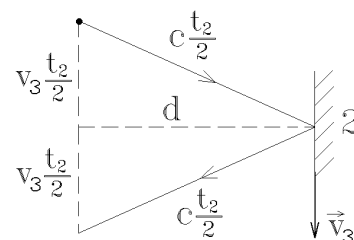


сона. Лучи света от источника частично отражаются от верхней плоскости тонкой стеклянной пластинки, ванной под углом 45° (луч 1), а частично проходят сквозь неё (луч 2). Затем, отразившись от плоских зеркал, луч 1 проходит сквозь пластинку, а луч 2 отражается от её нижней плоскости и вместе с лучом 1 попадает на экран. По смещению интерференционных полос на экране можно очень точно определить разность хода лучей 1 и 2, т.е. измерить разность времени движения $t_1 - t_2$ этих лучей. Такой прибор служит своеобразными часами.

Пусть расстояния от пластинки до плоских зеркал одинаковы и равны d . Так как установка движется вместе с Землёй со скоростью v_3 , то согласно классической теореме сложения скоростей луч 1 приближается к движущемуся со скоростью v_3 зеркалу 1 со скоростью $c + v_3$, а удаляется от него со скоростью $c - v_3$. В результате луч 1 должен пройти расстояние d до зеркала 1 и обратно за время $t_1 = \frac{d}{c + v_3} + \frac{d}{c - v_3} = \frac{2cd}{c^2 - v_3^2}$.

Луч 2 должен двигаться в перпендикулярном направлении со скоростью c , но за время его движения зеркало 2 успевает сместиться на очень малое расстояние $v_3 t_2$, по-

этому $\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{v_3 t_2}{2}\right)^2$, откуда $t_2 = 2d / \sqrt{c^2 - v_3^2}$. Очевидно, что $t_1 \neq t_2$.



Но во всех проведенных опытах измерения показывали $t_1 = t_2$!

Следовательно, для световых лучей классическая теорема сложения скоростей, а вместе с ней и преобразования Галилея приводят к неверным результатам, т.е. классическая механика оказывается не применимой.

6.2. Принцип относительности Эйнштейна. Постулаты Эйнштейна

Объяснить без видимых противоречий результаты опытов Майкельсона-Морли первым смог в 1905 г. Альберт Эйнштейн. Он сформулировал два постулата (принципа), которые и лежат в основе специальной теории относительности (СТО).

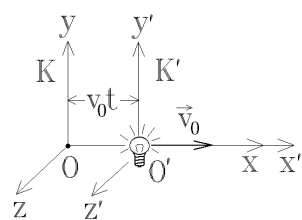
1) Принцип относительности Эйнштейна: все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета (т.е. инвариантны при переходе от одной ИСО к другой). Иначе говоря, **никакими** опытами нельзя установить покоится ли ИСО или движется неускоренно.

2) Принцип постоянства скорости света: скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости и направления движения источника света.

Из этих постулатов следует, что скорость света в вакууме является предельной скоростью, и ни одно тело, ни одно взаимодействие не может иметь скорость большую, чем $c = 2,9997 \cdot 10^8$ м/с.

В отличие от этого утверждения классическая механика Ньютона предполагает дальнодействие, т.е. мгновенную передачу взаимодействия (с бесконечной скоростью).

6.3. Преобразования Лоренца и их следствия



Следствием постулатов Эйнштейна будет следующий вывод. Пусть система K' движется вдоль оси Ox относительно неподвижной системы K со скоростью v_0 . Пусть в начале координат O' движущейся системы находится лампочка, вспыхивающая в тот момент, когда она пролетает мимо начала координат O неподвижной системы. Выберем начало отсчёта времени в каждой системе так, что это событие происходит в момент $t = t' = 0$.

В системе K' свет от вспышки распространяется во все стороны со скоростью света c , и волновой фронт расходящейся световой волны образует сферу

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

Но, согласно постулату Эйнштейна, скорость света в другой инерциальной системе K такая же, и в этой системе волновой фронт также должен иметь вид сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Легко проверить, что два этих уравнения невозможно связать подстановкой преобразований Галилея (в нашем случае они запишутся как $x = x' + v_0 t'$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$). Поэтому преобразования Галилея надо заменить более об-

щими **линейными** преобразованиями:
$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta t', \\ t = \gamma x' + \epsilon t', \\ y = y', \quad z = z'. \end{cases}$$
 (поперечные размеры в СТО не меняются).

Подставляя данные связи в уравнение сферического волнового фронта, получаем:

$$(\alpha^2 - c^2 \gamma^2) x'^2 + y'^2 + z'^2 = (c^2 \epsilon^2 - \beta^2) t'^2 + 2(\gamma \epsilon c^2 - \alpha \beta) x' t'.$$

Это уравнение приводится к сферической поверхности в системе отсчета K' , если

$$\alpha^2 - c^2 \gamma^2 = 1; \quad c^2 \epsilon^2 - \beta^2 = c^2 \quad \text{и} \quad \gamma \epsilon c^2 - \alpha \beta = 0.$$

Кроме того, учтем, что лампочка, покоящаяся в системе K' ($x' = 0$), в системе K движется по закону $x = v_0 t$, откуда, с учетом записанных выше преобразований,

$$x - v_0 t = (\alpha - \gamma v_0) \underbrace{x'}_{=0} + (\beta - v_0 \epsilon) \underbrace{t'}_{=0} = 0 \quad \text{и} \quad \beta = v_0 \epsilon.$$

Решая совместно данные уравнения, находим преобразования Лоренца, связывающие координаты и моменты времени одного и того же события в разных инерциальных системах отсчета (они аналогичны преобразованиям Галилея в классической теории). Запишем их в окончательном виде.

Прямые преобразования Лоренца:	Обратные преобразования Лоренца:
$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$	$x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$
$y = y', \quad z = z',$	$y' = y, \quad z' = z,$
$t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$	$t' = \frac{t - \frac{v_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$

Обратим внимание на некоторые особенности полученных выражений:

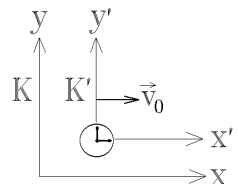
1) Если считать K' – систему покоящейся, то K – система будет двигаться со скоростью $-\vec{v}_0$. Поэтому обратные преобразования Лоренца получаются простой заменой v_0 на $-v_0$.

2) При $c \rightarrow \infty$ эти преобразования переходят в преобразования Галилея: $x = x' + v_0 t$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$. Иначе говоря, классическая механика является предельным случаем релятивистской (как того и требует принцип соответствия), если предположить возможность мгновенной передачи взаимодействий на любые расстояния, т.е. с бесконечной скоростью $c \rightarrow \infty$.

3) Координаты и моменты времени в физических системах должны быть вещественными величинами. Поэтому **скорости физических объектов не могут превышать скорость света в вакууме: $v_0 \leq c$.**

6.4. Релятивистское замедление времени и релятивистское сокращение длины

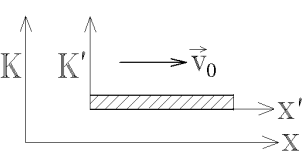
Применим преобразования Лоренца. Пусть в K' -системе часы покоятся в одной точке ($x'_1 = x'_2$) и показывают собственное время $t'_2 - t'_1 = \Delta\tau$ (рисунок слева). В системе K они движутся и показывают время



$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{(t'_2 - t'_1) - \frac{v_0}{c^2} (x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Это эффект релятивистского замедления времени в движущейся системе отсчета.

Пусть теперь в K' -системе линейка покоится и имеет длину $x'_2 - x'_1 = l_0$ (рисунок справа). Если одновременно ($t_1 = t_2$) измерить координаты ее концов x_1 и x_2 в K -системе, то получим



$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v_0 (t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \quad \text{или} \quad l = x_2 - x_1 = l_0 \sqrt{1 - v_0^2/c^2}.$$

Это эффект релятивистского сокращения длины движущегося объекта.

6.5. Релятивистский импульс и полная энергия релятивистской частицы.

Связь релятивистского импульса и полной энергии

Уравнения и основные величины классической динамики должны измениться при переходе к скоростям, сравнимым со скоростью света. При таких скоростях невозможно использовать даже классическое определение импульса частицы $\vec{p} = m\vec{v}$.

Релятивистской называют частицу, величина скорости которой сравнима с величиной скорости света c , и для которой нельзя считать, что $v^2/c^2 \rightarrow 0$. Для любой релятивистской частицы можно определить вектор импульса в виде:

$$\vec{p} = \vec{i} p_x + \vec{j} p_y + \vec{k} p_z = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Нетрудно видеть, что при $v^2/c^2 \rightarrow 0$ он совпадает с классическим импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$.

В классической механике, с учетом формулы $\vec{p} = m\vec{v}$ и уравнения движения $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, получали

$$dE_{\text{кин}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \vec{v} \cdot d\vec{p}. \text{ Изменение кинетической энергии релятивистской частицы определяется тем же со-}$$

отношением, и, после вычисления дифференциала $d\vec{p}$ и замены $2\vec{v}d\vec{v} = d(v^2)$, имеем:

$$dE_{\text{кин}} = \vec{v} d\vec{p} = \frac{m\vec{v}d\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mv^2 d(v^2)}{2c^2(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{md(v^2)}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}} = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \text{ или}$$

$$\boxed{E_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2} \text{ -- это кинетическая энергия релятивистской частицы.}$$

Из последней формулы немедленно следует, что ни одна частица с массой, отличной от нуля, не может двигаться со скоростью света. Для разгона такой частицы до световой скорости надо совершить бесконечную работу. И наоборот, безмассовые частицы, такие как фотон ($m=0$), имеющие конечную, не равную нулю энергию, могут существовать, только двигаясь со скоростью света c .

При малых скоростях ($v \ll c$) имеем $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$ и $E_{\text{кин}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{mv^2}{2},$

т.е. такая формула приводит к хорошо известному классическому выражению для кинетической энергии частицы.

Кинетическая энергия равна разности энергий движущейся и покоящейся частицы. Энергия движущейся со скоростью v релятивистской частицы называется её полной энергией и определяется формулой

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}.$$

6.6. Энергия покоя. Дефект масс

Отсюда следует, что любая покоящаяся частица ($v=0$) с ненулевой массой должна обладать энергией, которую Эйнштейн назвал энергией покоя:

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{пок}} = mc^2}.$$

Полную энергию свободной частицы можно представить, как сумму энергии покоя и кинетической энергии:

$$\mathcal{E} = mc^2 + E_{\text{кин}}.$$

Непосредственной подстановкой формул для полной энергии и релятивистского импульса находим, что

$$\boxed{\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4}.$$

-- это формула связи энергии и импульса релятивистской частицы, которая будет релятивистским инвариантом, имеющим одинаковое значение в любой инерциальной системе отсчета.

Для безмассовых частиц, например, для фотона, эта связь примет вид: $\boxed{\mathcal{E}_{\text{ф}} = p_{\text{ф}} c}.$

Другим следствием будет следующий вывод:

движущаяся или покоящаяся частица с массой M не может распасться в частицы с большей суммарной массой покоя. Обязательно $\sum m_i < M$ после распада. Поэтому ядерные реакции распада происходят с уменьшением массы.

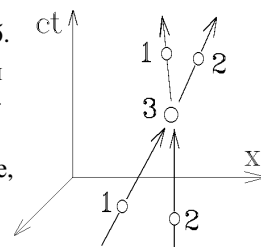
Величина $\Delta m = M - \sum m_i$ называется дефектом масс реакции распада. Если $\Delta m > 0$, то реакция распада **энергетически выгодна** и может произойти. При этом суммарная энергия покоя уменьшится на величину $\Delta \mathcal{E}_{\text{пок}} = \Delta m c^2$, которая называется энергетическим выходом реакции распада. Энергия покоя $\Delta \mathcal{E}_{\text{пок}}$ превращается в другие виды энергии -- кинетическую энергию разлетающихся осколков, энергию образующихся γ -- квантов излучения и т.д.

Пример: при взрыве мегатонной термоядерной бомбы (эквивалент 10^6 тонн тротила) выделяется $\Delta \mathcal{E}_1 = 4,18 \cdot 10^{15}$ Дж энергии за счет потери массы $\Delta m = \Delta \mathcal{E}_1 / c^2 \approx 0,046$ кг.

При столкновении частицы и античастицы (или вещества и антивещества) происходит аннигиляция: вся их энергия превращается в энергию излучения. Нетрудно подсчитать, что человек или метеорит с массой $m = 60$ кг, попав в антимир, немедленно произведёт взрыв, эквивалентный взрыву $2mc^2 / \Delta \mathcal{E}_1 = 2600$ мегатонных бомб.

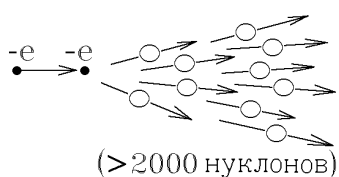
Последний пример нельзя рассматривать, как процесс "исчезновения материи". Материя существует в разных формах: в виде вещества, в виде излучения (поля). Происходит переход материи из одной формы в другую, из вещества -- в излучение в виде безмассовых фотонов.

Возможен и обратный переход. Для образования частицы 3 с массой $M = m_{\text{сист}}$ в процессе, изображенном на рисунке, налетающая частица должна иметь полную энергию



$\mathcal{E}_1 = \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m_2}$ и кинетическую энергию $E_{\text{кин}1} = \mathcal{E}_1 - m_1c^2 = \frac{M^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2}c^2$. Эта энергия называется

пороговой энергией реакции образования частицы с массой M .



Но если кинетическая энергия налетающей частицы значительно превосходит пороговую энергию, то может образоваться не одна, а множество более массивных частиц. В современных ускорителях, разгоняя сталкивающиеся электроны до околосветовых скоростей, получают "ливни" из тысяч образующихся протонов, нейтронов и других элементарных частиц, каждая из которых в тысячи раз массивнее электрона.

В очень сильных электромагнитных полях наблюдается процесс образования пар частица-античастица, обратный процессу аннигиляции (это происходит, когда энергия квантов

поля превышает суммарную энергию покоя $2mc^2$).

В заключение отметим, что для решения любой задачи столкновения релятивистских частиц достаточно использовать релятивистский инвариант и закон сохранения энергии-импульса системы.

7. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

7.1. Термодинамический и молекулярно-кинетический способы описания.

Термодинамические параметры

Термодинамика изучает различные свойства тел и изменение состояния вещества. В отличие от молекулярно-кинетической теории термодинамика изучает не микро-, а макроскопические свойства тел и явлений природы, не интересуясь их микроскопической природой.

Рассмотрим основные понятия термодинамики.

Термодинамическая система – совокупность макроскопических тел, состоящих из огромного числа независимо движущихся молекул (материальных точек). Они могут образовывать различные агрегатные состояния: жидкость, газ, аморфное или кристаллическое твердое тело. Пример термодинамической системы – жидкость и находящийся с ней в равновесии пар. Система может состоять из одного тела.

Термодинамическую систему можно описать с помощью макроскопических (термодинамических) параметров, характеризующих состояние системы в целом. Это параметры состояния: температура T , давление p , объем V .

Молекулярно-кинетический способ описания интересуется усредненными характеристиками состояния отдельных молекул, распределениями этих характеристик по величине, т.е. исследует микросостояния системы.

7.2. Термодинамические процессы: равновесный и неравновесный, обратимый и необратимый. Основное (нулевое) начало термодинамики

Равновесное состояние термодинамической системы – такое состояние, при котором все параметры системы имеют определенные значения, остающиеся при неизменных внешних условиях постоянными сколь угодно долго.

Тогда такая система находится в равновесном состоянии.

Если же значения хотя бы одного термодинамического параметра различны в разных точках системы или он изменяется во времени, то состояние системы называется неравновесным.

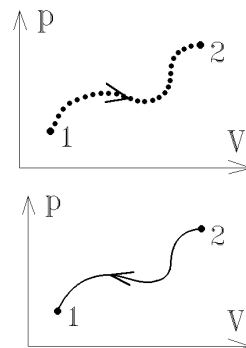
Если по координатным осям откладывать значения каких-либо двух параметров, то любое равновесное состояние системы может быть изображено точкой на этом графике. Неравновесное состояние не может быть изображено таким способом, так как хотя бы один из параметров не будет иметь в неравновесном состоянии определенного значения. Всякий процесс, то есть переход системы из одного состояния в другое, связан с нарушением равновесия системы. Следовательно, при протекании в системе какого-либо процесса, она проходит через последовательность неравновесных состояний. Но если этот процесс происходит достаточно медленно, то в любой момент времени в системе успевает установиться почти равновесное состояние. Процесс, состоящий из такой непрерывной последовательности равновесных состояний, называется квазистатическим (равновесным).

Если любую физическую систему изолировать от внешних тел, то она приходит в равновесие (если была неравновесна). Процесс перехода системы из неравновесного в равновесное состояние называется релаксацией, а время, за которое устанавливаются равновесные значения всех параметров системы, – временем релаксации τ .

Равновесный процесс может быть поведен в обратном направлении, причем система проходит те же состояния, но в обратной последовательности. Такой процесс называется обратимым. Все равновесные процессы обратимы. Поскольку обратимым может быть только бесконечно медленный процесс, то равновесный процесс является абстракцией.

Понятия равновесного состояния и равновесного процесса играют большую роль в термодинамике. Все количественные выводы термодинамики применимы только к равновесным процессам.

Не все медленные процессы равновесны и обратимы. После неравновесного (необратимого) процесса система может вернуться в исходное состояние, только проходя другую последовательность промежуточных состояний.



7.3. Идеальный газ и уравнение состояния идеального газа

Простейшей и наиболее легко рассчитываемой термодинамической системой является идеальный газ. Идеальным называют газ, который удовлетворяет двум условиям:

- 1) молекулы такого газа – крошечные шарики, суммарным объемом которых можно пренебречь по сравнению с объемом самого газа;
- 2) эти молекулы сталкиваются между собой и со стенками как идеально упругие шарики, а на расстоянии не взаимодействуют ни друг с другом, ни с остальными телами.

При обычных условиях, то есть при не очень больших давлениях и не очень низких температурах любой газ с хорошей степенью точности можно считать идеальным.

Термодинамические параметры любой термодинамической системы связаны некоторой функциональной зависимостью: $f(p, V, T) = 0$ или $p = f(V, T)$, $T = f(p, V)$, $V = f(p, T)$. Такая связь называется уравнением состояния системы. Из опыта было найдено, что для идеального газа $pV/T = \text{const}$.

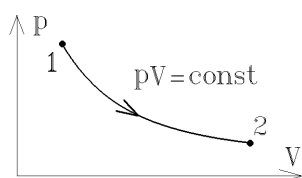
Для одного моля газа $pV/T = R = 8,314 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$, где R – универсальная газовая постоянная. Если газ содержит $\nu = m/\mu$ молей, то $\frac{pV}{T} = \frac{m}{\mu} RT$. Последнее уравнение называется уравнением состояния идеального газа.

Запишем его по-другому. $R = k_B N_A$, где $N_A = 6,033 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро, $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана. Пусть $n = N/V$ – концентрация молекул (число молекул в единице объема). Тогда $p = nk_B T$ – это другая запись уравнения состояния идеального газа.

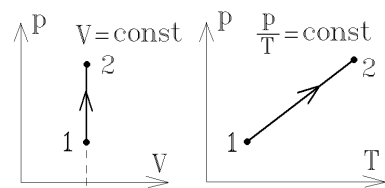
7.4. Уравнения изопроцессов в идеальном газе

Рассмотрим некоторые самые простые процессы, протекающие в идеальном газе. Приставка «изо» означает, что некоторый термодинамический параметр при протекании процесса не меняется.

