

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Тульский государственный университет”

Ю.Н.КОЛМАКОВ, С.Е.КАЖАРСКАЯ

ФИЗИКА. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

РУКОВОДСТВО К ПРОВЕДЕНИЮ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Тула
Изд-во ТулГУ
2017

УДК 537.2/.3/.6/.8

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор ТулГУ В.В. Жигунов,
канд. физ.-мат. наук, доцент, зав.каф. общей и теор.
физики ТГПУ им. Л.Н.Толстого Д.А. Нургулеев

Авторы: Ю.Н. Колмаков, С.Е. Кажарская

Физика. Электромагнетизм: руководство к проведению самостоя-
тельной работы студентов: учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2017.
164 с.

ISBN 978–5–7679–3915–2

Изложен материал, позволяющий студенту самостоятельно подгото-
виться ко всем формам аттестации в процессе обучения по курсу фи-
зики в техническом вузе. Пособие включает раздел «Электромагне-
тизм» и содержит необходимые сведения для выполнения тестовых и
практических контрольных и экзаменационных заданий.

Предназначено для студентов всех специальностей инженерно-
технического профиля в рамках бакалаврской подготовки. Пособие
может быть также использовано студентами и преподавателями в про-
цессе практических аудиторных занятий по курсу физики, а также при
проведении занятий физического лабораторного практикума.

Ил.: 396. Библиогр.: 14.

Печатается по решению библиотечно-издательского совета
Тульского государственного университета.

© Колмаков Ю.Н., Кажарская С.Е.,
2017

© Издательство ТулГУ,
2017

ISBN 978–5–7679–3915–2

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
1. Подготовка к контрольным работам по физике	6
1.1. Расчет электростатических полей точечных зарядов	6
1.2. Расчет электростатических полей распределенных зарядов	9
1.3. Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей	14
1.4. Потенциал и энергия электрического поля. Конденсаторы	19
1.5. Законы квазистационарного тока	25
1.6. Разветвленные электрические цепи и правила Кирхгофа	30
1.7. Расчет магнитных полей, созданных линейными токами	36
1.8. Расчет магнитных полей с помощью теоремы о циркуляции	43
1.9. Заряженная частица в электрическом и магнитном полях	48
1.10. Явление электромагнитной индукции	53
1.11. Собственные электрические колебания	59
1.12. Вынужденные электрические колебания	63
2. Подготовка к выполнению лабораторных работ по физике	68
Работа №21. Исследование электрического поля проводника с током	68
Работа №22. Измерение сопротивлений мостовыми схемами	71
Работа №23. Релаксационные колебания	74
Работа №24. Термоэлектрические явления	78
Работа №25. Определение удельного заряда электрона	82
Работа №26. Магнитное поле Земли	86
Работа №27. Исследование магнитного поля соленоида	90
Работа №28. Определение индуктивности тороида	95
Работа №29. Исследование электрических затухающих колебаний	100
Работа №30. Определение характеристик колебательного контура	104
3. Подготовка к выполнению тестовых заданий по физике	109
3.1. Напряженность электростатического поля	109
3.2. Теорема Гаусса для электростатического поля	110
3.3. Потенциал электростатического поля	113
3.4. Проводники в электростатическом поле	115
3.5. Электрическое поле в диэлектриках. Граничные условия	116
3.6. Конденсаторы. Энергия электрического поля	119
Теорема о циркуляции	119
3.7. Квазистационарный ток. Законы Ома и Джоуля-Ленца	121
3.8. Разветвленные электрические цепи. Правила Кирхгофа	125
3.9. Расчет магнитных полей. Теорема Био-Савара-Лапласа	128

3.10. Теорема о циркуляции для магнитного поля	130
3.11. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле....	132
3.12. Магнитное поле в магнетиках	135
3.13. Проводник с током в магнитном поле. Сила Ампера	137
3.14. Явление электромагнитной индукции.....	139
3.15. Собственные электрические колебания	144
3.16. Вынужденные электрические колебания	146
3.17. Переменное электромагнитное поле. Уравнения Максвелла	149
3.18. Электромагнитные волны. Вектор Пойнтинга.....	151
3.19. Задания, проверяющие владение изученным материалом.....	154
3.20. Ответы на вопросы тестовых заданий.....	161
Библиографический список	163

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сокращение аудиторных занятий при изучении дисциплины “Физика” в ТулГУ, привело к тому, что в учебных планах разных специальностей от 50% до 70% времени, отводимого на изучение этой дисциплины, предназначено для самостоятельной работы студентов. Такая работа включает несколько основных видов деятельности.

В первую очередь, это подготовка к выполнению работ лабораторного практикума, предполагающая самостоятельное изучение теоретических основ исследуемых в работах физических процессов. Часто такое изучение студенту приходится проводить до того, как соответствующий учебный материал будет изложен при чтении лекций.

Затем в течение семестра студент должен выполнить две контрольные работы, включающие задачи по общим для всех направлений подготовки темам. Подробно рассмотреть все возможные разновидности таких задач во время небольшого числа аудиторных практических занятий не удаётся. Поэтому студент должен иметь образцы таких задач и примеры их решений для самостоятельного ознакомления.

Наконец, как текущие аттестационные процедуры, так и экзамен, проходят в форме выполнения тестовых заданий, включающих и более простые задания, проверяющие умения и навыки студентов, и более сложные тесты, проверяющие уровень владения изученным материалом. Для самостоятельной подготовки к текущим аттестациям и к экзамену студент должен ознакомиться с примерами таких тестов.

Данное пособие предназначено для организации самостоятельной работы студента при изучении курса физики по темам “Электромагнетизм и электромагнитные явления” (как правило, эти темы проходят в течение 3-го семестра обучения). Оно должно помочь студенту успешно пройти три перечисленные этапа контрольных процедур в течение всего семестра: сдачу работ лабораторного практикума, решение задач контрольных работ, прохождение процедур тестирования и экзамена по физике.

В разделе 1 этого пособия студент знакомится с примерами задач контрольных работ и их решений. Материал этого раздела может быть использован при проведении аудиторных практических занятий. В разделе 2 предложены теоретические обоснования соответствующих работ лабораторного практикума кафедры физики ТулГУ, достаточные для ответа на контрольные вопросы, список которых также приводится в этом разделе. В разделе 3 приведены примеры тестовых экзаменационных заданий с обсуждением части ответов (остальные ответы приведены в конце раздела).

1. Подготовка к контрольным работам по физике

В этом разделе приводятся примеры решения задач, аналогичных тем, которые будут предложены в двух контрольных работах, проводимых в течение семестра. После таких примеров даны условия нескольких подобных задач (с приведенными ответами) для самостоятельного решения. Умея решать эти задачи, студент успешно выполнит аналогичные задания контрольных работ.

В первой контрольной работе, проводимой перед первой текущей аттестацией, предлагается решить 5-6 задач по следующим темам.

1.1. Расчет электростатических полей точечных зарядов

Если задана система двух или нескольких **точечных** электрических зарядов, то на расстояниях r_1 и r_2 от зарядов их потенциалы

складываются с учетом знака заряда,
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} + \frac{-|q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2}.$$

Напряженности складываются векторно, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где величины векторов (поля точечных зарядов)

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1^2}, \quad E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2^2}. \quad \text{Надо помнить,}$$

что вектор \vec{E}_1 поля положительного заряда

$+q_1$ направлен от заряда, а вектор \vec{E}_2 поля отрицательного заряда $-q_2$ направлен к заряду, как показано на рис.1.1

(линии \vec{E} начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность). В этих формулах $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м - электрическая постоянная, ϵ - диэлектрическая постоянная среды, в которой находятся заряды (для воздуха $\epsilon \cong 1$) Постоянная $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

На любой точечный заряд q , внесенный в это поле, будет действовать сила Кулона, равная $\vec{F} = q\vec{E}$, а энергия внесенного заряда равна

$$W = q\varphi.$$

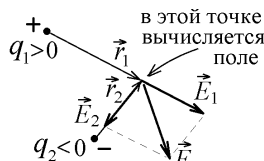


Рис.1.1

Пример решения задач:

1.1. Точечные заряды $q_1 = +5$ мкКл и $q_2 = +1$ мкКл находятся в вершинах квадрата со стороной $a = 3$ м, а заряд $q_3 = +2$ мкКл – в середине его стороны (см. рисунок). Найти а) величину кулоновской силы, действующей на заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2 ; б) угол между вектором этой силы и стороной квадрата; в) энергию заряда q_3 . Как изменятся результаты, если заряд q_1 поменяет знак?

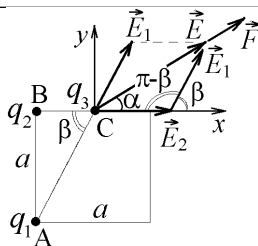


Рис.1.2

Решение.



Аккуратно делайте рисунок, отмечая на нем заданные в условии углы и направления векторов. Правильно сделанный рисунок – это 30-50% успешного решения задачи.

Как видно из рис.1.2, величины напряженностей $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot AC^2}$;

$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot BC^2}$, где $BC = \frac{a}{2}$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}a/2$. Проекции

векторов на оси x и y равны $E_{1x} = E_1 \cos \beta$; $E_{1y} = E_1 \sin \beta$; $E_{2x} = E_2$; $E_{2y} = 0$. Из прямоугольного треугольника ABC следует, что $\cos \beta = BC/AC = 1/\sqrt{5}$; $\sin \beta = AB/AC = 2/\sqrt{5}$.

Проекции результирующего вектора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ в точке C равны

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1}{5a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_2}{a^2}; \quad E_y = E_{1y} + E_{2y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1}{5a^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Сила Кулона, действующая на заряд q_3 равна $F = q_3 E = q_3 \sqrt{E_x^2 + E_y^2} =$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4q_3}{a^2} \sqrt{\left(\frac{q_1}{5\sqrt{5}} + q_2\right)^2 + \left(\frac{2q_1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3^2} \sqrt{\left(\frac{5}{5\sqrt{5}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot 10^{-6} = 0,0136 \text{ Н}.$$



Чтобы не запутаться в вычислениях, все величины при постановке переводите в систему СИ, и выносите общие множители и степени, как это сделано выше.

Угол α между направлением вектора силы \vec{F} (или вектора \vec{E}) и осью x можно найти из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = E_y / E_x = 2q_1 / (q_1 + 5\sqrt{5}q_2) = 0,0856, \text{ откуда } \alpha = 4,89^\circ.$$



Складывать векторы намного проще, не вычисляя их проекции на оси координат, а используя теорему косинусов: если известны две стороны a и b треугольника и угол θ между ними (рис.1.3), то противоположная сторона равна



Рис.1.3

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}.$$

Из рис.1.2 видно, что векторы \vec{E}_1 , \vec{E}_2 и \vec{E} образуют треугольник с углом $\pi - \beta$. Поэтому величина результирующей напряженности сразу следует из теоремы косинусов, где величины напряженностей каждого из зарядов $E_1 = \frac{4q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot 5a^2} = 4000 \text{ В/м}$, $E_2 = \frac{4q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a^2} = 4000 \text{ В/м}$. $E =$

$$= \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos(\pi - \beta)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \beta} \text{ и } F = q_3E = 13,6 \text{ мН}.$$

Результирующий потенциал зарядов найти много проще, так как он будет суммой скалярных, а не векторных функций:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot AC} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot BC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{a} \left(\frac{q_1}{\sqrt{5}} + q_2 \right) = 1,94 \cdot 10^4 \text{ В}.$$

Энергия заряда q_3 в электростатическом поле зарядов q_1 и q_2 будет равна $W = q_3\varphi = q_3(\varphi_1 + \varphi_2) = 0,0388 \text{ Дж}$.



Внимательно следите за знаками зарядов в условиях!

Если заряд q_1 изменит знак, то вектор \vec{E}_1 поменяет направление (рис.1.4). Тогда по теореме косинусов $F = q_3E = q_3\sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos \beta} = 8,41 \text{ мН}$. Потенциал заряда q_1 изменит знак:

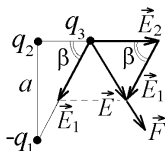
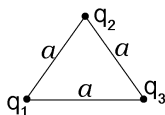


Рис.1.4

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-|q_1|}{AC} + \frac{q_2}{BC} \right) = -7,42 \cdot 10^3 \text{ В} \text{ и } W = q_3\varphi = -0,0148 \text{ Дж}.$$

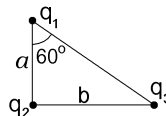
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

1.2. Имеющие разные знаки точечные заряды $q_1 = q_3 = 2 \text{ мкКл}$ и $q_2 = -1 \text{ мкКл}$ находятся в вершинах равностороннего треугольника. На заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2 действует электрическая сила величины $F = 0,01 \text{ Н}$. Найти длину a стороны треугольника.



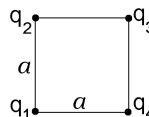
Ответ: 1,77 м.

1.3. Точечные заряды одного знака $q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл и q_3 находятся в вершинах прямоугольного треугольника с углом 60° и с прилежащим катетом $a = 1$ м. Определить величину заряда q_3 , если величина электрической силы, действующей на него со стороны двух других зарядов q_1 и q_2 , равна $F = 6$ мН. Определить величину энергии заряда q_3 .



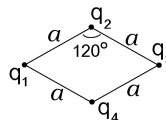
Ответ: 0,747 мкКл; 11,1 мВ.

1.4. Точечные заряды разного знака q_1 , q_2 , q_3 и q_4 находятся в вершинах квадрата со стороной $a = 2$ м. Определить величину положительного заряда q_1 , если модуль электрической силы, действующей на него со стороны трёх других зарядов q_2 , q_3 и q_4 , равен $F = 0,2$ мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2 , q_3 и q_4 в точке, где находится заряд q_1 . Учесть, что $q_2 = q_4 = -2$ мкКл, $q_3 = +6$ мкКл.



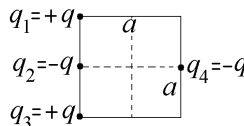
Ответ: 0,518 мкКл, 1092 В.

1.5. Точечные заряды разного знака $q_1 = q_3 = +3$ мкКл, $q_2 = q_4 = -2$ мкКл находятся в вершинах ромба с углом 120° и с длиной каждой из сторон $a = 1$ м. Найти величину электрической силы, действующей на заряд q_3 со стороны трёх других зарядов q_1 , q_2 и q_4 . Найти энергию заряда q_3 в поле трех остальных зарядов.



Ответ: 66,5 мН, $-0,0145$ Дж.

1.6. Точечные заряды q_1 , q_2 , q_3 и q_4 имеющие одинаковую величину и разный знак, расположены в двух вершинах и в серединах двух сторон квадрата с длиной стороны $a = 3$ м, как показано на рисунке. Определить величину заряда q_1 , если модуль электрической силы, действующей на заряд q_4 со стороны трёх зарядов q_1 , q_2 и q_3 , равен $F = 1$ мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2 , q_3 и q_4 в точке расположения заряда q_1 .



Ответ: 1,523 мкКл, 8,66 кВ.

1.2. Расчет электростатических полей распределенных зарядов

Если заряд распределен непрерывно по объему с плотностью ρ , то его можно разбить на крошечные участки dV , заряды которых можно считать **точечными** $dq = \rho dV$ (рис.1.5). Созданные ими на-

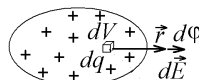
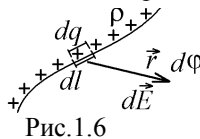


Рис.1.5

пряженности $d\vec{E}$ и потенциалы $d\varphi$ суммируются. Для бесконечно малых величин такая сумма превращается в интеграл: $\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Чтобы избежать интегрирования по объему, в задачах контрольной работы рассматривается заряд, распределенный вдоль прямых линий или окружностей с линейной плотностью ρ [Кл/м]. На бесконечно малом участке линии длиной dl находится заряд $dq = \rho dl$, Рис.1.6



создающий в вакууме на удалении r потенциал $d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$ и напря-

женность $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (рис.1.6). Интегрировать надо по всем участ-

кам, на которых находится ненулевой заряд $\rho \neq 0$, причем векторы $d\vec{E}$ надо складывать с учетом направления.

Примеры решения задач:

2.1. Электрический заряд распределен по очень тонкому стержню длины $2a = 1$ м, вытя- нутому вдоль оси x . Линейная плотность этого заряда меняется с координатой x по степенному закону $\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot (x/a)^3 & \text{при } -a \leq x \leq a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases}$

где $\rho_0 = 4$ мкКл/м. В центре стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён точечный заряд $q = 3$ мкКл (см. рисунок). Найти проекцию на ось x электрической силы, с которой заряд стержня действует на заряд q . Найти потенциал, который заряд на стержне создает в точке 0.

Решение.

Положительный заряд $dq = \rho(x)dx$, находящийся на расстоянии x справа от точки 0, создает в этой точке на-

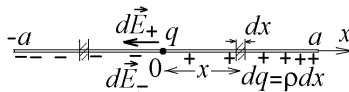


Рис.1.7

пряженность $d\vec{E}_+$, направленную от заряда против оси x (рис.1.7). Так как по условию положительный и отрицательный заряд распределены симметрично, то такую же по величине напряженность $d\vec{E}_-$, направленную в ту же сторону, создает симметрично расположенный отрицательный заряд $-|dq|$ слева от точки 0.



Используйте условия симметрии в распределении заряда. Дос-
точно вычислить поле заряда только одного знака.

Положительный и отрицательный заряды создадут в точке 0
одинаковые поля:

$$E_- = E_+ = \int dE_+ = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \left(\rho_0 \frac{x^3}{a^3} \right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_0}{a^3} \int_0^a x dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho_0}{2a}.$$

Поэтому суммарная напряженность поля, созданного зарядом на
стержне в точке 0 равна $\vec{E} = 2\vec{E}_+$, а проекция силы, действующей на
заряд q , $F_x = qE_x = \rho_0 q / (4\pi\epsilon_0 a) = -0,216 \text{ Н}$.

Нетрудно сообразить, что потенциалы симметрично расположен-
ных положительного и отрицательного зарядов должны компенсиро-
вать друг друга,

$$\varphi_+ = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho dx}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_0}{a^3} \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho_0}{3} = -\varphi_-.$$

Суммарный потенциал в точке 0 равен нулю.

2.2. Электрический заряд распределён по тонко-
му полукольцу радиуса $R = 50 \text{ см}$ неравномерно с
линейной плотностью $\rho = \rho_0 \sin^2 \theta$, где $\rho_0 =$

$= 7,08 \text{ мКл/м}$, а угол θ указан на рисунке. Найти величину электриче-
ской силы, с которой этот заряд действует на другой точечный заряд
 $q = 6 \text{ мКл}$, находящийся в центре полукольца. Найти потенциал, кото-
рый заряд на полукольце создает в его центре.

Решение.

При решении подобных задач на полукольце
выделяют крошечную дугу длины $dl = R d\theta$, опи-
рающуюся на бесконечно малый угол $d\theta$ (рис.1.8).
На этом участке находится точечный заряд
 $dq = \rho dl$, создающий в центре 0 полукольца на-

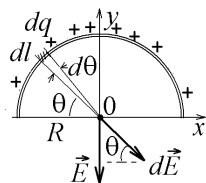
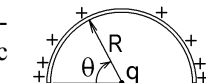


Рис.1.8

пряженность $dE = dq / (4\pi\epsilon_0 R^2)$. Из-за симметрии распределения заря-

да слева и справа от вертикальной оси y , суммарная напряженность \vec{E}
направлена против оси y , т.е. надо суммировать проекции на эту ось:

$$E = \int dE \sin \theta = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\theta) \cdot R d\theta}{R^2} \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi \rho_0 \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta$$



При решении подобных задач часто встречаются интегралы вида $\int f(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ или $\int f(\sin \theta) \cos \theta d\theta$, которые легко привести к простому виду заменой переменной $z = \cos \theta$,

$\sin \theta d\theta = -dz$ или $z = \sin \theta$, $\cos \theta d\theta = dz$. При этом $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$.

Делая замену переменной $z = \cos \theta$ в полученном выше интеграле и меняя местами пределы интегрирования, чтобы убрать знак “-”, получаем

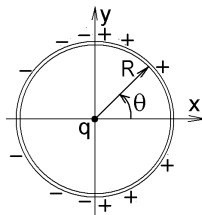
$$E = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\rho_0}{3R}, \quad \text{откуда} \quad F = qE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q\rho_0}{3R} = 0,288 \text{ Н} - \text{это сила, действующая на заряд } q \text{ в точке } 0.$$

Потенциал, созданный зарядом полукольца в его центре, вычисляется интегрированием. Так как

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{то}$$

$$\varphi_0 = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \cdot R d\theta}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^\pi \rho_0 \sin^2 \theta d\theta = \frac{\rho_0}{8\epsilon_0 R} = 200 \text{ кВ}.$$

2.3. Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса $R = 60$ см так, что его линейная плотность меняется с углом θ по закону $\rho = \rho_0 / \cos \theta$, где $\rho_0 = 1,18$ мкКл/м. В центре кольца помещён точечный электрический заряд q , на который заряд кольца действует с силой $F = 1$ Н. Найти величину заряда q .



Решение.

Выделяем на кольце крошечный участок дуги $dl = R d\theta$ с точечным зарядом $dq = \rho dl = \rho R d\theta$, который создает в центре 0 кольца напряженность $d\vec{E}$ (рис.1.9). Из-за симметрии в распределении заряда и положительный заряд на правой половине кольца, и отрицательный заряд на левой половине создают в точке 0 одинаковые напряженности

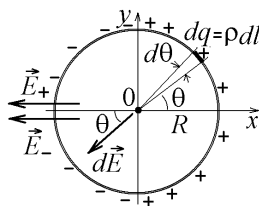


Рис.1.9

$\vec{E}_+ = \vec{E}_-$, направленные против оси x . Их сумма (сумма проекций $d\vec{E}$ на ось x) имеет величину $E = E_+ + E_- = 2E_+ = 2 \int dE \cdot \cos \theta =$

$$= 2 \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta = 2 \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=+\pi/2} \frac{\rho R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta = \frac{2\rho_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 R}. \text{ Величина}$$

силы, действующей на заряд q в точке 0 $F = qE = q\rho_0/(2\epsilon_0 R)$, откуда $q = 2\epsilon_0 RF/\rho_0 = 9 \text{ мКл}$.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

2.4. По тонкому стержню длины $a = 2 \text{ м}$, направленному вдоль оси x , неравномерно распределен отрицательный электрический заряд, линейная плотность которого меняется с координатой x по закону $\rho = \rho_0 \cdot (x/a)^3$, где $\rho_0 = -2 \text{ мКл/м}$. На левом краю стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён положительный точечный заряд $q = +2 \text{ мКл}$ (см. рисунок). Найти проекцию на ось x электрической силы, с которой заряд на стержне действует на заряд q , а также потенциал, созданный зарядом на стержне в точке 0.

Ответ: $+9 \text{ мН}$, -6 кВ .

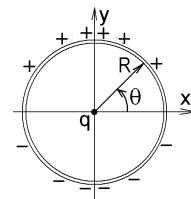
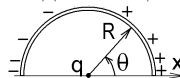
2.5. Тонкий стержень длины a направлен вдоль оси x . По стержню равномерно с линейной плотностью $\rho = 0,2 \text{ мКл/м}$ распределен положительный электрический заряд. На расстоянии a от правого конца стержня на оси x находится точечный заряд $q = 0,5 \text{ мКл}$ того же знака (см. рисунок). Заряд на стержне действует на заряд q с силой $F = 0,9 \text{ Н}$. Найти длину a стержня, а также энергию заряда q .

Ответ: $0,5 \text{ м}$, $0,624 \text{ Дж}$.

2.6. Положительный точечный заряд $q = 7 \text{ мКл}$ находится в центре тонкого полукольца, по которому неравномерно, с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \cdot \cos\theta$, где $\rho_0 = 1,77 \text{ мКл/м}$, распределен другой электрический заряд (угол θ указан на рисунке). Найти радиус R полукольца, если заряд на нём действует на заряд q с силой, величина проекции которой на ось x равна $|F_x| = 0,5 \text{ Н}$.

Ответ: $0,35 \text{ м}$.

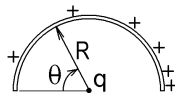
2.7. Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса $R = 40 \text{ см}$ так, что его линейная плотность меняется с углом θ по закону $\rho = \rho_0 \cdot \sin\theta$, где $\rho_0 = +2,95 \text{ мКл/м}$. В центре кольца помещён другой точечный заряд $q = +24 \text{ мКл}$. Найти величину



электрической силы, с которой заряд на кольце действует на заряд q .

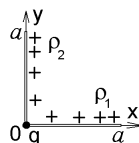
Ответ: 5 Н.

2.8. Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса $R = 50$ см с линейной плотностью $\rho = \rho_0 (\theta/\pi)^3$, где $\rho_0 = 7,08$ мкКл/м, а угол θ меняется в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$. Найти энергию точечного заряда $q = 6$ мкКл, находящийся в центре полукольца.



Ответ: 0,3 Дж.

2.9. Два очень тонких стержня длиной $a = 20$ см каждый направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей x и y и соединяются в начале координат 0 , в котором закреплён точечный заряд $q = 2$ мкКл (см. рисунок). По стержням неравномерно распределены электрические заряды, линейные плотности которых зависят от координат x и y соответственно: $\rho_1 = \rho_0 \cdot (x/a)^2$, $\rho_2 = \rho_0 \cdot (y/a)^2$, где $\rho_0 = 2$ мкКл/м. Найти величину электрической силы, действующей на заряд q , а также энергию этого заряда.



Ответ: 0,255 Н, 0,036 Дж.

1.3. Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

В том случае, когда можно выбрать замкнутую поверхность, которую линии напряженности \vec{E} или линии электрической индукции \vec{D} пересекают под прямым углом, для расчета поля удобно использовать теорему Гаусса: поток вектора \vec{E} через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов $\sum q$ (с учетом их знака!), находящихся **внутри этой поверхности**, деленной на $\epsilon\epsilon_0$:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \sum q / \epsilon\epsilon_0.$$

Для вектора \vec{D} такая же теорема имеет вид $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q$.



Используйте теорему Гаусса в том случае, когда заряд распределен симметрично по шару, по длинному цилиндру, по нити или равномерно распределен по плоскости или плоскому слою.

Примеры решения задач:

3.1. По шару радиуса R равномерно с плотностью ρ распределен электрический заряд. На расстояниях $r_1 = 15$ см и $r_2 = 60$ см от центра

шара величина напряжённости электрического поля, данного этим зарядом, равна, соответственно, $E_1 = 24$ В/м и $E_2 = 12$ В/м. Чему равен радиус шара R , если известно, что $r_1 < R < r_2$?

Решение.

Линии \vec{E} начинаются на всех зарядах внутри шара и направлены радиально (рис.1.10). Охватим шар сферической замкнутой поверхностью A с радиусом $r > R$. Если вектор \vec{E} составляет угол θ с вектором элементарной площадки $d\vec{S}$, то $\vec{E}d\vec{S} = E \cos \theta dS$. В нашей задаче элементы площади $d\vec{S}$ направлены параллельно линиям \vec{E} , а величина E в силу симметрии

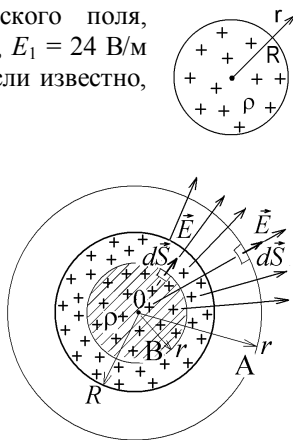


Рис.1.10

одинакова во всех точках сферы. Поэтому поток \vec{E} через замкнутую сферу равен произведению E на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$, которую линии E пересекают нормально: $\oint \vec{E}d\vec{S} = E \cos 0^\circ \oint dS = .$
 $= E \cdot 4\pi r^2 = \sum q / \epsilon_0$. Сумма зарядов внутри сферы равна заряду шара $\sum q = \rho \cdot V_{\text{шара}} = \rho \cdot 4\pi R^3 / 3$. Вне шара напряженность $E_{\text{вне}} = \rho R^3 / 3\epsilon_0 r^2$ совпадает с напряженностью поля заряда, собранного в центр шара.

Вторую сферическую поверхность B с радиусом $r < R$ выберем внутри шара. Внутри неё находится заряд заштрихованного на рис.1.10 шара радиуса r : $\sum q = \rho \cdot 4\pi r^3 / 3$.

Применение теоремы Гаусса дает $E \cdot 4\pi r^2 = \sum q / \epsilon_0 =$
 $= \rho \cdot 4\pi r^3 / 3\epsilon_0$. Поле внутри шара растёт пропорционально расстоянию r : $E_{\text{внутри}} = \rho r / 3\epsilon_0$ (рис.1.11).

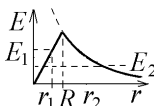


Рис.1.11

Согласно условию, на расстояниях r_1 и r_2 величины напряженностей различаются в два раза (рис.1.11):

$$E_1 = \rho r_1 / 3\epsilon_0 = 2E_2 = 2\rho R^3 / 3\epsilon_0 r_2^2, \text{ откуда } R = \sqrt[3]{r_1 r_2^2 / 2} = 30 \text{ см}.$$



Если плотность заряда является функцией расстояния r , то данное решение не меняется, но сумма зарядов внутри сферы радиуса r вычисляется по формуле

$$\Sigma q = \int \rho(r) dV = \int \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr.$$

3.2. По шару радиуса $R = 50$ см из материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ распределён электрический заряд, причём объёмная плотность такого заряда меняется с расстоянием r от центра шара по закону $\rho = \rho_0 \cdot (r/R)^2$, где $\rho_0 = \text{const}$. На расстоянии $r = 5$ см от центра заряд создаёт электрическое поле с величиной напряжённости $E = 20$ В/м. Найти величину ρ_0 .

Решение.

Как и в предыдущей задаче, поток вектора \vec{E} через замкнутую сферическую поверхность радиуса r , находящуюся **внутри** шара, равен $E \cdot 4\pi r^2 = \Sigma q / \varepsilon_0 \varepsilon$ (надо учесть диэлектрическую проницаемость среды). Объем внутри $V = 4\pi r^3 / 3$, элемент объема $dV = 4\pi r^2 dr$.

Заряд внутри поверхности

$$\Sigma q = \int \rho dV = \int_0^r \rho_0 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \rho_0}{R^2} \int_0^r r^4 dr = \frac{4\pi \rho_0 r^5}{5R^2}.$$

Так как $\varepsilon = 2$, то $E = \frac{\rho_0 r^3}{10\varepsilon_0 R^2}$ и $\rho_0 = \frac{10\varepsilon_0 \varepsilon R^2 E}{r^3} = 7,08 \text{ мКл/м}^3$.

3.3. Две очень длинные цилиндрические поверхности с радиусами $a = 1$ м и $b = 5$ м с общей осью O ограничивают равномерно заряженный цилиндрический слой. Плотность электрического заряда в нём $\rho = 4 \text{ мКл/м}^3$. Найти величину вектора электрической индукции \vec{D} (вектора смещения) на расстоянии $r = 4$ м от оси O .

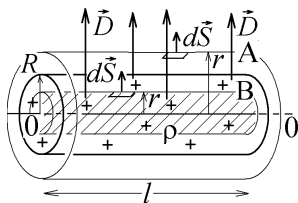
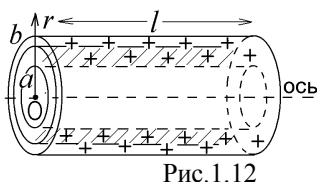


Рис.1.13

Решение.

Рассмотрим вначале равномерно заряженный с плотностью $\rho = \text{const}$ сплошной цилиндр. Окружим его соосной цилиндрической поверхностью A длины l и большего радиуса $r > R$. Как и линии \vec{E} , линии индукции \vec{D} направлены по радиусам к общей оси O и пересекают боковую поверхность $S_{\text{бок}} = 2\pi r l$ нормально (рис.1.13). Внутри этой поверхности

находится заряд из вырезанного поверхностью участка заряженного цилиндра $\sum q = \rho \cdot V_{\text{цилиндра}} = \rho \cdot \pi R^2 l$. Согласно теореме Гаусса

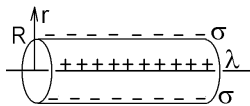
$$\oint \vec{D} d\vec{S} = D \cdot 2\pi r l = \sum q. \text{ Поэтому вне цилиндра } D_{\text{вне}} = \rho R^2 / 2r.$$

Цилиндрическая поверхность V меньшего радиуса $r < R$, охватывает заштрихованный на рис.1.13 участок цилиндра с зарядом $\sum q = \rho \cdot \pi r^2 l$. Теорема Гаусса для этой поверхности дает $D \cdot 2\pi r l = \sum q = \rho \pi r^2 l$. Поэтому внутри цилиндра $D_{\text{внутри}} = \rho r / 2$.

В нашей задаче проводим замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса $r < b$ и длины l внутри цилиндрического слоя. Она охватывает заштрихованный на рис.1.12 участок с объемом $V = \pi r^2 l - \pi a^2 l$, имеющий заряд $\sum q = \rho V$. Теорема Гаусса позволяет просто определить индукцию D на этой поверхности:

$$D = \frac{\sum q}{2\pi r l} = \rho (r^2 - a^2) / 2r = 7,5 \text{ мКл/м}^2.$$

3.4. Поверхностная плотность электрического заряда, равномерно распределенного по бесконечно длинной цилиндрической поверхности радиуса $R = 30$ см, равна $\sigma = -2$ мКл/м².



По её оси протянута нить, равномерно заряженная с линейной плотностью $\lambda = 4$ мКл/м. На каком удалении r от оси напряженность электрического поля, созданного этими зарядами будет равна $E = 1$ кВ/м?

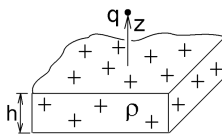
Решение.

Как и на рис.1.13, охватим эту систему зарядов замкнутой цилиндрической поверхностью длины l и радиуса $r > R$. Она охватывает участок цилиндра с зарядом $q_{\text{ц}} = \sigma \cdot 2\pi R l$ и участок нити с зарядом $q_{\text{н}} = \lambda \cdot l$. Линии \vec{E} расходятся вдоль радиусов и перпендикулярны к выбранной поверхности. Согласно теореме Гаусса

$$E \cdot 2\pi r l = \sum q / \epsilon_0 = (q_{\text{ц}} + q_{\text{н}}) / \epsilon_0, \text{ откуда } r = \frac{2\pi R \sigma + \lambda}{2\pi \epsilon_0 E} = 4,14 \text{ м}.$$

При $r < R$ поле создает только заряд нити. Одна нить создаёт слишком большое поле $E_{\text{нити}} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$, не удовлетворяющее условиям задачи.

3.5. На удалении $z = 1$ м от бесконечного плоского слоя, заряженного равномерно с плотностью заряда $\rho = 5$ мКл/м³, находится точечный заряд $q = 4$ мКл. Чему равна толщина слоя h , если он действует на заряд q с электрической силой $F = 0,02$ Н?



Решение.

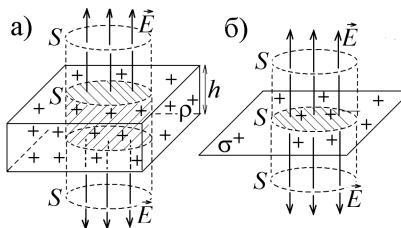


Рис. 1.14

И в случае равномерно заряженного с плотностью ρ слоя (рис.1.14,а), и в случае равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ плоскости (рис.1.14,б), линии напряженности \vec{E} выходят нормально и пересекают только имеющие площадь S основания цилиндрической

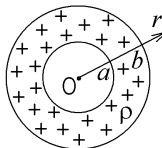
замкнутой поверхности, охватывающей заряды на заштрихованных участках. По теореме Гаусса поток \vec{E} через эту поверхность $\oint \vec{E} d\vec{S} = E \cdot 2S = \sum q / \epsilon_0 \epsilon$. Сумма зарядов на заштрихованных участках $\sum q = \rho \cdot hS$ для слоя и $\sum q = \sigma \cdot S$ для плоскости. Поэтому

$$E_{\text{слой}} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0 \epsilon} \quad (\text{рис.1.14,а}) \quad \text{и} \quad E_{\text{плоскости}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon} \quad (\text{рис.1.14,б}).$$

Величина E не зависит от расстояния до бесконечного слоя (или плоскости). Действующая на заряд q сила $F = qE$, и по условиям задачи ($\epsilon = 1$) толщина слоя $h = 2\epsilon_0 F / q\rho = 1,77$ см.

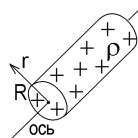
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

3.6. Заряд с плотностью $\rho = 3,75$ мКл/м³ равномерно распределён по шаровому слою, ограниченному двумя сферическими поверхностями с общим центром O и с радиусами a и b . Чему равен радиус a , если $b = 9$ м, а на расстоянии $r = 5$ м от центра O величина вектора электрической индукции поля, созданного этим зарядом, равна $D = 6,2$ мКл/м²?



Ответ: 1 м.

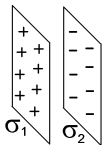
3.7. Очень длинный цилиндр радиуса $R = 4$ см равномерно с плотностью $\rho = \text{const}$ заряжен по объёму. На расстоянии $r_1 = 3$ см от оси цилиндра напряжённость



электрического поля, имеет величину $E_1 = 24$ В/м, а на расстоянии $r_2 > r_1$ от оси $E_2 = 16$ В/м. Найти расстояние r_2 .

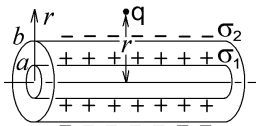
Ответ: 8 см.

3.8. По двум параллельным бесконечным плоскостям равномерно распределены электрические заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = +8$ мкКл/м² и $\sigma_2 = -4$ мкКл/м² разного знака. Во сколько раз величина вектора электрической индукции \mathbf{D} между заряженными плоскостями больше величины вектора \mathbf{D} слева от обеих плоскостей?



Ответ: в 3 раза.

3.9. Электрический заряд разного знака, равномерно распределён по двум бесконечно длинным цилиндрическим поверхностям с общей осью, которые имеют радиусы $a = 5$ см и $b = 10$ см. Поверхностные плотности таких зарядов $\sigma_1 = -5,9$ нКл/м² и $\sigma_2 = +4,72$ нКл/м². Чему равна величина точечного заряда q , находящегося на расстоянии $r = 20$ см от оси, если со стороны заряженных поверхностей на него действует электрическая сила $F = 3$ мН?



Ответ: 30 мкКл.

3.10. Электрический заряд распределён в пространстве неравномерно: его плотность изменяется с расстоянием r от центра O по закону: $\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot (R/r)^3 & \text{при } r \geq R; \\ 0 & \text{при } r < R, \end{cases}$ где $\rho_0 = 2,36$ нКл/м³; $R = 50$ см. Найти величину напряжённости электрического поля, созданного этим зарядом на расстоянии $r = 1$ м от центра O . $\epsilon = 1$.

Ответ: 23,1 В/м.

3.11. Электрический заряд распределён по объёму бесконечно длинного цилиндра радиуса $R = 20$ см. Плотность заряда меняется с расстоянием r от оси цилиндра по закону $\rho = \rho_0 \cdot (r/R)^2$, где $\rho_0 = 8$ мКл/м³. На каком расстоянии r от оси (внутри цилиндра) величина вектора электрической индукции равна $D = 3,2$ мкКл/м²?

Ответ: 4 см.

1.4. Потенциал и энергия электрического поля. Конденсаторы



При решении задач проще использовать дифференциальные операторы (производные). Например, напряжённость поля можно определить, зная его потенциал:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \equiv -\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Зная напряженность, вычисляют плотность заряда, создающего

электрическое поле:
$$\rho = \varepsilon_0 \varepsilon \text{div } \vec{E} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right).$$

Примеры решения задач:

4.1. Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = \varphi_0 \cdot (\sin(\alpha x) + \sin(\beta y) + \sin(\gamma z))$, где $\varphi_0 = 100$ В, $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$ рад/м. Найти плотности ρ электрического заряда в той точке, в которой потенциал поля равен $\varphi = 100$ В, а также величину напряженности в точке $x = y = z = 2$ м. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 1$.

Решение.

Находим проекции вектора \vec{E} : $E_x = -\partial \varphi / \partial x = -\alpha \varphi_0 \cos(\alpha x)$;

$E_y = -\partial \varphi / \partial y = -\beta \varphi_0 \cos(\beta y)$; $E_z = -\partial \varphi / \partial z = -\gamma \varphi_0 \cos(\gamma z)$. Плотность заряда пропорциональна дивергенции этого вектора и, так как $\alpha = \beta = \gamma$, во всех точках пропорциональна потенциалу:

$$\rho = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) =$$

$$= \varepsilon_0 \left(\alpha^2 \varphi_0 \sin(\alpha x) + \beta^2 \varphi_0 \sin(\beta y) + \gamma^2 \varphi_0 \sin(\gamma z) \right) = \varepsilon_0 \alpha^2 \varphi = 2,18 \text{ нКл/м}^3.$$

Величина напряженности:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \varphi_0^2 \cos^2 \pi} = \sqrt{3} \alpha \varphi_0 = 544 \text{ В/м}.$$

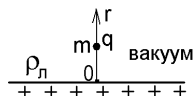
Работу по перемещению частицы с зарядом q из точки 1 в точку 2 в электростатическом поле можно вычислить с помощью силы Кулона:

$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 q \vec{E} d\vec{r}$. Но проще найти её с помощью потенциала. Эта работа идет на изменение кинетической энергии заряженной частицы:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Примеры решения задач:

4.2. Бесконечная прямая нить равномерно заряжена с линейной плотностью $\rho_l = 2$ мКл/м. Поко-



ившаяся первоначально на расстоянии $r_1 = 1$ м от нити частица с дом $q = 5$ мКл и с массой $m = 0,8$ г удаляется от нити под действием электрической силы. На каком расстоянии r_2 от нити частица будет иметь скорость $v = 30$ м/с?

Решение.



Напряженности поля заряженного шара, плоскости, нити можно получить с помощью теоремы Гаусса.

В данной задаче напряженность поля нити $E_{\text{нити}} = \frac{\rho_{\text{л}}}{2\pi\epsilon_0 r}$ (см.

задачу 3.4). Поэтому $\frac{mv^2}{2} = A_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} qEdr = \frac{q\rho_{\text{л}}}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q\rho_{\text{л}}}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

Избавиться от логарифма можно вычислив экспоненту от обеих частей

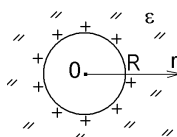
уравнения: $\exp \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{r_2}{r_1} = \exp\left(\frac{\pi\epsilon_0 mv^2}{q\rho_{\text{л}}}\right)$, откуда $r_2 = 7,40$ м.

Плотность энергии электрического поля (или энергия единицы объема поля) $w_{\text{эл}} = \epsilon\epsilon_0 E^2/2$. Энергия поля в объеме V вычисляется

как $W = \int w_{\text{эл}} dV$.

Примеры решения задач:

4.3. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$ заполняет все пространство вокруг заряженного металлического шара радиуса $R = 3$ см. Чему равна величина заряда q на шаре, если энергия созданного им электрического поля равна $W = 60$ Дж.



Решение.

Внутри металлического шара поле отсутствует, а вне шара совпадает с полем точечного заряда, собранного в центр шара:

$E = q / (4\pi\epsilon_0\epsilon r^2)$, при $r \geq R$. Поэтому энергия поля вне шара

$$W = \int \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_R^\infty \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R}.$$

Отсюда $q = \sqrt{8\pi\epsilon\epsilon_0 WR} = 40$ мКл.



Вместо энергии поля иногда проще найти энергию системы зарядов, создающих данное поле. Эти энергии одинаковы.

Энергия заряда выражается через емкость проводника C и его потенциал φ : $W = C\varphi^2/2$, где $q = C\varphi$. Емкость уединенного шара $C_{\text{шара}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$, его потенциал $\varphi = q/(4\pi\epsilon\epsilon_0 R)$. Подставляя, получаем уже найденную формулу для энергии W .

Заряд q и емкость C конденсатора связаны с разностью потенциалов $U = \Delta\varphi$ на его обкладках: $q = CU$. Энергия заряженного

конденсатора $W = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$. Емкость вычисляют, с по-

мощью формулы, связывающей напряженность и потенциал поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r}.$$

В **плоском конденсаторе** (рис.1.15,а) с площадью пластин S , расстоянием между пластинами d , заполненном диэлектриком с проницаемостью ϵ , напряженность поля между пластинами $E_{\text{конд}} = \sigma/\epsilon\epsilon_0$,

где $\sigma = q/S$ - поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов

на пластинах $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E_{\text{конд}} dx = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} d = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}$. Емкость плоско-

го конденсатора $C_{\text{плоск}} = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$.

В **сферическом конденсаторе** (рис.1.15,б) пространство между металлическими сферами с радиусами r_1 и r_2 заполнено диэлектриком с $\epsilon = \text{const}$. Поле между ними создано зарядом q на внутренней сфере:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}. \text{ Тогда } U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{C}$$

Емкость сферического конденсатора $C_{\text{сфер}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1 r_2 / (r_2 - r_1)$.

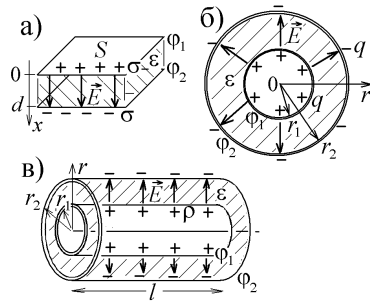


Рис.1.15

Аналогичным вычислением покажите, что емкость **цилиндрического конденсатора** (две соосные цилиндрические поверхности с радиусами r_1 и r_2 большой длины l , рис.1.15,в) равна $C_{\text{цилин}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}$.

Примеры решения задач.

4.4. Заряженный плоский конденсатор заполнен твердым диэлектриком и имеет энергию $W = 0,2$ Дж. Расстояние между его пластинами $d = 2$ мм. Найти силу, притягивающую одну пластину к другой.

Решение.

На пластину с зарядом q может действовать только заряд другой пластины (рис.1.15,а), создающий поле $E = \sigma/(2\epsilon\epsilon_0)$ (поле заряженной плоскости). Заряд конденсатора можно выразить через его энергию: $q^2 = 2CW = 2W\epsilon\epsilon_0 S/d$. Подставляя этот результат в формулу для силы $F = qE = q\sigma/(2\epsilon\epsilon_0) = q^2/(2\epsilon\epsilon_0 S)$, получаем $F = W/d = 100$ Н.

4.5. Пространство между заряженным металлическим шаром радиуса $r_1 = 2$ см и металлической заземленной сферой с радиусом $r_2 = 4$ см заполнено неоднородным диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого меняется с расстоянием r от общего центра О по закону $\epsilon = \alpha/r$, где $\alpha = 6$ см. Найти заряд q шара, если энергия такой системы заряженных проводников равна $W = 0,2$ Дж.



Решение.

На внутренней поверхности заземленной сферы окажется заряд $-q$, на котором будут заканчиваться все силовые линии \vec{E} , не проникая в металл. Система будет сферическим конденсатором, для которого разность потенциалов

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\alpha\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{4\pi\alpha\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

$$\text{Его энергия, } W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \text{ и } q = \sqrt{\frac{8\pi\alpha\epsilon_0 W}{\ln(r_2/r_1)}} = 1,96 \text{ мКл.}$$

Ёмкость этого конденсатора не совпадает с ёмкостью конденсатора, заполненного однородным диэлектриком.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

4.6. Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = \alpha \cdot xyz$, где $\alpha = \text{const}$. Величина напряженности такого поля в точке с координатами $x_1 = y_1 = z_1 = 1$ м равна $E_1 = 30$ В/м. Найти величину напряженности этого поля в точке с координатами $x_2 = 1$ м, $y_2 = 2$ м, $z_2 = 3$ м. *Ответ:* 121 В/м.

4.7. Потенциал электростатического поля зависит от координат x , y по закону $\varphi = \varphi_0 \cdot (\sin(\alpha x) + \cos(\beta y))$, где $\varphi_0 = 100$ В, $\alpha = 2$ рад/м, $\beta = 3$ рад/м. Найти величину напряженности поля, а также плотность электрического заряда в точке с координатами $x = y = 1$ м.

Ответ: 93,4 В/м, $-4,67$ нКл/м³.

4.8. Частица с зарядом $q = 3$ мкКл и с массой $m = 0,2$ г покоилась на расстоянии $z_1 = 1$ см от очень большой плоской поверхности металла, по которой с поверхностной плотностью $\sigma = 3,54$ нКл/м² распределен электрический заряд того же знака. Какую скорость приобретёт частица, удалившись на расстояние $z_2 = 4$ см от поверхности металла под действием электрической силы.



Ответ: 0,6 м/с.

4.9. Заряженный плоский конденсатор, имеющий энергию $W = 0,004$ Дж, заполнен диэлектриком и отключен от источника напряжения. Чтобы вынуть диэлектрик, надо совершить работу $A = 0,003$ Дж. Чему равна диэлектрическая проницаемость диэлектрика?

Ответ: 1,75.

4.10. Расстояние между горизонтально расположенными пластинами плоского воздушного конденсатора $d = 1$ см. Между пластин неподвижно висит заряженная пылинка с массой $m = 0,05$ г. Ёмкость конденсатора $C = 0,03$ мкФ, заряд на его пластинах $q = 6$ мкКл. Найти величину заряда пылинки. Принять $g = 10$ м/с².

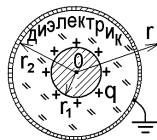
Ответ: 25 нКл.

4.11. Однородная среда с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$ заполняет пространство между металлическим шаром и заземленной металлической сферой радиуса $r_2 = 8$ м. На шар помещен заряд $q = 6$ мкКл, а потенциал электростатического поля в общем центре O шара и сферы имеет величину $\varphi_0 = 2,4$ кВ. Чему равен радиус r_1 шара?



Ответ: 3,30 м.

4.12. Металлический шар радиуса $r_1 = 2$ см и заземленная металлическая сфера радиуса $r_2 = 3$ см имеют общий центр O . Диэлектрическая проницаемость непроводящей среды, заполняющей пространство между шаром и сферой, убывает с расстоянием r от центра O по закону $\varepsilon = a/r$, где $a = 4$ см. Найти ёмкость такой системы проводников (в пФ).



Ответ: 11,0 пФ

4.13. Металлический шар с зарядом $q = 4$ мкКл окружен заземленной металлической сферой радиуса $r_2 = 5$ см. Между ними находится диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого убывает с расстоянием r от общего центра O по закону $\varepsilon = b/r^3$, где $b = 150$ см³. Энергия этой системы заряженных проводников равна $W = 0,36$ Дж. Найти радиус шара r_1 .

Ответ: 3,16 см.

1.5. Законы квазистационарного тока

Ток, протекающий по участку цепи с сопротивлением R , создает на нем падение напряжения $[U = IR]$. Мощность тока $[P = UI = I^2 R]$, а величина силы тока зависит от величины заряда, протекшего через сечение проводника за единицу времени: $[I = dq/dt]$.



Если ток зависит от времени, не используйте школьные формулы, записанные для постоянного тока!

Величина заряда, протекшего по цепи за время $0 \leq t \leq \tau$ будет

равна $q = \int_0^{\tau} I(t) dt$, а величина выделившегося тепла $Q = \int_0^{\tau} I^2(t) R dt$.

Примеры решения задач:

5.1. Ток, текущий по проводнику, возрастает прямо пропорционально времени t : $I = \alpha \cdot t$, где $\alpha = \text{const}$. Чему равно сопротивление R проводника, если за промежуток времени $0 \leq t \leq \tau$, где $\tau = 4$ с, через поперечное сечение проводника протекает заряд $q = 5$ Кл, а в проводнике выделяется джоулево тепло $Q = 80$ Дж?

Решение.

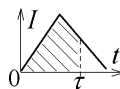
$$\text{Так как } q = \int_0^{\tau} I dt = \int_0^{\tau} \alpha t dt = \frac{\alpha \tau^2}{2}; \quad Q = \int_0^{\tau} I^2 R dt = \int_0^{\tau} \alpha^2 t^2 R dt = \frac{\alpha^2 \tau^3 R}{3},$$

то $\frac{q^2}{Q} = \frac{3\pi}{4R}$ (исключили неизвестную α). Поэтому $R = \frac{3\pi Q}{4q^2} = 9,6 \text{ Ом}$.

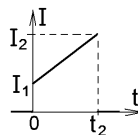


Если зависимость силы тока от времени задана с помощью графика (в задачах обычно задана линейная зависимость), то её надо выразить линейной функцией: $I = a + bt$. Параметры a и b этой зависимости определяют подстановкой числовых данных на осях графика.

Надо помнить, что интеграл равен площади под графиком подынтегральной функции. Например, протекающий за время τ заряд будет равен заштрихованной площади под графиком тока.



5.2. По проводнику с сопротивлением $R = 2 \text{ Ом}$ течёт ток, величина которого за интервал времени $0 \leq t \leq t_2 = 3 \text{ с}$ меняется по линейному закону от $I_1 = 2 \text{ А}$ до $I_2 = 5 \text{ А}$ (см. рисунок). Чему равно тепло Q , которое выделится в проводнике за указанный интервал времени $0 \leq t \leq t_2 \text{ с}$, а также заряд q , который протечет по проводнику за это время?



Решение.

Так как $I = a + bt$, то при $t = 0$ имеем $I_1 = a$, а при $t = t_2$ $I_2 = a + bt_2$.

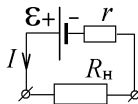
Отсюда $b = (I_2 - I_1)/t_2 = 1 \text{ А/с}$; $a = I_1 = 2 \text{ А}$.

Поэтому

$$Q = \int I^2 R dt = \int (a + bt)^2 R dt = R \left(a^2 \int_0^{t_2} dt + 2ab \int_0^{t_2} t dt + b^2 \int_0^{t_2} t^2 dt \right) =$$

$$= R \left(a^2 t_2 + ab t_2^2 + b^2 t_2^3 / 3 \right) = 78 \text{ Дж.}$$

Протекающий заряд $q = \int I dt$ равен площади под графиком тока: $q = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) t_2 = 10,5 \text{ Кл}$.

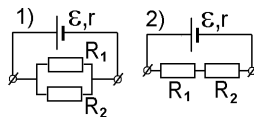


В случае, когда к источнику тока с **постоянной** ЭДС \mathcal{E} подключена внешняя нагрузка с сопротивлением R_H , по цепи протекает постоянный ток $I = \mathcal{E} / (R_H + r)$. Помните: у каждого источника тока есть внутреннее сопротивление r .

В этом случае за время Δt на нагрузке выделяется тепло $Q = I^2 R \Delta t$.

Примеры решения задач.

5.3. К клеммам источника постоянного тока с внутренним сопротивлением $r = 40$ Ом сначала подключали нагрузку из двух одинаковых сопротивлений $R_1 = R_2 = R$, соединенных параллельно (рис.1), а потом соединённых последовательно (рис.2). В цепи на рис.1 за одну минуту на нагрузке выделялось тепло $Q_1 = 3,6$ кДж, а в цепи на рис.2 за то же время на нагрузке выделялось тепло $Q_2 = 2,5$ кДж. Чему равно каждое из сопротивлений R_1 или R_2 ? Какой заряд протекает через нагрузку в обоих случаях?



Решение.

При параллельном соединении резисторов сопротивление нагрузки равно $R_{н1} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = R/2$, а при последовательном —

$$R_{н2} = R_1 + R_2 = 2R. \text{ Поэтому } Q_1 = I_1^2 R_{н1} \Delta t = \left(\frac{\varepsilon}{r + R/2} \right)^2 \frac{R}{2} \Delta t;$$

$$Q_2 = I_2^2 R_{н2} \Delta t = \left(\frac{\varepsilon}{r + 2R} \right)^2 2R \Delta t.$$

Отсюда $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{36}{25} = \frac{(r + 2R)^2}{4(r + R/2)^2}$, или $\frac{r + 2R}{r + R/2} = \frac{12}{5}$ и $R = \frac{7r}{4} = 70$ Ом.

Зная сопротивления, можно вычислить величину ЭДС, величину токов $I_1 = \sqrt{2Q_1 / R \Delta t}$; $I_2 = \sqrt{Q_2 / 2R \Delta t}$, а также определить протекающий за время Δt заряд:

$$q_1 = I_1 \Delta t = \sqrt{\frac{2Q_1 \Delta t}{R}} = 111 \text{ Кл}; \quad q_2 = I_2 \Delta t = \sqrt{\frac{Q_2 \Delta t}{2R}} = 46,3 \text{ Кл}.$$



Если в условии задачи приведены удельное сопротивление проводника ρ или его удельная проводимость $\sigma = 1/\rho$, то можно

использовать закон Ома в локальной форме: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Здесь \vec{E} — напряженность стороннего электрического поля, создающего ток, а $j = dI/dS$ — плотность тока, текущего через поперечное сечение S проводника, которое может иметь произвольную форму (рис.1.16). Величина силы тока, те-

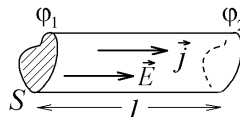


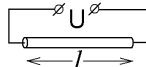
Рис.1.16

кущего по проводнику $I = \int j dS$. Если плотность тока во всех точках сечения S одинакова, то $I = jS$, а падение напряжения на проводнике длины l равно $\varphi_1 - \varphi_2 = \int Edl = U = El$.

Подстановкой j и E из закона Ома в локальной форме легко получить обычную запись закона Ома $U = IR$, где сопротивление участка однородного проводника $R = \rho l / S = l / \sigma S$.