1) **Изотермический процесс** ($T = \text{const}$, $pV = \text{const}$)

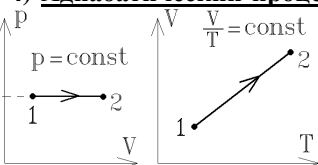


2) **Изохорический процесс** ($V = \text{const}$, $p/T = \text{const}$)



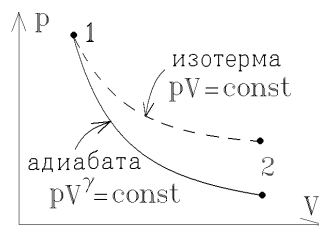
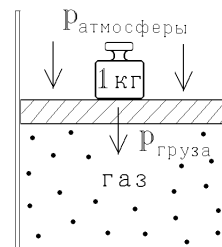
3) **Изобарический процесс** ($p = \text{const}$, $V/T = \text{const}$)

4) **Адиабатический процесс** – процесс, происходящий без передачи тепла: $\delta Q_{\text{ад}} = 0$;



Изохорическим будет процесс, происходящий при нагревании газа в закрытом сосуде постоянного объема.

Изобарическим будет процесс, происходящий под свободным поршнем массы m . Тогда $p_{\text{газа}} = p_{\text{атмосферы}} + mg/S = \text{const}$, где mg – вес поршня, а S – его площадь



Адиабатическим можно считать любой быстро протекающий процесс, при котором газ не успевает получить или отдать тепло. Уравнением адиабатического процесса будет уравнение Пуассона: $pV^\gamma = \text{const}$.

Используя уравнение состояния $pV/T = \text{const}$, можно записать уравнение адиабатического процесса через другие термодинамические переменные: $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ или $T^\gamma p^{\gamma-1} = \text{const}$. Так как показатель адиабаты $\gamma > 1$, то на диаграмме p - V график адиабаты идет круче графика изотермы:

Заметим, что для решения любой термодинамической задачи достаточно использовать систему следующих уравнений, которая позволяет найти изменение всех термодинамических параметров:

- а) уравнение состояния системы ($\frac{pV}{T} = \frac{m}{\mu} RT$ для идеального газа – это уравнение следует записать в точках начала и окончания каждого процесса;
- б) уравнения всех протекающих процессов;
- в) первое начало термодинамики.

7.5. Внутренняя энергия термодинамической системы (идеального газа) и работа по изменению её объема

Внутренней энергией какой-либо системы называется энергия этой системы за вычетом кинетической энергии системы как целого и потенциальной энергии системы в поле внешних сил:

$$U_{\text{внутр}} = E_{\text{полн}} - E_{\text{кин}} - E_{\text{пот вн}}$$

Внутренняя энергия системы складывается из:

- а) кинетической энергии непрерывного хаотического движения молекул;
- б) потенциальной энергии взаимодействия молекул между собой;
- в) внутримолекулярной энергии (энергии химических связей, ядерной энергии и т.п.).

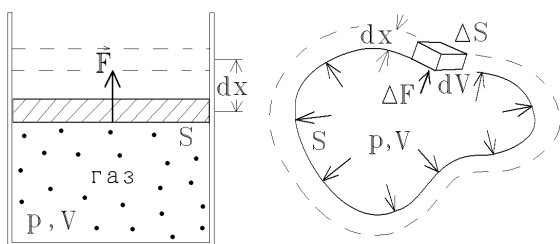
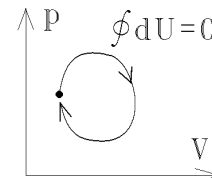
Для идеального газа внутренняя энергия равна суммарной кинетической энергии хаотического движения всех N

молекул газа:
$$U = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Внутренняя энергия системы аддитивна, то есть, складывается из внутренних энергий ее частей.

Внутренняя энергия является функцией состояния системы. Это означает, что всякий раз, когда система оказывается в данном состоянии, ее внутренняя энергия принимает присущее этому состоянию значение, независимо от предыстории системы. То есть, функцией состояния системы называется величина, зависящая только от значений термодинамических параметров в данном состоянии, и не зависит от способа, которым система пришла в это состояние.

Поэтому приращение внутренней энергии в отличие от работы газа, всегда будет полным дифференциалом dU . При циклическом процессе внутренняя энергия не меняется: $\oint dU = 0$.



При расширении любая система совершает механическую работу над внешними телами. Вычислим работу, совершаемую, например, газом при расширении. Газ, расширяясь в сосуде с сечением S , давит на поршень с силой $F = pS$. При бесконечно малом смещении поршня на dx эта сила совершает работу $\delta A = Fdx = pSdx = pdV$.

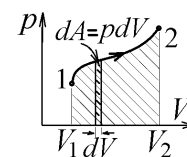
Если расширяющийся газ заполняет объем V , ограниченный поверхностью S произвольной формы, то суммарная работа при бесконечно малом изменении объема газа на величину

$$dV = \sum (\Delta S dx) = S dx \quad \text{определяется той же формулой} \quad \delta A = pdV.$$

Заметим, что $\delta A \neq dA$, то есть работа газа не является полным дифференциалом. Бесконечно малая величина δA называется дифференциальной формой, в которой p и V – переменные, меняющиеся, вообще говоря, независимо друг от друга. Только определив их связь $p = p(V)$, т.е. изобразив кривую процесса на диаграмме $p-V$, приходим к соотношению $\delta A = dA = p(V)dV$, позволяющему вычислить работу газа.

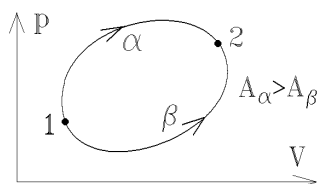
Работа газа при переходе из состояния 1 в состояние 2 равна площади под кривой процесса на диаграмме $p-V$:

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$



Так работа газа при изобарическом процессе равна $A_{p=\text{const}} = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$, а при изотермическом процессе

$$A_{T=\text{const}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}, \quad \text{откуда} \quad A_{T=\text{const}} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$



Из приведенного выражения следует, что работа зависит от пути, или от процесса, которым система приходит из состояния 1 в состояние 2. Так если площадь под кривой $1\alpha 2$ на диаграмме $p-V$ больше, чем площадь под кривой $1\beta 2$, то, расширяясь из состояния 1 в состояние 2 вдоль верхней кривой $1\alpha 2$, газ совершает большую работу: $A_\alpha > A_\beta$.

Циклическим называется процесс, при котором система вновь приходит в исходное состояние.

Работа газа при циклическом процессе $A_{\text{цикла}} = \oint p dV$ равна разности площадей под верхней кривой и нижней кривой, то есть, равна площади замкнутой петли цикла $p-V$ на диаграмме:

Все тепловые машины работают циклически. Если бы работа была полным дифференциалом, то она не зависела бы от пути: $\int_1^2 dA = A_2 - A_1$ и для циклического процесса была бы равна нулю. Машины в этом случае не смогли бы производить работу.

7.6. Теплоемкость термодинамической системы (идеального газа) при различных процессах

Теплоемкость термодинамической системы C – это величина, равная количеству тепла, которое надо сообщить системе, чтобы повысить температуру на 1 K: $C = \delta Q / dT$.

Такой же буквой обозначается молярная теплоемкость, относящаяся к одному молю вещества. Далее под C будем подразумевать именно молярную теплоемкость. Если, например, термодинамическая система содержит m/μ молей

газа, то её теплоёмкость связана с молярной теплоёмкостью C газа соотношением $C_{\text{системы}} = \frac{m}{\mu} C$.

Величина C зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. C может быть произвольной функцией термодинамических параметров: $C = f(p, V)$; $C = f(p, T)$; $C = f(V, T)$.

Процессы с постоянной теплоемкостью $C = \text{const}$ – называются политропическими.

Наибольший интерес представляет теплоемкость для случаев, когда нагревание происходит при постоянном объеме или постоянном давлении. В первом случае теплоемкость называется теплоемкостью при постоянном объеме (обозначается C_V), во втором – теплоемкостью при постоянном давлении (C_p).

Из опыта следует, что нагревание идеального газа при постоянном объеме является одним из политропических процессов, а теплоемкость идеального газа при постоянном объеме (работа газом не совершается $\delta A = p dV = 0$), определяется изменением его внутренней энергии, пропорциональной температуре:

$$C_V = \frac{dU}{dT}.$$

Из последнего выражения для 1 моля идеального газа получим

$$\int dU = \int C_V dT \quad \text{или} \quad U = C_V T.$$

Постоянная интегрирования принята равной нулю, т.к. в классической термодинамике всякое движение молекул газа при $T = 0$ должно прекратиться. А так как внутренняя энергия идеального газа является суммой кинетических энергий его молекул, то $U_{\text{ид.газа}}(T=0) = 0$.

Внутренняя энергия произвольной массы идеального газа равна $U = \frac{m}{\mu} C_V T$

Молярная теплоемкость газа при изобарическом процессе связана с C_V уравнением Майера: $C_p = C_V + R$.

7.7. Первое начало термодинамики. Уравнение первого начала термодинамики для идеального газа

Внутренняя энергия может изменяться за счет двух различных процессов: совершения над системой работы A' внешними телами и сообщения ей количества тепла Q . Совершение работы сопровождается перемещением внешних тел, воздействующих на систему. Так, например, при движении поршня, закрывающего заключенный в сосуде газ, поршень, перемещаясь, совершает над газом работу A' . По третьему закону Ньютона газ при этом совершает над поршнем работу $A_{\text{газа}} = -A'$.

Одним из ключевых постулатов термодинамики является закон сохранения энергии. Называется он первым началом термодинамики и выполняется в любой термодинамической системе:

Количество теплоты, сообщенной системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними телами:

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

или, в интегральной форме,

$$Q = \Delta U + A.$$

Здесь dU – приращение внутренней энергии. δQ и δA – элементарное количество теплоты и работы, совершенной системой (дифференциальные формы, так как Q и A не являются функциями состояния термодинамической системы).

При поглощении системой тепла $\delta Q > 0$, при выделении тепла $\delta Q < 0$.

При расширении системы $\delta A > 0$, при сжатии $\delta A < 0$.

При нагревании системы $dU > 0$, при охлаждении $dU < 0$.

С учетом определения теплоемкости и внутренней энергии первое начало термодинамики для произвольной массы m идеального газа с молярной массой μ запишется в виде $\delta Q = \frac{m}{\mu} C dT = \frac{m}{\mu} C_V dT + p dV$.

7.8. Адиабатный и политропный процессы. Уравнение Пуассона

Частными случаями политропного, процесса, имеющего постоянную теплоемкость, являются изохорический, изотермический, изобарический и адиабатический процесс с нулевой теплоемкостью, происходящий без передачи тепла: $\delta Q_{\text{адиаб}} = 0$. Выведем уравнение адиабатического процесса. Покажем, как, получая полезные соотношения термодинамики с помощью уравнения состояния и первого начала термодинамики.

Например, для одного моля идеального газа, совершающего изобарический процесс можно записать молярную теплоемкость процесса, как $C_p = \left. \frac{\delta Q}{dT} \right|_{p=\text{const}} = \frac{C_V dT + p dV}{dT}$. Но для 1 моля $pV = RT$ и в случае $p = \text{const}$ имеем

$p dV = R dT$. Отсюда $C_p = C_V + R$ – уравнение Майера, связывающее молярные теплоемкости идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Теперь рассмотрим адиабатический процесс, протекающий без передачи тепла, для которого $\delta Q_{\text{адиаб}} = 0$, тогда из I-го начала термодинамики $\delta A = -dU$ или $p dV = -C_V dT$. Подставим в это уравнение $dT = \frac{pdV + Vdp}{R}$, полученное

из уравнения состояния 1 моля идеального газа $d(pV) = RdT$. Тогда: $pdV = -C_V \frac{pdV + Vdp}{R}$ и $pdV \cdot R = -C_V pdV - C_V Vdp$.

Отсюда получаем $(C_V + R)pdV = C_p pdV = -C_V Vdp$. Вводя показатель адиабаты $\gamma = C_p/C_V$, равный отношению молярных теплоемкостей при изобарическом и изохорическом процессах, получим $\gamma pdV = -Vdp$.

Разделим переменные и проинтегрируем: $\gamma \int \frac{dV}{V} = - \int \frac{dp}{p}$, откуда $\gamma \ln V = -\ln p + \text{const}$ или $\ln(pV^\gamma) = \text{const}$.

В результате приходим к уравнению адиабаты или уравнению Пуассона: $pV^\gamma = \text{const}$.

Используя уравнение состояния $pV/T = \text{const}$, можно записать уравнение адиабатического процесса через другие термодинамические переменные: $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ или $T^\gamma p^{\gamma-1} = \text{const}$.

Работу при адиабатическом процессе можно вычислить, используя уравнение Пуассона $pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma = \text{const}$:

$$A_{\text{адиаб}} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = p_1 V_1 \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} V_1^{\gamma-1} (V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}) \quad \text{т.е.} \quad A_{\text{адиаб}} = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Но удобнее работу при адиабатическом процессе рассчитывать исходя из уравнения 1-го начала термодинамики:

$$A_{\text{адиаб}} = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} C_V \Delta T.$$

Адиабатическим можно считать любой быстро протекающий процесс, при котором термодинамическая система **не успевает** получить или отдать тепло: $\delta Q = 0$.

Еще раз заметим, что для решения любой термодинамической задачи достаточно использовать систему следующих термодинамических уравнений, которая позволяет найти изменение всех термодинамических параметров:

а) уравнение состояния системы ($\frac{pV}{T} = \frac{m}{\mu} RT$ для идеального газа – это уравнение следует записать в точках начала и окончания каждого процесса); б) уравнения всех протекающих процессов; в) первое начало термодинамики.

8. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ЭНТРОПИЯ

8.1. Термодинамическое определение энтропии. Изменение энтропии при различных процессах

Используя уравнение состояния и первое начало термодинамики невозможно определить направление реального термодинамического процесса. Для этого приходится ввести новую функцию состояния – энтропию.

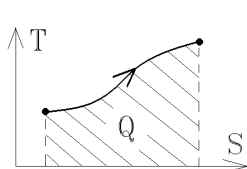
Энтропия S – это величина, приращение которой связано с количеством тепла, поступающего в систему: $dS = \delta Q/T$.

Для идеального газа $\delta Q/T = (m/\mu)C_V(dT/T) + (p/T)dV = (m/\mu)[C_V d(\ln T) + R d(\ln V)]$, откуда легко вычислить:

$$dS_{\text{ид газа}} = d[(m/\mu)C_V \ln T + (m/\mu)R \ln V].$$

Хотя δQ – не полный дифференциал, энтропия является функцией состояния системы. Поэтому изменение энтропии не зависит от способа передачи тепла, а зависит только от начального и конечного состояний системы.

Как и любая термодинамическая функция состояния, энтропия определена с точностью до произвольной постоянной, то есть определить можно только изменение энтропии в ходе какого-либо процесса:



$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

При этом при любом циклическом процессе $\oint dS = 0$.

Поскольку $Q = \int \delta Q = \int T dS$, то количество теплоты Q равно площади под кривой процесса на диаграмме $T-S$ (см. рисунок).

Первое начало термодинамики для идеального газа можно записать в виде $TdS = (m/\mu)C_V dT + p dV$. Для адиабаты $dS = 0$ или $S = \text{const}$, откуда следует, что адиабатический процесс можно назвать изоэнтропийным.

8.2. Частные формулировки второго начала термодинамики.

Невозможность существования вечных двигателей 1-го и 2-го рода

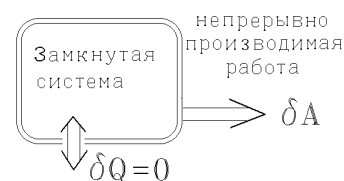
Первое начало термодинамики, уравнение состояния и уравнение процесса показывают, как изменяются давление, объем и температура, но не указывают **направление** процесса, то есть, допускают, что процесс может идти в обе стороны. Направление протекания реальных термодинамических процессов определяется вторым началом термодинамики. Имеются несколько частных формулировок второго начала, которые можно вывести одну из другой, но все они связаны именно с изменением энтропии.

Первую формулировку второго начала термодинамики можно определить следующим образом:

единственным результатом любых равновесных и неравновесных процессов в **замкнутой** термодинамической системе не может быть убывание энтропии, т.е. $dS \geq 0$.

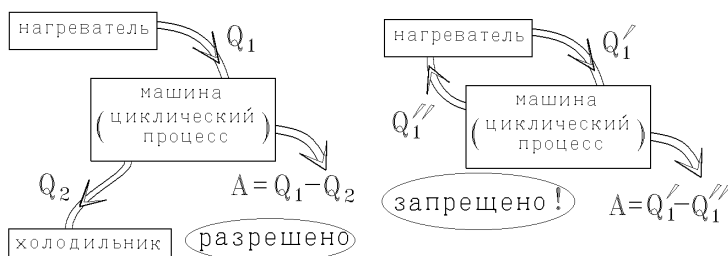
Существуют и другие формулировки второго начала. В частности, **формулировка Кельвина** утверждает, что: невозможны такие процессы, **единственным** конечным результатом которых было бы превращение **всего** полученного системой тепла в работу (невозможность существования вечного двигателя).

Вечный двигатель первого рода – это замкнутая система, непрерывно производящая работу без поступления энергии извне. Из первого начала термодинамики это означает, что при $\delta Q = 0$ выполнено соотношение $dA = -dU$, то есть, работа должна совершаться за счет убыли внутренней энергии системы, которая не бесконечна и $U = 0$ при $T = 0$. Отсюда следует, что **вечный двигатель первого рода запрещен первым началом термодинамики**.

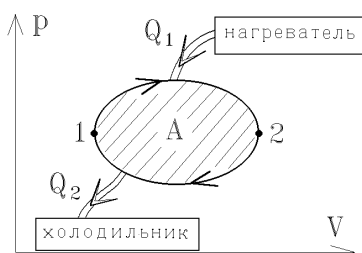


Вечный двигатель второго рода по определению преобразует все полученное системой тепло в механическую работу, то есть, имеет КПД 100%. Таким образом **существование двигателей второго рода запрещено формулировкой Кельвина второго начала термодинамики**.

Формулировка Кельвина утверждает, что если термодинамическая система получает тепло от нагретого тела (нагревателя) и, совершая циклический процесс, производит работу, то она обязана часть энергии в виде тепла отдавать другим телам (холодильнику), как показано на левом рисунке. Машина, изображенная на правом рисунке, обменивается телом с одним источником. Она является запрещенным вечным двигателем второго рода, и существовать не может:



8.3. Циклические процессы. Цикл Карно



Как правило, любая тепловая машина (двигатель) использует циклический процесс. Ее рабочее тело, то есть термодинамическая система, преобразует часть полученного тепла в работу и периодически, через цикл приходит в начальное состояние. Рабочим телом машины может быть газ (тепловые двигатели, например), но полученные выводы будут справедливы для любого вида функционирующих устройств (электродвигателей, компьютеров, биологических организмов и т.д.).

Произвольный цикл тепловой машины изображен на рисунке: в процессе 1–2 рабочее тело машины получает от нагревателя тепло Q_1 ($\delta Q > 0$), а в процессе 2–1 отдает холодильнику тепло Q_2 ($\delta Q < 0$).

Точки 1 и 2, в которых система переходит от приема к отдаче тепла, опре-

деляется из уравнения

$$\delta Q = dU + pdV = 0.$$

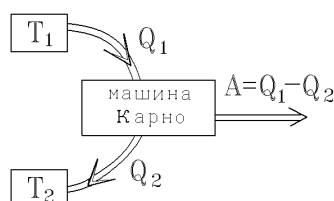
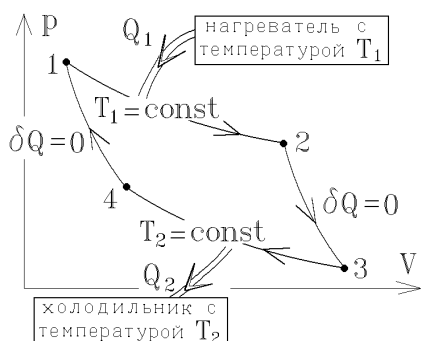
При циклическом процессе $\oint dU = 0$, т.е. внутренняя энергия не меняется и площадью петли на диаграмме p – V , будет работа, совершенная рабочим телом машины за цикл. Она же равна разности полученной и отданной за цикл теплоты: $A = Q_1 - |Q_2|$.

Тепло при этом распространяется от нагретого тела к холодильнику, но не наоборот: $T_{\text{нагр}} \geq T_{\text{системы}} \geq T_{\text{холодильника}}$. Это утверждает **формулировка Клаузиуса** второго начала термодинамики:

невозможны такие процессы, **единственным** результатом которых был бы переход тепла от холодного тела к нагретому.

Если в процессе передачи тепла температура нагревателя превышает температуру рабочего тела тепловой машины, то этот процесс **необратим**. Циклический процесс, происходящий с рабочим телом машины, может быть обратимым, то есть, может быть проведен в обратном направлении, но все тепло при этом в нагреватель не вернется.

Единственным обратимым процессом передачи тепла является изотермический процесс. Все циклические процессы, при которых процесс передачи тепла не является изотермическим, будут приводить к необратимым изменениям в системе нагреватель-тепловая машина-холодильник.



Цикл Карно – это единственный циклический процесс в системе нагреватель-тепловая машина-холодильник, для которого прием тепла от нагревателя и передача тепла холодильнику обратима. Он состоит из двух изотерм и двух адиабат (см. рисунок).

При этом система последовательно приводится в тепловой контакт с **единственным на-**

гревателем и **единственным** холодильником. Передача тепла осуществляется изотермически при температуре нагревателя T_1 или при температуре холодильника T_2 . При адиабатическом переходе передачи тепла нет.

Следует помнить, что термодинамическое определение энтропии или равенство $dS = \delta Q/T$ справедливо **только для равновесных (обратимых)** процессов.

Если циклический процесс сопровождается некоторыми **необратимыми** изменениями, то из равенства нулю изменения энтропии при циклическом процессе в машине, изображенной на рисунке, $\oint dS = 0$ следует, что общая энтропия всей системы «нагреватель-машина-холодильник» за один полный цикл изменяется на положительную величину

$$\Delta S = \Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{машины}} + \Delta S_{\text{холод}} = \frac{\Delta Q_{\text{нагр}}}{T_{\text{нагр}}} + 0 + \frac{\Delta Q_{\text{холод}}}{T_{\text{холод}}} = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{|Q_2|}{T_2} \geq 0 \quad (\text{знак равенства – только для изотермического}$$

обратимого переноса тепла). Отсюда получаем, что при любом необратимом процессе $\oint \frac{\delta Q}{T} > 0$ – это **неравенство необр**

Клаузиуса. Поэтому при всех реальных физических процессах, а они всегда сопровождаются какими-то необратимыми изменениями либо в работающем устройстве, либо в окружающей среде, **суммарная энтропия может только возрастать**.

8.4. К.п.д. циклических процессов (тепловых машин). Холодильник, кондиционер, тепловой насос

КПД любой тепловой машины (цикла) равен отношению произведенной за цикл

работы к полученному от нагревателя теплу: $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} < 1$.

Вычислим КПД цикла Карно, который удобнее рассчитать, изображая цикл Карно на диаграмме T - S (температура-энтропия). Так как поступающее и уходящее тепло определяется как площадь под кривой процесса на диаграмме T - S , то

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1), \quad |Q_2| = T_2(S_2 - S_1), \quad \text{откуда следует, что } \eta_{\text{Карно}} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Можно рассчитать КПД цикла Карно и другим способом. Учтем, что при циклическом процессе $\oint dS = 0$, откуда следует, что

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_1} + \int_2^3 \frac{\delta Q_{\text{ад}}}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T_2} + \int_4^1 \frac{\delta Q_{\text{ад}}}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{|Q_2|}{T_2} = 0,$$

а так как при адиабатическом процессе $\delta Q = 0$ и $\frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$, то $\eta_{\text{Карно}} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$.

Таким будет КПД всех машин, работающих по циклу Карно, независимо от того, какое рабочее тело (идеальный газ или что-либо другое) используется в них. Это утверждение называется **первой теоремой Карно**.

Рассмотрим теперь работу произвольной тепловой машины с **обратимым циклом**. Совершаемая машиной работа $A = Q_1 - |Q_2|$ равна площади внутри кривой цикла на диаграмме T - S :

Процесс передачи тепла для всех машин, кроме машины Карно, необратим. Поэтому изменение энтропии всей системы «нагреватель-машина-холодильник» за один полный цикл

$$\Delta S = \Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{машины}} + \Delta S_{\text{холод}} = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{|Q_2|}{T_2} \geq 0$$

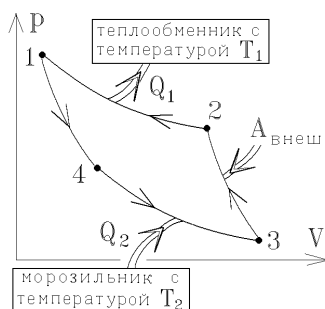
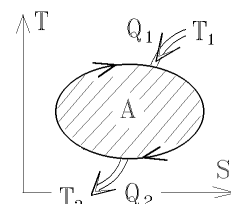
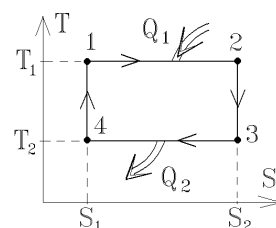
(энтропия не может убывать). Здесь учтено, что в результате **обратимого циклического** процесса энтропия рабочего тела машины не изменяется: $\Delta S_{\text{машины}} = 0$ и, следовательно, $|Q_2|/Q_1 \geq T_2/T_1$ (знак «равно» справедлив только для машины Карно) и КПД любой машины меньше КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \eta_{\text{Карно}}.$$

Это – **вторая теорема Карно**, которая является еще одной **формулировкой Карно** второго начала термодинамики:

КПД цикла Карно является максимальным для всех возможных тепловых машин, иначе говоря, КПД любого обратимого или необратимого цикла меньше КПД цикла Карно.

Если направление протекания циклического процесса обратить, как показано на рисунке, то машина будет забирать тепло у холодильника и отдавать его нагревателю. Такой процесс возможен только за счет работы $A_{\text{внеш}} = |Q_2| - Q_1$, совер-

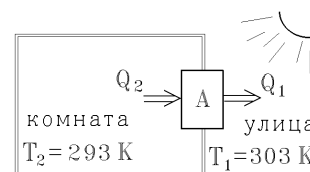
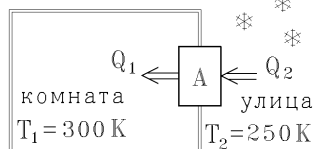


шаемой над рабочим телом внешними телами. Такая машина будет работать как холодильник, забирая у холодного тела (морозильника) за цикл тепло Q_2 и отдавая нагретому телу (теплообменнику) большее тепло Q_1 , а эффективность его работы характеризуется коэффициентом преобразования холодильника:

$$\eta_{\text{хол}} = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2}.$$

Если морозильником сделать комнату, то подобная машина работает как кондиционер.

Если поменять направление теплового потока и использовать в качестве морозильника холодную улицу, то совершая за цикл работу $A = 1$ Дж можно в случае работы по циклу Карно (идеальный случай) перекачать с холодной улицы в нагретую комнату значительно большее количество тепла $\frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$ или $Q_1 = 6$ Дж для температур, указанных на левом рисунке. Такая машина называется тепловым насосом.



8.5. Макро- и микросостояние системы. Термодинамическая вероятность

Микросостояние системы – это состояние с определенными значениями всех её параметров, то есть, координат x_i, y_i, z_i и скоростей v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} каждой из её молекул. Тогда известны и макроскопические термодинамические параметры p, V, T .

Если изменить скорость или координату хотя бы одной молекулы, то микросостояние будет другим, но параметры p, V, T сохранятся. Даже если изменить состояние 10^6 молекул в моле газа (в котором $N_{\text{Авогадро}} = 6 \cdot 10^{23}$ молекул), то величины термодинамических параметров p, V, T сохранятся. Таким образом, одним и тем же значениям параметров p, V, T , то есть, одному макросостоянию системы, могут соответствовать множество разных микросостояний.

В основании статистического метода лежат постулат равновероятности микросостояний: **все микросостояния системы молекул равновероятны**.

Термодинамической вероятностью Ω макросостояния с параметрами p, V, T называется отношение числа $M_{p,V,T}$ различных микросостояний системы, соответствующих данным значениям p, V, T к числу всех возможных микросостояний M :

$$\Omega_{p,V,T} = M_{p,V,T} / M.$$

Термодинамическая вероятность – это вероятность существования системы в равновесном состоянии с определенными значениями термодинамических параметров p, V, T .

Если $\mathfrak{R} = 1/M$ – вероятность одного микросостояния системы, то $\Omega_{p,V,T} = M_{p,V,T} \cdot \mathfrak{R}$. Поскольку вычислить точно координаты и скорости всех молекул термодинамической системы невозможно из-за огромного числа их непрерывных соударений друг с другом, то можно учесть, что положения (координаты) молекул газа и их скорости – **случайные величины**, а вероятности случайных независимых событий всегда перемножаются.

Применим это свойство к молекулам газа. Пусть газ из N молекул заполняет сосуд с объемом V . В отсутствии внешних сил все положения молекулы в этом объеме равновероятны и вероятности того, что она находится в части сосуда с объемом V_1 равна $\mathfrak{R} = V_1/V$, а вероятность ее нахождения вне объема V_1 равна $(1 - \mathfrak{R})$.

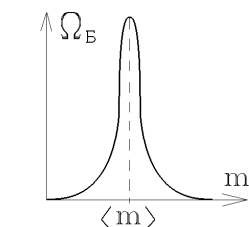
Положения различных молекул газа в сосуде будут случайными и независимыми событиями, что позволяет перемножить все вероятности. Тогда $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R} \cdot \dots \cdot \mathfrak{R} \cdot (1 - \mathfrak{R}) \cdot (1 - \mathfrak{R}) \cdot \dots \cdot (1 - \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}^m \cdot (1 - \mathfrak{R})^{N-m}$ – это вероятность того, что ка-

кие-то m молекул находятся в объеме V_1 , а остальные $N - m$ молекул – в объеме $V - V_1$ сосуда.

Но выбрать m конкретных молекул в полном наборе из N молекул можно C_m^N различными способами, где $C_m^N = N! / ((N-m)!m!)$ – биномиальный коэффициент. Каждый такой выбор молекул соответствует отдельному микросостоянию. Например, из 4-х молекул А, Б, В, Г можно выбрать 2 молекулы $C_2^4 = 6$ способами: АБ, АВ, АГ, БВ, БГ, ВГ.

Таким образом, вероятность микросостояния, при котором в сосуде любые m молекул окажутся в объеме V_1 , определяется выражением:

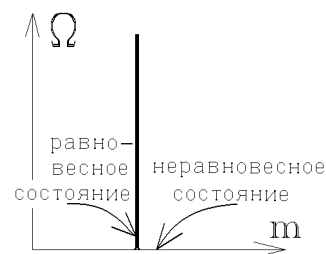
$$\Omega_B = \frac{N!}{(N-m)!m!} \cdot \frac{\mathfrak{R}^m \cdot (1 - \mathfrak{R})^{N-m}}{\text{вероятность одного микросостояния}}.$$



Такое распределение молекул называют биномиальным. Для достаточно больших N и m оно имеет вид острого пика (см. рисунок слева), где $\langle m \rangle = N(V_1/V)$ соответствует равномерному распределению молекул по сосуду. При $N \sim N_{\text{Авогадро}} = 6 \cdot 10^{23}$ этот пик термодинамической принимает вид, изображенный на рисунке справа.

При этом случай, когда молекулы распределены равномерно, соответствует равновесному состоянию системы (выравнивание давления во всех точках системы).

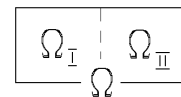
*** Вывод:** в равновесном состоянии термодинамическая вероятность системы максимальна, и она резко убывает при переходе в неравновесное состояние. Следовательно, **равновесное состояние – это наиболее вероятное состояние системы**. Вечный двигатель второго рода не существует не потому, что он абсолютно запрещен, а потому, что он в принципе **невероятен**.



8.6. Статистическое определение энтропии (формула Больцмана)

Термодинамическая вероятность – величина не аддитивная. Если 2 части системы, в которых молекулы распределены случайно и независимо, имеют вероятности Ω_1 и Ω_2 , то для всей системы вероятности перемножаются:

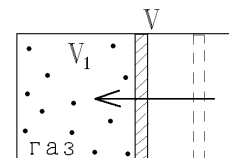
$$\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2.$$



Но физические величины аддитивны (энергия, импульс и т.п.). Следовательно, какой-то физический смысл имеет величина

$$\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2.$$

Чтобы понять, её смысл, рассмотрим идеальный газ из N молекул в сосуде с объёмом V и, сжимая поршень, начнем осторожно менять объём газа до величины V_1 , не изменяя его внутренней энергии, то есть изотермически (это эквивалентно тому, что газ самопроизвольно изменит свой первоначальный объём V и, пусть на очень короткое время, все его молекулы соберутся внутри объема V_1).



Согласно биномиальному распределению, где $m=N$, $\mathfrak{R} = V_1/V$, термодинамическая вероятность этого состояния $\Omega_1 = 1 \cdot \mathfrak{R}^N = (V_1/V)^N$. Если молекулы собрать в другом объёме V_2 , при другом положении поршня, то получим термодинамическую вероятность $\Omega_2 = 1 \cdot \mathfrak{R}^N = (V_2/V)^N$. Отсюда следует, что

$$\Delta(\ln \Omega) = \ln \Omega_2 - \ln \Omega_1 = \ln(\Omega_2/\Omega_1) = \ln(V_2/V_1)^N = N \ln(V_2/V_1).$$

Но при изотермическом процессе изменение энтропии идеального газа

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{pdV}{T} = \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Сравнивая полученные выражения, находим:

$$(m/\mu)R \cdot \Delta \ln(\Omega) = N \Delta S.$$

А так как число молекул газа $N = \frac{m}{\mu} N_{\text{Авогадро}}$ и $k_B \cdot N_{\text{Авогадро}} = R$, где k_B – постоянная Больцмана, то получа-

ем формулу Больцмана для энтропии:

$$S = k_B \cdot \ln \Omega,$$

выражающую её статистический смысл: энтропия системы пропорциональна логарифму ее термодинамической вероятности.

Вывод: энтропия максимальна тогда же, когда и термодинамическая вероятность Ω , то есть в равновесном состоянии системы, когда ее молекулы движутся наиболее беспорядочно, в состоянии теплового хаоса. Энтропия – это мера теплового беспорядка системы.

8.7. Изменение энтропии при необратимых процессах. Общая формулировка

Теперь можно теперь сформулировать наиболее полную формулировку второго начала термодинамики:

Все физические процессы в природе идут в таком направлении, чтобы привести любую термодинамическую систему в состояние термодинамического равновесия, когда ее энтропия максимальна.

При этом направление оси времени связано с направлением протекания реальных физических процессов, т.е. определяется 2-м началом термодинамики. Как отметил Ричард Фейнман: «События нашего мира необратимы в том смысле, что их развитие в одну сторону весьма вероятно, а в другую – хотя и возможно и не противоречит законам физики, но случается один раз в миллион лет».

Замечание: когда **замкнутая** система приходит в равновесие, или состояние максимально возможного беспорядка, то все термодинамические процессы в ней прекращаются.

8.8. Третье начало термодинамики

В классической теории всякое тепловое движение молекул прекращается при $T=0$, и система сохраняет единственное «неподвижное» микросостояние с термодинамической вероятностью $\Omega = 1$. Тогда из формулы Больцмана $S|_{T=0} = k_B \cdot \ln 1 = 0$.

Этот результат выражает третье начало термодинамики, или теорему Нёрнста: энтропия термодинамической системы при стремлении температуры к абсолютному нулю также стремится к нулю: $\lim_{T \rightarrow 0} S \rightarrow 0$.

В термодинамике энтропия определена с точностью до произвольной постоянной. Третье начало термодинамики определяет эту постоянную. Она равна нулю.

Из теоремы Нёрнста можно сделать вывод о недостижимости абсолютного нуля температур $T=0$ К.

Второе начало термодинамики не позволяет классической системе иметь отрицательную температуру $T < 0$.

Действительно, если в случае цикла Карно температура холодильника $T_2 < 0$, то, с учётом того, что для цикла Карно $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$, получим $Q_2 < 0$: тепловая машина будет забирать тепло и у нагревателя, и у холодильника, превращая все это тепло в работу, т.е. станет работать как вечный двигатель второго рода. Это невозможно.

8.9. Негаэнтропия. Накопление информации

Информация, получаемая при ответе "да" или "нет", называется битом.

Во время иудейского восстания против римлян в 135 г.н.э. под водительством Бар-Кохба римляне, по преданию, отрубили лазутчику язык и руки (дабы не смог он говорить и писать). Но Бар—Кохба узнал все необходимое, задавая вопросы, на которые можно было ответить "да" или "нет". Такое разуживание информации называется игрой Бар—Кохба.

Если имеется n элементов, то определить один из них (загаданный) можно минимум k вопросами, требующими для ответа 1 бита информации, где $n \leq 2^k$. Действительно, упорядочим множество элементов каким-либо образом, и получим ответы "да" или "нет" на последовательно задаваемые вопросы: 1) находится ли искомый элемент в первой половине множества? (Пусть ответом будет "да"); 2) находится ли он в первой четверти? и т.п. После ответа на k -й вопрос, где $k = \log_2 n$, положение искомого элемента в множестве будет определено. Следовательно, информация о выборе одного элемента из n содержит $I = k = \log_2 n = -\log_2 \mathfrak{X}$ бит информации, где $\mathfrak{X}=1/n$ - вероятность случайного угадывания этого элемента (все элементы равновероятны).

Но в термодинамике вероятность осуществления какого-либо состояния называется термодинамической вероятностью: $\mathfrak{X} = \Omega$, и информация об определенном состоянии термодинамической системы согласно формуле Больцмана имеет выражение $I = -\log_2 \mathfrak{X} = -\log_2 \Omega = -\frac{1}{\ln 2} \ln \Omega = -\frac{S}{k_B \ln 2}$, т.е. пропорциональна энтропии системы, взятой с обратным знаком.

Поэтому информацию I называют негэнтропией ("отрицательной энтропией"). Получая информацию о состоянии системы, мы узнаем о порядке расположения и о величинах ее элементов. Тем самым мы фиксируем данное состояние из всех возможных, устраняем возможный беспорядок. Энтропия при этом должна уменьшаться: $\Delta I = -\Delta S / (k_B \ln 2) > 0$.

При этом, согласно второму началу термодинамики, уменьшение энтропии в процессе приобретения информации должно сопровождаться еще большим ее ростом за пределами изучаемой системы:

Полученную информацию можно забыть или потерять, но в исходное состояние мы не вернемся, так как в сумме энтропия возросла. Получение информации – это необратимый процесс.