Примеры решения задач:

5.4. Когда проволока длины l_1 была подключена к источнику постоянного напряжения U , в ней каждую минуту выделялось джоулево тепло $Q_1 = 729$ Дж. Затем эту проволоку растянули до длины l_2 и подключили к тому же источнику напряжения U . Теперь каждую минуту в проволоке начало выделяться тепло $Q_2 = 625$ Дж. Во сколько раз была увеличена длина проволоки?



Решение.

Текущий по проволоке ток $I = U/R$ постоянен. Меняется сопротивление $R_1 = \rho l_1 / S_1 \rightarrow R_2 = \rho l_2 / S_2$, где S — сечение проволоки, уменьшающееся при её растяжении. Поэтому

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{U^2}{R_1} \Delta t \bigg/ \frac{U^2}{R_2} \Delta t = \frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2}.$$

Но при растяжении не меняется объём проволоки $V = l_1 S_1 = l_2 S_2$.

Отсюда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1}$ и $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$. Длина проволоки меняется в

$$l_2 / l_1 = \sqrt{Q_1 / Q_2} = 1,08 \text{ раз.}$$

5.5. Напряженность электрического поля равна $E = 0,5$ мВ/м во всех точках цилиндрического проводника с радиусом $r_0 = 4$ мм и направлена вдоль его оси. Удельная проводимость материала проводника возрастает с расстоянием r от оси проводника по закону $\sigma = \sigma_0 (r/r_0)^2$, где $\sigma_0 = 5 \cdot 10^7$ (Ом·м)⁻¹. Найти силу тока I , текущего по проводнику.

Решение:

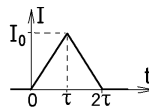
Выражая ток через его плотность $I = \int j dS$, где $dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr$

и используя закон Ома в локальной форме $j = \sigma E$, получаем

$$I = \int_0^{r_0} \sigma E \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi\sigma_0 E}{r_0^2} \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{2\pi\sigma_0 E}{r_0^2} \cdot \frac{r_0^4}{4} = \frac{\pi\sigma_0 E r_0^2}{2} = 0,628 \text{ А}.$$

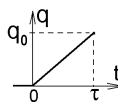
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

5.6. По проводнику течёт ток, величина которого меняется со временем t , как показано на рисунке, где $I_0 = 0,6 \text{ А}$, $\tau = 3 \text{ с}$. Заряд какой величины q протечёт через сечение проводника за интервал времени $0 \leq t \leq 2\tau$?



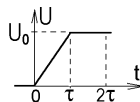
Ответ: 1,8 Кл.

5.7. В начальный момент $t = 0$ по проводнику с сопротивлением $R = 8 \text{ Ом}$ начинает течь ток, причем величина протекшего через поперечное сечение проводника заряда q линейно растёт со временем t (см. рисунок). Найти величину заряда q_0 протекшего к моменту времени $\tau = 3 \text{ с}$, если за промежуток времени $0 \leq t \leq \tau$ в проводнике выделится джоулево тепло $Q = 24 \text{ Дж}$?



Ответ: 3 Кл.

5.8. Падение напряжения на участке проводника с сопротивлением $R = 24 \text{ Ом}$ вначале линейно возрастает со временем t , а потом постоянно и равно $U_0 = 12 \text{ В}$ (см. рисунок, где $\tau = 1 \text{ мин}$). Какое джоулево тепло выделится в проводнике за промежуток времени $0 \leq t \leq 2\tau$?



Ответ: 480 Дж.

5.9. К клеммам источника постоянного тока подключена нагрузка с сопротивлением $R = 30 \text{ Ом}$. За какой промежуток времени Δt в нагрузке выделится джоулево тепло $Q = 15 \text{ Дж}$, если за это же время по цепи протечёт заряд $q = 5 \text{ Кл}$?



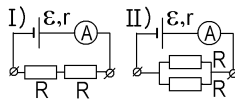
Ответ: 50 с.

5.10. Вначале сопротивление реостата, подключенного к источнику постоянного тока с эдс $\mathcal{E} = 36 \text{ В}$, было равно $R_1 = 100 \text{ Ом}$. Движком реостата увеличили его сопротивление в 4 раза, и при этом падение напряжения на нем возросло в $k = 1,5$ раз. Какое джоулево тепло стало после этого выделяться на реостате каждую секунду?



Ответ: 2,25 Дж.

5.11. Два одинаковых резистора с сопротивлением $R = 8 \text{ Ом}$ каждый подключены к источнику постоянного тока сначала последовательно (рис. I), а потом параллельно (рис. II). Во втором случае ток, показываемый амперметром, в 2,5 раз больше, чем в первом. По цепи, изображённой на правом рис. II за время $\Delta t = 2 \text{ мин}$ протекает заряд $q_{II} = 48 \text{ Кл}$. Чему равна величина эдс данного источника тока?



Ответ: 3,2 В.

5.12. Найти удельную проводимость σ однородного материала, из которого изготовлен цилиндрический проводник радиуса $r_0 = 5 \text{ мм}$, если во всех точках проводника напряженность стороннего электрического поля равна $E = 0,004 \text{ В/м}$, а по проводнику течет ток $I = 10 \text{ А}$.

Ответ: $3,18 \cdot 10^7 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$.

5.13. Однородный проводник с удельным сопротивлением $\rho = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ имеет поперечное сечение в форме квадрата со стороной $a = 5 \text{ мм}$. Величина напряженности квазистационарного стороннего электрического поля, направленного вдоль проводника, меняется со временем t по линейному закону: $E = At + B$, где $A = 5 \text{ В/м} \cdot \text{с}$, $B = 3 \text{ В/м}$. Какой заряд протечет через поперечное сечение проводника за промежуток времени $0 \leq t \leq 2 \text{ с}$?

Ответ: 80 Кл.

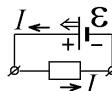
1.6. Разветвленные электрические цепи и правила Кирхгофа



При решении задач с разветвленными цепями делайте следующие действия, которые автоматически приведут Вас к правильному решению (для примера показана схема на рис. 1.17).

1) Аккуратно нарисуйте схему разветвленной цепи и жирными точками обозначьте все узлы – точки, где соединяются три и более проводника (точки А, В, D, Е на рис. 1.17);

2) Рядом с каждым источником ЭДС \mathcal{E}_i поставьте его внутреннее сопротивление r_i . На каждом источнике обозначьте стрелку \Rightarrow , выходящую из его плюсовой клеммы.



Эта стрелка показывает направление тока I_i , создаваемое источником \mathcal{E}_i в неразветвленной цепи.

3) В каждой ветви – участке цепи между двумя узлами – стрелкой обозначьте направление текущего тока. На рис.1.17 видно 6 ветвей и 6 токов $I_1 - I_6$. Старайтесь проставить индексы токов такими же, как индексы сопротивлений, по которым они текут. Вдоль одной ветви ток не должен менять ни величину, ни направление, как показано для тока I_1 . Не думайте в какую сторону действительно течет ток. Если Вы ошиблись с направлением, то в ответе получите этот ток с правильной величиной, но со знаком “минус”.

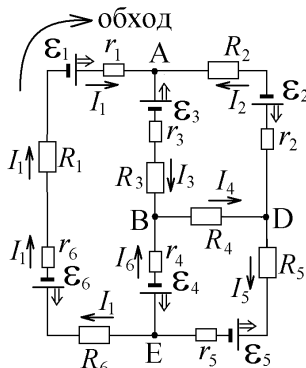


Рис.1.17

4) Для каждого узла можно записать первое правило Кирхгофа: $\sum I_i = 0$: токи, входящие в узел записывают со знаком “+”, а выходящие – со знаком “-”. Число токов равно числу проводников, соединяющихся в узле:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \text{ для узла A; } I_3 + I_6 - I_4 = 0 \text{ для узла B;}$$

$$I_4 - I_2 - I_5 = 0 \text{ для узла D и т.п.}$$

5) Выберите направление обхода (по часовой стрелке на рис 1.17) и запишите второе правило Кирхгофа для любого замкнутого контура цепи: $\sum U_i = \sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_i$ (алгебраическая сумма падений напряжения в замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в этом же замкнутом контуре). В цепи на рис.1.17 имеется семь **разных** замкнутых контуров (рис.1.18).

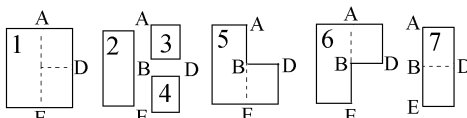


Рис.1.18

Если выбранное направление стрелки тока

совпадает с направлением обхода, то этот ток в сумме берется со знаком “+”, если не совпадает – со знаком “-”. Если стрелка ЭДС \Rightarrow совпадает с направлением обхода, то эта ЭДС входит в сумму со знаком “+”, если не совпадает – со знаком “-”. Менять направление уже поставленных стрелок нельзя. Идите по направлению обхода и записывайте падения напряжения **только для тех сопротивлений, которые Вы встретите в выбранном контуре**. Пройдя по контуру второй раз, запишите все встреченные ЭДС с соответствующими знаками:

$$I_1 R_6 + I_1 r_6 + I_1 R_1 + I_1 r_1 - I_2 R_2 - I_2 r_2 + I_5 R_5 + I_5 r_5 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6$$

(для контура 1 на рис.1.18);

$$I_1 R_6 + I_1 r_6 + I_1 R_1 + I_1 r_1 - I_2 R_2 - I_2 r_2 - I_4 R_4 - I_6 r_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_6$$

(для контура 6 на рис.1.18) и т.п.

6) Число возможных уравнений (1-е правило Кирхгофа для 4 узлов и 2-е правило для 7 контуров в цепи на рис.1.17) превышает число неизвестных токов $I_1 - I_6$. Эти уравнения будут линейно зависимыми.



Линейно независимыми для цепи с N узлами будут уравнения 1-го правила Кирхгофа для любых $N-1$ узлов и уравнения 2-го правила Кирхгофа для самых маленьких контуров, пустых внутри. Для цепи на рис.1.17 это, например, узлы А, В и D, и контуры 2, 3 и 4 (см. рис. 1.18). Остается без ошибок решить записанную систему линейных уравнений.

Как правило, в задаче контрольной работы надо рассчитать цепь с двумя узлами. В этом случае решается простая система из трех уравнений.

Примеры решения задач.

6.1. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом. Найти величину сопротивления R_3 , если известно, что $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $\varepsilon_1 = 12$ В; $\varepsilon_2 = 8$ В; $\varepsilon_3 = 10$ В; $I_2 = 2$ А.

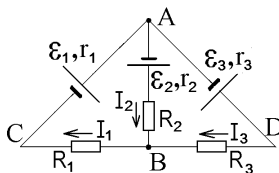
Решение.

Линейно независимой будут уравнения системы из 1-го правила Кирхгофа, записанного для узла В: $I_2 + I_3 - I_1 = 0$, и двух 2-х правил Кирхгофа, записанных для треугольных контуров САВ и ВAD: $I_1 R_1 + I_1 r_1 + I_2 R_2 + I_2 r_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$; $I_3 R_3 + I_3 r_3 - I_2 R_2 - I_2 r_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$. (как и на рис.1.17, направление обхода – по часовой стрелке). Эта система из трех уравнений содержит три неизвестные величины I_1, I_3 и R_3 .



Решать такую систему в буквенных обозначениях всё ещё слишком громоздко. Если Вы уверены в записанных уравнениях – подставьте все числовые значения из условия в систему СИ. Тогда ответ также получится в системе СИ. Уравнения станут простыми, но проверить размерности Вы уже не сможете.

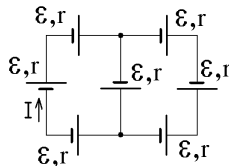
Из второго уравнения находим единственную не заданную в нем вели-



чину $I_1 = 4$ А. Подставляя её в первое уравнение, находим $I_3 = I_1 - I_2 = 2$ А.

Последнюю неизвестную R_3 находим из последнего уравнения, подставляя все найденные величины: $R_3 = 4$ Ом.

6.2. Семь одинаковых источников тока с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом каждый включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину ЭДС \mathcal{E} каждого из источников если по левому проводнику протекает ток $I = 3,2$ А.



Решение.

Направим стрелки токов I_1 и I_2 вверх, как и стрелку тока I . Все токи сходятся в узле А (рис.1.19) $I + I_1 + I_2 = 0$. Это означает, что направление каких-то токов указано неверно и в процессе вычисления эти токи будут иметь разный знак. Для контуров слева и справа от линии АВ 2-е правило Кирхгофа имеет вид:

Рис.1.19

Получили систему с тремя неизвестными I_1 , I_2 и \mathcal{E} :

$$I r + I r + I r - I_1 r = \mathcal{E} + \mathcal{E} + \mathcal{E} - \mathcal{E}, \quad I_1 r - I_2 r - I_2 r - I_2 r = \mathcal{E} + \mathcal{E} - \mathcal{E} - \mathcal{E}.$$

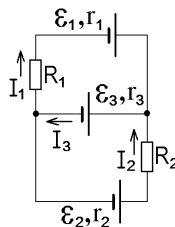
Получили систему с тремя неизвестными I_1 , I_2 и \mathcal{E} :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = -I, \\ 2\mathcal{E} + I_1 r = 3I r, \\ I_1 r - 3I_2 r = 0. \end{cases} \quad \text{Из последнего уравнения } I_2 = \frac{I_1}{3}, \quad \text{из первого}$$

$$I_1 = -\frac{3}{4}I, \quad \text{из второго уравнения } \mathcal{E} = \frac{(3I - I_1)r}{2} = \frac{15I r}{8} = 6 \text{ В}.$$

Токи $I_1 = -2,4$ А и $I_2 = -0,8$ А имеют правильную величину, но направления их мы не угадали.

6.3. Три источника тока с одинаковыми внутренними сопротивлениями $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину падения напряжения U_3 на клеммах источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_3 = 9$ В и внутренним сопротивлением r_3 , если $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $\mathcal{E}_1 = 16$ В; $\mathcal{E}_2 = 25$ В.



Решение.

Направления токов на рисунке уже заданы. 1-е правило Кирхгофа для левого узла имеет вид $I_3 - I_1 - I_2 = 0$. 2-е правило Кирхгофа для верхнего маленького контура $I_1 R_1 + I_1 r_1 + I_3 r_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$, для нижнего маленького контура $-I_3 r_3 - I_2 R_2 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2$ (обход – по часовой стрелке). После подстановки числовых данных в СИ имеем простую

систему:
$$\begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0, \\ 3I_1 + I_3 = 7, \\ I_3 + 4I_2 = 16. \end{cases}$$
 Решение этой системы дает

$$I_1 = 1 \text{ A}; I_2 = 3 \text{ A}; I_3 = 4 \text{ A}.$$



Помните, что если ток I **разряжает** батарею с ЭДС \mathcal{E} и с внутренним сопротивлением r (рис. 1.20, а), то падение напряжения на её клеммах $U = \mathcal{E} - Ir$. Если же ток **заряжает** батарею (рис. 1.20, б), то $U = \mathcal{E} + Ir$. Величина

а) $U = \mathcal{E} - Ir$
б) $U = \mathcal{E} + Ir$

Рис. 1.20

$U > \mathcal{E}$, иначе ток не потечет против источника ЭДС.

В нашей задаче, как видно из рисунка, ток I_3 направлен против источника ЭДС \mathcal{E}_3 , и напряжение на его клеммах $U_3 = \mathcal{E}_3 + I_3 r = 13 \text{ В}$.



Если цепь содержит больше двух узлов и линейно независимых уравнений слишком много, расставьте все числовые данные задачи на схеме и определите узлы или контуры, для которых уравнения правил Кирхгофа включают только одну неизвестную величину.

6.4. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1 \text{ Ом}$. Найти величину падения напряжения на клеммах источника \mathcal{E}_2 , если известно, что $\mathcal{E}_2 = 7 \text{ В}$; $\mathcal{E}_4 = 4 \text{ В}$; $R_2 = 2 \text{ Ом}$; $R_4 = 5 \text{ Ом}$; $R_5 = 7 \text{ Ом}$; $I_2 = 3 \text{ А}$; $I_4 = 2 \text{ А}$.

Решение.

Обозначим все числовые данные задачи на схеме (рис. 1.21). Теперь видно, что в

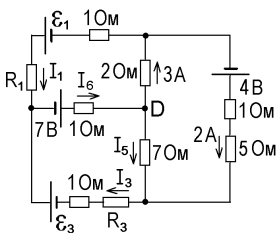
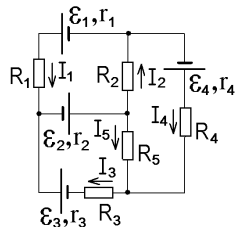


Рис. 1.21



уравнение 2-го правила Кирхгофа для правого контура входит неизвестная величина – ток I_5 :

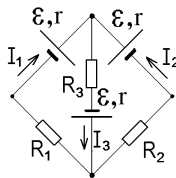
$$I_2 R_2 + I_4 (R_4 + r_4) - I_5 R_5 = \mathcal{E}_4, \text{ откуда легко найти } I_5 = 2 \text{ А}.$$

Далее из уравнения 1-го правила Кирхгофа для узла D (рис.1.21) находим величину тока $I_6 = I_2 + I_5 = 5 \text{ А}$. Этот ток будет разряжать источник \mathcal{E}_2 , и падение напряжения на его клеммах согласно рис.1.20,а, равно $U_2 = \mathcal{E}_2 - I_6 r_2 = 4 \text{ В}$.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

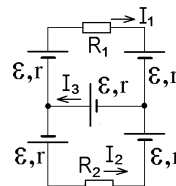
6.5. Три одинаковых источника тока с внутренним сопротивлением $r = 1 \text{ Ом}$ каждый включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину ЭДС \mathcal{E} каждого из источников тока, если $R_1 = 1 \text{ Ом}$; $R_2 = 2 \text{ Ом}$; $R_3 = 3 \text{ Ом}$; $I_3 = 5 \text{ А}$.

Ответ: 13 В.



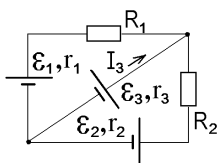
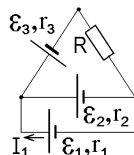
6.6. Пять одинаковых источников тока с ЭДС $\mathcal{E} = 11 \text{ В}$ каждый включены в разветвленную цепь, показанную на рисунке. Найти величину внутреннего сопротивления r источника тока, если $R_1 = 2 \text{ Ом}$; $R_2 = 6 \text{ Ом}$; $I_1 = 1 \text{ А}$.

Ответ: 1,5 Ом



6.7. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \text{ Ом}$. Найти величину тока I_1 , текущего через источник \mathcal{E}_1 , если известно, что $R = 5 \text{ Ом}$; $\mathcal{E}_1 = 8 \text{ В}$; $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ В}$; $\mathcal{E}_3 = 32 \text{ В}$.

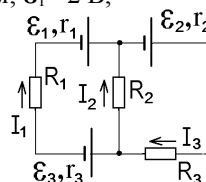
Ответ: 0 А.



6.8. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \text{ Ом}$. Найти величину ЭДС \mathcal{E}_3 , если известно, что $R_1 = 3 \text{ Ом}$; $R_2 = 4 \text{ Ом}$; $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$; $\mathcal{E}_2 = 10 \text{ В}$; $I_3 = 2 \text{ А}$.

Ответ: 12 В.

6.9. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \text{ Ом}$. Найти величину тока I_2 , текущего

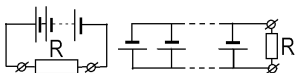
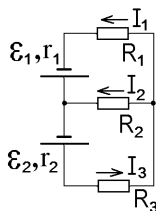


через сопротивление R_2 , если известно, что $R_1 = R_3 = 3 \text{ Ом}$; $R_2 = 2 \text{ Ом}$; $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ В}$; $\mathcal{E}_2 = 14 \text{ В}$; $\mathcal{E}_3 = 4 \text{ В}$.

Ответ: 1 А

6.10. Внутренние сопротивления двух источников тока, приведенных на рисунке одинаковы: $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$. Найти величину сопротивления R_2 , если известно, что $R_1 = 2 \text{ Ом}$; $R_3 = 2 \text{ Ом}$; $\mathcal{E}_1 = 9 \text{ В}$; $\mathcal{E}_2 = 36 \text{ В}$; $I_2 = 3 \text{ А}$.

Ответ: 3 Ом.

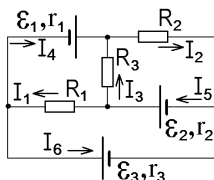


6.11. Одиннадцать одинаковых источников ЭДС с внутренним сопротивлением $r = 12 \text{ Ом}$ каждый соединяют в батарею вначале последовательно, а потом параллельно, и подключают к клеммам этих батарей одну и ту же нагрузку. Найти сопротивление нагрузки R , если при последовательном соединении источников ток в нагрузке в два раза больше, чем при параллельном.

Ответ: 28 Ом.

6.12. Три источника тока включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину сопротивления R_2 , если известно, что $\mathcal{E}_1 = 3 \text{ В}$; $\mathcal{E}_2 = 9 \text{ В}$; $r_1 = r_2 = 1 \text{ Ом}$; $R_1 = 2 \text{ Ом}$; $I_1 = 2 \text{ А}$; $I_3 = I_4 = 1 \text{ А}$.

Ответ: $R_2 = 2 \text{ Ом}$.



Во второй контрольной работе (вторая аттестация) предлагается решить 5-6 задач по следующим темам.

1.7. Расчет магнитных полей, созданных линейными токами

Элемент тока I длины $d\vec{l}$, направленный по току, создает на расстоянии \vec{r} магнитное поле с

индукцией
$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (\text{рис.1.22}). \quad \text{Здесь}$$

μ – магнитная проницаемость среды ($\mu = 1$ в вакууме или воздухе), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнитная постоянная.

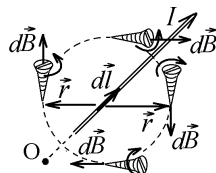


Рис.1.22



В задачах очень важно правильно определить направление вектора магнитной индукции \vec{B} в любой точке. Для этого надо поставить винт перпендикулярно току и радиус-вектору \vec{r} , проведенному в эту точку. Если вращать винт ближней по направлению тока, как показано на рис.1.22, то направление его поступательного движения покажет направление вектора \vec{B} . Замкнутые линии \vec{B} охватывают проводник с током.

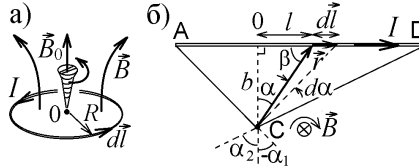


Рис.1.23

Чтобы найти индукцию \vec{B} всего тока надо взять интеграл по длине проводника: $\vec{B} = \int d\vec{B}$. В задачах контрольной работы встречаются токи, текущие по круговому или по прямому проводнику.

В центре 0 кругового витка радиуса R с током I (рис.1.23,а) получаем $B_0 = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{rdl \sin 90^\circ}{r^3} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint_{=2\pi R} dl = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}$.

Для точки С, находящейся на расстоянии b от прямого отрезка с током I , как видно из треугольника на рис.1.23,б, выполняются соотношения $r = b/\cos \alpha$; $l = b \tan \alpha$; $dl = b d(\tan \alpha) = b d\alpha / \cos^2 \alpha$. Угол β между радиус-вектором \vec{r} и элементом тока $I d\vec{l}$ равен $\beta = 90^\circ - \alpha$. Поэтому

$$B_C = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{rdl \sin \beta}{r^3} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2).$$

Пределы интегрирования $-\alpha_1$ и α_2 соответствуют граничным точкам А и D отрезка с током (точка 0 на рис.1.23,б соответствует углу $\alpha = 0$). Для бесконечного прямого проводника с током

$$\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 90^\circ \text{ и } B_C = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi b}.$$

Помимо индукции \vec{B} магнитное поле можно описать вектором напряженности \vec{H} , которая в неферромагнитной среде имеет вид $\vec{H} = \vec{B} / \mu\mu_0$.

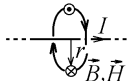
Все полученные для индукции \vec{B} формулы будут справедливыми и для напряженности \vec{H} магнитного поля, если в них убрать множитель μ_0 :

в центре
кругового
тока



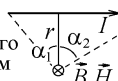
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}, \quad H = \frac{I}{2R}$$

для бесконечного
прямого тока



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad H = \frac{I}{2\pi r}$$

для
прямолинейного
отрезка с током



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$$

$$H = \frac{I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$$



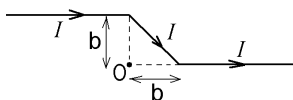
В задачах контрольной работы линейные токи состоят из отдельных участков круговых токов, прямолинейных отрезков с токами и прямых бесконечных проводников с токами.

Необходимо разбить систему на такие участки, определить величину и правильное направление вектора \vec{B} или \vec{H} , созданного током, текущим по каждому участку, а затем сложить все эти векторы.

Учтите, что на продолжении прямого тока (точка О на рис.1.22) поле не создается: $B_O = 0$.

Примеры решения задач.

7.1. По бесконечному проводнику, согнутому в виде прямых проводников, как показано на рисунке, течет ток $I = 3$ А. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в точке О, если $b = 40$ см.



Решение.

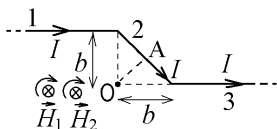
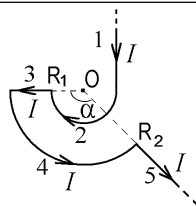


Рис.1.24

Разбиваем систему на отдельные прямолинейные участки 1, 2 и 3 (рис.1.24). Участок 1 – это полубесконечный ток, создающий в точке О напряженность $H_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{2\pi b}$.

Участок 2 – прямолинейный отрезок, находящийся на расстоянии $r = OA = b \cos 45^\circ$ от точки О. Его концы видны из этой точки под углами $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$. Он создает напряженность $H_2 = \frac{I}{4\pi r} \cdot 2 \sin 45^\circ = \frac{I}{2\pi b}$. Точка О находится на продолжении прямого участка 3, и этот участок поля в ней не создает: $H_3 = 0$. Как видно из рис.1.24, направления векторов \vec{H}_1 и \vec{H}_2 совпадают и их сумма $H_O = H_1 + H_2 = 3I/4\pi b = 1,79$ А/м.

7.2. По бесконечному проводнику, согнутому в виде прямых полубесконечных линий, двух дуг с радиусами $R_1 = 1$ м и $R_2 = 2$ м (внешняя дуга имеет угол $\alpha = 135^\circ$) и соединяющего их отрезка, как показано на рисунке, течет ток $I = 3$ А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре O дуг.



Решение.

Прямые участки 3 и 5 на рисунке не создают полей в точке O на их продолжении. Поэтому $\vec{B}_O = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_4$. Индукция полубесконечного тока 1

$$B_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \text{ и индукция половины кругового тока 2}$$

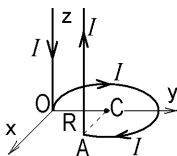
$$B_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R_1} \text{ направлены в одну сторону, а индукция, созданная участком 4, являющимся частью окружности, } B_4 = \frac{135^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R_2}, \text{ направлена}$$

противоположно. Так как $R_2 = 2R_1$, то в точке O

$$B_O = |B_1 + B_2 - B_4| = \frac{\mu_0 I}{4R_1} \left| \frac{1}{\pi} + 1 - \frac{3}{8} \right| = 0,889 \text{ мкТл}.$$



Если векторы \vec{B} или \vec{H} направлены под углом друг к другу, то удобно указать их направления в трех осях декартовой системы координат.



7.3. Бесконечный проводник согнут так, что текущий по нему ток $I = 3$ А вначале течет против оси z , затем поворачивает в начале координат O , образуя дугу окружности с углом 270° и с радиусом $R = 1$ м, лежащую в плоскости xy , а затем снова поворачивает в точке A и течет по прямой линии, направленной параллельно оси z . Найти величину индукции магнитного поля в центре дуги C .

Решение.

Определяем направления полей, созданных отдельными участками (рис.1.25) с помощью винтов, острия которых должны находиться в точке C . Направление вращения винтов связаны с направлением токов (см.рис.1.22). Как видно,

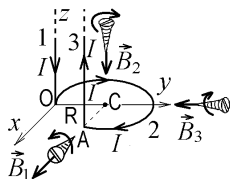


Рис.1.25

вектор индукции поля полубесконечного тока 1 имеет величину

$$B_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \text{ и направлен вдоль оси } x; \text{ вектор индукции, созданный } 3/4$$

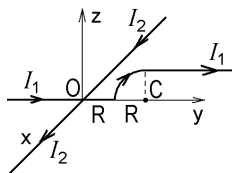
кругового тока 2, и имеющий величину $B_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R}$ направлен против

оси z ; вектор индукции полубесконечного тока 3, $B_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, на-

правлен против оси y (рис.1.25). Все эти векторы взаимно перпендикулярны, а их векторная сумма имеет в точке С величину

$$B_C = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2} = \frac{\mu_0 I}{4R} \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{\pi^2}} = 1,48 \text{ мкТл}.$$

7.4. Ток $I_1 = 1 \text{ А}$ течёт по бесконечному проводнику, вначале совпадающему с осью y , затем образующему дугу в четверть окружности с радиусом $R = 1 \text{ м}$, лежащую в плоскости yz . Далее проводник продолжается в виде прямой линии, параллельной оси y . Расстояние от центра дуги С до начала координат О равно $2R$. Второй ток $I_2 = 3 \text{ А}$ течет по бесконечному проводнику вдоль оси x (см. рисунок). Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого токами в центре дуги С.



Решение.

В точке С первый ток создает напряженность

$$H_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{I_1}{2R} + \frac{1}{2} \cdot \frac{I_1}{2\pi R}, \text{ вектор которой направлен против оси } x \text{ (это поле } 1/4 \text{ кругового тока, протекающего по дуге и поле половины бесконечного прямого тока).}$$

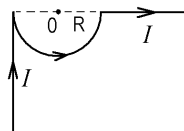
Второй ток, находящийся на расстоянии $2R$ от точки С, создает напряженность $H_2 = \frac{I_2}{2\pi \cdot 2R}$, вектор которой направлен

вдоль оси z . Величина суммы этих векторов

$$H_C = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \frac{1}{4R} \sqrt{\left(\frac{I_1}{2} + \frac{I_1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{\pi}\right)^2} = 0,314 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

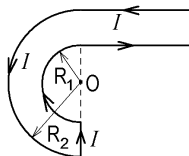
7.5. По бесконечному проводнику, согнутому, как показано на рисунке, течет ток $I = 3 \text{ А}$. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого



этим током в центре O дуги с радиусом $R = 20$ см.

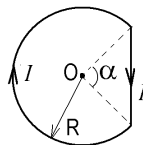
Ответ: 3,21 мкТл.

7.6. По бесконечному проводнику, согнутому в виде двух параллельных прямых линий, двух полуокружностей с радиусами $R_1 = 50$ см и $R_2 = 1$ м и соединяющего их отрезка, как показано на рисунке, течет ток $I = 5$ А. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в центре O полуокружностей.



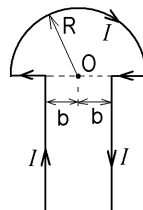
Ответ: 1,648 А/м.

7.7. По замкнутому проводнику, согнутому в виде дуги с радиусом $R = 20$ см и соединяющей её концы хорды (см. рисунок), течет ток $I = 3$ А. Найти величину напряженности магнитного поля в центре O дуги, если угол $\alpha = 90^\circ$.



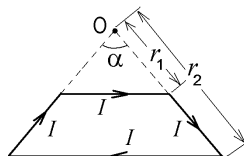
Ответ: 8,01 А/м.

7.8. По бесконечному проводнику, согнутому в виде полуокружности с радиусом $R = 60$ см, двух прямых отрезков и двух параллельных линий, течет ток $I = 4$ А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре O полуокружности (см. рисунок), если $b = 30$ см.



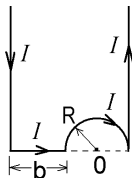
Ответ: 4,76 мкТл.

7.9. По проводнику, согнутому в виде симметричной трапеции, течет ток $I = 3$ А. Размеры приведены на рисунке, где $r_1 = 20$ см, $r_2 = 50$ см, $\alpha = 90^\circ$. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в точке O .

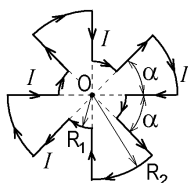


Ответ: 1,8 мкТл.

7.10. По бесконечному проводнику, согнутому в виде двух параллельных линий, полуокружности с радиусом $R = 40$ см и прямого отрезка длины $b = 50$ см, течет ток $I = 2$ А (см. рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого током в центре O полуокружности.



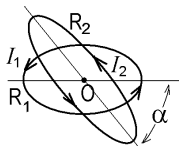
Ответ: 0,849 мкТл.



7.11. По проводнику, согнутому в виде восьми круговых дуг с одинаковыми углами $\alpha = 45^\circ$ и с радиусами $R_1 = 40$ см и $R_2 = 80$ см, а также восьми соединяющих их прямых отрезков, как показано на рисунке, течет ток $I = 5$ А. Найти величину индукции магнитного поля в общем центре дуг О.

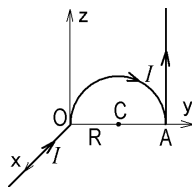
Ответ: 5,89 мкТл.

7.12. По замкнутым круговым проводникам с радиусами $R_1 = R_2 = 1$ м текут одинаковые токи $I_1 = I_2 = 3$ А. Угол между плоскостями проводников $\alpha = 60^\circ$. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого токами в общем центре О этих круговых проводников.



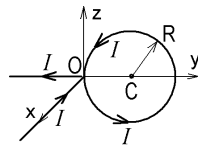
Ответ: 3,26 мкТл.

7.13. Бесконечный проводник согнут так, что образованная им полуокружность с радиусом $R = 40$ см расположена в плоскости yz . Направление текущего по нему тока $I = 3$ А указано на рисунке. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого током в центре С полуокружности.



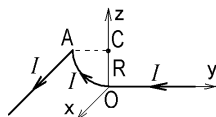
Ответ: 1,41 А/м.

7.14. Бесконечный проводник согнут так, что ток $I = 4$ А течет по нему против оси x , поворачивает в начале координат О, протекая по окружности с радиусом $R = 30$ см, расположенной в плоскости yz , а затем течет против оси y (см.рисунок). Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в центре С окружности.



Ответ: 7,00 А/м

7.15. Ток $I = 3$ А течет по согнутому бесконечному проводнику против оси y , поворачивает в начале координат О, протекая по дуге окружности с углом 90° и с радиусом $R = 50$ см, расположенной в плоскости yz , снова поворачивает в точке А и течет по прямой линии, направленной вдоль оси x (см.рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре дуги С.



Ответ: 1,66 мкТл.

1.8. Расчет магнитных полей с помощью теоремы о циркуляции

Циркуляцией вектора \vec{B} по замкнутому контуру называется интеграл $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$. Циркуляция вектора индукции \vec{B} магнитного поля равна произведению μ_0 на **алгебраическую** сумму токов, охватываемых контуром:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$ (для вектора напряженности \vec{H} циркуляция по замкнутому контуру равна $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i$).



Чтобы определить знак тока в этой сумме, расположите винт перпендикулярно плоскости контура и вращайте его по направлению обхода контура. Если направление тока совпадает с направлением поступательного движения винта, то этот ток входит в сумму с положительным знаком. Если ток направлен противоположно движению винта, то он входит в сумму со знаком “минус”.

Например, на рис.1.26 винт, вращающийся по направлению обхода контура, движется вверх. В эту сторону направлены токи I_1 и I_4 , охватываемые контуром, а противоположно – токи I_2 и I_3 .

Согласно теореме о циркуляции

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2 - I_3 + I_4).$$

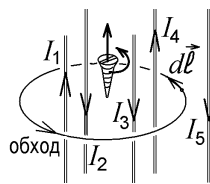


Рис.1.26

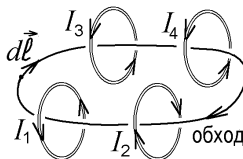


Ток I_5 создает поле, но не охватывается контуром, и в сумму не входит.

Внимательно следите на рисунке, сколько раз линия замкнутого контура **охватывает** каждый ток. Если ток охватывается N раз, то в сумму он также входит N раз.

Примеры решения задач:

8.1. Замкнутый контур проходит по оси нескольких замкнутых круговых проводников с токами $I_1 = 2$ А, $I_2 = 1$ А, $I_3 = 4$ А и I_4 . Направление обхода контура и направления токов указаны на рисунке. Циркуляция вектора индукции магнитного поля $\oint \vec{B} d\vec{l}$ по этому контуру равна 5 мкТл·м. Найти величину тока I_4 .



Решение.

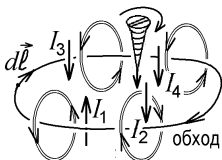


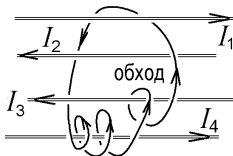
Рис.1.27

На рис.1.27 дополнительными стрелками указаны направления токов I_i **внутри** охватывающего их замкнутого контура. Винт, вращаемый по направлению обхода контура, движется вниз. В эту сторону направлены токи I_2, I_3, I_4 . Здесь $\mu = 1$. Поэтому

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \quad \text{и}$$

$$I_4 = I_1 - I_2 - I_3 + \oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0 = 0,979 \text{ A.}$$

8.2. На рисунке показан замкнутый контур, направление его обхода и прямолинейные проводники с токами $I_1 = 3 \text{ A}$, I_2 , $I_3 = 1 \text{ A}$, $I_4 = 2 \text{ A}$. Циркуляция созданного токами вектора индукции магнитного поля по указанному контуру отрицательна и равна $\oint \vec{B} d\vec{l} = -4 \text{ мТл} \cdot \text{м}$. Найти величину тока I_2 .



Решение.

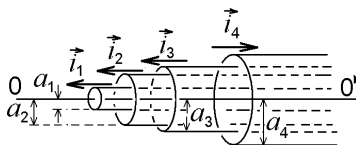
Приглядитесь к рисунку внимательно! Линия контура проходит за током I_1 , не охватывая его. Перед током I_4 эта линия проходит три раза, т.е. ток I_4 охватывается 3 раза, ток I_3 - 2 раза, ток I_2 - один раз.

Вращаемый по направлению обхода винт движется налево, вдоль токов I_2 и I_3 . Поэтому, согласно теореме о циркуляции $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_2 + 2I_3 - 3I_4)$, откуда $I_2 = 3I_4 - 2I_3 - \left| \oint \vec{B} d\vec{l} \right| / \mu_0 = 0,817 \text{ A}$.



Теорему о циркуляции удобно применять для расчета магнитного поля токов с симметричным распределением плотности тока \vec{j} или поверхностной плотности тока \vec{i} .

8.3. По четырем тонким и очень длинным цилиндрическим проводящим поверхностям, имеющим радиусы $a_1 = 1 \text{ см}$, $a_2 = 2 \text{ см}$, $a_3 = 3 \text{ см}$ и $a_4 = 4 \text{ см}$ протекают токи с поверхностными плотностями $i_1 = 3 \text{ А/м}$, $i_2 = 4 \text{ А/м}$, $i_3 = 5 \text{ А/м}$ и $i_4 = 6 \text{ А/м}$ соответственно. Направления токов показаны на рисунке. На каком рас-



стоянии r от общей оси $00'$ проводников величина индукции магнитного поля $B = 0,5$ мкТл, при условии, что $r > a_4$?

Решение.

Поверхностная плотность тока задается формулой $i = dI/dl$, где

dI – это ток, протекающий по полоске поверхности ширины dl . Поэтому величина тока, текущего по цилиндрической поверхности радиуса a равна $I = i \cdot 2\pi a$ (рис.1.28). Окружим цилиндр круговым замкнутым контуром радиуса $r > R$, совпадающим с линией индукции \vec{B} магнитного поля, созданного током I внутри контура. По теореме о циркуляции $\oint \vec{B} d\vec{l} = B \cdot \oint d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$. Хотя ток и распределен в пространстве, он создает такое же поле, как и линейный ток I , проходящий по оси цилиндра. Подставив I , получим $B = \mu_0 i a / r$.

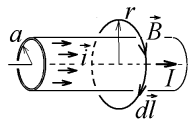


Рис.1.28

В нашей задаче круговой контур радиуса r охватит четыре проводника, по которым токи i_1, i_2, i_3 текут в одну сторону, а ток i_4 – в другую.

Циркуляция $\oint \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi (i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3 - i_4 a_4)$, откуда $r = \mu_0 (i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3 - i_4 a_4) / B = 5,03$ см.

8.4. По длинному прямому цилиндрическому проводнику радиуса a течёт постоянный ток с однородной плотностью $\vec{j} = \text{const}$. Величина напряжённости магнитного поля на расстоянии $r_1 = 4,8$ мм от оси проводника $00'$ в полтора раза больше величины напряженности на расстоянии $r_2 = 0,8$ мм от оси. Найти радиус a проводника, если $r_2 < a < r_1$.

Решение.

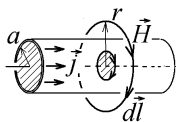


Рис.1.29

Снова окружим проводник круговым замкнутым контуром радиуса $r > a$ (рис.1.29), который охватит ток $I = j \cdot \pi a^2$, протекающий через все поперечное сечение проводника. Согласно теореме о циркуляции: $\oint \vec{H} d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = I$. Поэтому вне проводника, при

$r > a$, его поле совпадает с полем линейного тока $H_{\text{вне}} = \frac{I}{2\pi r} = \frac{j a^2}{2r}$.

Внутри проводника, при $r < a$, линии \vec{H} также образуют круговой контур, но он охватывает только ток $I = j \cdot \pi r^2$, протекающий через меньшее, заштрихованное на рис.1.29 сечение. Поэтому

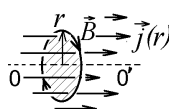


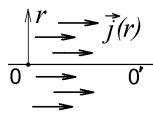
Рис.1.30

$$H_{\text{внутри}} = I/2\pi r = jr/2.$$

По условию $\frac{H_{\text{вне}}(r_1)}{H_{\text{внутри}}(r_2)} = \frac{ja^2}{2r_1} \cdot \frac{2}{jr_2} = \frac{a^2}{r_1 r_2} = \frac{3}{2}$. Радиус проводни-

ка $a = \sqrt{3r_1 r_2 / 2} = 2,4 \text{ мм}$.

8.5. В среде с $\mu = 1$ вдоль выделенной оси OO' течёт постоянный ток, плотность которого меняется с расстоянием r от оси по закону $j = j_0 \cdot \sqrt{b/r}$, где $b = 0,5 \text{ м}$, $j_0 = 3000 \text{ А/м}^2$. Найти величину индукции B магнитного поля, созданного этим током на расстоянии $r = 2 \text{ м}$ от оси OO' .



Решение.

Если плотность тока \vec{j} симметрична относительно оси OO' , то линии вектора \vec{B} , созданного этим током, охватывают ось OO' по кругу (рис.1.30). Запишем теорему о циркуляции для контура радиуса r , совпадающего с одной из линий \vec{B} : $\oint \vec{B} d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I$. Величина тока, охватываемого этим контуром

$$\sum I = \int_0^r j dS = \int_0^r j d(\pi r^2) = \int_0^r j \cdot 2\pi r dr.$$

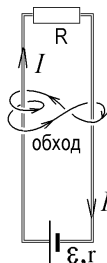
Подставляя заданную зависимость $j = j(r)$, находим

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^r j_0 \sqrt{\frac{b}{r}} \cdot 2\pi r dr = 2\pi \mu_0 j_0 \sqrt{b} \int_0^r \sqrt{r} dr = 2\pi \mu_0 j_0 \sqrt{b} \cdot \frac{2}{3} r^{3/2},$$

откуда $B = 2\mu_0 j_0 \sqrt{br}/3 = 2,51 \text{ мТл}$.

*Примеры задач контрольной работы
для самостоятельной подготовки:*

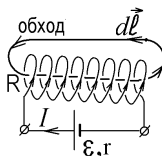
8.6. Резистор с сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$ подключен длинными проводами к источнику тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением $r = 2 \text{ Ом}$. Циркуляция вектора \vec{B} , созданного протекающим по цепи током I , по замкнутому



контур, направление обхода которого показано на рисунке, равна $\oint \vec{B} d\vec{l} = 3 \text{ мкТл} \cdot \text{м}$. Найти величину ЭДС \mathcal{E} .

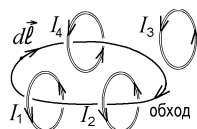
Ответ: 3,18 В.

8.7. Источник тока с эдс $\mathcal{E} = 24 \text{ В}$ подключен к катушке из $N = 8$ витков, имеющей омическое сопротивление $R = 10 \text{ Ом}$. По катушке течёт постоянный ток, а циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по замкнутому контуру, показанному на рисунке, равна $\oint \vec{H} d\vec{l} = -30 \text{ А}$. Чему равно внутреннее сопротивление r источника тока?



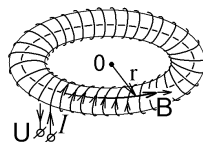
Ответ: 3,6 Ом.

8.8. Замкнутый контур проходит по оси нескольких замкнутых круговых проводников с токами $I_1 = 1 \text{ А}$, $I_2 = 2 \text{ А}$, $I_3 = 3 \text{ А}$ и I_4 (см. рисунок). Циркуляция вектора индукции магнитного поля по этому контуру отрицательна и равна $\oint \vec{B} d\vec{l} = -2 \text{ мкТл} \cdot \text{м}$. Найти величину тока I_4 .



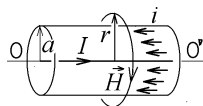
Ответ: 1,41 А.

8.8. Провод с сопротивлением $R = 30 \text{ Ом}$ равномерно навит на тороидальный сердечник из материала с магнитной проницаемостью $\mu = 25$. Ток I , текущий по виткам получившейся катушки, имеющей $N = 600$ витков, создаёт в сердечнике на расстоянии $r = 9 \text{ см}$ от центра катушки O магнитное поле с индукцией $B = 0,05 \text{ Тл}$. Чему равно напряжение U , приложенное к концам провода?



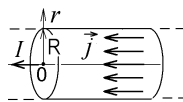
Ответ: 45 В.

8.9. По осевому тонкому проводнику-жиле длинного прямого коаксиального кабеля течёт ток $I = 3 \text{ А}$. По второму тонкому цилиндрическому проводнику с радиусом $a = 4 \text{ мм}$ протекает встречный ток с поверхностной плотностью $i = 100 \text{ А/м}$. На каком расстоянии r от оси кабеля OO' напряженность магнитного поля равна $H = 3 \text{ А/м}$?



Ответ: 2,58 см

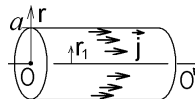
8.10. Ток $I = 1 \text{ А}$ протекает по длинному цилиндрическому проводнику радиуса $R = 1 \text{ см}$ и имеет однородную плотность $\vec{j} = \text{const}$. Чему равна



чина индукции \vec{B} магнитного поля на расстоянии $r = 5$ мм от оси проводника?

Ответ: 10 мкТл.

8.11. По длинному прямому цилиндрическому проводнику радиуса $a = 5$ мм течёт ток с неоднородной плотностью $j = j_0 \cdot (r/a)^3$, зависящей от расстояния r до оси проводника OO' . На каком расстоянии r_1 от оси проводника напряжённость созданного током магнитного поля равна $H = 100$ А/м? Известно, что $j_0 = 1,6 \cdot 10^6$ А/м².



Ответ: 2,5 мм или 8 см.

1.9. Заряженная частица в электрическом и магнитном полях

В электромагнитном поле с напряженностью \vec{E} и индукцией \vec{B} на частицу с зарядом q и с массой m , движущуюся со скоростью \vec{v} действует сила Лоренца $\vec{F} = \vec{F}_{\text{элект}} + \vec{F}_{\text{магн}} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$, являющаяся суммой электрической и магнитной сил.



Чтобы решить задачу, аккуратно нарисуйте направления векторов \vec{E} , \vec{B} и \vec{v} в декартовой системе координат, правильно укажите направления сил и сообразите, по какой траектории будет двигаться частица под действием этих сил.

Примеры решения задач:

9.1. Положительно заряженная частица движется с постоянной скоростью \vec{v} в однородных электрическом и магнитном полях. Векторы напряженности \vec{E} и индукции \vec{B} взаимно перпендикулярны. Найти минимальную величину скорости частицы, если $E = 100$ В/м, $B = 0,01$ Тл.

Решение.

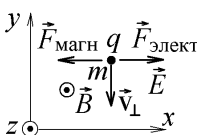


Рис.1.31

Так как по условию $\vec{v} = \text{const}$, то $\vec{F} = \vec{F}_{\text{элект}} + \vec{F}_{\text{магн}} = 0$. Направим вектор \vec{E} вдоль оси x , а вектор \vec{B} - вдоль оси z . Магнитная составляющая силы Лоренца компенсирует электрическую составляющую: $F_{\text{элект}} = qE = F_{\text{магн}} = qv_{\perp}B$

(рис.1.31). Видно, что вектор скорости частицы \vec{v}_{\perp} направлен против оси y .



Определить направление $\vec{F}_{\text{магн}} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ (векторного произведения) для частицы с положительным зарядом проще с помощью “правила левой руки”: если направить четыре пальца по первому вектору \vec{v} , а второй вектор \vec{B} входит в ладонь, то большой палец показывает направление $\vec{F}_{\text{магн}}$ (рис. 1.32, а). Для частицы с отрицательным зарядом используйте “правило правой руки” (рис. 1.32, б).

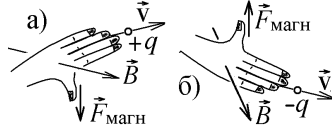
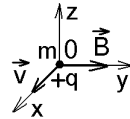


Рис. 1.32

Скорость $v_{\perp} = E/B = 10^4$ м/с будет минимальной скоростью, так как частица может иметь любую проекцию скорости v_z на ось z , параллельную вектору \vec{B} . Это не изменит решения, так как не изменит ни величину, ни направление силы $\vec{F}_{\text{магн}}$.

9.2. Частица с положительным зарядом q и с массой m движется в магнитном поле, индукция \vec{B} которого направлена вдоль оси y . В начальный момент $t_0 = 0$ она находилась в точке 0 начала координат и имела скорость \vec{v} , направленную вдоль оси x . В момент времени $t_1 = 3$ мс координата z частицы в первый раз становится максимальной и равной $z_m = 10$ см. Найти расстояние частицы от точки 0 в момент времени $t_2 = 2$ мс.



Решение.

Если скорость $\vec{v} \perp \vec{B}$ (рис. 1.33), то в однородном магнитном поле частица движется по окружности, радиус R которой можно найти, подставляя нормальное ускорение $a_n = v^2/R$ в уравнение динамики:

$$ma_n = F_{\text{магн}} \text{ или } mv^2/R = qvB, \text{ откуда } R = mv/qB.$$

Период обращения частицы по этой окружности

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Нарисовав направления векторов и траекторию согласно условиям задачи, видим,

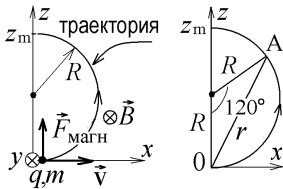


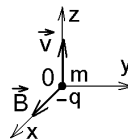
Рис. 1.33

что $R = \frac{z_m}{2}$. Время $t_1 = \frac{T}{2} = 3$ с. За это время частица пройдет половину окружности с углом 180° . А за время

$t_2 = 2$ с она опишет дугу окружности с углом 120° и будет находиться

в точке А на расстоянии $r = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}R =$
 $= \sqrt{3}z_m/2 = 8,66$ см от точки 0.

9.3. Частица с отрицательным удельным зарядом $q/m = 2 \cdot 10^9$ Кл/кг, ускоренная разностью потенциалов $\Delta\phi = 1$ кВ, в начальный момент $t_0 = 0$ находится в точке 0 (см. рисунок) и движется со скоростью $v = 200$ м/с, направленной вдоль оси z в однородном магнитном поле, индукция \vec{B} которого направлена вдоль оси x . В момент времени $t = 5$ мкс её скорость в первый раз будет направлена против оси y . На каком удалении от точки 0 частица окажется в этот момент времени, и какой путь она пройдет за время t ?



Решение.

Работа, совершаемая ускоряющим напряжением $U = \Delta\phi$, идет на изменение кинетической энергии частицы: $A = q\Delta\phi = mv^2/2$. Поэтому, проходя ускоряющую разность потенциалов $\Delta\phi$, частица приобретает скорость $v = \sqrt{2q\Delta\phi/m}$.

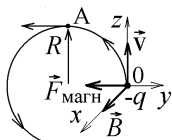
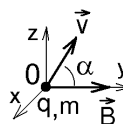


Рис.1.34

Указывая направление силы $\vec{F}_{\text{магн}}$ и рисуя круговую траекторию частицы (рис.1.34), видим, что скорость будет направлена против оси y в точке А, когда частица пройдет четверть окружности за время $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi m}{qB}$. Отсюда $B = \frac{\pi m}{qt}$. Подставляя найденное

выражение для v , находим радиус траектории: $R = \frac{mv}{qB} = \frac{t}{\pi} \sqrt{\frac{2q\Delta\phi}{m}} =$
 $= 3,18$ м. За время t частица проделает путь $2\pi R/4 = 5$ м и удалится от точки 0 на расстояние $AO = \sqrt{2}R = 4,50$ м.

9.4. Частица с зарядом q и массой m движется в однородном магнитном поле с индукцией B , направленной вдоль оси y , по винтовой траектории, у которой шаг равен радиусу. Найти угол α между векторами скорости \vec{v} частицы и индукции \vec{B} ?



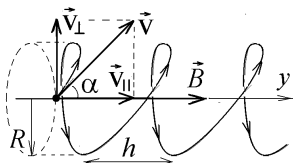


Рис.1.35

Решение.

Разложим скорость \vec{v} частицы на две составляющие $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$. Со скоростью v_\perp , перпендикулярной к направлению \vec{B} , частица будет вращаться по кругу радиуса $R = mv_\perp / qB$ вокруг линий \vec{B} . А так как скорость \vec{v}_\parallel параллельна \vec{B} , то $\vec{F} = q[\vec{v}_\parallel, \vec{B}] = 0$, и частица движется с постоянной скоростью v_\parallel вдоль направления \vec{B} .

Сумма двух движений – винтовая линия (рис.1.35). Так как $v_\perp = v \sin \alpha$, $v_\parallel = v \cos \alpha$, то радиус траектории $R = mv \sin \alpha / qB$, а её шаг h – это расстояние, которое частица пролетает со скоростью v_\parallel за один период обращения по окружности: $h = v_\parallel T = 2\pi m \cdot v \cos \alpha / qB$.

По условию их отношение $R/h = \tan \alpha / 2\pi = 1$ и $\alpha = \arctg(2\pi) = 89,95^\circ$.

9.5. Частица с удельным зарядом $q/m = 3 \cdot 10^8$ Кл/кг ускорена разностью потенциалов $\Delta\phi$ и движется в магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл, направленной вдоль оси z . Скорость \vec{v} частицы направлена под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси z . При этом частица периодически пересекает ось z через равные интервалы $\Delta z = 5$ см. Найти величину разности потенциалов $\Delta\phi$.

Решение.

Движение частицы происходит по винтовой линии (рис.1.36). Вращаясь вокруг линий \vec{B} , она периодически то пересекает ось z , то удаляется от неё на максимальное расстояние

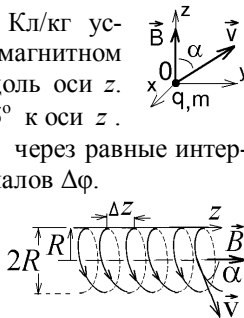


Рис.1.36

$2R$. Интервал Δz – это шаг h , выражение которого получили в преды-

дущей задаче: $\Delta z = h = \frac{2\pi m \cdot v \cos \alpha}{qB}$, где $v = \sqrt{\frac{2q\Delta\phi}{m}}$ – скорость, приобретаемая частицей после ускорения. Отсюда

$$\Delta\phi = \frac{q}{2m} \left(\frac{\Delta z B}{2\pi \cos \alpha} \right)^2 =$$

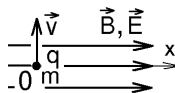
$= 3,04$ кВ.

9.6. Вылетев из точки O на оси x с начальной скоростью v_0 , направленной перпендикулярно к оси x , частица с зарядом $q = 20$ мкКл

движется в электрическом и магнитном полях с напряжённостью

$E = 20$ В/м и индукцией $B = 0,8$ Тл соответственно.

Эти поля направлены вдоль оси x (см. рисунок). Чему равна масса m частицы, если совершив $N = 8$ полных витков траектории, она окажется на расстоянии $x = 400$ м от точки O ?



Решение.

Под действием электрического поля частица приобретает постоянное ускорение $a_x = F_{\text{элект}}/m = qE/m$. Поэтому со временем растёт проекция её скорости $v_x = a_x t$, параллельная вектору \vec{B} , а траектория

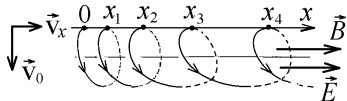


Рис.1.37

движения становится винтовой линией с постоянным радиусом $R = mv_0/qB$ и с переменным шагом (рис.1.37). Частица пересекает ось x через каждый период обращения T в точках с координатами

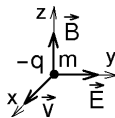
$x_n = a_x t^2 / 2 = a_x (nT)^2 / 2$. После восьмого оборота её координата

$$x = \frac{a_x (8T)^2}{2} = \frac{qE}{m} \cdot 32 \left(\frac{2\pi m}{qB} \right)^2 = 128\pi^2 \frac{mE}{qB^2}, \text{ откуда получаем}$$

$$\text{величину массы } m = \frac{qB^2 x}{128\pi^2 E} = 0,203 \text{ мг}.$$

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

9.7. Отрицательно заряженная частица с массой $m = 0,4$ мг двигалась с постоянной скоростью $v = 300$ м/с вдоль оси x в электрическом поле с напряжённостью $E = 600$ В/м, направленной вдоль оси y , и в магнитном поле с индукцией B , направленной вдоль оси z . После выключения электрического поля частица продолжила вращение по окружности радиуса $R = 2$ м. Чему равна величина заряда частицы?