Как и любой другой термодинамический процесс, его сопровождает совершение работы. Оценим величину этой работы на примере медленного изотермического сжатия газа из N молекул. Как было показано в разделе 8.6, для термодинамических вероятностей такой простейшей системы выполняется отношение $\Omega_2/\Omega_1 = (V_2/V_1)^N$, т.е. изменение информации о состоянии газа при уменьшении его объема от V_1 до V_2 запишется в виде $\Delta I = -(\log_2 \Omega_2 - \log_2 \Omega_1) =$

$$= -\frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) = -\frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^N = -\frac{N}{\ln 2} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Но **над газом** при изотермическом сжатии надо совершить работу

$$\Delta A = -\frac{m}{\mu} RT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Следовательно, на получение 1 бита информации затрачивается работа

$$\frac{\Delta A}{\Delta I} = \frac{mRT \ln 2}{\mu N} = \frac{RT \ln 2}{N_{\text{Ав}}} = k_B T \ln 2 \approx 2,87 \cdot 10^{-21} \text{ Дж/бит}.$$

Полученная величина кажется очень малой, но это **минимальная** необходимая работа, нижний ее предел, ибо часть работы (и возрастания энтропии) приходится на совершение других диссипативных процессов, не связанных с приобретением информации. Так, для получения 1 бита информации "орел" или "решка" можно бросить монету, а можно – чугунную сковороду. Во втором случае работа будет намного больше.

Теперь учтем, что в реальных системах различные элементы (события) встречаются **не равновероятно**. Определим величину информации о такой системе на примере информации о расположении букв в тексте, содержащем N знаков (элементов). Этот текст записывается с помощью M букв (символов), встречающихся с различной вероятностью \mathfrak{X}_i , $i = 1, 2, \dots, M$, где $\sum_i \mathfrak{X}_i = 1$.

Тогда при большом числе знаков N i -я буква встретится в тексте $N_i = \mathfrak{X}_i N$ раз ($\sum N_i = N$), а число различных возможных "случайных" вариантов текста (различных комбинаций букв) будет $n = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_M!}$, где $N_i!$ - это число перестановок в тексте одних и тех же букв i между собой, что текста не меняет.

Пример: $N=5$ -буквенный текст можно записать с помощью $M=2$ букв X и Y, встречающихся с различной вероятностью $\mathfrak{X}_X = 0,6$ и $\mathfrak{X}_Y = 0,4$ $n = 5!/(2!3!) = 10$ различными способами:

XXXXY XXXYX XXYYX YXXXY YXXYX YXXYX YXXYX YXXYX

Все варианты **случайного** расположения букв в тексте (они аналогичны различным микросостояниям термодинамической системы) **равновероятны**. Поэтому информация о порядке букв в тексте

$$I = \log_2 n = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_M!} \right) = \frac{1}{\ln 2} [\ln(N!) - \ln(N_1!) - \ln(N_2!) - \dots - \ln(N_M!)] .$$

Для очень больших чисел N можно воспользоваться формулой Стирлинга $\ln(N!) \approx N \ln N$. Тогда

$$I = \frac{1}{\ln 2} \left(N \ln N - \sum_{i=1}^M N_i \ln N_i \right) = \frac{1}{\ln 2} \left(N \ln N - \sum_{i=1}^M (N \mathfrak{R}_i) \ln(N \mathfrak{R}_i) \right) = \frac{1}{\ln 2} \left(N \ln N - N \sum_{i=1}^M \mathfrak{R}_i (\ln N + \ln \mathfrak{R}_i) \right) = - \frac{N}{\ln 2} \sum_{i=1}^M \mathfrak{R}_i \ln \mathfrak{R}_i .$$

Это информация о всем тексте, а на одну букву текста приходится информация $I_1 = - \frac{N}{\ln 2} \sum_{i=1}^M \mathfrak{R}_i \ln \mathfrak{R}_i$ - это формула

Шеннона для информации о тексте с неравновероятными элементами.

Можно учесть вероятность появления в тексте двухбуквенных сочетаний (вероятность появления буквы зависит от того, какой была предыдущая буква; такая вероятность называется условной), трехбуквенных сочетаний (вероятность появления буквы зависит от комбинации двух предыдущих букв) и т.п. Подобные последовательности называются цепями Маркова.

Замечание: формула Шеннона и другие подобные формулы дают формальную оценку содержащейся в тексте информации. Однако эта информация будет **неравноценной** при обработке и усвоении.

Для любого обрабатывающего устройства (а таким устройством может быть и мозг, и ЭВМ) ценность поступающей информации зависит от объема уже накопленной информации, который называется тезаурусом (что по-гречески означает "сокровище"). Наиболее эффективно обрабатывается поток информации, в котором отношение нового, еще не усвоенного материала, к уже известному равно некоторому оптимальному числу. Мозг теряет интерес к чтению текста (к просмотру телепередачи и т.п.), если доля неизвестной информации в нем очень велика (малый тезаурус) или очень мала. Так, лекция, предназначенная для студентов, должна быть совершенно неинтересна как ученикам младших классов, так и специалистам-профессионалам.

Наглядным примером может служить текст, составленный из беспорядочного набора букв. Информация I , заключенная в нем, минимальна, что соответствует максимальной энтропии S . Подобный текст не представляет для читателя никакой ценности, как и текст, упорядоченный до предела, в котором буквы следуют одна за другой по заданному шаблону: "АЯАЯАЯ...". Последний текст имеет минимальную энтропию. В физике ему соответствует бесконечная монокроматическая волна. Следовательно, волновые процессы, в которых движение частиц упорядочено, могут приводить к уменьшению энтропии незамкнутой системы (без нарушения второго начала термодинамики).

Наконец заметим, что в случае высокого тезауруса даже очень небольшой объем информации имеет большую ценность. Так единственный сигнал светофора приводит к полному изменению движения на перекрестке. Но такой сигнал ни о чем не скажет людям, не знающим правил уличного движения.

9. СТАТИСТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПИСАНИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

9.1. Функция распределения и её смысл. Функция распределения Гаусса для случайных величин

Переходим к изучению молекулярно-кинетического способа описания на примере простейшей термодинамической системы – идеального газа. Так как определить точные значения микроскопических параметров для всех молекул газа невозможно, приходится вычислять средние значения этих параметров, или же вероятности обнаружения молекул с разными значениями параметров.

Если какой-то параметр x , описывающий молекулу (например, масса молекулы в смеси разных газов), может принимать различные дискретные значения x_i с разной вероятностью \mathfrak{R}_i , то в газе из N молекул значение параметра x_i имеют N_i молекул, а соответствующая вероятность \mathfrak{R}_i пропорциональна доле этих молекул: $\mathfrak{R}_i = N_i/N$, причем $\sum \mathfrak{R}_i = 1$, так как $\sum N_i = N$.

Среднее значение дискретно меняющейся величины x для всех молекул газа (среднее арифметическое) вычисляется по формуле

$$\langle x \rangle = \left(\underbrace{x_1 + x_1 + \dots + x_1}_{N_1 \text{ раз}} + \underbrace{x_2 + x_2 + \dots + x_2}_{N_2 \text{ раз}} + \dots + \underbrace{x_i + x_i + \dots + x_i}_{N_i \text{ раз}} + \dots \right) / N = \sum_i N_i x_i / N = \sum_i \mathfrak{R}_i x_i .$$

В случае непрерывно изменяющихся величин x (координаты, скорости и т.п.) определяют число молекул dN , у которых значение x меняется в пределах от x до $x + dx$. Тогда $\int dN = N$ и $d\mathfrak{R} = dN/N$ – вероятность того, что молекула имеет значение x в пределах от x до $x + dx$.

Очевидно, что доля молекул dN пропорциональна интервалу dx и общему числу N : $dN = Nf(x)dx$ или $d\mathfrak{R} = f(x)dx$.

Функция $f(x) = dN/(Ndx) = d\mathfrak{R}/dx$ называется функцией плотности вероятности распределения молекул по величине x или просто функцией распределения молекул по величине x . Для стационарного состояния системы (газа), не зависящего от времени, функция распределения $f(x)$ также не зависит от времени.

Физический смысл функции распределения заключается в том, что интеграл:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} d\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(x_1 \leq x \leq x_2)$$

является вероятностью того, что молекулы газа имеют значение параметра x в пределах от x_1 до x_2 .

Если взять интервал по всем возможным значениям величины x , то получим вероятность того, что молекула имеет одно из разрешенных значений x . Эта вероятность равна единице. Отсюда $\int f(x)dx = 1$ – это условие нормировки функции распределения.

Функции распределения определяют не только для молекул газа, но и для любых непрерывно меняющихся величин x . Когда функция распределения известна, можно вычислить среднее значение любой функции $F(x)$, зависящей от переменной x :

$$\langle F(x) \rangle = \frac{\int F(x) d\mathcal{R}}{\int d\mathcal{R}} = \frac{\int F(x) f(x) dx}{\int f(x) dx}.$$

Это среднее значение определяется для любого интервала $x_1 \leq x \leq x_2$. Когда среднее значение определяется по всем возможным значениям x , то знаменатель $\int f(x) dx = 1$.

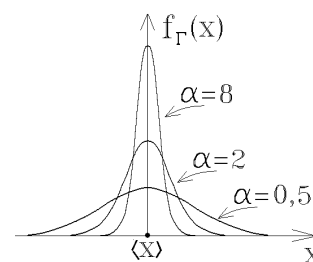
Замечание: если все значения x равновероятны, то $f(x) = \text{const}$ и $\langle F(x) \rangle = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$.

По этой формуле вычисляются, например, средние значения функций, зависящих от времени $\langle F(t) \rangle$, так как каждый момент времени равновероятен.

Если некоторая величина x изменяется **случайно** (соответствует случайным независимым событиям), то она подчиняется распределению Гаусса с функцией распределения

$$f_{\Gamma}(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\alpha(x - \langle x \rangle)^2\right).$$

Здесь α – некоторая положительная постоянная, разная для разных случайных величин. Чем она больше, тем уже кривая распределения Гаусса, показанная на рисунке,



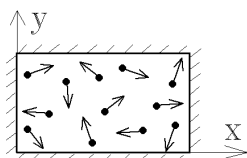
$\langle x \rangle$ – среднее значение величины x . При этом $\mathcal{R}(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} d\mathcal{R} = \int_{x_1}^{x_2} f_{\Gamma}(x) dx$ – это

вероятность того, что случайно изменяющаяся величина имеет значения, лежащие в пределах от x_1 до x_2 .

Все случайные величины, соответствующие независимым событиям в природе, подчиняются распределению Гаусса, но значения параметра α и средняя величина $\langle x \rangle$ для различных переменных x будут разными.

9.2. Распределение Максвелла молекул по проекциям и по величинам скоростей.

Экспериментальная проверка распределения Максвелла



В газе, на который не действуют внешние силы, все положения молекул и направления их движения равновероятны. Иначе газ начнет собираться в местах с наибольшей вероятностью нахождения молекул, т.е. переходить в неравновесное состояние. Это запрещено вторым началом термодинамики. Поэтому **средние значения проекций скоростей молекул на любые направления равны нулю:**

$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0.$$

Учтем, что конкретные значения скоростей молекулы приобретают в результате случайных и независимых столкновений между собой и со стенками сосуда. Поэтому независимые друг от друга проекции их скоростей подчиняются распределению Гаусса:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\alpha(v_x - \langle v_x \rangle)^2\right) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\alpha v_x^2\right); \quad f(v_y) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\alpha(v_y - \langle v_y \rangle)^2\right) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\alpha v_y^2\right);$$

$$f(v_z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\alpha(v_z - \langle v_z \rangle)^2\right) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\alpha v_z^2\right),$$

а вероятность того, что молекула газа имеет проекции скорости \vec{v} в пределах от v_x до $v_x + dv_x$, от v_y до $v_y + dv_y$, от v_z до $v_z + dv_z$ равна произведению вероятностей независимых событий:

$$d\mathcal{R} = f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_x dv_y dv_z = (\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)).$$

Такое распределение молекул газа по проекциям скоростей было впервые получено Джеймсом Максвеллом (1860 г.), который определил для идеального газа выражение постоянной $\alpha = (m/2k_B T)$, где m – масса одной молекулы; T – температура газа; k_B – постоянная Больцмана. Поэтому распределение молекул газа по скоростям было названо распределением Максвелла.

Функция распределения Максвелла по проекциям скоростей молекул имеет вид

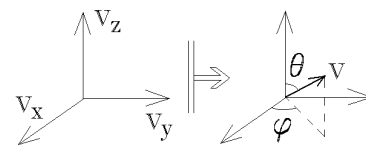
$$f_M(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}\right).$$

а число молекул со скоростями от \vec{v}_1 до \vec{v}_2 в газе можно найти по формуле

$$\Delta N = N \cdot \mathcal{R}(\vec{v}_1 \leq \vec{v} \leq \vec{v}_2) = N \leq \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} \int_{v_{1y}}^{v_{2y}} \int_{v_{1z}}^{v_{2z}} f_M(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z,$$

где N – полное число молекул в газе.

Для того чтобы получить распределение молекул по величинам скоростей v , совершив переход от декартовых переменных v_x, v_y, v_z к сферическим v, θ, φ (см. рисунок), где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$; $v_x = v \sin \theta \cos \varphi$; $v_y = v \sin \theta \sin \varphi$; $v_z = v \cos \theta$.



Якобиан этого преобразования переменных равен $\frac{\partial(v_x, v_y, v_z)}{\partial(v, \theta, \varphi)} = v^2 \sin \theta$ и

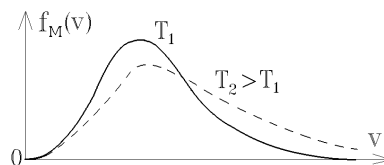
поэтому $\Delta N = N \int_{v_1}^{v_2} dv \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) v^2 \sin \theta = N \int_{v_1}^{v_2} f_M(v) dv$ – это число молекул газа с величинами

скоростей от v_1 до v_2 , где $f_M = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) 4\pi v^2$ – функция распределения Максвелла по величинам скоростей.

Её физический смысл: $d\mathcal{R} = f_M(v)dv$ – это вероятность того, что молекулы газа имеют величины скоростей от v до $v+dv$.

Зависимость $f_M(v)$ изображена на рисунке:

При нагревании газа увеличивается доля молекул с большими скоростями, но площадь под графиком остается постоянной: $\int f_M(x) dx = 1$.



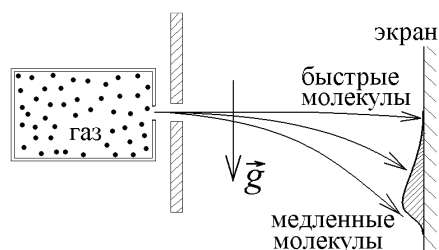
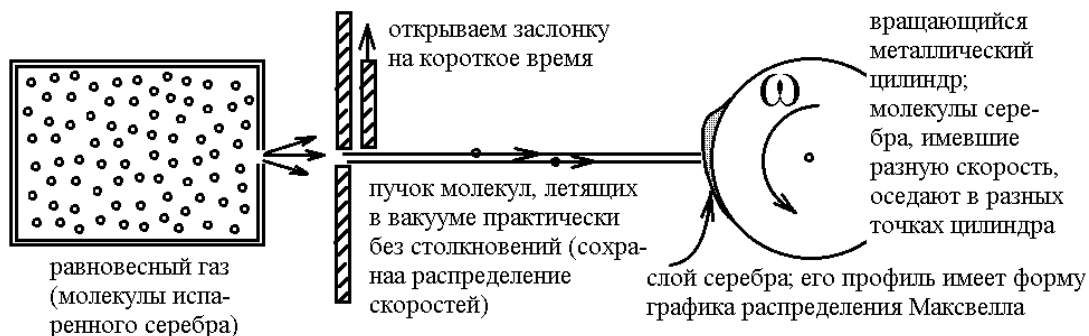
Замечание: распределение Максвелла описывает нерелятивистский газ, так как предполагает хотя и малую, но всё же конечную вероятность существования молекул со скоростями, большими скорости света $v > c$. Функция $f_M(v)$ хорошо определяет распределение по скоростям подавляющей доли молекул газа, но перестает быть справедливой в предельных случаях $v \rightarrow c$ и $v \rightarrow 0$.

Распределение Максвелла **равновесно и стационарно**. Это означает, что как бы не изменялись при столкновениях скорости отдельных молекул газа, в целом доля молекул со скоростями от \vec{v} до $\vec{v} + d\vec{v}$, т.е.

$f_M(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$ **остается неизменной**.

Экспериментальную проверку распределения Максвелла можно провести несколькими опытами, показанными на следующих рисунках:

Опыт Штерна (1920г.)

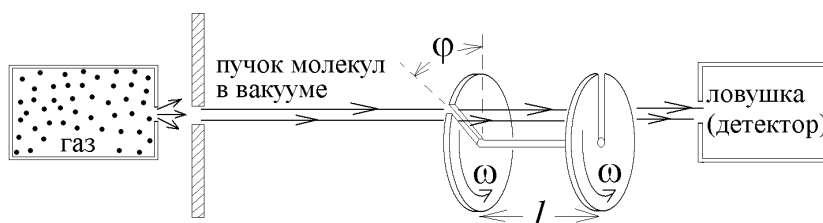


Аналог опыта Штерна – осаждение молекул на экране в поле сил тяжести (рисунок слева), также дающий профиль осажденных молекул в соответствии с распределением Максвелла.

2) Опыт Ламмерта (1929г.)

Изменяя угловую скорость вращения дисков, можно определить долю молекул с определенной величиной скорости, пролетающих в детектор через обе прорези.

Все экспериментальные опыты доказали справедливость распределения Максвелла.



9.3. Средние скорости молекул газа

Скорость, которую имеет наибольшая доля молекул газа, называется наиболее вероятной скоростью молекул v_B . Она соответствует максимуму функции распределения Максвелла и определяется из условия

$$\frac{df_M(v)}{dv} = 0, \text{ что дает } v_B = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}.$$

Большая часть молекул имеет скорости, превышающие v_B . Средняя скорость молекул газа (средняя арифметическая) вычисляется по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^\infty v \cdot f_M(v) dv}{\int_0^\infty f_M(v) dv} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

Например, молекулы кислорода с массой $m = 5,35 \cdot 10^{-26}$ кг имеют при $T = 300$ К среднюю скорость 444 м/с. Примерно с такими же скоростями движутся молекулы воздуха в комнате.

Средняя квадратичная скорость молекул v_{KB} соответствует молекулам со средней кинетической энергией

$$\langle E \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{mv_{KB}^2}{2} \quad \text{то есть} \quad v_{KB} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty v^2 \cdot f_M(v) dv}{\int_0^\infty f_M(v) dv}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

В 1 моле газа содержится N_{AB} молекул, поэтому $k_B/m = (k_B N_{AB})/(m N_{AB}) = R/\mu$, откуда следует:

$$v_B = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}; \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}; \quad v_{KB} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Из формулы для v_{KB} следует, что средняя энергия молекулы (материальной точки) $\langle E \rangle = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{mv_{KB}^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T$. Таким

образом, чем сильнее нагрет газ, тем быстрее движутся его молекулы.

Вывод: температура идеального газа является мерой кинетической энергии его молекул. В этом заключается смысл термодинамического параметра – температуры в молекулярно-кинетической теории.

Попутно получаем еще один вывод: теплота – это энергия, передаваемая или уносимая молекулами газа при соударениях.

При $T_{\text{газ}} > T_{\text{тела}}$ молекулы газа отдают при соударениях часть своей кинетической энергии молекулам тела, т.е. тело нагревается, а газ охлаждается, и наоборот.

Из распределения Максвелла следует, что при $T = 0$ К $f_M(v) \sim \exp(-mv^2/0) = \exp(-\infty) = 0$, если $v \neq 0$.

Т.е. при $T = 0$ К движение молекул должно прекратиться, и их скорости обратятся в нуль.