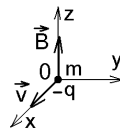


Ответ: 30 мкКл.

9.8. Ускоренная разностью потенциалов $\Delta\phi = 18$ кВ заряженная частица движется по окружности радиуса $R = 25$ мм в однородном постоянном магнитном поле с индукцией $B = 0,3$ Тл. Чему равна величина q/m удельного заряда частицы?

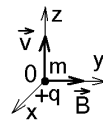
Ответ: $6,4 \cdot 10^8$ Кл/кг.

9.9. Частица с удельным зарядом $q/m = -4 \cdot 10^9$ Кл/кг была ускорена разностью потенциалов $\Delta\phi$ и оказалась в магнитном поле с индукцией $B = 5$ мТл, направленной вдоль оси z . В начальный момент $t_0 = 0$ частица находилась в точке O и двигалась со скоростью v , направленной вдоль оси x (см. рисунок). В дальнейшем наибольшее удаление частицы от точки O равно 20 см. Чему равна величина ускоряющей разности потенциалов $\Delta\phi$?



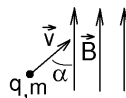
Ответ: 500 В.

9.10. Частица с зарядом $q = +5$ мкКл движется в однородном магнитном поле, индукция $B = 3$ Тл которого направлена вдоль оси y . В начальный момент частица находилась в точке O и двигалась вдоль оси z (см. рисунок). Через промежуток времени $\Delta t = 0,2$ с скорость частицы в первый раз окажется направленной вдоль оси x . Чему равна масса m частицы?



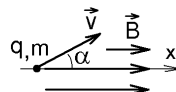
Ответ: $m = 0,637$ мг.

9.11. Частица с массой $m = 0,02$ мг была ускорена разностью потенциалов $\Delta\phi = 1$ кВ и влетела под углом $\alpha = 45^\circ$ в однородное магнитное поле с индукцией $B = 2$ Тл, после чего начала двигаться по винтовой траектории с шагом $h = 2$ м. Найти величину заряда частицы.



Ответ: $q = 49,3$ мкКл.

9.12. Частица имеет удельный зарядом $q/m = 3000$ Кл/кг, ускорена разностью потенциалов $\Delta\phi = 6$ кВ и движется под углом $\alpha = 30^\circ$ к линиям индукции однородного магнитного поля, направленного вдоль оси x , периодически пересекая ось x через равные промежутки времени. Максимальное удаление частицы от оси x равно 2 м. Найти величину индукции B .



Ответ: $B = 1$ Тл.

1.10. Явление электромагнитной индукции

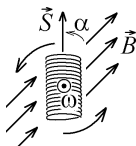


Рис. 1.38

ЭДС электромагнитной индукции возникает в **замкнутом** проводящем контуре, если в нем меняется поток магнитной индукции $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Пусть контур (например, катушка) состоит из N витков любой формы с площадью S каждый и вращается с угловой скоростью ω в магнитном поле с индукцией \vec{B} (рис. 1.38). В этом случае

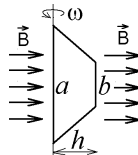
$\Phi = BNS \cos \alpha$, где $\alpha = \omega t + \alpha_0$ – угол между векторами \vec{B} и \vec{S} (вектор площади витка \vec{S} имеет величину, равную площади витка, и направлен перпендикулярно к его плоскости).

Возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -d\Phi/dt$, причиной появления которой может быть или изменение величины индукции B , или изменение площади S контура, или изменение угла α между векторами \vec{B} и \vec{S} .

Если сопротивление проводящего контура равно R , то при этом в нем возникает индукционный ток $I_{\text{инд}} = |\mathcal{E}_{\text{инд}}|/R$, направленный в такую сторону, чтобы компенсировать изменение потока Φ .

Примеры решения задач:

10.1. Замкнутый проводящий контур из тонкого провода с сопротивлением $R = 9$ Ом имеет вид равнобедренной трапеции с основаниями $a = 12$ см, $b = 6$ см и с высотой $h = 8$ см. Контур вращается в магнитном поле с индукцией $B = 0,2$ Тл вокруг оси, проходящей через большее основание трапеции и перпендикулярной к линиям \vec{B} . Найти величину угловой скорости вращения ω , если максимальная величина индукционного тока в контуре $I_{\text{max}} = 4$ мА.



Решение.

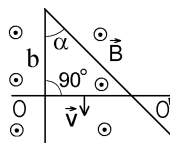
Контур состоит из одного витка с площадью (площадь трапеции)

$$S = \frac{(a+b)h}{2} = 72 \text{ см}^2. \text{ При вращении в витке возникает ЭДС индукции}$$

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d(BS \cos \omega t)}{dt} = BS\omega \sin \omega t.$$

Индукционный ток $I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t$ меняется по гармоническому закону (такая система будет моделью генератора переменного тока). Его амплитуда $I_{\text{max}} = BS\omega/R$, откуда $\omega = I_{\text{max}}R/BS = 25$ рад/с.

10.2. Замкнутый проводящий контур образован двумя прямыми проводниками, согнутыми под углом $\alpha = 45^\circ$ и проводником-перемычкой, скользящим со скоростью $v = 0,8$ м/с (см. рисунок). Перпендикуляр-



но к его плоскости создано магнитное поле. Единица длины каждого из проводников, образующих прямоугольный треугольник, имеет сопротивление $R_1 = 2 \text{ Ом/м}$. Чему равна величина индукции магнитного поля B , если в контуре создаётся индукционный ток $I = 0,2 \text{ А}$?

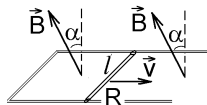
Решение.

В этой задаче меняется площадь $S = b^2/2$ равнобедренного прямоугольного треугольника, так как меняется его катет $b = b_0 + vt$. Одновременно меняется поток $\Phi = BS \cdot \cos 0^\circ$ (вектор \vec{S} параллелен вектору \vec{B}). Величина индукционного тока

$$I = \left| \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{B}{R} \frac{dS}{dt} = \frac{B}{R} b \frac{db}{dt} = \frac{B}{R} bv.$$

Сумма всех сторон треугольника равна $b + b + \sqrt{2}b$, и его сопротивление $R = R_1 \cdot (2 + \sqrt{2})b$ меняется вместе с катетом b . Подставляя эту величину в формулу для I , находим $B = IR_1(2 + \sqrt{2})/v = 1,71 \text{ Тл}$.

10.3. Угол между линиями индукции магнитного поля $B = 0,2 \text{ Тл}$ и нормалью к плоскости не имеющей сопротивления проводящей П-образной рамки равен $\alpha = 30^\circ$. По рамке без трения со скоростью $v = 9 \text{ м/с}$ скользит проводящая перемычка с сопротивлением $R = 20 \text{ Ом}$. В ней возникает индукционный ток $I = 60 \text{ мА}$. Найти длину перемычки l , а также величину силы, с которой тянут перемычку.



Решение.

При движении перемычки меняется площадь $S = l(a + vt)$ проводящего контура, заштрихованная на рис.1.39. Меняется поток магнитной индукции $\Phi = BS \cos \alpha$ и возникает

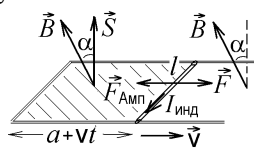
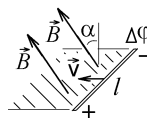


Рис.1.39

ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = |-d\Phi/dt| = B \cos \alpha \cdot dS/dt = B \cos \alpha \cdot lv$.



Помните: если линии индукции \vec{B} магнитного поля составляют угол α с нормалью к плоскости движения проводника с поперечным размером l , то на его краях a образуется разность потенциалов, которая будет причиной появления ЭДС индукции



$$\Delta\Phi = \mathcal{E}_{\text{инд}} = Blv \cos \alpha.$$

Величина индукционного тока $I_{\text{инд}} = \varepsilon_{\text{инд}}/R = Blv \cos \alpha / R$. Отсюда $l = IR/Bv \cos \alpha = 0,770$ м.

Индукционный ток направлен так, чтобы возникающая сила Ампера $\vec{F}_{\text{Амп}} = I_{\text{инд}} [\vec{l}, \vec{B}]$ препятствовала изменению потока Φ и тормозила перемычку (рис.1.39). Чтобы перемычка двигалась с постоянной скоростью, её надо тянуть с силой

$$F = F_{\text{Амп}} = I_{\text{инд}} l B = B^2 l^2 v \cos \alpha / R = 9,24 \text{ мН}.$$

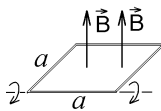
Индукционный ток связан с величиной электрического заряда q , протекающего по замкнутому проводящему контуру при изменении магнитного потока Φ в нём: $I_{\text{инд}} = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$. Интегрируя получившееся уравнение $\int dq = -\frac{1}{R} \int d\Phi$, находим

$$q = \frac{1}{R} (\Phi_{\text{начал}} - \Phi_{\text{конечн}}).$$

Протекший заряд пропорционален разности начального и конечного значения магнитного потока.

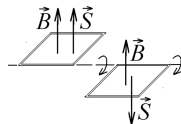
Примеры решения задач.

10.4. Вначале замкнутая проводящая рамка, сделанная в виде квадрата из четырёх одинаковых тонких проводников с сопротивлением $R = 3$ Ом и длиной $a = 15$ см каждый, располагалась в магнитном поле так, что линии его индукции \vec{B} были перпендикулярны плоскости рамки. При повороте рамки на угол 180° вокруг одной из её сторон, по рамке протёк заряд $q = 6$ мКл. Чему равна величина индукции магнитного поля B ?



Решение.

До поворота вектор площади \vec{S} был параллелен вектору \vec{B} , и поток магнитной индукции был равен $\Phi_{\text{начал}} = Ba^2 \cos 0^\circ$. После поворота на 180° вектор



\vec{S} поменял направление, и конечный поток $\Phi_{\text{конечн}} = Ba^2 \cos 180^\circ$. Суммарное сопротивление всех проводников равно $4R$. Подстановка в формулу для протекшего заряда дает $q = 2Ba^2/4R$, откуда

$$B = 2qR/a^2 = 1,6 \text{ Тл}.$$



Текущий по замкнутому проводящему контуру ток I создает магнитное поле, индукция которого пропорциональна току: $B \sim I$. Поэтому и поток магнитной индукции будет пропорционален току: $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} \sim I$ или

$$\Phi = LI$$

Кoeffициент пропорциональности L называют коэффициентом индуктивности.

При изменении тока со временем меняется созданный им поток Φ

и возникает ЭДС самоиндукции
$$\mathcal{E}_{\text{самоинд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI).$$



Обычно эту формулу записывают в случае $L = \text{const}$. Но причиной появления $\mathcal{E}_{\text{самоинд}}$ может оказаться меняющаяся со временем величина индуктивности L .

Примеры решения задач:

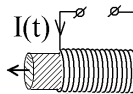
10.5. Ферромагнитный сердечник извлекают из катушки таким образом, что её индуктивность уменьшается со временем t по закону $L(t) = \alpha/t$, где $\alpha = 4 \text{ Гн} \cdot \text{с}$. При этом ток, текущий по катушке, возрастает со временем: $I(t) = \beta \cdot t^3$, где $\beta = 3 \text{ А/с}^3$. Найти величину индуктивности катушки в тот момент времени, когда возникающая в ней ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = 8 \text{ В}$.

Решение.

Подставляем приведенные в условии зависимости в формулу

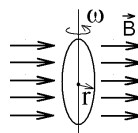
$$\mathcal{E} = \left| -\frac{d}{dt}(LI) \right| = \alpha\beta \frac{d}{dt}(t^2) = 2\alpha\beta t. \text{ Указанная величина ЭДС наблюдается}$$

в момент времени $t = \frac{\mathcal{E}}{2\alpha\beta}$. В этот момент $L = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\alpha^2\beta}{\mathcal{E}} = 12 \text{ Гн}$.



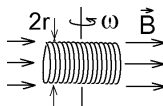
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

10.6. Виток из тонкого провода с радиусом $r = 5 \text{ см}$ вращается с угловой скоростью $\omega = 20 \text{ рад/с}$ в магнитном поле с индукцией $B = 2 \text{ Тл}$. Чему равна величина сопротивления R витка, если ось вращения перпендикулярна к линиям индукции, а в витке создаётся индукционный ток с максимальной величиной $I_{\text{max}} = 4 \text{ мА}$?



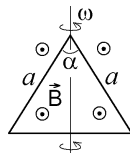
Ответ: 78,5 Ом.

10.7. Короткозамкнутая катушка из $N = 20$ витков вращается с угловой скоростью $\omega = 15$ рад/с в магнитном поле с индукцией $B = 4$ мТл. Ось вращения перпендикулярна как к линиям индукции, так и к оси катушки. Чему равен радиус витков катушки, если максимальная величина ЭДС электромагнитной индукции в ней $\varepsilon_{\max} = 4$ мВ?



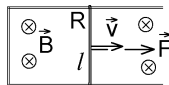
Ответ: 3,26 см.

10.8. В магнитном поле с индукцией $B = 0,25$ Тл вращается замкнутый проводящий контур с сопротивлением $R = 6$ Ом имеющий вид равнобедренного треугольника со стороной $a = 8$ см и с углом $\alpha = 30^\circ$ (см. рисунок). Ось вращения совпадает с биссектрисой угла α и перпендикулярна к линиям индукции \vec{B} . Индукционный ток в контуре имеет амплитуду $I_{\max} = 5$ мА. Найти величину угловой скорости вращения ω .



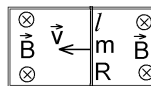
Ответ: 75 рад/с.

10.9. Линии индукции магнитного поля с величиной $B = 2$ Тл перпендикулярны плоскости П-образной проводящей рамки, не имеющей сопротивления. По рамке с постоянной скоростью без трения скользит проводящая перемычка длины $l = 60$ см с сопротивлением $R = 8$ Ом. Для этого перемычку тянут с силой $F = 0,9$ Н. Чему равна скорость перемычки?



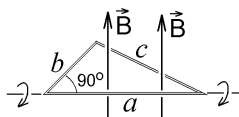
Ответ: 5 м/с.

10.10. Магнитное поле с индукцией $B = 1,5$ Тл приложено к П-образной проводящей рамке, не имеющей сопротивления. Линии индукции перпендикулярны к плоскости рамки. По рамке без трения скользит проводящая перемычка длины $l = 40$ см с сопротивлением $R = 15$ Ом. Чему равна масса m перемычки, если в тот момент, когда её скорость равна $v = 3$ м/с, она движется с ускорением $a = 4$ м/с²?



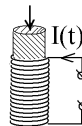
Ответ: 18 г.

10.11. В магнитное поле с индукцией $B = 0,4$ Тл поместили рамку из тонкого провода с сопротивлением $R = 18$ Ом, имеющую вид прямоугольного треугольника с катетом $b = 15$ см. Вначале линии индукции перпендикулярны плоскости рамки. При повороте рамки на угол $\alpha = 60^\circ$ вокруг оси, проходящей через второй ка-



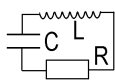
тет a , по рамке протёк заряд $q = 0,3$ мКл. Чему равна длина гипотенузы с треугольника?
Ответ: 39 см.

10.12. Сердечник вдвигают внутрь катушки индуктивности таким образом, что её индуктивность возрастает со временем t по закону $L(t) = \alpha \cdot t$. При этом ток, текущий по катушке, убывает со временем: $I(t) = \beta/t^3$, где $\beta = 16 \text{ А} \cdot \text{с}^3$. Найти величину постоянной α , если в момент времени $t = 2$ с величина ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке, была равна $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$.



Ответ: 1,5 Гн/с.

1.11. Собственные электрические колебания



Электрический колебательный контур – это замкнутая цепь, которая содержит конденсатор ёмкости C и катушку с индуктивностью L . Такая цепь может иметь сопротивление R . В таком случае колебания, например, заряда q на конденсаторе будут затухающими: $q(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$ (рис.1.40,а). Их ампли-

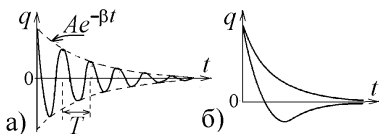


Рис.1.40

туда $Ae^{-\beta t}$ экспоненциально уменьшается со временем t . Циклическая частота собственных затухающих колебаний имеет вид

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \text{где} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC} -$$

циклическая частота незатухающих колебаний (возникающих при $R = 0$), $\beta = R/2L$ – коэффициент затухания колебаний.

Период собственных затухающих колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

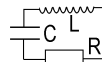
увеличивается с ростом сопротивления R , и становится бесконечным при критическом сопротивлении $R_{\text{кр}} = 2\sqrt{L/C}$, при котором $\omega \rightarrow 0$.

При $R \geq R_{\text{кр}}$ колебания не наблюдаются (рис.1.40,б).

Скорость затухания колебаний характеризуют величиной логарифмического декремента затухания колебаний θ – это логарифм отношения амплитуды колебаний в момент времени t к амплитуде через период: $\theta = \ln(Ae^{-\beta t} / Ae^{-\beta(t+T)}) = \ln(e^{\beta T})$, т.е. $\theta = \beta T$.

Примеры решения задач.

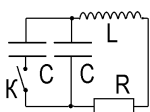
11.1. Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре меняется со временем t по закону $U_C = U_0 \cdot \exp(-at) \cos(bt)$, где $U_0 = \text{const}$; $a = 10^4 \text{ с}^{-1}$; $b = 3 \cdot 10^4 \text{ рад/с}$. Ёмкость конденсатора $C = 4 \text{ мкФ}$. Найти сопротивление R контура.



Решение.

Падение напряжения на конденсаторе $U_C = q/C$ изменяется со временем по тому же приведенному выше закону, что и заряд q на конденсаторе. Поэтому $a = \beta = \frac{R}{2L}$, $b = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - a^2}$. Отсюда

$$L = \frac{1}{C(a^2 + b^2)}, \text{ и } R = 2La = 2a/C(a^2 + b^2) = 5 \text{ Ом}.$$



11.2. В колебательном контуре, изображённом на рисунке слева, замкнули ключ К. Во сколько раз уменьшился при этом период собственных электрических колебаний?

$L = 100 \text{ Гн}$; $C = 50 \text{ мкФ}$; $R = 1 \text{ кОм}$.

Решение.



Помните правила вычисления суммарной ёмкости (или суммарного сопротивления) двух конденсаторов (или резисторов), соединённых последовательно или параллельно (рис. 1.41):

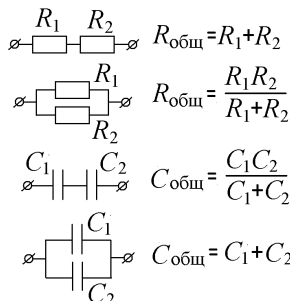


Рис. 1.41

При разомкнутом ключе в цепь был подключен один конденсатор с ёмкостью $C_1 = C$. После замыкания ключа подключены два параллельно соединённых конденсатора с общей ёмкостью $C_{II} = C + C = 2C$. Подставляя формулу для периода колебаний, находим, что он уменьшился в

$$\frac{T_I}{T_{II}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC_I} - \frac{R^2}{4L^2}}} \bigg/ \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC_{II}} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{LC_{II}} - \frac{R^2}{4L^2}\right) \bigg/ \left(\frac{1}{LC_I} - \frac{R^2}{4L^2}\right)} \text{ раз.}$$

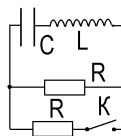


Чтобы не запутаться с приставками и степенями при постановке числовых данных, делайте сложные вычисления по частям, находя отдельные слагаемые в системе СИ и только потом подставляя их в сложную формулу.

$$\frac{1}{LC_I} = \frac{1}{100 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ с}^{-1}; \quad \frac{1}{LC_{II}} = 100 \text{ с}^{-1}; \quad \frac{R^2}{4L^2} = \left(\frac{10^3}{2 \cdot 100} \right)^2 = 25 \text{ с}^{-1}.$$

Теперь нетрудно найти, что $\frac{T_I}{T_{II}} = \sqrt{\frac{200-25}{100-25}} = 1,53$ раз.

11.3. В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. При этом логарифмический декремент затухания собственных электрических колебаний увеличился в два раза. Чему равна индуктивность L контура? $C = 0,8$ мкФ; $R = 5$ кОм.



Решение.

Сопротивление контура после замыкания ключа равно $\frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2}$. Ло-

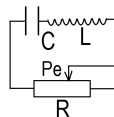
гарифмический декремент был равен $\theta_1 = \beta_1 T_1 = 2\pi \frac{R}{2L} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

После изменения сопротивления $\theta_2 = \beta_2 T_2 = 2\pi \frac{R/2}{2L} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{(R/2)^2}{4L^2}}$.

Подставив эти выражения в отношение $\theta_2/\theta_1 = 2$ и возводя в квадрат, чтобы избавиться от корня, получим $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{16}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$,

откуда $L = R^2 C / 20 = 1$ Гн.

11.4. Движок реостата “Рс” перемещают слева направо, увеличивая сопротивление R . При нулевом сопротивлении, $R = R_1 = 0$ Ом, циклическая частота собственных электрических колебаний в контуре была равна ω_1 . При сопротивлении $R = R_2 = 15$ кОм частота колебаний уменьшилась в два раза: $\omega_2 = \omega_1/2$. При какой величине сопротивления реостата R_3 колебания прекратятся?



Решение.

При $R = 0$ циклическая частота незатухающих колебаний равна

$\omega_1 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. При ненулевой величине сопротивления $R = R_2$ частота $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta_2^2} = \sqrt{\omega_1^2 - \beta_2^2} = \omega_1/2$. Возводя в квадрат обе части последнего равенства, находим $\omega_1^2 - \beta_2^2 = \frac{\omega_1^2}{4}$, откуда получаем

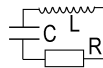
$$\beta_2 = \frac{R_2}{2L} = \frac{\sqrt{3}\omega_1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{LC}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{R_2}{\sqrt{3}}.$$

Колебания прекращаются, когда $\omega = \beta$ и сопротивление достигает критической величины

$$R_3 = R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \text{ Поэтому } R_3 = \frac{2R_2}{\sqrt{3}} = 17,3 \text{ кОм}.$$

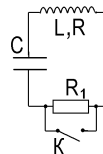
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

11.5. В колебательном контуре заряд конденсатора меняется со временем t по закону $q = q_0 \cdot \exp(-bt) \sin(at)$, где q_0 , a , b – постоянные. Найти величину отношения b/a , если $R = 2 \text{ кОм}$; $L = 30 \text{ Гн}$; $C = 6 \text{ мкФ}$.



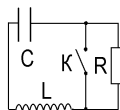
Ответ: 0,5.

11.6. В показанном на рисунке контуре замыкают ключ К, закорачивая сопротивление R_1 . Во сколько раз уменьшится при этом период собственных электрических колебаний? Соленоид в контуре имеет индуктивность $L = 500 \text{ Гн}$ и активное сопротивление $R = 10 \text{ кОм}$; $C = 4 \text{ мкФ}$; $R_1 = 10 \text{ кОм}$.



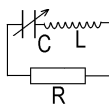
Ответ: уменьшится в 2 раза.

11.7. В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. При этом период собственных электрических колебаний уменьшился в полтора раза. Чему равна ёмкость C контура, если $L = 27 \text{ Гн}$; $R = 2 \text{ кОм}$?



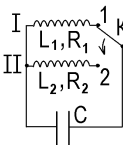
Ответ: 15 мкФ.

11.8. В цепь колебательного контура включен резистор с сопротивлением $R = 1,5 \text{ кОм}$, катушка с индуктивностью L и конденсатор с переменной ёмкостью C . Если величину ёмкости уменьшить от величины $C_1 = 18 \text{ мкФ}$ до величины $C_2 = 4 \text{ мкФ}$, то циклическая частота собственных затухающих колебаний в контуре увеличивается в $n = 3$ раза. Чему равна индуктивность L катушки?



Ответ: 18 Гн.

11.9. Ключом К в колебательный контур с ёмкостью $C = 4 \text{ мкФ}$ включается или или соленоид I, или соленоид II с одинаковыми активными сопротивлениями $R_1 = R_2 = R$ и с индуктивностями $L_1 = 3 \text{ Гн}$ и $L_2 = 3L_1$ соответственно. При этом частота собственных электрических колебаний в контуре не меняется. Чему равна величина R ?



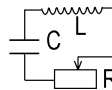
Ответ: 1,5 кОм.

11.10. Логарифмический декремент затухания собственных электрических колебаний в контуре, изображённом на рисунке, $\theta = 2$. Чему равна ёмкость C контура, если $L = 44 \text{ Гн}$; $R = 2 \text{ кОм}$?



Ответ: 4,05 мкФ.

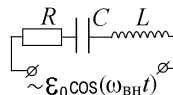
11.11. Собственные электрические колебания в контуре прекращаются при увеличении сопротивления реостата до значения R_0 . Чему равен логарифмический декремент затухания θ колебаний при вдвое меньшем сопротивлении $R = R_0/2$?



Ответ: 3,63.

1.12. Вынужденные электрические колебания

Вынужденные колебания возникают, если в контур включена внешняя ЭДС с амплитудой \mathcal{E}_0 , меняющаяся, например, по гармоническому закону с циклической частотой $\omega_{\text{вн}}$.



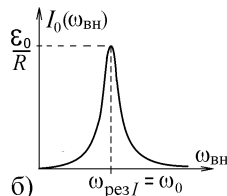
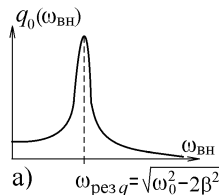
Величины заряда на конденсаторе и тока в цепи будут меняться с той же частотой $\omega_{\text{вн}}$. Амплитуды их колебаний постоянны во времени, но зависят от частоты внешней ЭДС:

амплитуда заряда

$$q_0(\omega_{\text{вн}}) = \frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{(\omega_{\text{вн}}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_{\text{вн}}^2}};$$

амплитуда тока

$$I_0(\omega_{\text{вн}}) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega_{\text{вн}}C} - \omega_{\text{вн}}L\right)^2 + R^2}}.$$



Графики такой зависимости приведены на рис.1.42.

Рис.1.42

Наблюдается **резонанс** – резкое увеличение амплитуды колебаний, когда частота внешней ЭДС сравнивается с резонансной частотой $\omega_{\text{рез}}$.

Резонансная частота для заряда или для напряжения на конденса-

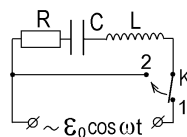
торе

$$\omega_{\text{рез}q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Резонансная частота для тока в цепи $\omega_{\text{рез}I} = \omega_0 / \sqrt{LC}$. При этой частоте амплитуда тока достигает максимального значения, равно- го $I_{0 \text{ max}} = \varepsilon_0 / R$ (рис.1.42,б).

Примеры решения задач:

12.1. Если ключ К находится в положении “1” и подключает к электрическому колебательному контуру источник ЭДС с амплитудой ε_0 и циклической частотой ω , то при частоте $\omega = \omega_1$ в наблюдается резонанс вынужденных колебаний тока, а при частоте $\omega = \omega_2$ - резонанс вынужденных колебаний напряжения на обкладках конденсатора. Когда ключ К переключают в положение “2”, в контуре возникают собственные затухающие колебания с циклической частотой ω_3 . Найти отношение частот ω_1 / ω_3 , если известно отношение частот $\omega_3 / \omega_2 = 2$.



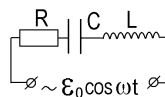
Решение.

Резонансная частота тока в цепи $\omega_1 = \omega_0$; резонансная частота напряжения $U = q/C$ на конденсаторе $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$; частота собственных затухающих колебаний при положении ключа “2”

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. По условию $\left(\frac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 = \frac{\omega_0^2 - \beta^2}{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 2^2 = 4$. Находим от-

сюда, что $\beta^2 = \frac{3}{7} \omega_0^2$. Тогда $\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 3/7}} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,32$.

12.2. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда тока наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1 = 4000$ рад/с, а при частоте $\omega = \omega_2 = 5000$ рад/с амплитуда тока уменьшается в два



раза. Чему равна ёмкость C контура, если $R = 15 \text{ кОм}$?

Решение.