9.4. Частота соударений молекул газа о стенку сосуда

Определим зависимость числа столкновений молекул идеального газа со стенкой сосуда от термодинамических параметров T и p . Если n – число молекул газа в единице объема (концентрация молекул газа), то, согласно распределению Максвелла, число молекул со скоростями от \vec{v} до $\vec{v} + d\vec{v}$ в единице объема будет равно

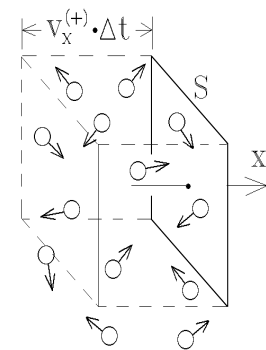
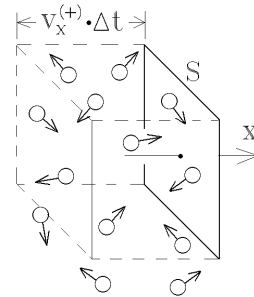
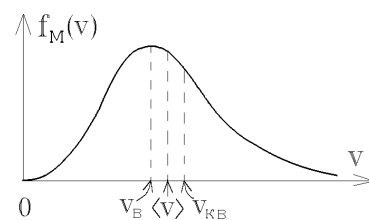
$$dn = n \cdot f_M(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z.$$

Направим ось x перпендикулярно участку стенки площадью S . Тогда за время Δt со стенкой столкнутся все молекулы, имеющие проекции скорости $v_x^{(+)}$, направленной к стенке и находящиеся в объеме $S \cdot v_x^{(+)} \cdot \Delta t$ (см. рисунок). Проекции их скоростей v_y и v_z могут быть любыми, и по ним следует взять сумму (интеграл). Тогда число столкновений с этим участком стенки для молекул с проекциями скорости от $v_x^{(+)}$ для $v_x^{(+)} + dv_x^{(+)}$ вычисляется по формуле:

$$dN = \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \left[S \cdot \Delta t \cdot v_x^{(+)} \cdot n \cdot f_M(v_x^{(+)}, v_y, v_z) dv_x^{(+)} \right].$$

Чтобы найти полное число столкновений всех молекул с участком стенки S , надо проинтегрировать по всем возможным значениям проекций скорости $v_x^{(+)}$, направленной к стенке:

$$\Delta N = S \cdot \Delta t \cdot n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \int_0^{+\infty} dv_x^{(+)} \cdot v_x^{(+)} \cdot \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m(v_x^{(+)^2} + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T} \right) = n S \Delta t \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}$$

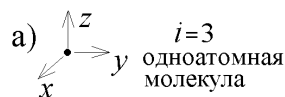


Используя выражение для средней скорости молекул газа $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$, получаем формулу частоты соударений молекул газа со стенкой или числа соударений молекул газа с единичной площадью за единицу времени:

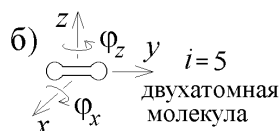
$$v = \frac{\Delta N}{S \cdot \Delta t} = \frac{1}{4} n \langle v \rangle.$$

9.5. Внутренняя энергия и теплоемкость в молекулярно-кинетической теории

Молекулы одноатомного газа можно считать материальными точками их средняя энергия была приведена в разделе 19.3: $\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T$. Так как точка имеет три поступательные степени свободы (может двигаться в трех взаимно-

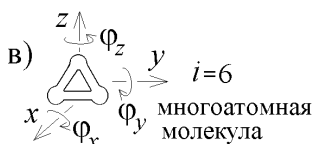


перпендикулярных направлениях вдоль осей x, y, z), то на одну степень свободы такой молекулы приходится средняя энергия $\langle E_1 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$. Этот же результат получим вычисляя сред-



нюю кинетическую энергию движения молекул вдоль оси x с помощью распределения Максвелла по проекции скорости v_x :

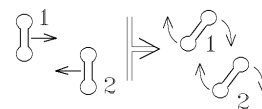
$$\left\langle \frac{mv_x^2}{2} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{mv_x^2}{2} f_m(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{mv_x^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) dv_x = \frac{1}{2} k_B T.$$



Но молекулы идеального газа могут иметь более сложную форму и объем. Важно, чтобы эти молекулы не взаимодействовали друг с другом на расстоянии и соударялись упруго. Тогда у молекулы двухатомного газа появляются две вращательные степени свободы вокруг двух осей из трех (вращение вокруг третьей оси, которая совпадает с осью молекулы, не изменяет положения молекулы). Двухатомная молекула имеет $i = 5$ степеней свободы, а молекула многоатомного газа $i = 6$ степеней свободы.

Так как при соударениях молекул вращательное движение переходит в поступательное и наоборот, то справедлива теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы:

на каждую степень свободы молекулы приходится одинаковая средняя энергия $\langle E_1 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$.



Молекула идеального газа, обладающая i степенями свободы, имеет среднюю энергию $\langle E \rangle = \frac{i}{2} k_B T$, а внутренняя энергия такого газа, состоящего из N молекул, складывается из их кинетических энергий: $U = N \cdot \langle E \rangle = N \cdot \frac{i}{2} k_B T$.

Учтем, что $N k_B = \frac{m_{\text{газа}}}{\mu} N_A \cdot k_B = \frac{m_{\text{газа}}}{\mu} R$ и поэтому $U = \frac{m_{\text{газа}}}{\mu} \frac{i}{2} R T$.

Сравнивая с термодинамическим выражением: $U = \frac{m_{\text{газа}}}{\mu} C_V T$, получаем выражение для молярной теплоемкости

идеального газа при постоянном объеме: $C_V = \frac{i}{2} R$, где R – универсальная газовая постоянная.

В таком случае показатель адиабаты: $\gamma = C_p / C_V = (i + 2) / i$, откуда следует: $\gamma = 5/3 = 1,67$ ($i = 3$) для одноатомного газа; $\gamma = 7/5 = 1,40$ ($i = 5$) для двухатомного газа; $\gamma = 8/6 = 1,33$ ($i = 6$) для многоатомного газа.

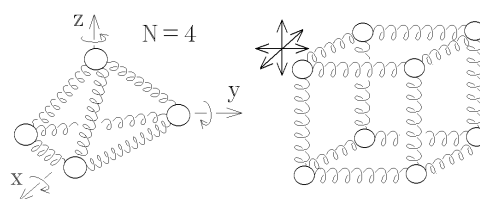
Замечание. Опыт показывает, что для двухатомных газов молярная теплоемкость при постоянном объеме является функцией температуры. Дело в том, что при очень низких температурах ($T \leq 2 + 3$ К) любая молекула не является классической частицей, а подчиняется законам **квантовой теории**, и по этим законам не может скачком приобрести энергию вращательного движения, то есть ведет себя как точечная частица с тремя степенями свободы. (В переходной области часть молекул уже вращается, а часть – нет, поэтому теплоемкость не испытывает резкого скачка).

При высоких температурах молекула перестает быть «жесткой». Ее атомы начинают колебаться относительно положения равновесия. При **малых** смещениях эта система ведет себя как упругий гармонический осциллятор, в котором кинетическая энергия переходит в потенциальную и наоборот, причем $\langle E_{\text{пот}} \rangle = \langle E_{\text{кин}} \rangle = (1/2) k_B T$.

На каждую колебательную связь двух атомов в молекуле приходится две степени свободы, и средняя энергия такой связи:

$$\langle E_{\text{кол}} \rangle = k_B T.$$

Поэтому при больших температурах, когда все молекулы двухатомного газа приобретают колебательные степени свободы, число степеней свободы молекулы $i = 7$. Подобная зависимость молярной теплоемкости двухатомного газа при постоянном объеме от температуры показана на следующем рисунке.

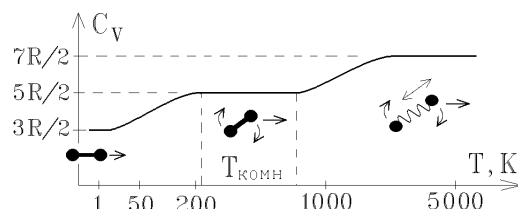


Пусть теперь молекула состоит из N атомов, которые могут смещаться (колебаться) друг относительно друга. Система из N независимых материальных точек (атомов) имеет $3N$ степени свободы (каждая точка может смещаться вдоль трех осей координат x, y, z), а 6 степеней свободы приходится на поступательное движение и вращение молекулы как целого, то такая молекула будет иметь $(3N-6)$ независимых колебательных связей.

Поэтому число степеней свободы для нее: $i = 6 + 2 \cdot (3N-6) = 6N-6$, средняя энергия такой молекулы $\langle E \rangle = (3N-3) k_B T$, а молярная теплоемкость газа из подобных N -атомных молекул $C_V = (3N-3) \cdot R$.

В кристаллических твердых телах каждый атом решетки может совершать независимые колебания в трех взаимно перпендикулярных направлениях относительно неподвижного положения равновесия, то есть обладает $i = 2 \cdot 3 = 6$ степенями свободы, поскольку каждый осциллятор имеет помимо кинетической потенциальную энергию. Средние значения кинетической и потенциальной энергии такого осциллятора (атома решетки) одинаковы, а число степеней свободы удваивается по сравнению со свободной частицей.

Молярная теплоемкость кристаллических твердых тел при постоянном объеме $C_V = (3N-3) \cdot R$. Эта классическая формула называется правилом Дюлонга-Пти и достаточно хорошо соответствует опыту.



9.6. Идеальный газ в поле внешних сил. Барометрическая формула

Атмосферное давление на какой-либо высоте h обусловлено весом вышележащих слоев газа. Пусть p — давление газа на высоте h . Тогда на высоте $h + dh$ давление $p + dp$, причем если $dh > 0$, то $dp < 0$, так как вес вышележащих слоев атмосферы, а следовательно, давление с высотой убывают. Разность давлений p и $p + dp$ равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра с площадью основания, равной единице и высотой dh :

$$p - (p + dp) = \rho \cdot g \cdot dh,$$

где ρ — плотность газа на высоте h . Отсюда $dp = -\rho g dh$. Плотность атмосферы ρ можно выразить из уравнения состояния идеального газа через давление и температуру. При условиях, близких к нормальным, газы, входящие в состав атмосферы, мало отличаются по своему поведению от идеального. Поэтому воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m_{\text{газа}}}{\mu} RT, \text{ откуда } \rho = \frac{m_{\text{газа}}}{V} = \frac{p\mu}{RT}, \text{ что приводит к уравнению } dp = -\rho g dh = -\frac{p\mu g}{RT} dh. \text{ Разделяем}$$

в нем переменные $\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh$ и интегрируем обе части.

В общем случае температура газа атмосферы является функцией высоты и атмосфера неравновесна. Если вид этой функции известен, то после интегрирования можно получить зависимость $p = p(h)$.

Если считать, что атмосфера равновесна и $T = \text{const}$, то после интегрирования получим:

$$\ln p = -\frac{\mu g h}{RT} + \ln(\text{const}).$$

Взяв экспоненты от обеих частей этого уравнения и подставляя начальные условия (на уровне $h = 0$ давление равно $p_0 = \text{const}$), получаем зависимость давления атмосферы от высоты h для равновесной атмосферы:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right),$$

которое называется барометрической формулой.

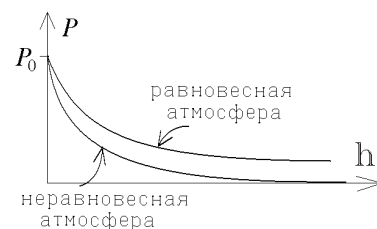
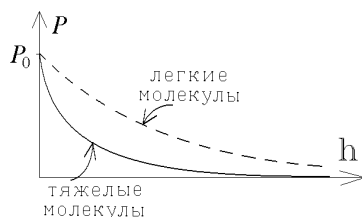
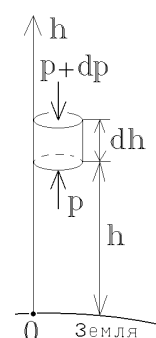
Из нее следует, что давление атмосферного газа убывает тем быстрее, чем тяжелее газ (чем больше молярная масса газа) и чем ниже температура газа.

Заметим, что график, изображенный на рисунке справедлив только для статичной атмосферы. В атмосфере Земли непрерывно происходит процесс конвективного перемешивания различных газов, в результате чего процентное содержание всех газов, и лёгких, как водород, и тяжёлых, как углекислый газ, одинаково вплоть до высоты $h = 100$ км.

Заметим также, что на больших высотах, где потенциальную энергию молекулы следует считать по формуле

$$E_{\text{пот}} = -G \frac{mM_{\text{Земли}}}{(R_{\text{Земли}} + h)}, \text{ барометрическая формула изменяется и дает ненулевой}$$

результат при $h \rightarrow \infty$. Равновесная атмосфера должна улечься в окружающее космическое пространство, что произошло с атмосферой Луны и постепенно происходит с атмосферой Марса. К счастью, наша атмосфера не равновесна и её температура изменяется с высотой h (сначала убывает, а потом возрастает), что позволяет её существование.



9.7. Распределение Больцмана и Максвелла-Больцмана

Если заменить давление газа p выражением $nk_B T$, то получим закон изменения с высотой числа молекул газа в единице объема:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right),$$

где n_0 – число молекул в единице объема на высоте, равной нулю, n – число молекул в единице объема на высоте h .

Полученное выражение можно преобразовать, заменив отношение μ/R на отношение m/k_B , где m – масса одной молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right).$$

Отсюда следует, что с понижением температуры число частиц на высотах, отличных от нуля, убывает, обращаясь в нуль при $T = 0$. При абсолютном нуле все молекулы расположились бы на земной поверхности. При высоких температурах напротив, концентрация слабо убывает с высотой, так что молекулы оказываются распределенными на высоте почти равномерно.

Этот факт имеет простое физическое объяснение. Каждое конкретное распределение молекул по высоте устанавливается в результате действия двух тенденций: 1) притяжение молекул к земле (характеризуется силой тяжести) стремится расположить их на поверхности Земли; 2) тепловое движение (характеризуется величиной $k_B T$) стремится разбросать молекулы равномерно по всем высотам. Чем больше масса молекулы и меньше температура, тем сильнее преобладает первая тенденция и молекулы сгущаются у поверхности Земли. В пределе при $T = 0$ тепловое движение прекратится и под влиянием притяжения молекулы располагаются на земной поверхности. При высоких температурах превалирует тепловое движение, и плотность молекул медленнее убывает с высотой.

Если обозначить: $E_{\text{пот}} = mgh$ – потенциальная энергия одной молекулы газа, то

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{пот}}}{k_B T}\right),$$

где n_0 – число молекул в единице объема на той высоте, где $E_{\text{пот}} = 0$, n – число молекул в единице объема, соответствующие тем точкам пространства, где потенциальная энергия равна $E_{\text{пот}}$. Такое распределение концентрации молекул справедливо в поле действия любых внешних консервативных сил и называется распределением Больцмана.

Объединяя это распределение с распределением Максвелла молекул по скоростям, получаем распределение Максвелла-Больцмана:

$$dN = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\frac{mv^2}{2} + E_{\text{пот}}(x, y, z)}{k_B T}\right) 4\pi v^2 dv dx dy dz - \text{это число молекул со скоростями от } v \text{ до } v + dv \text{ в}$$

элементе объема $dV = dx dy dz$ в точке с координатами x, y, z .

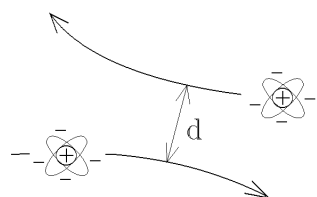
При температурах около 300 К молекулы газа движутся с огромными скоростями $v \approx 400 + 500$ м/с и их кинетическая энергия намного превышает изменение потенциальной энергии $\Delta E_{\text{пот}}$ при движении в пространстве. Поэтому можно считать, что $E_{\text{пот}} = \text{const} = 0$ в той области пространства, в которой движутся молекулы газа, и принять их энергию практически равной кинетической энергии: $E \approx mv^2/2$. Тогда $v^2 dv = \text{const} \cdot \sqrt{E} dE$.

Это позволяет написать распределение Максвелла-Больцмана по энергиям для концентрации частиц **классического газа**:

$$dn = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \sqrt{E} dE.$$

10. КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ (ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА)

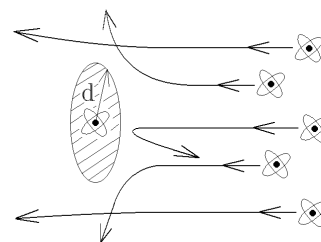
10.1. Столкновения молекул газа между собой. Эффективное сечение взаимодействия молекул и средняя длина свободного пробега молекулы



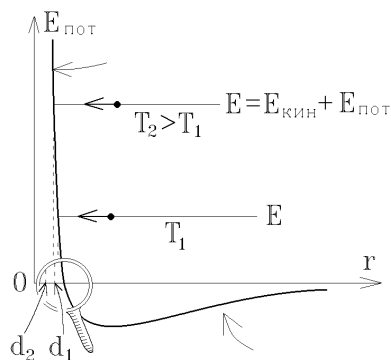
Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется эффективным диаметром молекулы d .

Круг с диаметром d с центром в молекуле имеет площадь $\sigma = \pi d^2$, которую называют эффективным сечением молекулы. Попадая в пределы этого круга

другие молекулы рассеиваются, отклоняются на молекуле-мишени.



Как видно из приведенного ниже графика зависимости потенциальной энергии взаимодействия двух молекул от расстояния r между ними, при повышении температуры или при увеличении кинетической энергии сталкивающихся



молекул, их эффективный диаметр взаимодействия возрастает ($d_2 \geq d_1$), но очень незначительно. Поэтому для термодинамических процессов можно считать, что эффективный диаметр молекулы и её эффективное сечение рассеяния не зависят от температуры и постоянны:

$$d, \sigma = \text{const}.$$

Сталкиваясь с другими молекулами, выделенная молекула движется по ломаной линии со средней скоростью $\langle v \rangle$ и за время τ проходит путь $\langle v \rangle \tau$. При этом она рассеивается на $N = n \langle v_{\text{отн}} \rangle \sigma \tau$ молекулах, чьи центры окажутся внутри ломаного цилиндра с сечением σ (см. рисунок). Так как средняя относительная скорость движущихся молекул

$\langle v_{\text{отн}} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$, то среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями молекул, которое называется средней длиной свободного пробега молекулы, равно

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle \tau}{N} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

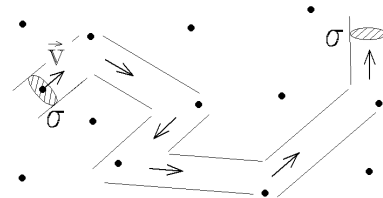
При этом частота столкновений молекул между собой, т.е. число соударений с другими молекулами, которое каждая молекула в среднем испытывает за единицу времени, равно

$$\nu' = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle,$$

где n – концентрация молекул газа.

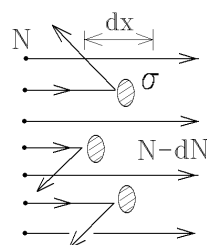
Поскольку при постоянной температуре, давление пропорционально концентрации молекул ($p = nk_B T$), то средняя длина свободного пробега оказывается обратно пропорциональной давлению: $\lambda \sim 1/p$.

Заметим, что для воздуха при нормальных условиях $d \sim 3 \cdot 10^{-10}$ м, $\langle v \rangle \approx 450$ м/с, $\lambda \sim 10^{-7}$ м, $\nu' \sim 5 \cdot 10^9$ с $^{-1}$, т.е. каждая из молекул газа испытывает несколько миллиардов столкновений за одну секунду.



10.2. Рассеяние пучка молекул в газе

Рассмотрим пучок молекул, летящий в газе из таких же молекул. Пусть каждую секунду через поперечное сечение S пролетает N_0 молекул пучка. Так как в слое газа толщиной dx находится $nSdx$ молекул с общим сечением $dS = \sigma nSdx$, то число молекул dN , рассеиваемых при соударениях (убыль молекул в пучке после прохождения слоя dx) пропорционально суммарной площади эффективных сечений встречаемых молекул:



Эффективных сечений встречаемых молекул: $\frac{-dN}{N} = \frac{dS}{S} = \frac{\sigma n S dx}{S}.$

Интегрируя это уравнение, получаем закон уменьшения числа молекул в рассеиваемом пучке после прохождения расстояния x : $N = N_0 \exp(-\sigma n x).$

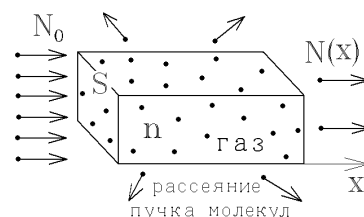
Этот вывод сделан для рассеяния пучка на неподвижных молекулах. Если учесть движение молекул газа, то полученный результат изменится:

$$N = N_0 \exp(-\sqrt{2} \sigma n x).$$

С учетом выражения для средней длины свободного пробега молекул, $\lambda = 1/\sqrt{2} \sigma n$, находим вероятность прохождения молекулой расстояния x без соударений с другими молекулами (по закону больших чисел эта вероятность пропорциональна числу N не рассеянных молекул):

$$\mathfrak{R} = N/N_0 = \exp(-x/\lambda).$$

Эта вероятность очень быстро, экспоненциально, уменьшается с пройденным расстоянием x .



10.3. Явления переноса в идеальном газе. Поток переносимой величины

Хаотически меняя направление движения при многочисленных соударениях, молекулы газа, тем не менее, способны переносить из одних точек пространства в другие присущие им массу, энергию и импульс. Это приводит к возникновению ряда процессов, объединяемых под общим названием явления переноса. К ним относятся диффузия (перенос массы), теплопроводность (перенос энергии) и внутреннее трение или вязкость (перенос импульса).

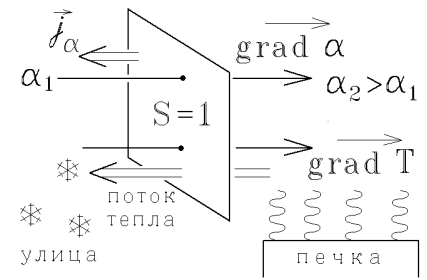
Пусть α – некоторая усредненная величина, которую переносят молекулы при движении. Газ стремится к равновесному состоянию, когда величина α всюду одинакова. Плотность потока \vec{j}_α величины α – это количество α , переносимое молекулами за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению переноса. Направление того вектора указывает направление переноса. Так как поток α стремится уничтожить различие во всех точках

пространства, то вектор \vec{j}_α направлен в сторону наибо́льшего убывания величины α , т.е. против вектора $\text{grad } \alpha$. Его общее выражение можно записать как

$$\vec{j}_\alpha = -C \cdot \text{grad } \alpha,$$

где C – постоянная, различная для разных процессов переноса в разных средах. Например, перенос тепла происходит с выравниванием температуры T (см. рисунок).

Вычислим величину постоянной C в газе. Для этого направим ось x вдоль вектора $\text{grad } \alpha$. С помощью распределения Максвелла можно вычислить не только длину свободного пробега λ **в произвольном направлении**, но и среднюю длину пробега в выделенном направлении вдоль оси x : $\lambda_x = 2\lambda/3$ (это среднее расстояние между двумя плоскостями, перпендикулярными оси x , пролетаемое молекулой между двумя последовательными соударениями).



Как показано на рисунке, справа на единичную площадку с координатой x падают молекулы, находившиеся ранее в точках с координатой $x + \lambda_x$ и преодолевшие путь λ_x без соударений, т.е. без изменения своих свойств. Они переносят через площадку величину $\alpha(x + \lambda_x)$, которую они имели в точках с координатами $x + \lambda_x$. Эту величину надо умножить на частоту соударений молекул с единичной площадкой за единицу времени $\nu = n\langle v \rangle / 4$. Аналогично, слева молекулы перенесут величину $\alpha(x - \lambda_x)$, которую они имели до соударений в точках с координатами $x - \lambda_x$. Суммарная величина α , переносимая молекулами вдоль оси x через единицу площади за единицу времени, будет равна $j_{\alpha x} = n\langle v \rangle \cdot (\alpha(x - \lambda_x) - \alpha(x + \lambda_x)) / 4$.

Если подставить разложение функции в ряд: $\alpha(x \pm \lambda_x) = \alpha(x) \pm \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \cdot \lambda_x + O(\lambda_x^2)$, то получим выражение для плотности потока любой величины α , переносимой молекулами в газе:

$$j_{\alpha x} = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad \text{или в векторном виде} \quad \boxed{\vec{j}_\alpha = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \cdot \text{grad } \alpha}.$$

Поток величины α или количество этой величины, переносимой за единицу времени через произвольную площадь S равен $J_\alpha = \int \vec{j}_\alpha \cdot d\vec{S}$ или $\vec{J}_\alpha = -C \cdot \text{grad } \alpha \cdot S$.

10.4. Теплопроводность. Коэффициент теплопроводности

При перепаде температур возникает поток тепла $J_Q = dQ/dt$, т.е. суммарной энергии, переносимой молекулами газа из области с большей в область с меньшей температурой. Так как средняя энергия одной молекулы $\alpha = i k_B T / 2$ пропорциональна температуре газа, то плотность потока тепла в любой среде имеет вид

$$\vec{j}_Q = -\kappa \text{grad } T \quad \text{— это закон Фурье, где } \kappa \text{ — коэффициент теплопроводности.}$$

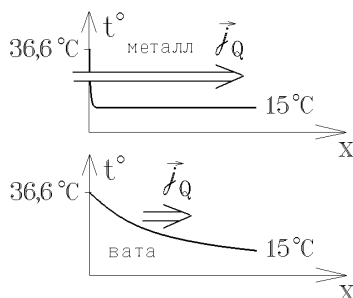
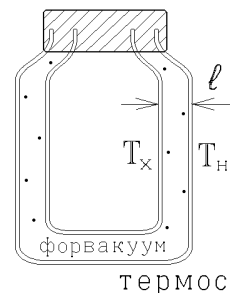
Согласно общему результату раздела 10.3, после подстановки α получаем для газов

$$\vec{j}_Q = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle \lambda \cdot \text{grad} \left(\frac{i}{2} k_B T \right), \quad \text{откуда коэффициент теплопроводности газа } \kappa = \frac{i}{2} k_B n \langle v \rangle \lambda.$$

Так как $n\lambda = 1/\sqrt{2}\sigma \approx \text{const}$, а средняя скорость молекул $\langle v \rangle = \sqrt{8k_B T / \pi m}$, то коэффициент теплопроводности газа $\kappa \sim \sqrt{T}$ и не зависит от давления. К тому же из полученной формулы видно, что чем легче газ, чем меньше масса m его молекул, тем лучше газ проводит тепло.

Замечание: если газ в сосуде настолько разрежен, что молекулы пролетают расстояние l между его стенками практически без соударений с другими молекулами, то в формуле для κ надо заменить среднюю длину свободного пробега λ на расстояние l . Тогда $\kappa = \frac{i}{2} k_B n \langle v \rangle l \sim \frac{p}{\sqrt{T}}$.

Такой сильно разреженный газ называется **форвакуумом**. С уменьшением давления p в нем теплопроводность уменьшается. Форвакуум, содержащийся между двойными стенками, используют для предотвращения переноса тепла из **термосов** или **сосудов Дьюара**.



Заметим также, что субъективное чувство тепла или холода, испытываемое человеком, определяется не столько температурой окружающей среды, сколько её теплопроводностью. Попробуйте сесть на ватное одеяло или на металлический стул, имеющие одинаковую температуру 10-15°C. Так как коэффициент теплопроводности металлов очень большой и практически не зависит от температуры ($\kappa \approx \text{const}$), то велик и поток уносимого тепла. Потеря тепла ощущается человеком как холод (температура металла при этом в месте соприкосновения практически не меняется, так как тепло быстро уходит вглубь металла).

Воздух имеет в 10^4 - 10^5 раз меньшую теплопроводность, чем любой металл. Кроме того, в слоях ваты при прогревании воздуха его температура в месте соприкосновения меняется плавно, мал $\text{grad } T$ и мал поток отводимого тепла. Но слой ваты (или одежда) предотвращает появление конвекционных потоков: так как $p = nk_B T$, то на границе нагретого и холодного воздуха возникает перепад давления и возникновение упорядоченного перемещения газа (ветер). Основным механизмом передачи тепла в воздухе, в отличие от твердых сред, является конвекционный теплоперенос.

10.5. Диффузия. Коэффициент диффузии

Другой пример явления переноса – диффузия. Пусть газ состоит из молекул двух разных сортов с концентрациями n_1 и n_2 соответственно ($n_1 + n_2 = n$). Введем величину удельной концентрации $\alpha_i = n_i/n$, $i = 1, 2$, и подставим её в выражение для

плотности потока: $\vec{j}_\alpha = -\frac{1}{3}n\langle v \rangle \lambda \cdot \text{grad } \frac{n_i}{n}$ – это число молекул i -го сорта, пересекающих единичную площадку за единицу времени.

Полученное выражение называется законом Фика: $\vec{j}_{n_i} = -D_i \cdot \text{grad } n_i$, где D_i – коэффициент диффузии, зависящий от свойств среды.

В газах этот коэффициент D_i называется коэффициентом самодиффузии (самодиффузия – это перенос каким-либо образом выделенных молекул в среде из таких же молекул).

В среде из молекул двух разных сортов закон Фика для диффузионных потоков запишется в виде

$\vec{j}_{n_i} = -D_{\text{вз}} \cdot \text{grad } n_i$, где коэффициент взаимной диффузии $D_{\text{вз}} = \frac{D_1 n_2 + D_2 n_1}{n_1 + n_2}$ выражается через коэффициенты самодиффузии D_i и одинаков для молекул обоих сортов.

Подстановка $\langle v \rangle = \sqrt{8k_B T / \pi m}$ и $\lambda = 1 / \sqrt{2} \sigma n$ приводит к следующей зависимости коэффициента диффузии в газах от термодинамических параметров: $D_i = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda \sim \frac{T^{3/2}}{\sqrt{m_i} \sigma_i p}$. Это означает, что наиболее быстро диффундируют легкие газы с малой массой молекул m . С другой стороны эффект диффузии существенно зависит от температуры: диффузия газов в атмосфере (например – распространение запахов) заметнее идет летом, а не зимой.

Чтобы установить зависимость диффузионного процесса от времени (как и все процессы переноса, диффузия – это процесс установления равновесия, когда выравниваются концентрации молекул каждого сорта, такой процесс характеризуется временем релаксации – временем установления равновесия), рассмотрим простейший случай самодиффузии, происходящий вдоль оси x .

Поток молекул с величиной $|\vec{j}_{n_i}| = D \frac{\partial n_i}{\partial x}$ втекает в выделенный цилиндрический объем через поперечную площадь S в точке с координатой $x+dx$ и вытекает из неё в точке с координатой x . Число молекул внутри данного объема изменяется за время dt на величину

$$dN_i = j_{n_i}(x+dx) \cdot S dt - j_{n_i}(x) \cdot S dt = \frac{\partial j_{n_i}}{\partial x} dx \cdot S dt = D \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} \cdot S dx dt.$$

Поделив на объём цилиндра $S dx$, получим изменение концентрации молекул i -го сорта в нем: $dn_i = D \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} dt$,

откуда следует нестационарное уравнение диффузии $\frac{\partial n_i}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2}$, позволяющее найти зависимость n_i от времени.

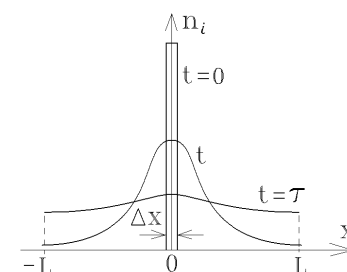
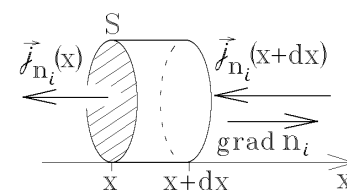
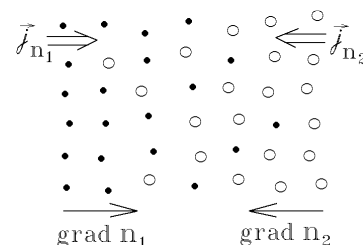
Пусть в начальный момент времени $t=0$ молекулы i -го сорта распределены в очень узком слое толщины Δx . Тогда решением полученного уравнения диффузии

будет $n_i = \frac{\text{const}}{\sqrt{t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$, что нетрудно проверить подстановкой этого решения в

уравнение. Как видно из графика решения, молекулы i -го сорта, совершая случайные блуждания, “расползаются” подобно чернильному пятну. В момент времени

$t = \tau = \frac{L^2}{D}$, где $2L$ – размер области, в которой происходит диффузия, отношение $n_i(x=L)/n_i(x=0) \approx 0,8$, т.е. можно

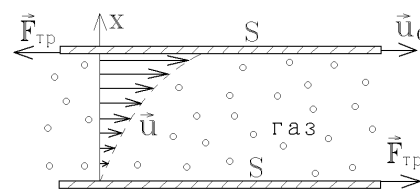
считать, что к этому времени концентрация молекул успевает выровняться (см. рисунок). Поэтому время $\tau = \frac{L^2}{D}$ – это время установления равновесия или время релаксации.



10.6. Вязкость газа. Динамический коэффициент вязкости.

Сила вязкого трения в газообразной и жидкой среде

На любое тело, движущееся со скоростью \vec{u} в газообразной или в жидкой среде действует диссипативная сила вязкого трения. Рассмотрим её действие на примере пластины площади S , движущейся со скоростью \vec{u}_0 над такой же неподвижной пластиной. Слой молекул, прилегающий к поверхности движущегося тела, захватывается и движется с той же скоростью \vec{u}_0 , а вблизи неподвижного тела слой молекул также неподвижен. Возникает градиент импульсов молекул газа в поперечном направлении, что вызовет поток величины $\alpha = \mu u$, т.е. перенос импульса от движущегося газа к покоящемуся (весь газ приходит в движение).



Поток импульса, согласно формулам раздела 10.3, имеет размерность силы и называется силой вязкого трения, стремящейся затормозить любое движущееся в жидкой или газообразной среде тело:

$$\vec{F}_{\text{вязк.тр.}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = J_p = -\frac{1}{3}n\langle v \rangle \lambda \cdot \text{grad}(\mu u) \cdot S \quad \text{или} \quad \boxed{\vec{F}_{\text{вязк.тр.}} = -\eta \cdot \text{grad} u \cdot S}.$$

Т.е. сила вязкого трения пропорциональна площади боковой поверхности движущегося тела, градиенту скорости среды, увлекаемой телом, и коэффициенту η , который называется динамической вязкостью среды и в газах равен

$$\eta = \frac{1}{3}n\lambda m \langle v \rangle.$$

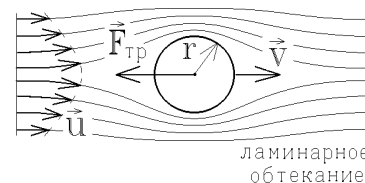
Пример: нельзя утверждать, что на больших высотах, в стратосфере, где воздух разрежен, тормозящая сила трения, действующая на самолёты, резко уменьшается. Действительно, так как $n\lambda \sim 1/\sqrt{2}\sigma$, то $\eta \sim \sqrt{mT}/\sigma$, динамическая вязкость и сила вязкого трения от давления воздуха не зависят. Уменьшение же вязкости с уменьшением температуры, даже на 80 К не столь значительно ($\sqrt{300\text{ К}}/\sqrt{220\text{ К}} = 1,16$). Именно сила вязкого трения создает подъёмную силу, действующую на крыло, и с этой точки зрения движение самолета практически одинаково на больших и малых высотах. Но вблизи поверхности Земли возникают сильные конвекционные потоки, которые при большой скорости бросают самолёт вверх-вниз на 150 м (воздушные ямы). Чтобы не было резких бросков, самолёты и летают на больших высотах. В очень разреженном газе, почти вакууме, столкновений между молекулами нет, и вязкое трение (передача импульса другим слоям при столкновениях молекул) исчезает. Космические корабли тормозятся только за счёт прямых (лобовых) столкновений с молекулами.

10.7. Ламинарное и турбулентное течение газообразной или жидкой среды.

Критерий Рейнольдса

Приведенная выше формула для силы вязкого трения справедлива **только для ламинарного обтекания движущегося тела слоями газа или жидкости**.

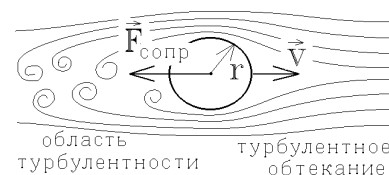
В этом случае слои вязкой среды начинают перемещаться с разными скоростями, но не образуют вихрей, "скользят" друг относительно друга. Величина силы вязкого трения зависит от формы движущегося тела. Так, при ламинарном обтекании шара радиуса r , движущегося со скоростью \vec{v} в жидкости с динамической вязкостью η на шар действует сила вязкого трения $\vec{F}_{\text{тр}} = -6\pi\eta r\vec{v}$, названная силой Стокса.



Если скорость тела велика, то картина обтекания меняется: за движущимся телом образуются беспорядочные вихри, обтекание становится **турбулентным**. В области турбулентности невозможно предсказать траекторию движения частиц среды. В случае турбулентного течения на движущееся тело будет действовать не сила вязкого трения, а сила сопротивления среды, пропорциональная плотности среды ρ , площади поперечного сечения S и квадрату его скорости v^2 :

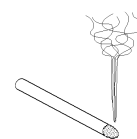
$$F_{\text{сопр}} = \text{const} \cdot \rho S v^2,$$

зависящая от формы обтекаемого тела. Для шара $F_{\text{сопр}} = 0,74 \cdot \rho S v^2$.

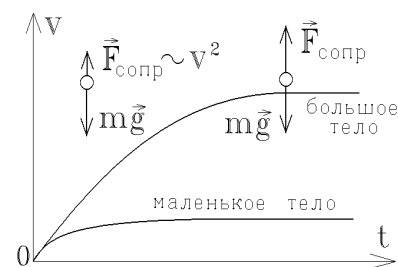


Пример: дым от сигареты или дым от фабричных труб поднимается вверх тонкой струйкой (ламинарно). Но скорость подъема легких нагретых газов увеличивается благодаря выталкивающей силе и на некоторой высоте становится настолько большой, что движение струи становится турбулентным.

Установить характер движения можно с помощью критерия Рейнольдса. Для этого вводят безразмерное число Рейнольдса $Re = \rho v d / \eta$, где d – поперечный размер обтекаемого тела или струи, v – средняя скорость движения, ρ – плотность среды, η – её динамическая вязкость. Если это число меньше некоторого критического $Re < Re_{\text{кр}}$ то обтекание тела или течение струи ламинарно. В противном случае, когда $Re > Re_{\text{кр}}$ течение турбулентно.



Пример: при падении тел с большой высоты надо учитывать силу сопротивления воздуха. Для шара $Re_{кр} = 2,5$. Если скорость падения шара достигнет значения $v_{кр} = \eta Re_{кр} / (2r\rho)$, то формула Стокса перестает быть применимой. В воздухе для шара с радиусом $r = 1$ см находим $v_{кр} = 2$ мм/с, т.е. при падении тел в воздушной среде речь действительно идет о силе сопротивления, растущей пропорционально v^2 . Когда ее величина сравнивается с величиной силы тяжести mg , скорость тела устанавливается и дальше не меняется. Но сила тяжести пропорциональна объему, т.е. кубу размера тела, а сила сопротивления среды пропорциональна площади поверхности или квадрату размера тела. В результате для малых тел скорость падения становится постоянной намного быстрее, а установившаяся величина этой скорости много меньше, чем для больших тел той же плотности. Установившаяся скорость свободного падения парашютиста в затяжном прыжке без парашюта ~ 100 м/с.