Из графика зависимости амплитуды тока от частоты внешней ЭДС (рис.1.43) видно, что при $\omega_1 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ амплитуда тока макси-

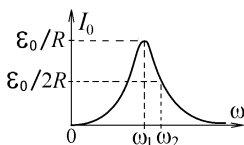


Рис.1.43

мальна и равна $I_{0\max} = \varepsilon_0/R$, где ε_0 – амплитуда ЭДС. При частоте ω_2 по условию

$$I_0(\omega_2) = \varepsilon_0 / \sqrt{\left(\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\right)^2 + R^2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{R}.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $\left(\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\right)^2 = 3R^2$.

Помните, что извлекая квадратный корень, Вы получаете два значения: $\sqrt{x^2} = \pm x$. Выбрав неверный знак, можно получить в ответе отрицательную величину сопротивления R , ёмкости C или индуктивности L .

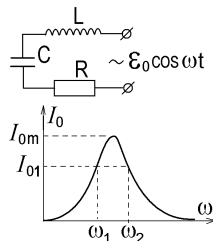
Поэтому, извлекая корень, учтем оба знака: $\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L = \pm \sqrt{3}R$.

Индуктивность L подставим из записанной выше формулы

$$L = 1/(\omega_1^2 C), \text{ и находим } C = \pm \frac{1}{\sqrt{3}R} \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega_1^2} \right). \text{ После подстановки}$$

числовых данных видно, что правильным будет нижний знак, дающий положительное значение $C = 4,33 \text{ нФ}$.

12.3. На рисунке представлен график зависимости амплитуды тока I_0 от циклической частоты ω внешней ЭДС. Эта амплитуда имеет одинаковую величину $I_{01} = 3I_{0m}/5$ при двух значениях ω_1 и ω_2 частоты, где I_{0m} – максимальное возможное значение амплитуды тока при вынужденных колебаниях. Найти величину разности частот $\omega_2 - \omega_1$.



Параметры контура: $\beta = \frac{R}{2L} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 9000 \text{ с}^{-1}$.

Решение.

Так как $I_{0m} = \frac{\varepsilon_0}{R}$, то амплитуда тока $I_{01} = \varepsilon_0 / \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} = \frac{3 \varepsilon_0}{5 R}$.

Возводя в квадрат обе части этого равенства, получим

$$\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 = \frac{16}{9} R^2, \text{ откуда } \frac{1}{\omega C} - \omega L = \pm \frac{4}{3} R. \text{ Последнее уравнение}$$

приводится к виду $\omega^2 \pm \frac{4 R}{3 L} \omega - \frac{1}{LC} = 0$ или, согласно условию,

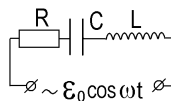
$$\omega^2 \pm \frac{8}{3} \omega_0 \omega - \omega_0^2 = 0. \text{ Такое квадратное уравнение имеет два положи-}$$

тельных корней, если взять нижний знак: $\omega_1 = \omega_0/3$ и $\omega_2 = 3\omega_0$. По-

этому $\omega_2 - \omega_1 = 8\omega_0/3 = 24000 \text{ с}^{-1}$.

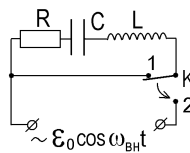
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

12.4. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1 = 2000 \text{ с}^{-1}$, а максимум амплитуды тока – при $\omega = \omega_2 = 3000 \text{ с}^{-1}$. Чему равно активное сопротивление R контура, если $L = 2 \text{ Гн}$?



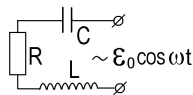
Ответ: 6,324 кОм.

12.5. Вначале ключ K была замкнут в положении “1”, и циклическая частота собственных электрических колебаний в образовавшемся контуре имела величину $\omega_1 = 4000 \text{ с}^{-1}$. Затем ключ K переключили в положение “2” (см. рисунок), подключая внешнюю ЭДС. При какой циклической частоте $\omega_{\text{вн}}$ внешней ЭДС амплитуда тока в цепи будет максимальной, если амплитуда напряжения на конденсаторе максимальна при $\omega_{\text{вн}} = \omega_2 = 3000 \text{ с}^{-1}$?



Ответ: 4796 с^{-1} .

12.6. В колебательный контур включен источник внешней ЭДС с амплитудой ε_0 и с циклической частотой ω . Наибольшая величина амплитуды вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе наблюдается при $\omega = \omega_1 = 1000 \text{ с}^{-1}$. При каком значении частоты ω достигается наибольшая величина амплитуды вынужденных колебаний тока в цепи? Активное сопротивление контура $R = 8 \text{ кОм}$, его индук-

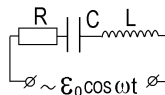


тивность $L = 2$ Гн.

Ответ: 3000 с^{-1} .

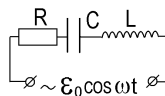
12.7. Амплитуда тока в электрическом колебательном контуре оказывается одинаковой при двух значениях циклической частоты внешней ЭДС: $\omega_1 = 3000$ рад/с и $\omega_2 = 4000$ рад/с. Чему равна ёмкость C контура, если его индуктивность $L = 1$ Гн?

Ответ: $83,3 \text{ нФ}$.



12.8. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда тока наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1 = 2000$ рад/с, а при частоте $\omega = \omega_2 = 3000$ рад/с амплитуда тока уменьшается в три раза. Чему равно сопротивление R контура, если $C = 2$ мкФ?

Ответ: $49,1 \text{ Ом}$.



2. Подготовка к выполнению лабораторных работ по физике

В этом разделе приведены теоретические обоснования лабораторных работ, выполняемых в лабораторном практикуме кафедры физики ТулГУ по темам электромагнетизма. Изложены минимальные сведения, необходимые для защиты выполненных лабораторных работ и успешного ответа на контрольные вопросы. Приведены примеры этих вопросов. Напомним, что **защита работ удваивает количество баллов текущей аттестации, полученное студентом за выполнение лабораторных работ.**

Порядок выполнения экспериментальных измерений, их обработки и оформления отчетов здесь не приводится. Эти сведения можно найти на сайте кафедры: (<http://physics.tsu.tula.ru/>).

Работа №21. Исследование электрического поля проводника с током

Пространство в кювете между двумя металлическими электродами (анодом и катодом) залито слабопроводящей жидкостью с малой удельной проводимостью σ . На электроды подано напряжение $U = \varphi_a - \varphi_k = \varepsilon - Ir$, и между ними возникает электрическое поле с напряженностью \vec{E} (рис.2.1). Линии

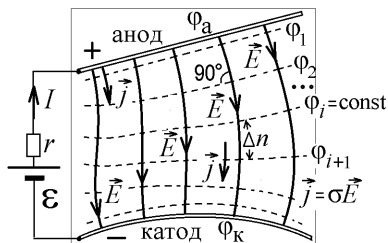


Рис.2.1

напряженности \vec{E} (силовые линии поля) начинаются на положительно заряженном электроде (аноде) и заканчиваются на отрицательно заряженном катоде. Вдоль них, в жидкости протекает, электрический ток с плотностью $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Жидкость между проводниками является однородным проводником (в нём нет источников сторонней ЭДС). В таком случае поле \vec{E} является электростатическим потенциальным полем, создаваемым разностью потенциалов $\Delta\varphi$.

Напомним, что разность потенциалов определяет изменение потенциальной энергии заряда q , находящегося в электрическом поле: $\Delta W = q\Delta\varphi$. Сила, действующая на положительный заряд единичной величины, будет напряженностью поля $\vec{E} = \vec{F}/q = -\text{grad } W/q$, а энергия такого заряда – потенциалом электрического поля $\varphi = W/q$. Связь

напряженности и потенциала $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$. Градиент любого скалярного потенциала φ вычисляется по формуле

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Проекции вектора напряжённости

$$E_x = -\partial \varphi / \partial x; \quad E_y = -\partial \varphi / \partial y; \quad E_z = -\partial \varphi / \partial z.$$

Величина напряженности

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}.$$

Потенциальным называется поле, для которого в каждой точке однозначно определена величина потенциала φ , и для которого можно определить потенциальную энергию $E_{\text{пот}}$. Силы, вызываемые такими полями консервативны, т.е. могут быть определены соотношением $\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{пот}}$. Условие потенциальности электростатического поля выражается теоремой о циркуляции: циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю: $\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (рис.2.2).



Рис.2.2

Линии \vec{E} потенциального электростатического поля начинаются и заканчиваются на электрических зарядах, или уходят в бесконечность. Они не могут образовать замкнутую линию.

Поверхности, во всех точках которых потенциал одинаков, $\varphi = \text{const}$, называются эквипотенциальными поверхностями (на рис.2.1 они показаны штриховыми линиями). **Линии \vec{E} электростатического поля обязательно перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям**, и, как видно из рис.2.1, их надо рисовать изогнутыми, составляющими угол 90° с каждой поверхностью $\varphi = \text{const}$. Вектор $\text{grad } \varphi$ направлен в сторону увеличения потенциала, а линии \vec{E} – в сторону уменьшения потенциала (рис.2.3). Чем гуще (плотнее) расположены линии \vec{E} , тем больше величина напряженности E .

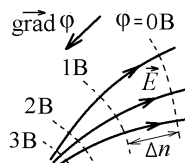


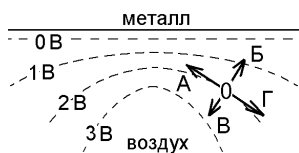
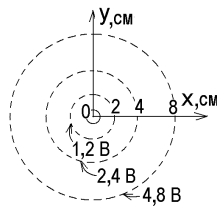
Рис.2.3

Величину напряженности можно приближенно вычислить по формуле $E = \Delta \varphi / \Delta n$, где $\Delta \varphi$ – разность потенциалов между двумя близко расположенными эквипотенциальными поверхностями, а Δn – расстояние между ними по нормали. Этот отрезок совпадает с от-

резком силовой линии (на рис.2.1 $\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$). Величина E различна в разных точках силовой линии и увеличивается, если линии \vec{E} сближаются друг к другу.

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 21

1. Какие поля называются потенциальными? Почему потенциально электростатическое поле и как записать условие его потенциальности?
2. Каков физический смысл потенциала? Разности потенциалов?
3. Как определяется и какой физический смысл имеет вектор напряженности \vec{E} электростатического поля? Как он связан с потенциалом?
4. Как вычислить градиент потенциала, его направление и его величину?
5. Найдите величину и направление вектора \vec{E} в точке на плоскости xu , в которой потенциал имеет выражение $\varphi = Ax^n y^m$, где A, n, m – целые числа (по указанию преподавателя).
6. Что такое эквипотенциальные поверхности? Какова взаимная ориентация плотности тока \vec{j} , текущего по электролиту, вектора \vec{E} и таких поверхностей?
7. Почему все силовые линии (линии \vec{E}) электростатического поля в выполненной работе обычно не являются прямыми линиями?
8. Нарисуйте на листе бумаги картину из нескольких кривых линий, являющихся эквипотенциальными поверхностями, и объясните, как по этой картине рассчитать величину и направление вектора \vec{E} .
9. Три эквипотенциальные поверхности имеют на плоскости xu вид концентрических окружностей с центром в начале координат O . Чему равна величина напряженности электрического поля в точке с координатами $x = y = 3$ см?
10. Нарисуйте картину силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для двух близко расположенных точечных зарядов, имеющих одинаковую величину и одинаковый (разный) знак.
11. Вблизи плоской границы металла, в воздухе, эквипотенциальные поверхности электрического поля искривлены и имеют величину потенциала, указанную на рисунке. Укажите направление электрической силы, действующей на электрон, находящийся в точке O .



Работа №22. Измерение сопротивлений мостовыми схемами

Электрическая схема установки приведена на рис.2.4. Измерение удельного сопротивления участка провода длиной l_1 с диаметром d не требует использования мостовой схемы. В этом случае ключи S1 и S2 разомкнуты, и провод напрямую подсоединен к источнику постоянной ЭДС \mathcal{E} (рис.2.5).

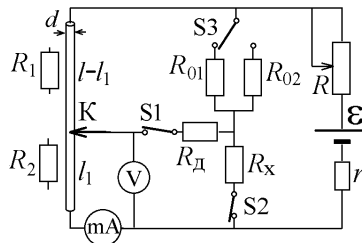


Рис.2.4

Измеряя ток I , текущий по участку провода l_1 , длину которого меняют движком кронштейна К, а также падение напряжения U на нем (его можно менять с помощью движка реостата R), находим сопротивление провода $R_2 = R_{\text{пр}} = U/I$

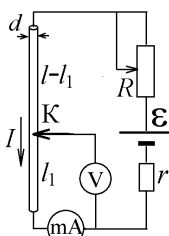


Рис.2.5

(закон Ома). Это сопротивление связано с длиной провода l_1 и с площадью поперечного сечения $S = \pi d^2/4$: $R_{\text{пр}} = \rho l_1/S$, откуда получим величину удельного сопротивления материала провода $\rho = US/Il_1$.

Механизм возникновения электрического сопротивления можно объяснить качественно: свободные электроны в проводнике ускоряются электрическим полем, создающим ток, но не могут приобрести большую скорость, так как рассеиваются в стороны при взаимодействии с электрическими полями непрерывно колеблющихся атомов проводника (рис.2.6). Как видно, электроны движутся хаотически и смещаются против электрического поля \vec{E} с очень небольшой усредненной дрейфовой скоростью $u < 1$ мм/с, создавая электрический ток с плотностью

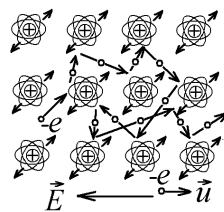


Рис.2.6

$\vec{j} = -en\vec{u} = \vec{E}/\rho$. Правильно такой процесс уравнениями классической физики описать нельзя. Рассеяние электронов на тепловых колебаниях атомов решетки подчиняется законам квантовой физики. Можно сказать, что величина удельного сопротивления ρ зависит от концентрации n свободных электронов и атомов, от конфигурации их электрон-

ных облаков, от ориентации и особенностей тепловых колебаний атомов среды, от температуры. Чем сильнее рассеяние свободных электронов, тем меньше дрейфовая скорость \vec{u} направленного движения и тем больше электрическое сопротивление и меньше величина тока \vec{j} .

При замыкании ключа S2 схема на рис.2.4 образует мост Уитстона (рис.2.7). На стр. 30-32 рассказано, как записать правила Кирхгофа для разветвленной цепи. В данном случае они имеют вид

$$I = I_1 + I_3 = I_2 + I_4;$$

$$I_d = I_2 - I_1 = I_3 - I_4;$$

$$I_3 R_0 + I_d R_d - I_1 R_1 = 0;$$

$$I_4 R_x - I_2 R_2 - I_d R_d = 0;$$

$$I(R + r) + I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon.$$

Здесь R_d – сопротивление диагонали моста AB, I_d – ток, текущий по этой диагонали через ключ S1. Направления токов указаны на рис.2.7.

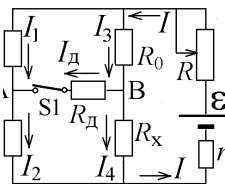


Рис.2.7

Решите записанную систему уравнений и убедитесь, что по диагонали моста должен течь ток

$$I_d = I \frac{R_x R_1 - R_0 R_2}{R_d (R_0 + R_x + R_1 + R_2) + (R_0 + R_1)(R_2 + R_x)}.$$

Мост будет уравновешен, если этот ток равен нулю, т.е. при выполнении условия $R_x R_1 = R_0 R_2$. В этом случае $I_3 = I_4$, $I_1 = I_2$, и при включении или выключении переключателя S1 показания вольтметра V на рис.2.4 не меняются.

Мостовая схема Уитстона позволяет определить неизвестное сопротивление R_x , уравновесив мост движком кронштейна К. Так как сопротивления участков провода пропорциональны их длине, $R = \rho l / S$, то, как видно из рис.2.4, $R_x = R_0 l_1 / (l - l_1)$, где l – общая длина провода.

Такая мостовая схема позволяет достаточно точно измерить величину сопротивления $R_x > 1$ Ом. Но при меньшем сопротивлении необходимо учитывать сопротивление соединительных проводов и, главным образом, сопротивление контакта в месте подсоединения соединительного провода с измеряемым сопротивлением, имеющим величину $R_{\text{конт}} > 10^{-4}$ Ом. Поэтому малые сопротивления $R_x < 0,1$ Ом припаивают к соединительным проводам не в одном, а в двух местах, используя для измерений мост Томсона, имеющий дополнительную диа-

гональ $R_3 - R_4$ (рис.2.8). Если этот мост уравновешен, то по диагонали АВ ток не течет ($I_d = 0$). В этом случае

$$R_x = R_0 \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_4}{R_3} \right).$$

Сопротивления R_3 и R_4 подбирают так, чтобы выполнялось условие $R_2 R_3 = R_1 R_4$.

При этом вклад сопротивлений двух контактов в месте подсоединения резисторов будет скомпенсирован и его можно не учитывать. При этом ток в сопротивлении R_5 отсутствует. Разрывая контакт цепи ключом S1 (рис.2.8), можно проверить условие равновесия. Токи в плечах моста не должны измениться. Заметим, что в этом случае $R_x = R_0 R_2 / R_1$, т.е. уравновешенный мост Томсона дает тот же результат, что и мост Уитстона, но позволяет измерить величину R_x значительно точнее.

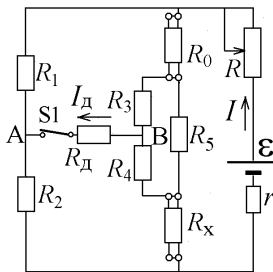


Рис.2.8

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 22

1. Объясните механизм появления электрического тока в металлах. Как движутся свободные электроны в металлическом проводнике, подключенном к источнику напряжения? Почему мала скорость их направленного движения?
2. По какой причине возникает электрическое сопротивление? Какую величину называют удельным сопротивлением? От чего она зависит?
3. Как вычислить сопротивление однородного участка проводника, зная его размеры?
4. Сформулируйте закон Ома для однородного участка проводника в обычной и в локальной форме.
5. Проволока подключена к источнику ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r . Длину l проволоки увеличили в 4 раза. Как надо изменить, диаметр d проволоки, чтобы текущий по ней ток не изменился?
6. Сформулируйте правила Кирхгофа. Объясните, как ими пользоваться.
7. Запишите систему уравнений (правила Кирхгофа) для определения токов в неуравновешенной мостовой схеме, изображенной на рис.А.

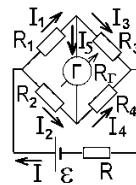
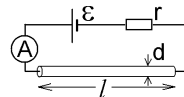


Рис.А

8. Сделайте вывод условия равновесия мостовой схемы.

9. Чем отличаются мостовые схемы Уитстона и Томсона? В каких случаях они применяются? Можно ли использовать схему Томсона вместо схемы Уитстона?

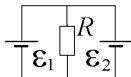


Рис.Б

10. Определите величину и направление тока, протекающего через сопротивление R на рис.Б, где $\mathcal{E}_1 = 10$ В,

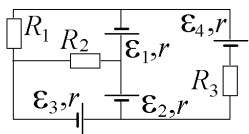


Рис.В

$\mathcal{E}_2 = 5$ В, $R = 10$ Ом, а внутренние сопротивления обоих источников ЭДС равны $r = 1$ Ом.

11. Запишите систему уравнений (правил Кирхгофа) для определения токов, протекающих в разветвленной цепи, изображенной на рис.В.

Работа №23. Релаксационные колебания

Газоразрядная лампа, изображенная на рис.2.9, заполнена неоном. При среднем положении ключа K к ней подключен реостат с общим сопротивлением R , по которому течет ток $I_1 = \mathcal{E}/(R + r)$, созданный источником постоянной ЭДС. На лампу подается напряжение U с части реостата, имеющей сопротивление R_1 (рис.2.9). Пе-

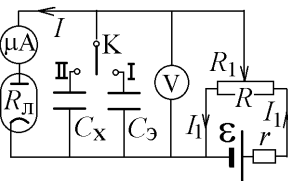


Рис.2.9

редвигая движок реостата вправо, увеличиваем величину сопротивления R_1 и напряжения $U = I_1 R_1$. Нейтральный газ – достаточно хороший диэлектрик, и ток в лампе практически отсутствует.

Но когда напряжение U достигает большой величины, работа по ускорению электрона, вылетевшего с анода, превышает энергию ионизации атома неона, $A = eU > E_{\text{ионизации}}$. Налетающий электрон выбивает электрон из атома. Далее два электрона ускоряются, выбивают еще два электрона и т.п. Число электронов, попадающих на анод, и ионов, перемещающихся к катоду, растет лавинообразно (рис.2.10). Поэтому резко растет ток I , протекающий через лампу, и резко уменьшается её сопротивление $R_{\text{л}} = U / I$. Лампа “зажигается”. Помимо ионизации происходит процесс возбуждения атомов, которые начинают испускать световые фотоны. Газ светится.

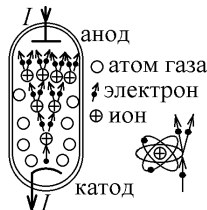


Рис.2.10

Если теперь уменьшать напряжение U , то в какой-то момент энергии электронов не хватает для ионизации, и лампа “гаснет”. Зажечь лампу всегда труднее: необходима большая энергия для вылета электрона из холодного катода, и необходимо создать в лампе большое число свободных электронов и ионов. В “горящей” лампе их много, катод нагрет большим током I , и поэтому

напряжение зажигания U_3 всегда больше напряжения гашения $U_г$.

Ключом K подключим в цепь конденсатор с ёмкостью C . Если лампа не горит, то её сопротивление $R_{л} \gg R_1$. Конденсатор начинает заряжаться. Пусть конденсатор подсоединен к источнику ЭДС через сопротивление R (рис.2.11,а). Правило Кирхгофа для этого контура $U_C + IR = \mathcal{E}$. Подставляем $I = dq/dt$, $U_C = q/C$, разделяем перемен-

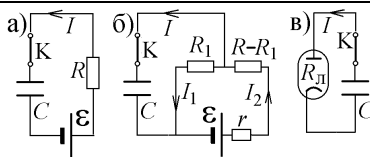


Рис.2.11

ные и интегрируем полученное уравнение $\int_0^q \frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$, что даёт $\ln\left(\frac{\mathcal{E}C - q}{\mathcal{E}C}\right) = -\frac{t}{RC}$. Отсюда следует, что заряд и напряжение на саторе растут со временем экспоненциально:

$$q(t) = CU_C(t) = \mathcal{E}C(1 - \exp(-t/RC)).$$

Наша схема включения конденсатора более сложна (рис.2.11,б). Правила

Кирхгофа для неё имеют вид
$$\begin{cases} I + I_1 = I_2; \\ I_2(R - R_1 + r) + U_C = \mathcal{E}; \\ U_C - I_1 R_1 = 0. \end{cases}$$
 Исключая токи I_1 и I_2 ,

получим уравнение $I = \frac{dq}{dt} = \alpha - \beta q$, где $\alpha = \frac{\mathcal{E}}{R - R_1 + r}$, $\beta = \frac{R + r}{CR_1(R - R_1 + r)}$.

Как и раньше, разделяем переменные и интегрируем, $\int \frac{dq}{\alpha - \beta q} = \int dt$ (*),

получая закон увеличения падения напряжения при зарядке конденсатора с течением времени $U_C = \frac{q}{C} = \frac{\mathcal{E}R_1}{R + r}(1 - \exp(-t/\beta))$.

Когда напряжение U_C достигает величины напряжения зажигания лампы U_3 , лампа зажигается. А так как её сопротивление $R_{л}$ очень

мало, то конденсатор начинает разряжаться через лампу (рис.2.11,в).

Правило Кирхгофа $U_C + IR_{\text{л}} = 0$ дает $\frac{q}{C} = -R_{\text{л}} \frac{dq}{dt}$. Интегрируя,

$\int \frac{dq}{q} = -\int \frac{dt}{R_{\text{л}} C}$, получаем закон разряда конденсатора:

$$q(t) = CU_C(t) = q_0 \exp(-t/R_{\text{л}} C).$$

При разряде падение напряжения на лампе уменьшается, достигает напряжения гашения $U_{\text{г}}$, лампа гаснет, и конденсатор снова начинает заряжаться от источника ЭДС. Возникают автоколебания – незатухающие колебания, для поддержания которых не требуется прилагать внешнее колебательное воздействие – лампа то загорается, то гаснет, а напряжение на конденсаторе периодически меняется в пределах $U_{\text{г}} \leq U_C \leq U_3$, как показано на рис.2.12.

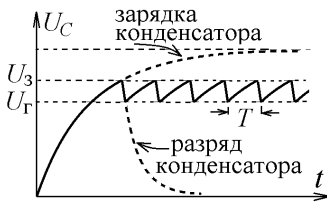


Рис.2.12

Из-за малого сопротивления зажжённой лампы $R_{\text{л}} \ll R_1$ разряд конденсатора через неё происходит очень быстро (лампа мигает короткими вспышками). Можно считать, что период колебаний T равен времени, за которое конденсатор заряжается от напряжения $U_{\text{г}}$ до напряжения U_3 .

Вывод расчетной формулы. Чтобы найти величину T , сделайте в записанном выше уравнении (*) замену $q = U_C C$, и преобразуйте его к виду

$$\int_{U_{\text{г}}}^{U_3} \frac{dU_C}{U_C - (\alpha / C\beta)} = -\beta \int_0^T dt. \text{ Вычисляя интеграл, получите выражение периода}$$

$$T = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{1 - C\beta U_3 / \alpha}{1 - C\beta U_{\text{г}} / \alpha} \right). \text{ Учтите, что } \frac{C\beta U_3}{\alpha} = \frac{(R+r)U_3}{R_1 \mathcal{E}} \ll 1, \text{ так как в ис-}$$

пользуемой установке величина ЭДС $\mathcal{E} \gg U_3$. Так как $\ln(1+x) \cong x$ при $x \ll 1$, полученный результат принимает вид

$$T = \frac{C}{\alpha} (U_3 - U_{\text{г}}) = \frac{C(R - R_1 + r)}{\mathcal{E}} (U_3 - U_{\text{г}}).$$

При неизменном положении движка реостата R_1 период мигания лампы будет пропорционален ёмкости подсоединенного конденсатора, $T \sim C$. Подсоединяя поочередно тумблером К (рис.2.9) эталонный

конденсатор с ёмкостью C_3 и исследуемый конденсатор, можно, измерив периоды мигания лампы, вычислить его неизвестную ёмкость

$$C_x = C_3 T_x / T_3 .$$

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 23

1. Первоначально конденсатор с ёмкостью C в изображенной на рис.А цепи был не заряжен. Ключ K замкнули, подсоединяя конденсатор к источнику постоянной ЭДС \mathcal{E} через сопротивление R . Используя правило Кирхгофа, запишите уравнение зарядки конденсатора, решите его, найдя зависимость напряжения на обкладках конденсатора U_C от времени t . Нарисуйте график зависимости $U_C = U_C(t)$.

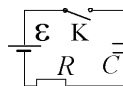


Рис.А

2. Конденсатор с ёмкостью C в изображенной на рис.Б цепи имел заряд q_0 . Ключ K замкнули. Используя правило Кирхгофа, вычислите закон изменения заряда на конденсаторе от времени и нарисуйте график зависимости $q = q(t)$.

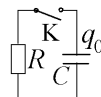


Рис.Б

3. Какую роль играет в данной работе заполненная неон лампочка? Почему в момент зажигания она начинает светиться? Как изменяются параметры цепи в момент зажигания и в момент гашения лампочки? Как процесс ионизации газа в лампочке влияет на протекающий через неё ток? Как меняется сопротивление лампы при её зажигании и гашении?

4. Почему при замыкании ключа K на рис.2.9 лампочка начинает мигать? Что при этом происходит с напряжением на обкладках конденсатора? Какая величина испытывает релаксационные колебания и по какой причине?

5. Почему напряжение зажигания U_3 газонаполненной лампы больше, чем напряжение её гашения $U_Г$? Почему при обратном соотношении $U_Г > U_3$ релаксационные колебания возникнуть не могут?

6. В электрической цепи для изучения релаксационных колебаний конденсатор ёмкостью $C_1 = 3600$ пФ заменяют конденсатором с ёмкостью $C_2 = 900$ пФ. Что произойдет при этом с периодом релаксационных колебаний?

7. Сделайте вывод расчетной формулы $C_x = C_3 T_x / T_3$.

Работа №24. Термоэлектрические явления

Исследуемая в работе термопара – это замкнутая цепь из проводников, изготовленных **из разных металлов** (рис.2.13). Если контакты (спаи) проводников поддерживать при разных температурах $T_1 \neq T_2$, то в цепи возникает термоЭДС $\mathcal{E}_{\text{термо}}$ и протекает

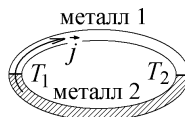


Рис.2.13

термоэлектрический ток \vec{j} . Это – эффект Зеебека. Величина термоЭДС пропорциональна разности температур: $\mathcal{E}_{\text{термо}} = \alpha(T)(T_1 - T_2)$,

где $\alpha(T)$ – коэффициент, называемый удельной термоЭДС – это величина термоЭДС при разности температур двух спаев в $\Delta T = 1 \text{ К}$.

Вывод расчетной формулы. Получить зависимость $\mathcal{E}_{\text{термо}}$ от разности температур $T_1 - T_2$ достаточно просто, если считать газ свободных электронов в металле идеальным газом. Весь перешедший из одного металла в другой заряд, т.е. перешедшие электроны могут распределиться только по поверхности металла. Внутри объема плотность заряда остается равной нулю и концентрации электронов n_1 и n_2 не меняются. При появлении термоэлектрического тока через спай I, нагретый до температуры T_1 за какое-то время переносится заряд $-eN$, т.е. N электронов, занимавших в металле 1 объем $V_1 = N/n_1$ переходят в металл 2, где занимают объем $V_2 = N/n_2$ (рис.2.14).



Рис.2.14

Происходит изотермическое изменение объема электронного газа. Работа, совершаемая над газом при изотермическом процессе $A_1 = \nu RT_1 \ln(V_2/V_1) = Nk_B T_1 \ln(n_1/n_2)$, где k_B – постоянная Больцмана. При переходе такого же числа электронов через второй спай II при температуре T_2 будет совершена работа $A_2 = Nk_B T_2 \ln(n_2/n_1)$. Суммарная работа над электронным газом будет работой термоЭДС (по определению ЭДС \mathcal{E} равна работе, совершаемой над положительным зарядом единичной величины):

$$eN\mathcal{E}_{\text{термо}} = A_1 + A_2 = Nk_B(T_1 - T_2) \ln(n_1/n_2). \text{ Отсюда}$$

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \frac{k_B}{e} \ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \cdot (T_1 - T_2) = \alpha(T) \cdot (T_1 - T_2), \text{ где } e - \text{величина заряда электрона.}$$

трона.

В действительности полученная формула дает лишь **качественное** объяснение зависимости термоЭДС от температур спаев термопары. Электронный газ в металле не является классическим газом, подчиняющимся распределению Максвелла-Больцмана. Правильное объяснение контактных термоэлектрических явлений может быть получено только в квантовой теории.

На поверхности любого металла образуется двойной электрический слой, связанный с тем, что распределение плотности свободных электронов не совпадает с распределением плотности положительных ионов. Толщина этого слоя d не превышает нескольких межатомных расстояний, и внутри слоя возникает электрическое

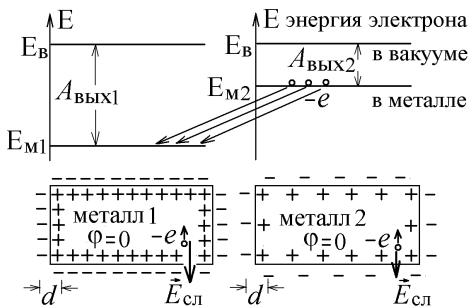


Рис.2.15

поле с напряженностью $\vec{E}_{сл}$, препятствующее вылету свободных электронов с зарядом $-e$ из металла (рис.2.15). Чтобы электрон хотя бы с нулевой скоростью покинул металл, ему надо преодолеть запирающее поле, совершив работу $A_{вых} = eE_{сл} \cdot d$. Такая минимальная энергия, которую надо сообщить электрону, для вылета, называется работой выхода электрона из металла. Энергия электрона E_M внутри металла меньше энергии электрона E_B вне металла, в вакууме, на величину работы выхода: $A_{вых} = E_B - E_M$.

Концентрации n_1 и n_2 электронов и величины работы выхода A_1 и A_2 в разных металлах различны, причем оба металла на рис.2.15 не заряжены и имеют одинаковый потенциал. Если их соединить (спаять), то энергии электронного газа в общем проводнике выравниваются из-за того, что электроны будут переходить из металла с меньшей работой выхода, где их энергия больше, в металл с большей работой выхода, заряжая



Рис.2.16

металл с большей работой выхода отрицательно, а металл с меньшей работой выхода – положительно (рис.2.15). Электроны переносят заряд, который распределяется по поверхности металлов, в том числе по поверхности их соприкосновения (спая, рис.2.16). Внутри объема плотность заряда остается равной нулю, и концентрации электронов n_1 и n_2 не меняются. Если первоначально потенциал обоих металлов был равен нулю, то теперь они приобретают потенциалы $\varphi_1 < \varphi_2$ и между ними создается контактная разность потенциалов, пропорциональная разности работ выхода: $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (A_{\text{вых}1} - A_{\text{вых}2})/e$, которую называют внешней контактной разностью потенциалов.

Если два спая термопары имеют одинаковую температуру, то в замкнутой цепи контактные разности потенциалов, играющие роль ЭДС, уравниваются друг друга, и ток в термопаре отсутствует (рис.2.17,а). Если температуры спаев разные, то имеется три причины возникновения термоЭДС.

1) Величина работы выхода слабо зависит от температуры металла. Величина разности работ выхода растет с ростом температуры, и контактные разности потенциалов спаев, нагретых до разных температур, различны (рис.2.17,б).

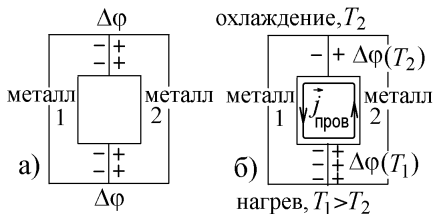


Рис.2.17

В цепи возникнет эффективная ЭДС $\varepsilon = \Delta\varphi_1(T_1) - \Delta\varphi_2(T_2)$, пропорциональная разности температур спаев и создающая ток проводимости $\vec{j}_{\text{пров}}$.

2) При нагревании металла возрастает концентрация свободных электронов, способных направленно перемещаться по проводнику и создавать ток. Диффузионные потоки $\vec{j}_{\text{дифф}}$, стремящиеся выровнять концентрацию таких электронов по разные стороны спая, растут с ростом температуры и не будут скомпенсированы при разных температурах спаев (рис.2.18), приводя к накоплению заряда. Чтобы этот заряд вблизи контактов цепи не рос, возникает ток проводимости с плотностью $\vec{j}_{\text{пров}}$, направление

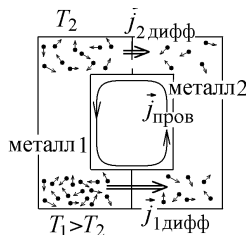


Рис.2.18

которого показано на рис. 2.18 (так как электроны заряжены отрицательно, то ток $\vec{j}_{\text{пров}}$ перемещает их в направлении, обратном направлению диффузионного потока $\vec{j}_{\text{дифф}}$).

3) Колебания атомов решетки металла представляют в виде газа квазичастиц-фононов, на которых рассеиваются движущиеся в металле электроны. Поток фононов, пропорциональный градиенту температуры и направленный к холодному спаю увлекает электроны за собой. Это приводит к увеличению термоэлектрического тока.

Все эти механизмы возникновения явления термоэлектричества могут быть правильно описаны только в квантовой теории металлов. Их суммарное действие приводит к появлению достаточно большой термоЭДС. Так удельная термоЭДС пары $Pd - Ag$ равна 86 мкВ/К. Термопары используются, например, в качестве источника тока в геотермальных электростанциях, или для подзарядки аккумуляторов подводных лодок.

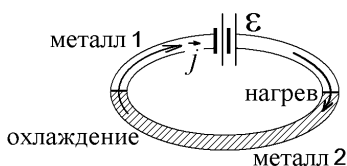


Рис.2.19

Обратным явлением Зеебека будет эффект Пельтье: если в замкнутую цепь из двух разнородных проводников включить внешний источник ЭДС (рис.2.19), то вызванный этим источником ток охлаждает один из контактов между проводниками и нагревает другой

(в зависимости от направления тока и характеристик металлов). В рассмотренном выше случае металл 2 заряжен положительно, а металл 1 — отрицательно (рис.2.16). Переходя из металла 1 в металл 2, электроны будут уменьшать энергию взаимодействия с электрическим полем на величину $e\Delta\phi$, отдавая её области вблизи спаия и нагревая её (рис.2.19). По той же причине переходя обратно в металл 1, электрон забирает эту энергию, охлаждая второй спай.

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 24

1. Что представляет собой термопара? В чем суть эффекта Зеебека?
2. Каков физический смысл удельной термоЭДС, измеряемой в данной работе?
3. Что надо сделать с термопарой, чтобы увеличить возникающую в ней термоЭДС? Где применяются термопары?
4. Что удерживает газ свободных электронов в металле? Какая величина называется работой выхода электрона из металла? Напряжение ка-

кой величины надо приложить к металлу, чтобы вырвать из него электрон?

5. Имеются два металла 1 и 2 с разной работой выхода электрона ($A_1 < A_2$). Какой из металлов при их контакте окажется заряженным

положительно, а какой – отрицательно и почему?

6. Почему при соединении разных металлов образуется контактная разность потенциалов? Чему равна её величина?

7. Какие физические причины приводят к появлению термоЭДС в замкнутой цепи из двух разнородных металлов? Каковы механизмы появления термоЭДС?

8. Почему при одинаковой температуре спаев электрический ток в термопаре не течет, а при разной температуре – появляется? Чем обусловлено направление этого тока?

9. В чем заключается явление Пельтье?

10. Нарисуйте замкнутую цепь из двух разнородных металлических проводников 1 и 2, в которую включен источник внешней ЭДС (рис.2.19). Укажите, какой из спаев будет нагреваться, а какой охлаждаться и по какой причине, если работа выхода электрона из первого металла меньше, чем из второго ($A_1 < A_2$)?

Работа №25. Определение удельного заряда электрона методом магнетрона

В данной установке магнетрон – это вакуумный диод с катодом и анодом, сделанными в виде длинных цилиндров с общей осью и радиусами r_k и r_a (рис.2.20). Вокруг анода равномерно навита обмотка (катушка) из n витков, приходящихся на единицу длины. Когда по катушке протекает ток I , величина которого регулируется потенциометром R (потенциометр – это резистор с регулируемым сопротивлением), то вдоль оси катушки, в пространстве между катодом и анодом, создается магнитное поле с индукцией \vec{B} .

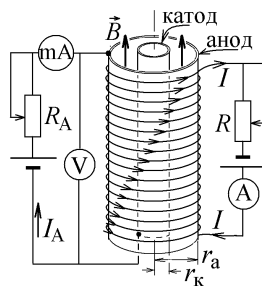


Рис.2.20

На электроны, вылетающие с катода практически с нулевой скоростью, будет действовать электрическое поле с напряженностью \vec{E} , линии которого направлены по радиусам от положительно заряженного анода к отрицательно заряженному катоду, как показано на рис.2.21,

где изображено поперечное сечение магнетрона.

В случае отсутствия магнитного поля $\vec{B} = 0$ электроны летят против линий \vec{E} (траектория 1), попадая на анод и создавая анодный ток I_A , величина которого определяется падением напряжения U (разностью потенциалов между катодом и анодом).

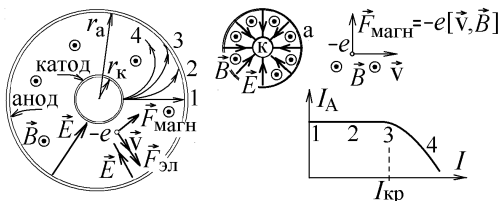


Рис.2.21

При появлении магнитного поля \vec{B} на электроны с зарядом $-e$ кроме электрической составляющей $\vec{F}_{эл} = -e\vec{E}$ будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца $\vec{F}_{магн} = -e[\vec{v}, \vec{B}]$. Эта сила отклоняет электроны в сторону (рис.2.21), меняя направление их скорости \vec{v} . При небольшой величине \vec{B} все вылетающие с катода электроны по-прежнему попадут на анод (траектория 2), и величина анодного тока не изменится.

При увеличении индукции магнитного поля до критического значения $B_{кр}$ траектория 3 электрона изгибается настолько, что только касается анода (рис.2.21). С этого момента анодный ток начинает уменьшаться, так как при большем значении \vec{B} траектории электронов искривляются так, что электроны не попадают на анод (траектории 4 на рис.2.21).

Если длина катушки с током I бесконечна, то в таком соленоиде создается индукция магнитного поля $B = \mu_0 In$, где $n = N/l$ – число витков, приходящихся на единицу длины. При достижении критического значения $I_{кр}$ анодный ток должен резко уменьшиться до нуля (все электроны перестают попадать на анод). В действительности, длина катушки конечна, и величина индукции уменьшается на её краях (рис.2.22). Если в бесконечном соленоиде индукция поля равна $B_{кр}$, то половина соленоида создаст полови-

ну этого поля. На краю полубесконечной катушки поле равно $B_{кр}/2$. Если в центре конечной катушки магнетро-

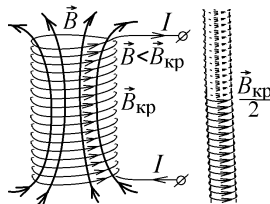


Рис.2.22

на поле достигло величины $B > B_{кр}$, и электроны перестают попадать на анод, то на её краях $B < B_{кр}$, и вылетевшие с катода электроны всё ещё достигают анода. Начиная с точки 3, величина анодного тока уменьшается постепенно, по мере того, как с ростом B все меньшее число электронов на краях магнетрона перестает попадать на анод.

Вывод расчетной формулы. В скрещенных полях \vec{E} и \vec{B} траектория электронов не будет окружностью. Удобно перейти в цилиндрическую систему координат, в которой ось z совпадает с осью магнетрона, а $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ — взаимно перпендикулярные единичные орты системы координат (рис.2.23). Вылетевший из катода с нулевой скоростью электрон с зарядом $-e$ движется в плоскости, перпендикулярной оси z и приобретает скорость $\vec{v} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta$. Момент

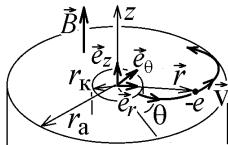


Рис.2.23

импульса $\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}] = m \cdot \det \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ r & 0 & 0 \\ v_r & v_\theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z m r v_\theta$ меняется под действием

момента силы Лоренца $\vec{M} = [\vec{r}, -e\vec{E} - e[\vec{v}, \vec{B}]] = -e[\vec{r}, [\vec{v}, \vec{B}]]$ (векторы \vec{r}

и $-e\vec{E}$ параллельны). Раскрывая двойное векторное произведение по правилу

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})$, учтём, что $(\vec{r} \cdot \vec{B}) = 0$ (скалярное произведение

взаимно перпендикулярных векторов). Поэтому $\vec{M} = \vec{e}_z \cdot e B r v_r$, где $v_r = dr/dt$.

Подставив полученные выражения в уравнение динамики $d\vec{L}/dt = \vec{M}$,

получим уравнение $\frac{d}{dt}(m r v_\theta) = B e r \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{B e r^2}{2} \right)$. Интегрируем обе час-

ти этого уравнения, считая, что электрон движется по траектории 3, приближается к аноду по касательной и не имеет в этой точке радиальной проекции ско-

рости ($v_r = 0$ и $v = v_\theta$): $\int_{r_k}^{r_a} d \left(B e r^2 / 2 \right) = B e \left(r_a^2 - r_k^2 \right) / 2 = m r_a v$. Долетев от

катода до анода, электрон будет ускорен разностью потенциалов U и приобре-

тёт энергию $eU = \frac{m v^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{B e (r_a^2 - r_k^2)}{2 m r_a}$. Считая, что

анодный ток в магнетроне начинает уменьшаться при достижении критической

величины индукции в центре катушки, $B = B_{\text{кр}} = \mu_0 I_{\text{кр}} n$, находим из полученного уравнения величину удельного заряда электрона (отношения его заря-

да к массе):
$$\frac{e}{m} = \frac{8Ur_a^2}{B_{\text{кр}}^2 (r_a^2 - r_k^2)^2}.$$

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 25

1. На электрической схеме установки покажите замкнутую цепь, по которой течет ток I катушки (соленоида), и цепь, по которой течет анодный ток I_A . Укажите приборы, которые измеряют эти токи.
2. С какой целью магнетрон окружен витками соленоида? Что меняется при увеличении тока I , текущего по этим виткам?
3. Какова величина и направление вектора индукции магнитного поля, создаваемого в магнетроне? Как можно изменить эту величину?
4. Напишите выражение силы Лоренца, которая действует на электрон, движущийся в скрещенных электрическом и магнитном полях. Укажите направление электрической и магнитной составляющих этой силы.

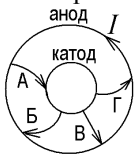


Рис.А

5. Направление тока I , текущего по виткам намотанной на цилиндрический анод катушки, указано на рис.А. Укажите и объясните правильную траекторию движения одного из электронов, создающих анодный ток.
6. Что называется удельным зарядом электрона, как вычислить его величину и чему она должна быть равна?
7. Укажите соответствие траекторий электронов, вылетающих из катода на левом рис.Б, и точек графика зависимости анодного тока I_A от тока I , протекающего по виткам катушки (правый рис.Б).

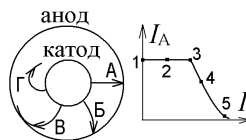


Рис.Б

8. Объясните поведение графиков зависимости $I_A = I_A(I)$: почему при увеличении тока I величина I_A вначале не меняется? на каком основании определяют критическое значение тока $I_{\text{кр}}$? почему после достижения критической величины I анодный ток уменьшается постепенно, а не падает скачком до нуля? почему величина I_A возрастает с ростом напряжения U_A ?
9. Сделайте и объясните вывод расчетной формулы для вычисления удельного заряда электрона в данной работе.
10. Может ли электрон в скрещенных однородных электрическом \vec{E} и магнитном \vec{B} полях двигаться с постоянной по величине и направле-

Работа №26. Магнитное поле Земли

Плоскость компаса совпадает с горизонтальной плоскостью. Индукция магнитного поля Земли будет суммой горизонтальной и вертикальной составляющих $\vec{B}_3 = \vec{B}_{\text{гор}} + \vec{B}_{\text{верт}}$ (рис.2.24).

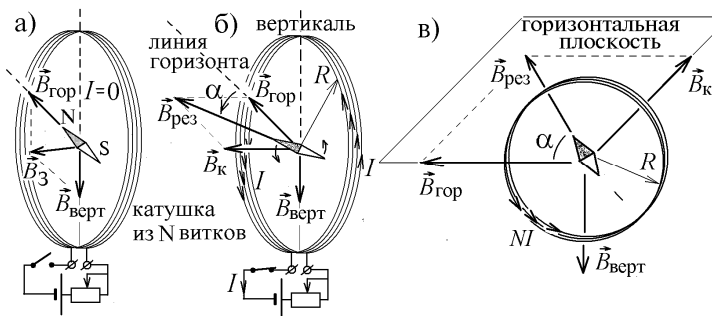


Рис.2.24

В северном полушарии вертикальная составляющая $\vec{B}_{\text{верт}}$ направлена вниз, перпендикулярна плоскости компаса и не действует на его магнитную стрелку, которая направлена вдоль горизонтальной составляющей $\vec{B}_{\text{гор}}$ (рис.2.24,а). В этом же направлении ориентируют плоскость катушки тангенс-гальванометра из N витков (стрелка компаса – в его центре).

Если по катушке пропустить ток I , то в центре витка радиуса R будет создано магнитное поле тока с индукцией $B_I = \mu_0 I / (2R)$. Вывод величины индукции на оси кругового витка с током I с помощью закона Био-Савара сделан на стр. 37. В катушке из N витков суммарная индукция магнитного поля тока, перпендикулярна плоскости катушки, равна $B_k = \mu_0 NI / (2R)$ и отклоняет стрелку компаса на угол α относительно горизонтальной линии магнитного меридиана (рис.2.24,б,в). Стрелка установится в горизонтальной плоскости вдоль результирующего вектора $\vec{B}_{\text{рез}} = \vec{B}_{\text{гор}} + \vec{B}_k$. Измерив тангенс угла отклонения стрелки компаса α : $\text{tg } \alpha = B_k / B_{\text{гор}}$ (рис.2.24,в) легко найти горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли в месте на-

хождения компаса: $B_{\text{гор}} = \frac{\mu_0 I N}{2R \operatorname{tg} \alpha}$. Чем больше величина тока I в катушке, тем больше угол отклонения стрелки.

Источником постоянного магнитного поля являются движущиеся электрические заряды или токи любой природы, например, токи намагничивания в магнитных средах (рис.2.25). Линии индукции \vec{B} охватывают линии тока и **всегда замкнуты**.

Поэтому магнитное поле называют вихревым, в отличие от потенциального электростатического поля, линии напряженности \vec{E} которого начинаются или заканчиваются на электрических зарядах.



Рис.2.25

Помните однако, что и электростатическое, и постоянное магнитное поле являются составляющими единого электромагнитного поля, описываемого уравнениями Максвелла. Постоянное магнитное поле в одной инерциальной системе отсчета превращается в электростатическое поле в другой системе отсчета и наоборот.

Индукцию магнитного поля \vec{B} можно рассматривать как векторную характеристику, определяющую величину силы, действующей на движущийся в магнитном поле заряд q (магнитная составляющая силы Лоренца) или на элемент тока $I d\vec{l}$ (сила Ампера, рис.2.26). Величина магнитного поля пропорциональна величине его индукции.

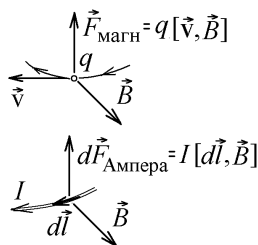


Рис.2.26

Объяснение природы магнитного поля Земли.

Геомагнитное поле не постоянно и на 95% создается в земном ядре, имеющем радиус $R_{\text{я}} \approx 2900$ км. Внешняя часть ядра состоит из расплавленного при очень большом давлении жидкого железа с температурой ~ 4600 К, в котором создаются конвекционные потоки жидкости. Эти потоки все время распадаются на отдельные гигантские вихри, вместе с которыми движутся “вмороженные” в них линии индукции \vec{B} , созданные токами заряженных ионов и электронов. Вихри жидкости при турбулентном движении перекручиваются, разделяются, накладываются друг на друга. При этом, как показано на рис.2.27, складываются линии \vec{B} , усиливая, ослабляя или даже меняя направление результирующего магнитного поля. Подоб-



Рис.2.27

ные процессы изучает магнитная гидродинамика.

В результате вне земного ядра создается результирующее магнитное поле, которое на 80% совпадает с полем магнитного диполя с огромным магнитным моментом $p_m = 8,3 \cdot 10^{22}$ А·м (рис.2.28). Положение этого диполя меняется с медленным изменением вихревого движения электронесущей жидкости в ядре Земли. Центр диполя смещен приблизительно на 300–400 км от центра Земли, а его ось не совпадает с осью вращения Земли и пересекает поверхность Земли в точках, которые называются геомагнитными полюсами (рис.2.28). В настоящее время южный геомагнитный полюс Земли находится вблизи северного полюса и постепенно перемещается со средней скоростью 10 км/год от северного побережья Канады к Сибири.

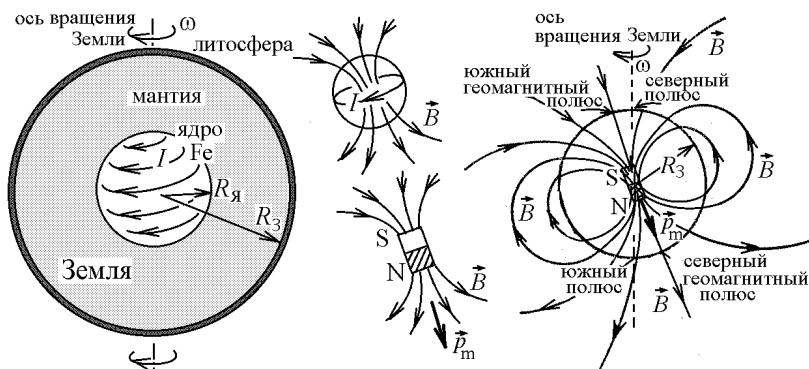


Рис.2.28

Дрейф магнитных полюсов связан не только с изменением токов в ядре Земли, но и с тем, что величины угловых скоростей вращения земного ядра, мантии и твердой оболочки (литосферы) не совпадают. Поэтому земная кора понемногу смещается относительно оси вращения Земли и оси магнитного диполя. 600 миллионов лет назад континенты (участки земной коры), которые сейчас находятся вблизи экватора, находились на полюсах Земли. Там же (немного южнее современного экватора) находился, например, северный магнитный полюс.

Известно, что магнитное поле Земли тысячи раз меняло направление магнитных полюсов, постепенно, раз в 10^6 лет, уменьшаясь до нуля, а затем возникая в противоположном направлении. При этом в течении $10^3 - 10^4$ лет Земля оказывалась без защитного магнитного поля, предотвращающего её поверхность от попадания сильных потоков космических лучей. Объяснить это можно только переменной направлением токов в ядре Земли (рис.2.27).

В настоящее время индукция \vec{B} поля Земли максимальна на магнитных полюсах (~65 мкТл) и минимальна вблизи экватора (~35 мкТл). Горизонтальная составляющая $\vec{B}_{\text{гор}}$, наоборот, максимальна на экваторе, где линии \vec{B}

почти горизонтальны, и $\vec{B}_{\text{гор}} = 0$ на магнитных полюсах, где линии \vec{B} направлены по вертикали к поверхности Земли (рис.2.28). В районе Тулы $\vec{B}_{\text{гор}} \approx 25$ мкТл.

Однако, в земной коре много намагниченных ферромагнитных руд, которые создают аномальное магнитное поле (~4% магнитного поля Земли). Эти источники магнитного поля находятся вблизи земной поверхности и могут заметно изменить форму и направление линии \vec{B} , вдоль которой ориентируется стрелка компаса (рис.2.29). Так в районе Курской магнитной аномалии линии \vec{B} направлены так же вертикально, как и на магнитном полюсе.



Рис.2.29

Заметное влияние на стрелку компаса оказывают также ионосферные токи, вызванные потоком солнечных космических лучей (потоком протонов, попадающих в магнитное поле Земли). В период сильных магнитных бурь (возмущений магнитного поля Земли, вызванных солнечной активностью), величина $B_{\text{Земли}}$ может измениться на $\sim 1 \div 2$ мкТл, что вблизи полярного круга, где мала величина $\vec{B}_{\text{гор}}$, вызовет отклонения стрелки магнитного компаса на $10-20^\circ$ (за сутки положение магнитного полюса Земли может описать круг диаметром в сотни километров).

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 26

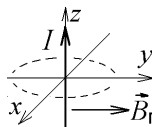
1. Что является источником постоянного магнитного поля? Чем постоянное магнитное поле отличается от электростатического поля и почему оно называется вихревым?
2. Дайте определение вектора индукции магнитного поля.
3. Сформулируйте закон Био-Савара и получите с его помощью формулу для величины индукции магнитного поля в центре и на оси тангенс-гальванометра с током I , N витков которого имеют радиус R .
4. Нарисуйте линии индукции магнитного поля, созданного током, текущим по тангенс-гальванометру. Будут ли они замкнутыми и почему?
5. С какой силой или моментом силы магнитное поле Земли действует на движущую заряженную частицу? на прямолинейный проводник с током? на круговой виток с током? на стрелку магнитного компаса?
6. Покажите на экспериментальной установке направление вертикальной и горизонтальной составляющих вектора индукции магнитного поля Земли, а также направление вектора индукции магнитного поля, созданного током, текущим по виткам тангенс-гальванометра. В какую

сторону будет поворачиваться стрелка компаса при увеличении или уменьшении тока?



витков?

8. Прямой бесконечный ток I течёт вдоль вертикальной оси z . Горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли направлена вдоль оси y . Укажите в какой точке и на каком расстоянии от тока I вектор индукции суммарного магнитного поля тока и магнитного поля Земли будет направлен вертикально.



9. Сделайте вывод расчетной формулы для определения величины горизонтальной составляющей \vec{B}_r магнитного поля Земли.

10. Какие причины приводят к появлению магнитного поля Земли? Как направлены линии индукции геомагнитного поля в северном и южном полушарии?

11. Почему магнитный компас нельзя использовать вблизи геомагнитных полюсов Земли? Направлена ли стрелка компаса на северный полюс?

12. Что должно происходить с величиной горизонтальной составляющей магнитного поля Земли в зависимости от географической широты? Почему в разных точках Земли на одной широте и в разное время стрелка компаса может не показывать на геомагнитный полюс?

Работа №27. Исследование магнитного поля соленоида

С помощью теоремы о циркуляции легко вычислить поле внутри бесконечного соленоида, по виткам которого течет ток I . Прямые линии индукции \vec{B}_∞ внутри соленоида уходят в бесконечность, и охватывая N витков соленоида прямоугольным

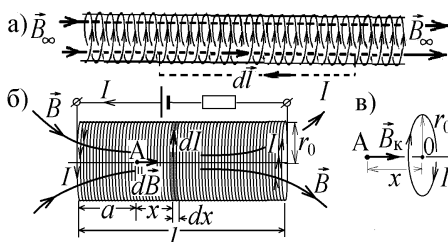


Рис.2.30

контуром длины l , изображенным штриховой линией на рис.2.30,а, получаем $\oint \vec{B} d\vec{l} = B_\infty l = \mu_0 IN$ или $B_\infty = \mu_0 IN / l$.