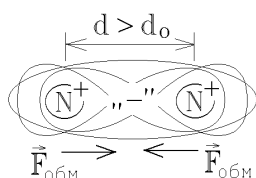


При падении тела в жидкой среде с большой вязкостью, например, шарика с радиусом 1 мм в глицерине, $v_{кр} = 15$ м/с. Скорость падения установится при ламинарном обтекании под действием силы вязкого трения Стокса.

11. ОСНОВЫ ФИЗИКИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

11.1. Межмолекулярное взаимодействие

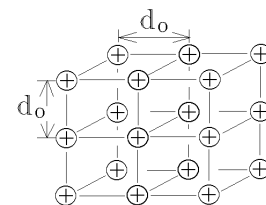
Реальные среды (твёрдые тела, жидкости, реальные газы) отличаются от идеального газа тем, что между удалёнными друг от друга молекулами среды действуют силы притяжения или отталкивания, т.е. молекулы нельзя рассматривать, как упругие шарики.



Самые сильные связи возникают за счёт сил обменного взаимодействия, которые являются следствием квантовых эффектов. В результате действия этих сил суммарная энергия системы из двух одинаковых атомов становится минимальной при определённом расстоянии d_0 между атомами. Такая связь называется ковалентной. Примером появления ковалентной связи, может служить неполярная двухатомная молекула состоящая из двух одинаковых ионов и перекрывающейся электронной оболочки между ними. При сближении или удалении ионов возникают обменные силы, стремящиеся вернуть ионы в положение,

соответствующее минимуму энергии. Таким образом у молекул появляются дополнительные колебательные степени свободы.

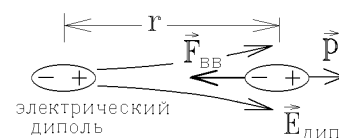
Подобным образом обменные силы выстраивают атомы в периодическую структуру кристаллическую решётку твёрдого тела. Ионы в узлах решётки непрерывно совершают тепловые колебания около положений равновесия, но амплитуда этих колебаний при комнатной температуре недостаточна для разрыва межатомной связи.



Приблизительно так же сильна ионная связь: в системе из двух разнородных атомов электрону из внешней оболочки одного атома энергетически выгодно перейти в оболочку второго атома. В результате такого перехода образуются два противоположно заряженных иона, которые притягиваются друг к другу кулоновской силой. Чрезмерному сближению ионов препятствуют силы кулоновского отталкивания отрицательно заряженных электронных облаков. Поэтому в таких

полярных молекулах с ионной связью электронные облака ионов почти соприкасаются, но не перекрываются. Чтобы разделить (или диссоциировать) подобную молекулу на отдельные атомы, надо сообщить ей энергию, превышающую кулоновскую энергию притяжения ионов $E_{связи} \approx e^2 / 4\pi\epsilon_0 d \approx (5 + 20) \cdot 10^{-19}$ Дж, где d – эффективный диаметр молекулы. Для этого достаточно сообщить возникающей между ионами колебательной степени свободы энергию $2 \cdot k_B T / 2 = E_{связи}$ т.е. разогреть среду из полярных молекул до температуры $T \approx E_{связи} / k_B \approx (4 + 15) \cdot 10^4$ К. Это значение температуры показывает, насколько сильна ионная связь (ковалентная связь имеет приблизительно ту же величину).

Могут существовать другие виды межмолекулярных связей – водородная, которая очень важна при образовании органических молекул, и Ван-дер-Ваальсова. Но эти связи заметно слабее ковалентной и ионной связей. Такие связи обусловлены появлением межмолекулярных сил Ван-дер-Ваальса электрической природы, притягивающих соседние молекулы, являющиеся электрическими диполями с разнесёнными положительным и отрицательным электрическим зарядом.



11.2. Агрегатные состояния: кристаллическое, аморфное, жидкое и газообразное

При сближении молекул начинают действовать очень сильные кулоновские или обменные силы отталкивания их электронных облаков. Поэтому для всех типов межмолекулярных связей зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух молекул от расстояния между ними имеет качественно схожий вид, показанный на рисунке ниже.

Полная энергия E двух взаимодействующих молекул складывается из их потенциальной и кинетической энергий: $E = E_{вз} + 2 \cdot k_B T / 2$. При относительно низкой температуре T_1 молекулы находятся на дне потенциальной ямы и

могут совершать небольшое колебательное движение около положения равновесия $r = d$, при котором энергия взаимодействия минимальна. Это соответствует твёрдому (кристаллическому) состоянию вещества.

При повышении температуры амплитуда тепловых колебаний молекул в узлах кристаллической решётки возрастает. Но потенциальная яма, как видно из рисунка, не симметрична. Правая ветвь кривой более пологая, чем левая. Поэтому среднее расстояние $d' = \langle r \rangle$ между колеблющимися с большими амплитудами молекулами увеличивается, а вместе с ним растут и линейные размеры твёрдого тела. В области не слишком высоких температур линейные размеры твёрдого тела изменяются пропорционально изменению температуры:

$$l = l_0 (1 + \alpha(T - T_0)),$$

где α - температурный коэффициент линейного теплового расширения, l_0 – размер тела при начальной температуре T_0 .

При дальнейшем росте температуры часть связей между соседними молекулами рвётся. Однако, отдельные молекулы остаются связанными в сложные комплексы. Эти комплексы имеют достаточно степеней свободы, чтобы перемещаться друг относительно друга. Но полная энергия молекул отрицательна: $E_2(T_2) < 0$, и молекулы остаются в потенциальной яме, т.е. не могут удалиться на большое расстояние друг от друга. Это соответствует жидкому состоянию среды.

Неверно утверждать, что молекулы жидкости расположены беспорядочно, подобно молекулам газа. Если выделить какую-нибудь молекулу А, то другие молекулы **вблизи неё** расположены **почти упорядоченно** (как и молекулы в кристаллической решётке). Это - так называемый ближний порядок. Такая упорядоченность обусловлена тем, что значительная часть межмолекулярных связей ещё не разорвана. Но при удалении от любой молекулы А отклонения от упорядоченного расположения накапливаются, и **удалённые** молекулы расположены относительно произвольно выбранной молекулы А **беспорядочно**. Поэтому, в отличие от кристаллической решётки твёрдого тела, у молекулы жидкости отсутствует дальний порядок.

Вследствие теплового расширения $d' > d$ плотность жидкой фазы обычно меньше плотности твёрдой (это не относится ко льду и другим кристаллам с водородными связями вблизи точки плавления). Попытке сжать твёрдое тело или жидкость препятствуют кулоновские силы отталкивания, резко возрастающие при сближении молекул. Именно поэтому жидкости и твёрдые тела сжимаются в тысячи раз хуже газов ($p \approx \text{const}$).

Замечание: грань между жидким и твёрдым состояниями часто условна. На рисунке изображены кристаллические решётки кварца и аморфного твёрдого тела - стекла. Их отличие в том, что часть межмолекулярных связей в стекле отсутствует или замкнута в нерегулярную структуру. Стекло ведёт себя, как очень вязкая жидкость. Пролежавшее в земле 2000 лет античное стекло теряет прозрачность в результате очень медленной кристаллизации - его молекулы выстраиваются в кристаллическую решётку подобную решётке кварца.

Когда при нагревании среды полная энергия её молекул становится положительной $E_3(T_3) > 0$, молекулы оказываются за пределами потенциальной ямы и стремятся разлететься. Система превращается в реальный газ.

Любая сплошная среда может существовать в одном из агрегатных состояний: твёрдом, жидком, газообразном (четвертое агрегатное состояние – это плазма).

11.3. Уравнение состояния реального газа

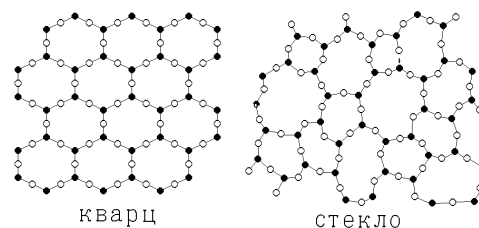
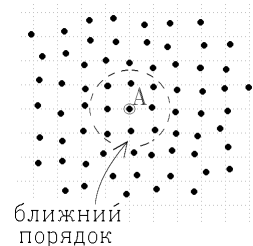
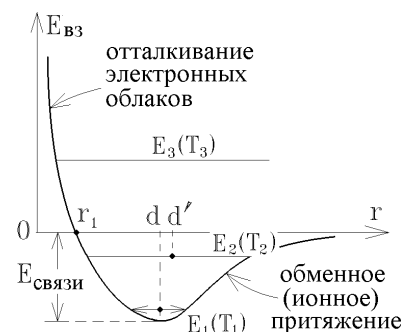
Универсального уравнения состояния для жидкостей и реальных газов не существует. Было предложено множество различных уравнений, описывающих свойства реальных газов. Наиболее корректным является уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2} \right) (V - vb) = vR^* T,$$

где v – число молей газа, a и b - постоянные Ван-дер-Ваальса, R^* - индивидуальная газовая постоянная. Для разных газов эти постоянные имеют разные значения, определяемые экспериментально.

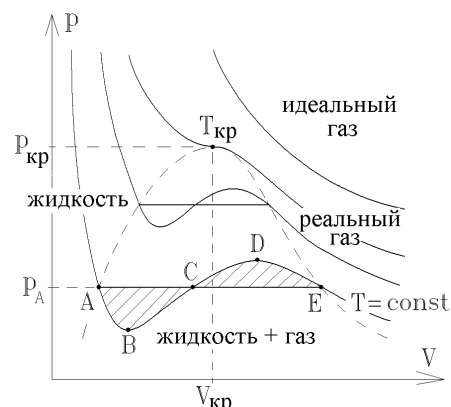
Силы Ван-дер-Ваальса стремятся сблизить молекулы, сжать газ, за счёт чего внутреннее давление реального газа увеличивается на $\Delta p = v^2 a / V^2$. Но при сближении кулоновское отталкивание не даёт молекуле занять место, уже занятое другой молекулой, т.е. реальный объём, в котором могут перемещаться молекулы, уменьшается на величину vb – это суммарный эффективный объём всех молекул газа.

Рассмотрим ряд изотерм $T = \text{const}$, соответствующих уравнению Ван-дер-Ваальса. Это кубическое уравнение относительно V , поэтому в некоторой области давлений p оно имеет три действительных корня, график изотермы изогнут так, как показано на дмаграмме состояний (рисунок ниже). Слева от точки А объём V очень слабо изменяется при



резком возрастании давления p , т.е. система ведёт себя как плохо сжимаемая жидкость, т.е. уравнение Ван-дер-Ваальса описывает не только реальный газ, но и жидкость, полученную при сжижении этого газа.

Участок изотермы BCD на рисунке выглядит странно: при повышении давления объём среды увеличивается, что, вообще говоря, невозможно. Вспомним, однако, что жидкость кипит и испаряется (превращается в газ) **при постоянном давлении p и постоянной температуре кипения T** , т.е. в действительности превращение жидкости в пар (газ) должно происходить по прямому участку изотермы ACE, а не по участку ABDE. Следовательно, все состояния на участке BCD **нестабильны** и существовать не могут, а участок ACE соответствует одновременному сосуществованию жидкости и газа.



При изотермическом сжатии реального газа его давление возрастает до точки E. При дальнейшем сжатии давление пара не меняется, и он постепенно конденсируется в жидкость, причём плотность жидкости намного больше плотности газа. При достижении точки A весь пар превратится в жидкость.

И всё же участки AB и DE на диаграмме состояний физически допустимы: рост давления приводит к сжатию системы. Участок AB соответствует состоянию перегретой жидкости, а участок DE — переохлаждённого пара. Так, тщательно очищенную от примесей жидкость (дистиллированную воду) можно осторожно нагревать в сосуде с очень гладкими стенками и довести её при атмосферном давлении до температуры выше 100°C , а кипеть вода

не будет. Такое состояние воды (точка на участке AB) **метастабильно**. При малейшем взбалтывании перегретой жидкости или при попадании в неё посторонней примеси начинается бурное кипение и испарение — система возвращается на прямую ACE стабильных состояний. Точно так же метастабильно состояние переохлаждённого пара (участок DE) — при малейших возмущениях он быстро конденсируется в жидкость.

Рассмотрим теперь изотермы с большей температурой T . Начиная с некоторой критической изотермы $T_{кр}$, уравнение Ван-дер-Ваальса будет иметь только один действительный корень. Сжимая реальный газ при температурах $T > T_{кр}$, нельзя превратить его в жидкость. Он не конденсируется.

В точке с критическими параметрами $T_{кр}$, $p_{кр}$ и $V_{кр}$ теряются всякие различия между жидкостью и газом. Плотность газа (пара) и плотность жидкости в критическом состоянии одинаковы, и в системе возникают огромные флуктуации — случайным образом отдельные участки среды имеют свойства жидкости, а отдельные — газа. Это приводит к полной потере прозрачности реального газа в критической точке (световые лучи рассеиваются на флуктуациях). Такое явление называется критической опалесценцией. При малейшем увеличении или уменьшении давления или температуры среда минует критическую точку, и ее прозрачность восстанавливается.

Далее заметим, что при возрастании объема газа V поправки в уравнении Ван-дер-Ваальса быстро становятся пренебрежимо малыми, и оно превращается в уравнение состояния идеального газа. Это означает, что при обычных условиях любой газ можно с хорошей точностью считать идеальным. Практически все межмолекулярные связи в нем разорваны, и индивидуальная газовая постоянная R^* заменяется на универсальную $R = 8,314 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$. Только при приближении к критическому состоянию следует учитывать поправки Ван-дер-Ваальса. Уравнение Ван-дер-Ваальса наиболее хорошо описывает легкие газы (водород, гелий). Для более тяжелых газов качественные выводы, полученные из этого уравнения, сохраняются, а количественные начинают расходиться с экспериментом.

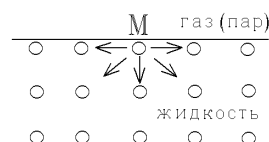
Наконец, вычислим внутреннюю энергию газа Ван-дер-Ваальса. Для этого подставим в формулу для такой энергии выражение для p из уравнения Ван-дер-Ваальса. Тогда

$$U(T, V) = \int v C_V dT + \int \frac{v^2 a}{V^2} dV = v C_V T - \frac{v^2 a}{V}.$$

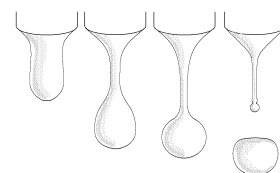
Внутренняя энергия реального газа зависит не только от температуры, но и от объема газа. Это связано с тем, что силы Ван-дер-Ваальса стремятся притянуть молекулы газа, т.е. уменьшить его объем, и тем самым уменьшить энергию системы.

11.4. Поверхностное натяжение

Газ стремится заполнить весь объем сосуда и ограничен его стенками, т.е. не имеет свободной внешней поверхности. Жидкость имеет **свободную поверхность** на границе с газом, вакуумом или другой жидкостью. Под действием внешних сил эта поверхность может изменять свою форму (форма образующейся и падающей капли, например, изображена на рисунке справа).



Форма свободной поверхности во многом определяет поведение жидкости в физических процессах. На выделенную вблизи поверхности молекулу M действуют межмолекулярные силы притяжения со стороны остальных

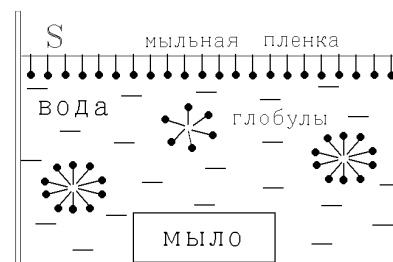


молекул жидкости. Результирующая этих сил стремится втянуть молекулу вглубь жидкости, т.е. Силы Ван-дер-Ваальса стремятся сжать жидкость, уменьшить ее свободную поверхность, которая будет вести себя как резиновая упругая пленка. Силы, стремящиеся сократить свободную поверхность жидкости, называются силами поверхностного натяжения. Например, в состоянии невесомости (когда нет внешних сил) любая жидкость под действием сил поверхностного натяжения принимает форму с минимальной поверхностью, т.е. "плавает" в пространстве в виде шаров.



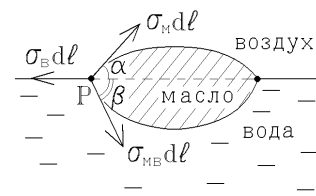
Чтобы увеличить свободную поверхность жидкости, надо совершить работу против сил поверхностного натяжения. Обычно это происходит при постоянной температуре T . Поэтому совершаемая работа равна изменению свободной энергии поверхности, которая равна $E_{\text{пов}} = \sigma S$, где S - площадь поверхности жидкости, а σ - некоторый коэффициент, характеризующий величину сил поверхностного натяжения. Он называется коэффициентом поверхностного натяжения и численно равен работе внешних сил, которую надо совершить над жидкостью, чтобы увеличить площадь ее свободной поверхности на единицу: $\sigma = \delta A / dS|_{T=\text{const}}$.

Пример: молекулы мыла обладают гидрофильными (притягивающимися к молекулам воды) и гидрофобными (отталкивающимися от молекул воды) концами. Такие вещества называются поверхностно активными. Мыло тяжелее воды и тонет в ней. Но пленка мыльного раствора имеет заметно меньшее поверхностное натяжение, чем чистая вода $\sigma_{\text{мыла}} \approx 0,040 \text{ Н/м} < \sigma_{\text{воды}} \approx 0,073 \text{ Н/м}$. Поэтому суммарная потенциальная энергия поверхностного слоя $E_{\text{пот}} = \sigma S + mgh$ оказывается меньшей для мыльной пленки, чем для воды, и мыльная пленка всплывает на поверхность (гидрофобными концами молекул вверх). Те молекулы мыла, которым не хватает места на поверхности, объединяются в глобулы (гидрофобными концами внутрь) и плавают в воде в виде хлопьев-глобул. Для раствора сахара, наоборот, $\sigma_{\text{раств}} > \sigma_{\text{воды}}$, и молекулы сахара вытесняются с поверхности воды вглубь. Поверхность сладкого чая или кофе в чашке образована чистой, а не сладкой водой.



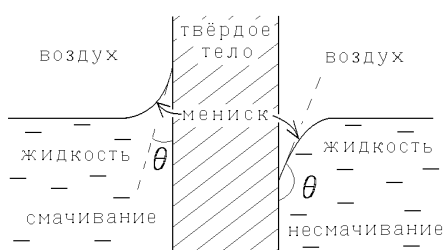
Можно сделать и другой вывод. Растягивая поверхность жидкости и смещая ее границу на dx , мы совершаем работу против силы поверхностного натяжения и увеличиваем площадь поверхности на $dS = l dx$, т.е. $\delta A|_T = \sigma dS = \sigma l dx$, откуда $\sigma = |\vec{F}|/l$ - коэффициент поверхностного натяжения численно равен силе поверхностного натяжения, действующей на единицу длины контура, ограничивающего поверхность жидкости. Э силы стремятся стянуть контур в точку и направлены по касательной к поверхности жидкости.

Пример: капнем на поверхность воды немного масла, коэффициент поверхностного натяжения σ_M которого больше, чем соответствующий коэффициент σ_B воды (а плотность - меньше, так что утонуть капля масла не может. Молекулы масла по-разному взаимодействуют с молекулами воздуха и воды. Поэтому коэффициент поверхностного натяжения σ зависит от граничной с жидкостью среды. На границе масло - воздух он имеет другое значение, чем на границе масло - вода: $\sigma_{MB} \neq \sigma_M$. Выделим в точке P на границе раздела трех сред малый участок границы dl (он направлен перпендикулярно плоскости рисунка). На этот участок действуют силы $\sigma_B dl$, $\sigma_M dl$ и $\sigma_{MB} dl$, стремящиеся сократить, соответственно, поверхности раздела вода - воздух, масло - воздух и масло - вода. Условием равновесия границы будет равенство нулю равнодействующей этих сил:



$$\sigma_B = \sigma_M \cos \alpha + \sigma_{MB} \cos \beta; \quad \sigma_M \sin \alpha = \sigma_{MB} \sin \beta.$$

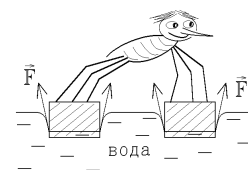
Из этих уравнений можно определить углы α и β , т.е. форму плавающей капли. Если $\sigma_B > \sigma_M + \sigma_{MB}$, то капля растечется по всей поверхности воды подобно мыльной пленке.



Изогнутый край поверхности жидкости называется мениском.

Пример: на несмачиваемое тело, плавающее в воде, действуют силы поверхностного натяжения, направленные вверх и стремящиеся сократить изогнутую поверхность воды. Эти силы не позволяют утонуть даже тем небольшим телам, плотность которых больше плотности воды! Так, благодаря силам поверхностного натяжения, бегают по воде и не тонут жуки - водомерки.

По этой же причине можно носить воду в решете с достаточно малым размером отверстий, стенки которых покрыты несмачиваемым материалом: на контур, ограничивающий выступающую из отверстия поверхность капли, действует сила поверхностного натяжения, сокращающая поверхность капли,



т.е. направленная вверх и предотвращающая вытекание капли. Аналогично, уменьшая диаметр вертикального капилляра, заполненного водой, можно получить висющую на кончике капилляра и не падающую каплю.

С ростом температуры молекулы жидкости расходятся на большие расстояния, силы их притяжения ослабевают, и коэффициент поверхностного натяжения также будет уменьшаться. При температуре кипения жидкости ее поверхностное натяжение вообще исчезает - молекулы свободно переходят из кипящей жидкости в пар и наоборот.

При увеличении свободной поверхности жидкости она поглощает некоторое тепло. При сокращении поверхности это тепло выделяется. Оно называется скрытой теплотой образования поверхности. Если поверхность уменьшается на

единицу площади, то выделяется тепло $Q = -T \frac{\partial \sigma}{\partial T}$.

11.5. Капиллярные явления

Стремясь сократиться, искривленная поверхность жидкости давит на молекулы внутри жидкости, т.е. создает избыточное давление Δp . Чтобы найти величину этого давления, рассмотрим мыльный пузырь радиуса r с поверхностным натяжением σ . Снаружи пузыря давление воздуха равно атмосферному, а внутри (из-за сдавливания мыльной пленки) оно возрастает на Δp . При изотермическом увеличении радиуса пузыря на dr расширяющийся внутри воздух совершит работу $\delta A|_T = \Delta p \cdot 4\pi r^2 dr$. Эта работа затрачивается на увеличение свободной поверхностной

энергии **двух** поверхностей мыльной пленки: $\delta A|_T = dE_{\text{пов}} = 2 \cdot \sigma \left[4\pi (r + dr)^2 - 4\pi r^2 \right] dr = 16\pi \sigma r dr$, откуда $\Delta p = 4\sigma/r$.

Одна искривленная поверхность создаст вдвое меньшее давление. Произвольно изогнутая двумерная поверхность характеризуется двумя главными радиусами кривизны R_1 и R_2 . Под такой искривленной поверхностью давление внутри жидкости возрастает на величину

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \text{ - это формула Лапласа.}$$

Для сферической поверхности мыльного $R_1 = R_2 = r$ и $\Delta p = 2\sigma/r$. Но при другой форме мыльной пленки, например - между двумя кольцами, с обеих сторон пленки давление равно атмосферному, и $\Delta p = \sigma(1/R_1 + 1/R_2) = 0$. Пленка примет вид катеноида - выпукло-вогнутой поверхности, для которой один главный радиус кривизны положителен, а другой - отрицателен, так что в любой точке пленки $R_1 = -R_2$.

Рассмотрим теперь тонкий вертикальный открытый капилляр, опущенный в жидкость. Если стенки капилляра не смачиваются жидкостью, то ее поверхность будет **выпуклой** (рисунок слева).

Столбик жидкости в капилляре опустится на высоту h так, чтобы уменьшение гидростатического давления уравнило лапласовское увеличение давления:

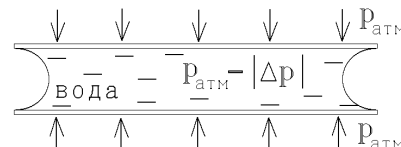
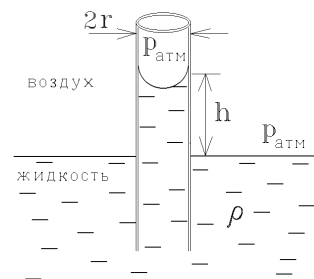
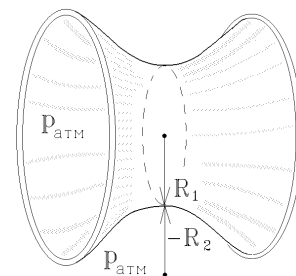
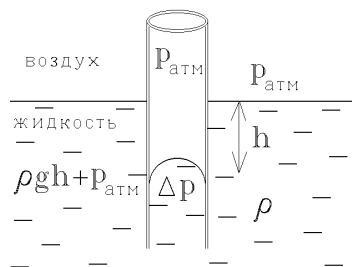
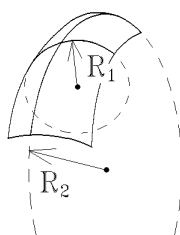
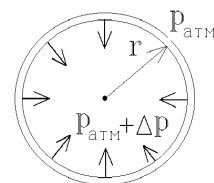
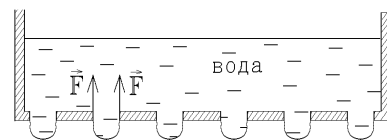
$\Delta p = \rho gh$, где ρ - плотность жидкости.

Если же жидкость смачивает стенки капилляра, то форма ее поверхности **вогнута**, радиусы кривизны отрицательны и давление жидкости под вогнутой поверхностью **уменьшается** на величину Δp . Чтобы скомпенсировать уменьшение давления, столбик жидкости поднимается в капилляре на высоту $\rho gh = |\Delta p|$ (рисунок справа). В случае полного смачивания $R_1 = R_2 = r$ (радиус капилляра), и высота подъема жидкости $h = 2\sigma/(\rho gr)$.

Капиллярные явления очень часто встречаются в природе. Так, ручка пишет из-за того, что чернила втягиваются лапласовским давлением к кончику пера. Влага поднимается из почвы в ствол растения по капиллярам древесных волокон и т.п. Или, например, две соринки или два пузырька, плавающие на поверхности воды, стремятся сблизиться, сцепиться друг с другом.

Действительно, при сближении на малое расстояние вода поднимается в узком зазоре между пузырьками, как по капилляру. Давление под вогнутой поверхностью жидкости **уменьшается** на величину Δp , а с противоположных сторон на пузырьки действуют силы атмосферного давления, подталкивающие их друг к другу.

По аналогичной причине трудно растянуть две плоские стеклянные пластинки, между которыми попал тонкий слой воды: давление в воде меньше атмосферного, и избыточное давление прижимает пластинки друг к другу.

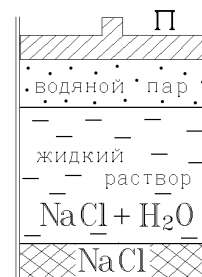


11.6. Термодинамические фазы и компоненты. Условие равновесия фаз

Любой **однородный по своим физическим свойствам** участок сложной термодинамической системы называется **термодинамической фазой**. Фазой может быть определённое агрегатное состояние – газ, жидкость или твёрдое тело – свойства которых **одинаковы во всех точках**. Фазы могут отличаться любыми другими свойствами. Например, углерод в твёрдом состоянии образует или кристаллическую решётку графита, или алмаза, т.е. разные кристаллические фазы. Одна и та же кристаллическая решётка железа при разных температурах ведёт себя или как ферромагнетик, или как парамагнетик, т.е. различается магнитными свойствами и образует разные фазы.

Фаза может состоять из различных **компонентов**, т.е. молекул или атомов разного сорта. Например, воздух (одна газообразная фаза) является смесью многих газов; разбавленный спирт будет однородным раствором (жидкой фазой) из разных молекул. Однако, **сплав** двух металлов не образует однородную фазу: он состоит из перемешанных мелких кристалликов (зёрен) этих металлов и является сложной комбинацией двух фаз, двух различных кристаллических решёток.

Рассмотрим сложную термодинамическую систему, состоящую из n компонентов (молекул разного сорта), которые образуют m разных фаз. Примером будет перенасыщенный раствор поваренной соли, над которым, отводя поршень П, создают атмосферу из водяного пара. Здесь $n = 2$ (молекулы H_2O и NaCl), а $m = 3$ (газообразная, жидкая и твёрдая фазы). Общим свойством всех термодинамических систем является переход части молекул из одной фазы в другую при изменении термодинамических параметров. Так, при нагревании системы, изображённой на рисунке, часть воды испарится, увеличивая газообразную фазу, а избыточные молекулы NaCl перейдут в кристаллическую твёрдую фазу.



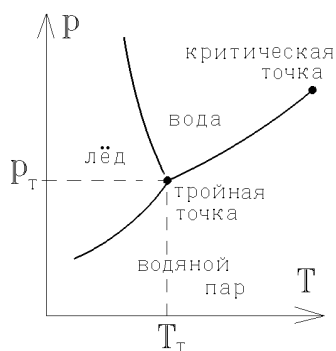
Любая термодинамическая система, в том числе многофазная, стремится самопроизвольно перейти в равновесное состояние. Это происходит в результате совместного действия механических сил, уменьшающих энергию системы, и энтропийных сил, увеличивающих её энтропию. Поэтому Гиббс сформулировал условие термодинамического равновесия следующим образом:

если система уже находится в равновесном (устойчивом) состоянии, то любые процессы, не меняющие энтропию, могут только увеличить внутреннюю энергию системы $dU \geq 0$, а любые процессы, не меняющие её энергию, могут только уменьшить энтропию системы $dS \leq 0$.

Количество существующих фаз m не может быть любым в любой сложной термодинамической системе, состоящей из n разных сортов молекул (компонентов) и находящейся в термодинамическом равновесии. Такая система должна описываться $I = 2 + n - m$ независимо меняющимися термодинамическими параметрами. Ясно, что

$$I = 2 + n - m \geq 0.$$

Это – **правило фаз Гиббса**, связывающее число возможных фаз в системе с числом составляющих её компонентов.



Для примера рассмотрим однокомпонентную систему (чистое химическое вещество из молекул одного сорта, например, вода). Для неё $I = 3 - m$. При определённых условиях система становится однофазной $m=1$. Так, при высокой температуре вся вода превращается в пар (газ). Состояние газа описывается $I=2$ **независимыми** параметрами: давлением p и температурой T .

При более низких температурах однокомпонентная система может находиться в равновесии в двухфазном состоянии ($m=2$: лёд - вода, вода - пар или лёд - пар). В этом состоянии $I=3-2=1$, и переменные p и T связаны некоторым соотношением $p=p(T)$. На диаграмме состояний, показанной на рисунке, видно, что двухфазное состояние осуществляется только на трёх кривых $p=p(T)$, разделяющих твёрдую, жидкую и газообразную фазы.

Наконец, если в равновесии сосуществуют три фазы однокомпонентной системы, то $I=0$, т.е. все термодинамические параметры в этом состоянии фиксированы и не могут изменяться без того, чтобы хотя бы одна из фаз исчезла. Это состояние единственно и называется **тройной точкой**. Для чистой воды в тройной точке $T_t \approx 0,0078^\circ\text{C}$, $p_t \approx 6$ Па. Только при таких условиях лёд, вода и пар одновременно находятся в устойчивом состоянии.

Реальные многокомпонентные среды состоят из огромного числа молекул или атомов различных сортов. Поэтому в них может сосуществовать в равновесии очень большое число разных фаз.

11.7. Фазовые переходы первого и второго рода

Фазовым переходом называется процесс, при котором объем одной фазы растёт за счет уменьшения объема другой, т.е. одна фаза вещества теряет молекулы, которые переходят в другую фазу.

Превращение твердой фазы в жидкую называется **плавлением** (обратный процесс - **отвердеванием** или **кристаллизацией**); превращение жидкой фазы в газообразную называется **испарением** (обратный процесс - **конденсацией**); превращение твердой фазы в газообразную называется **возгонкой** или **сублимацией** (обратный процесс - **осаждение**). Все перечисленные здесь процессы сопровождаются выделением (или поглощением) тепла, которое называется **скрытой теплотой фазового перехода**. Переходы с выделением или поглощением скрытой теплоты называются **фазовыми переходами первого рода**. Теплоёмкость системы при этом меняется скачком.

Существуют также фазовые переходы, при которых тепло не выделяется и теплоёмкость не меняется. Это - **фазовые переходы второго рода**. Примерами таких переходов будут: изменение типа кристаллической решетки твёрдого тела,

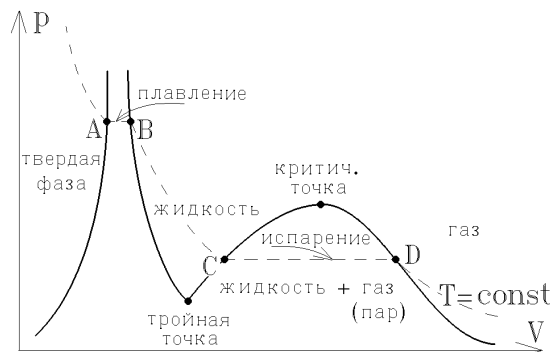
переход металлов в сверхпроводящее состояние, превращение ферромагнетика в парамагнетик при нагревании и т.п. Температура, при которой происходят фазовые переходы 2-го рода, называется температурой Кюри.

Фазовые переходы первого рода, такие как плавление, испарение или возгонка, происходят при постоянных давлении p и температуре T . На фазовой диаграмме p - V им соответствуют горизонтальные участки изотерм. Известно, что при понижении давления жидкость начинает кипеть при меньшей температуре. Например, уже на высоте 1 км температура кипения воды

уменьшается на $\Delta t^0 = 3^0 \text{ C}$. Кипение (испарение) жидкости при уменьшении давления начинается в точке С (см. диаграмму). Тепловая энергия, сообщаемая системе, расходуется на разрыв связей между молекулами, т.е. на превращение жидкости в газ (пар). Полностью в пар жидкость превратится в точке D. На горизонтальном участке C-D система находится в **двухфазном состоянии** (жидкость + пар). Тепло, необходимое для превращения единицы массы жидкости в пар, называется удельной теплотой парообразования q .

Пример: пар от кипящей жидкости обжигает сильнее, чем кипяток, так как при его конденсации должна выделиться вся скрытая теплота парообразования. Для воды $q = 2250 \text{ кДж/кг}$ и легко вычислить, что при попадании на ладонь 1 г пара выделится такая же теплота, как при попадании 9,5 г кипятка.

Участок A-B на диаграмме состояний соответствует другому фазовому переходу - плавлению. На этом участке система также находится в двухфазном равновесном состоянии (твердая фаза + жидкость).

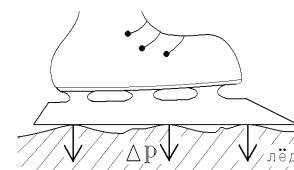


Можно изобразить изотерму на другой фазовой диаграмме p - T (рисунок слева). На ней участки C-D и A-B превращаются в точки, лежащие на кривых $p=p(T)$ раздела двух фаз. Приведенные здесь фазовые диаграммы изображены для нормальных веществ, у которых **температура плавления увеличивается с ростом давления**. Однако существуют аномальные вещества, для которых **температура плавления уменьшается с ростом давления**. К таким аномальным веществам относится вода.

Пример: кромка лезвия конька создает очень большое дополнительное давление на микронеровности льда, $\Delta p \approx 400 \div 500$ атмосфер. При таком давлении лед начинает плавиться при более низких, минусовых температурах, и образуется тонкий слой воды - "смазки", обеспечивающий скольжение конька.

По этой причине нельзя кататься на коньках по замерзшим нормальным веществам - с ростом давления жидкая прослойка не образуется, и из-за большой силы трения конек не скользит (попробуйте прокатиться на коньках по твердой асфальтовой поверхности). Заметим, что скольжения лыж добиваются другим способом **при трении** лыжи о снег выделяется тепло, благодаря которому снег подтаивает и образуется тонкий слой "смазки" - воды. Для лучшего скольжения надо, чтобы это тепло не отводилось, поэтому лыжи делают из плохо проводящего тепло материала (дерево), а не из металла, как коньки.

Заледеневшие дороги посыпают песком, и если минусовая температура не очень низка, то при надавливании на песчинки лёд под ними из-за дополнительного давления плавится, и песчинки вмерзают в лёд, создавая шероховатую поверхность. Но при очень сильном морозе использовать песок бесполезно - точка плавления достигнута не будет, и песок будет скользить по льду вместе с подошвой обуви. То же самое касается специальных шин с шипами, используемых для автомобилей.



Уравнение кривой раздела двух фаз $p=p(T)$ на фазовой диаграмме определяется уравнением Клапейрона-Клаузиуса, позволяющим найти зависимость температуры T фазового перехода от величины давления p :

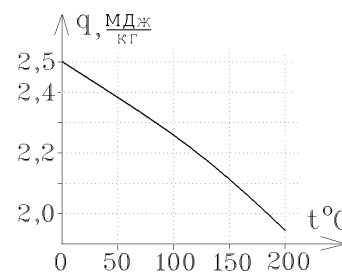
$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(v_2 - v_1)},$$

где удельные объемы $v_1 = 1/\rho_1$ и $v_2 = 1/\rho_2$ - это объемы, заполняемые единицей массы вещества в состоянии 1-й и 2- фазы соответственно. Заметим, что удельная теплота фазового перехода q зависит от температуры T . Так, температурная зависимость удельной теплоты парообразования воды показана на рисунке справа. Из уравнения

Клапейрона - Клаузиуса следует, что, для воды $\frac{dp}{dT} = \frac{q_{\text{плавления}}}{T(1/\rho_{\text{воды}} - 1/\rho_{\text{льда}})} < 0$, так как

$\rho_{\text{льда}} \approx 916 \text{ кг/м}^3 < \rho_{\text{воды}} \approx 1000 \text{ кг/м}^3$, т.е вода - аномальное вещество.

Аномальные свойства воды сохраняются и для жидкой фазы - её плотность при нагревании выше 0^0 C продолжает увеличиваться и достигает максимума $\rho_{\text{воды max}} = 1000 \text{ кг/м}^3$ при $t^0 = +4^0 \text{ C}$ (в точке плавления, при 0^0 C , плотность воды чуть меньше: $\rho_{\text{воды}}|_{0^0 \text{ C}} = 999,8 \text{ кг/м}^3$). Различие очень небольшое, но существенное - более нагретая и тяжё-



лая вода опускается на дно, а холодная поднимается на поверхность. Поэтому лед образуется **только на поверхности** рек и озер, а так как теплопроводность льда мала, то он служит тепловой изоляцией между водой и холодным воздухом. У дна водоёмов, куда опускается самая плотная вода, её температура даже зимой остается равной $+4^{\circ}\text{C}$. Если бы вода была нормальным веществом, то температура ее плавления была бы равна -95°C , а температура кипения -80°C . При этом исчезла бы практически вся существующая биосфера Земли.