В исследуемом соленоиде конечной длины l с радиусом витков r_0 линии индукции \vec{B} изогнуты (рис.2.30,б), и удобного для интегрирования по теореме о циркуляции замкнутого контура нет. Для вычисления B на оси такого соленоида, имеющего N витков с током I , воспользуемся законом Био-Савара. Определим индукцию B в точке А, находящейся на расстоянии a от края соленоида. Разобьём боковую поверхность соленоида на узкие кольцевые полоски ширины dx на расстоянии x от точки А. По всем N виткам на боковой поверхности протекает ток NI , а по такой полоске течет ток $dI = NI \cdot dx/l$, пропорциональный её ширине.

С помощью закона Био-Савара легко показать, что на оси кругового витка радиуса r_0 с током I на расстоянии x от центра 0 витка (рис.2.30,в) создается магнитное поле с индукцией

$$B_k = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}} \quad [1,5].$$

Аналогично, кольцевой ток dI создаст в

точке А поле
$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}}.$$
 Суммируя вклады всех полосок,

т.е. вычисляя интеграл, находим расчетную формулу для величины индукции магнитного поля на оси конечного соленоида длины l на расстоянии a от его края:

$$B = \int_{x=-a}^{x=l-a} dB = \frac{\mu_0 NI r_0^2}{2l} \int_{-a}^{l-a} \frac{dx}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{2l} \left(\frac{l-a}{\sqrt{r_0^2 + (l-a)^2}} + \frac{a}{\sqrt{r_0^2 + a^2}} \right)$$

Кроме этого, величина индукции определяется в данной лабораторной работе экспериментально с помощью баллистического гальванометра.

Схема эксперимента изображена на рис.2.31.

По оси соленоида длины l и радиуса r_0 , состоящего из N витков, перемещается маленькая измерительная катушка $K_{\text{и}}$ из $N_{\text{и}}$ витков с площадью $S_{\text{и}}$ и с индуктивностью $L_{\text{и}}$, расстояние a которой от края

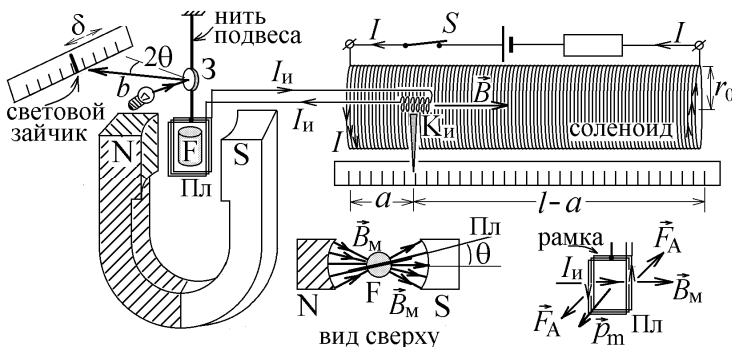


Рис.2.31

соленоида определяют по положению совмещенного с катушкой указателя. Кнопкой S соленоид подключают к источнику постоянного тока, и по его виткам начинает течь ток I , создающий на оси соленоида магнитное поле с индукцией \vec{B} . Возникающая в соленоиде ЭДС самоиндукции препятствует мгновенному появлению этого тока. Он нарастает до установившегося значения некоторое время τ , в течение которого меняется поле B , а в измерительной катушке $K_{\text{и}}$ возрастает магнитный поток $\Phi_{\text{и}} = BN_{\text{и}}S_{\text{и}}$.

Измерительная катушка соединена с рамкой баллистического гальванометра, и образует замкнутую цепь с сопротивлением R . В такой цепи возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{и}} = -d\Phi_{\text{и}}/dt$ и появляется меняющийся ток $I_{\text{и}}$, что приводит к появлению ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{с}} = -L_{\text{и}}dI_{\text{и}}/dt$. Интегрируя по времени правило Кирхгофа,

$$-I_{\text{и}}R = \mathcal{E}_{\text{и}} + \mathcal{E}_{\text{с}} = -\frac{d\Phi_{\text{и}}}{dt} - L_{\text{и}} \frac{dI_{\text{и}}}{dt}, \text{ получаем}$$

$$-R \int_0^{\tau} I_{\text{и}} dt = -\int d\Phi_{\text{и}} - L_{\text{и}} \int dI_{\text{и}} = -BN_{\text{и}}S_{\text{и}}. \text{ Здесь } \int_0^{\tau} I_{\text{и}} dt = q - \text{заряд, про-}$$

текший через измерительную катушку за время установления поля B в соленоиде. Ток $I_{\text{и}}$ в момент τ прекращается, так как величина $\Phi_{\text{и}}$ достигает постоянной установившейся величины, и исчезает ЭДС индукции, приводившая к появлению тока. Поэтому $I_{\text{и}}(\tau) = I_{\text{и}}(0) = 0$ и

$$\int_0^{\tau} dI_{\text{и}} = 0.$$

Таким образом, протекающий по измерительной катушке заряд q пропорционален установившейся величине индукции магнитного поля в том месте, где она находится: $q = BN_{\text{и}}S_{\text{и}}/R$.

Индукционный ток $I_{\text{и}}$ протекает по подвешенной на нити прямоугольной рамке баллистического гальванометра с площадью $S_{\text{р}}$, имеющей $N_{\text{р}}$ витков и большой момент инерции $I_{\text{р}}$ (рис.2.31). Постоянный магнит и железный цилиндр F , который охватывают витки рамки, создают магнитное поле с индукцией $B_{\text{м}}$, линии которого радиальны, и при повороте рамки на любой угол θ параллельны плоскости рамки “Пл” (рис.2.31). При протекании тока $I_{\text{и}}$, рамка имеет магнитный момент $p_m = I_{\text{и}}N_{\text{р}}S_{\text{р}}$, и на неё действует момент сил $M = \left[\vec{p}_m, \vec{B}_{\text{м}} \right] = I_{\text{и}}N_{\text{р}}S_{\text{р}}B_{\text{м}} \sin 90^\circ$. Согласно уравнению динамики вращательного движения, $I_{\text{р}} \frac{d\omega}{dt} = M$. Рамка приходит во вращение, приобретая за время τ угловую скорость

$$\omega = \int_0^{\tau} \frac{M}{I_{\text{р}}} dt = \frac{N_{\text{р}}S_{\text{р}}B_{\text{м}}}{I_{\text{р}}} \int_0^{\tau} I_{\text{и}} dt = \frac{N_{\text{р}}S_{\text{р}}B_{\text{м}}}{I_{\text{р}}} q.$$

Чтобы закрутить нить подвеса на угол θ , к ней надо приложить момент силы, пропорциональный углу закручивания: $M_{\text{кр}} = K\theta$, где $K = \text{const}$. Полученная рамкой кинетическая энергия вращательного движения превращается в работу момента силы:

$$\frac{I_{\text{р}}\omega^2}{2} = \int M_{\text{кр}} d\theta = K \int \theta d\theta = \frac{K\theta^2}{2}.$$

На нити подвеса укреплено крошечное зеркальце $З$ (рис.2.31), которое вместе с нитью повернется на угол $\theta = \omega \cdot \sqrt{I_{\text{р}}/K}$. Луч лампочки отражается от зеркальца и создает световой зайчик на шкале, находящейся на удалении b . При повороте зеркальца на малый угол θ , зайчик сместится по шкале на расстояние $\delta = b \cdot 2\theta$. Учитывая все полученные результаты, видим, что величина индукции магнитного поля на оси соленоида в том месте, где находится измерительная катушка $K_{\text{и}}$, про-

порциональна отклонению зайчика: $\boxed{B = k\delta}$, где $k = \frac{R\sqrt{KI_{\text{р}}}}{2bN_{\text{р}}N_{\text{и}}S_{\text{р}}S_{\text{и}}B_{\text{м}}}$.

Современные приборы, измеряющие малые изменения тока или напряжения, основаны на принципе измерения протекшего по цепи заряда и обладают намного большей чувствительностью и точностью.

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 27

1. Нарисуйте линии индукции магнитного поля, созданного током, текущим по виткам катушки-соленоида с учетом направления этого тока. Будут ли эти линии замкнутыми и почему?
2. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора магнитной индукции и с её помощью определите величину индукции магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида с током I , у которого на длину l приходится N витков.
3. Сформулируйте закон Био-Савара и с его помощью получите выражение величины индукции магнитного поля на оси кругового витка с током.
4. Сделайте вывод расчетной формулы для величины индукции магнитного поля на оси соленоида конечной длины l с радиусом витков r .
5. Определите величину отношения индукции магнитного поля в центре соленоида (при $a = l/2$) и на его краях (при $a = 0$ или l). Совпадает ли эта величина с той, что следует из построенного Вами графика?
6. Объясните принцип работы баллистического гальванометра, используемого в данной работе.
7. В чем состоит явление электромагнитной индукции? Сформулируйте закон Фарадея для определения ЭДС электромагнитной индукции и с его помощью объясните, почему заряд, протекающий по измерительной катушке, пропорционален величине индукции магнитного поля, в которую её вносят. Почему размер измерительной катушки должен быть малым?
8. Почему при включении тока в соленоиде поворачивается зеркальце, создающее световой “зайчик”? Почему вращающий зеркальце момент сил пропорционален измеряемой индукции магнитного поля?
9. Почему световой “зайчик” сразу же возвращается в исходное положение, если нажать кнопку включения тока в соленоиде и не отпускать её?
10. Сделайте вывод формулы зависимости смещения δ “зайчика” от величины индукции B . От каких параметров установки зависит коэффициент пропорциональности k между этими величинами?
11. Каким способом проще всего увеличить смещение δ “зайчика”, не меняя силу тока в соленоиде и параметры измерительной катушки?

12. Почему баллистические гальванометры, измеряющие величину тока по величине протекающего заряда более точны, чем обычные амперметры?

Работа №28. Определение индуктивности тороида с ферритовым магнитопроводом

Электрическая схема установки изображена на рис.2.32. На тороидальный сердечник навита обмотка из N витков тонкого провода, по которому течет ток I от подключенного источника переменной ЭДС с амплитудой ε_0 и циклической частотой ω . Величину тока меняют, изменяя сопротивление потенциометра R . Если L – индуктивность такой тороидальной катушки, а R_k – её омическое (активное) сопротивление,

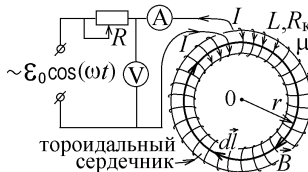


Рис.2.32

то с учетом ЭДС самоиндукции правило Кирхгофа для изображенной на рис.2.32 замкнутой цепи имеет вид $I(R + R_k) = \varepsilon_0 \cos(\omega t) - L \cdot dI/dt$. Решение этого уравнения вынужденных колебаний известно. Амплитуда вынужденных колебаний тока в цепи связана с амплитудой ЭДС через полное сопротивление цепи переменному току

$$Z = \sqrt{(\omega L)^2 + (R + R_k)^2}, \text{ т.е. } I = I_0 \sin(\omega t + \alpha) = \frac{\varepsilon_0}{Z} \sin(\omega t + \alpha).$$

Сопротивление ωL называют индуктивным сопротивлением. Можно найти падение напряжения на контактах тороидальной катушки: $U = IR_k + L dI/dt$. Подстановка дает $U = I_0 R_k \sin(\omega t + \alpha) + I_0 \omega L \cos(\omega t + \alpha)$

или $U = I_0 \sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2} (\cos \theta \cdot \sin(\omega t + \alpha) + \sin \theta \cdot \cos(\omega t + \alpha))$, где

$$\cos \theta = \frac{R_k}{\sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2}}, \text{ т.е.}$$

$$U = I_0 \sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2} \cos(\omega t + \alpha - \theta) \\ = U_0$$

Амперметр и вольтметр измеряют не амплитудные, а действующие или эффективные величины тока и напряжения $I = I_0/\sqrt{2}$, $U = U_0/\sqrt{2}$. Это величины **постоянного** тока, который оказывает такое же действие, как и переменный ток с амплитудами I_0, U_0 . Их от-

ношение равно отношению амплитуд: $U/I = U_0/I_0 = \sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2}$. В данной работе сопротивление провода, намотанного на тороидальный сердечник, считается пренебрежимо малым, $R_k \approx 0$, что позволяет определить индуктивность катушки по измеренным показаниям амперметра и вольтметра:
$$L = \frac{U}{I\omega}.$$

Чтобы вычислить индуктивность L , воспользуемся теоремой о циркуляции вектора индукции \vec{B} магнитного поля, линии которого внутри соленоида образуют замкнутые окружности (рис.2.32). Приняв такую окружность радиуса r за контур интегрирования, получим $\oint \vec{B} d\vec{l} = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu\mu_0 IN$ (контур охватывает N витков с током I).

Величина магнитного поля $B = \frac{\mu\mu_0 IN}{2\pi r}$ зависит от расстояния r до

центра 0 тороида. Поэтому магнитный поток через площадь S_B одного витка (рис.2.33) можно только приблизительно записать в виде $\Phi_1 \approx BS_B$. Поток через все N витков связан с индуктивностью катушки:

$\Phi = NBS_B \approx LI$. Отсюда $L \approx \frac{\mu\mu_0 S_B N^2}{2\pi r}$. Результат

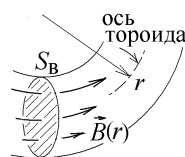


Рис.2.33

вычисления L по этой формуле, где r – радиус оси тороида, тем точнее, чем меньше поперечное сечение S_B сердечника. В данной работе определяется зависимость индуктивности L от величины магнитной проницаемости μ феррита, из которого изготовлен сердечник.

Правильно объяснить магнитные свойства любого магнетика – ферромагнетика, парамагнетика или диамагнетика – можно только с помощью законов квантовой физики. В частности, феррит – это магнитно-упорядоченная среда, в которой магнитные моменты атомов выстраиваются строго вдоль одного направления под действием обменных сил квантовой природы, не имеющих аналога в классической физике. Ферриты отличаются от ферромагнетиков тем, что магнитные моменты атомов разного сорта направлены в разные стороны (рис.2.34,

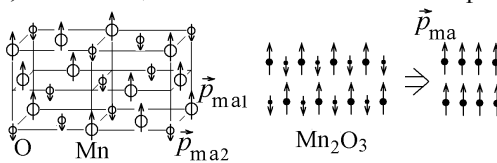


Рис.2.34

изображенный для феррита Mn_2O_3).

При изменении магнитного поля в ферритах не возникают токи Фуко, поскольку ферриты не проводят электрический ток. По этой причине ферриты используются в качестве материала для изготовления сердечников трансформаторов, поскольку из-за большой величины магнитной проницаемости μ позволяют создать большое магнитное поле, а в случае переменных токов не нагреваются, так как в них не происходит потеря энергии на выделение джоулева тепла, которое обязательно выделялось бы при затухании индукционных токов Фуко в проводящей ферромагнитной среде.

Магнитные моменты разных атомов $\vec{p}_{\text{ма}}$ значительно отличаются по величине. Магнитные моменты групп соседних атомов, как и в ферромагнетиках, будут направлены в одну сторону (рис.2.34). Это приводит к

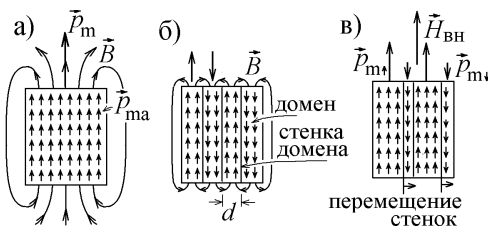


Рис.2.35

появлению огромного магнитного момента $\vec{p}_m = \sum \vec{p}_{\text{ма}}$ всего феррита (рис.2.35,а). Поэтому феррит делится на домены – участки кристаллической решетки с размером $d \sim 10^{-4} \div 10^{-6}$ м, в которых магнитные моменты атомов под действием обменных сил ориентированы параллельно, но в соседних доменах их направления противоположны (рис.2.35,б). В результате индукция магнитного поля \vec{B} в феррите сильно уменьшена и практически равна нулю, если феррит не намагничен.

Без ферритового сердечника текущий ток I создаёт внутри катушки, в воздушном пространстве, поле с индукцией $B_I = \mu_0 I N / (2\pi r)$. Магнитные моменты доменов в ферритовом сердечнике имеют в этом поле энергию $W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}_I$. Домены, ориентированные по полю, имеют меньшую энергию $W_{\uparrow} = -p_{m\uparrow} B_I \cos 0^\circ = -p_{m\uparrow} B_I$, чем домены, ориентированные против поля, $W_{\downarrow} = -p_{m\downarrow} B_I \cos 180^\circ = +p_{m\downarrow} B_I$. Домены с меньшей энергией начинают расти, а домены с большей энергией – уменьшаться в размерах. При этом атомы феррита не смещаются, а направления их магнитных моментов $\vec{p}_{\text{ма}}$ слоями меняют ориен-

2. Подготовка к выполнению лабораторных работ по физике тацию (рис.2.35,в). Происходит перемещение стенок (границ) доменов. Не скомпенсированные магнитные моменты доменов создают дополнительное магнитное поле $\vec{B}_д$, которое складывается с магнитным полем тока: $\vec{B} = \vec{B}_д + \vec{B}_I$.

Дополнительное поле, созданное магнитными моментами атомов среды характеризуют вектором намагниченности $\vec{J} = \sum_{\text{ед } V} \vec{p}_{\text{ма}}$ - это

сумма магнитных моментов атомов в единице объема среды. В ферромагнетиках и ферритах $\vec{B} = \vec{B}_I + \mu_0 \vec{J}$, но между векторами \vec{B}_I и \vec{J} нет линейной зависимости. С ростом поля B_I скорость переориентации доменов вначале растет, достигает максимума при $B_I = B_K$ (соответствующее значение напряженности $H_K = B_K / \mu_0$ называется коэрцитивной силой), а при больших величинах B_I все домены будут переориентированы по направлению поля \vec{B}_I (насыщение). Зависимость индукции поля B в феррите от величины B_I станет линейной (рис.2.36,а). Такая зависимость называется кривой намагничивания Столетова.

Считая, что поле в среде возрастает пропорционально величине магнитной проницаемости μ , $\vec{B} = \mu \vec{B}_I$, получаем зависимость μ феррита от величины магнитного поля тока

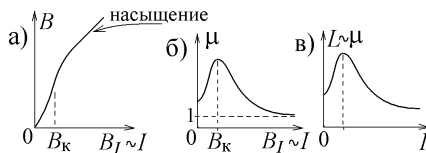


Рис.2.36

или от величины тока I , пропускаемого по виткам катушки (рис.2.36,б). При больших величинах I $\mu \rightarrow 1$, т.е. феррит ведет себя как парамагнетик. Так как $L \sim \mu$, то экспериментально определяемый график $L = L(I)$, если пренебречь сопротивлением провода катушки $R_K = 0$, должен иметь ту же форму, что и график $\mu = \mu(I)$ (рис.2.36,в).

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 28

1. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора магнитной индукции и с её помощью определите величину индукции B магнитного поля внутри тороидальной катушки с ферритовым сердечником. Одинакова ли величина B во всех точках сердечника?
2. Какая величина называется индуктивностью? В каких единицах она

измеряется? Как связать индуктивность тороидальной катушки с величиной индукции магнитного поля внутри неё?

3. Какая величина называется магнитной проницаемостью ферритового сердечника? К какому значению она стремится, если феррит поместить в очень сильное магнитное поле?

4. Получите формулу индуктивности катушки. Почему в данной работе важна её зависимость от магнитной проницаемости сердечника?

5. Почему амперметр и вольтметр в данной работе измеряют не истинные, а эффективные (действующие) значения тока I и напряжения U ? Какая величина называется эффективным значением тока (напряжения)?

6. Запишите правило Кирхгофа для цепи, в которой катушка подключена к источнику переменной ЭДС, и получите с его помощью расчетную формулу $L = U/I\omega$.

7. Почему сердечник катушки изготовлен из феррита, а не из стали с большим значением магнитной проницаемости?

8. Почему феррит самопроизвольно делится на домены? Что такое домен?

9. Какая величина называется вектором намагниченности?

10. Сердечник из феррита находится во внешнем магнитном поле B_I , созданном током, текущим по катушке. Как найти индукцию магнитного поля в феррите? Почему она не меняется прямо пропорционально B_I ?

11. Объясните, как намагничивается феррит при увеличении тока I в катушке? Что происходит с доменами? Когда возникает насыщение? Что такое кривая намагничивания Столетова?

12. Объясните вид экспериментального графика $L = L(I)$, получаемого в данной работе. По какой причине индуктивность катушки зависит от тока I ? Каким получится график зависимости, если убрать сердечник?

Работа №29. Исследование электрических затухающих колебаний с помощью осциллографа

Электрическая схема установки приведена на рис.2.37. Генератор создает импульсы напряжения $U_{\text{и}}$ практически прямоугольной формы, которые с периодом $T_{\text{и}}$ подаются на

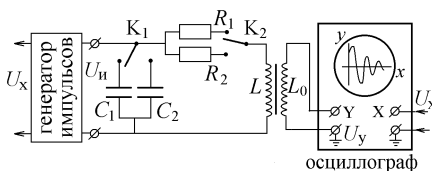


Рис.2.37

конденсатор электрического колебательного контура, подключенный тумблером K_1 . Длительность импульса τ очень мала ($\tau \ll T_{\text{и}}$, см. рис.2.38), но за это время конденсатор с ёмкостью C успевает зарядиться, и на его обкладках оказывается заряд $q_0 = CU_0$. Затем конденсатор разряжается и в цепи колебательного контура возникает переменный ток. На клеммы вертикальной развертки “Y” осциллографа подается напряжение U_y , создаваемое на концах катушки с индуктивностью L_0

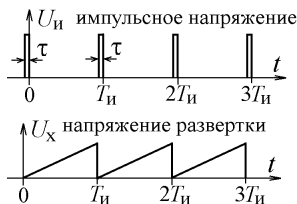


Рис.2.38

(см.рис.2.37). Получим зависимость этого напряжения от времени.

Вывод расчетной формулы. Электрический колебательный контур – это цепь, обладающая ёмкостью C , индуктивностью L и омическим сопротивлением R (рис.2.39). Генератор импульсов подключается к этой цепи только на время зарядки конденсатора. Остальное время $T_{\text{и}} - \tau$ в цепи контура имеется единственная ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_c в катушке L . Правило Кирхгофа для такого контура $U_R + U_C = \mathcal{E}_c$. После подстановки выражений для падения напряжения на сопротивлении $U_R = IR$, на конденсаторе $U_C = q/C$, для ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_c = -L di/dt$, а также определения тока $I = dq/dt$, получаем уравнение собственных затухающих колебаний заряда на конденсаторе:

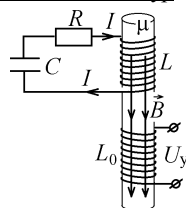


Рис.2.39

$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$, где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания колебаний.

Решение этого уравнения имеет вид $q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t)$ (при $t = 0$ за-

ряд на конденсаторе максимален и равен q_0). $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ –

циклическая частота затухающих колебаний. Их период $T = 2\pi/\omega$, а также скорость затухания колебаний зависит от величин ёмкости конденсаторов и сопротивлений резисторов, подключаемых тумблерами K_1 и K_2 (рис.2.37). В частности, при очень большой величине сопротивления R или большой величине ёмкости C , когда $\omega_0^2 \leq \beta^2$, или $R \geq R_{кр} = 2\sqrt{L/C}$, колебания возникать не могут (величина сопротивления $R_{кр}$ называется критической).

Ток в цепи выразится как $I(t) = dq/dt = -\beta q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t) - \omega q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t)$.

Обозначая $\sin \alpha = -\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}$, $\cos \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}$, учтем, что $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0$, и

что $\cos(\theta + \alpha) = \sin \alpha \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta$. Получаем $I(t) = q_0 \omega_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$ – колебания тока в цепи контура опережает по фазе колебания напряжения $U_C = q(t)/C$ на конденсаторе на величину α .

В катушке индуктивности L создается магнитное поле с индукцией, величина которой пропорциональна величине тока, протекающего по виткам катушки, $B \sim I(t)$. Линии индукции пронизывают витки другой катушки с индуктивностью L_0 , и создают в ней переменный магнитный поток, также пропорциональный величине тока $\Phi_0 \sim B \sim I(t)$.

Падение напряжения на концах катушки L_0 , если пренебречь омическим сопротивлением её витков, будет равно ЭДС взаимной индукции

$\mathcal{E}_{вз} = -d\Phi_0/dt = -L_{вз} dI/dt$, где $L_{вз}$ – коэффициент взаимной индуктивности. Изменение тока в одном замкнутом контуре приводит к появлению ЭДС в другом, соседнем замкнутом контуре. Величину индуктивной связи между катушками (величину коэффициента $L_{вз}$) обычно увеличивают, наматывая витки катушек на общий ферритовый сердечник с большой величиной магнитной проницаемости μ (рис.2.39).

Подставляя полученное выше выражение для тока $I(t)$, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{вз} &= L_{вз} q_0 \omega_0 (\beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + \omega e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)) \\ &= L_{вз} q_0 \omega_0^2 e^{-\beta t} (\cos \alpha \cos(\omega t + \alpha) - \sin \alpha \sin(\omega t + \alpha)) \end{aligned}$$

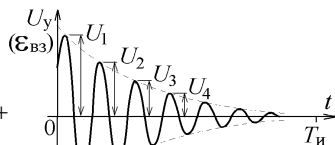


Рис.2.40

Напряжение, подаваемое на клеммы вертикальной развертки “Y”,

$U_y = \varepsilon_{вз} = \frac{U_{y0} e^{-\beta t}}{\text{амплитуда}} \cos(\omega t + \delta)$, где $U_{y0} = L_{вз} q_0 \omega_0^2$ (рис.2.40), меняет-

ся со временем по тому же закону, что и колебания заряда на конденсаторе, но сдвинуто по фазе на $\delta = \pi + 2\alpha$. На клеммы горизонтальной развертки “X” осциллографа подается пилообразное напряжение U_x , период изменения которого совпадает с периодом появления импульсов $T_{и}$ (рис.2.38). За это время колебания напряжения U_y , происходя-

щие с меньшим периодом $T = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ успевают затухнуть, и на экране осциллографа видна картина, показанная на рис.2.40.

Горизонтальная ось развертки калибрована в единицах времени, указанных на панели осциллографа, что позволяет определить временной интервал T между двумя соседними максимумами графика (рис.2.40), т.е. экспериментально определяемый период затухающих колебаний.

Затухание колебаний характеризуют величиной логарифмического декремента затухания θ – это натуральный логарифм отношения амплитуды колебаний в момент времени t к амплитуде через период:

$$\theta = \ln \left(\frac{U_{y0} e^{-\beta t}}{U_{y0} e^{-\beta t} e^{-\beta T}} \right) = \ln \left(e^{+\beta T} \right) = \beta T. \text{ Но можно воспользоваться дру-}$$

гой формулой для вычисления θ . Через каждый период амплитуда колебаний уменьшается в $e^{\beta T}$ раз: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_2}{U_3} = \dots = \frac{U_{n-1}}{U_n} = e^{\beta T}$ (величины амплитуд U_n показаны на рис.2.40). Отсюда

$$\frac{U_1}{U_n} = \frac{e^{\beta T} \cdot e^{\beta T} \cdot \dots \cdot e^{\beta T}}{n-1 \text{ раз}} = e^{(n-1)\beta T} \quad \text{и} \quad \boxed{\theta = \frac{1}{n-1} \ln \left(\frac{U_1}{U_n} \right)} - \text{ расчетная фор-}$$

мула для вычисления θ .

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 29

1. Какая цепь называется электрическим колебательным контуром?
2. Запишите правило Кирхгофа для замкнутой цепи, содержащей конденсатор с ёмкостью C , катушку с индуктивностью L и резистор R и приведите его к дифференциальному уравнению собственных затухающих колебаний заряда на конденсаторе.

3. Запишите выражения для коэффициента затухания, циклической частоты и периода таких колебаний. Как они зависят от параметров C , L и R ?
4. Что происходит с величиной периода (частоты) собственных колебаний при увеличении сопротивления R ? при увеличении ёмкости C ?
5. Чему равно критическое сопротивление контура $R_{кр}$? Что происходит с колебаниями при $R \geq R_{кр}$?
6. Запишите выражение зависимости колебаний заряда q на конденсаторе и падения напряжения U_C на его обкладках от времени.
7. Получите зависимость величины тока I в контуре от времени. Чему равен сдвиг фаз между колебаниями U_C и I ?
8. Как изменяются со временем амплитуды колебаний U_C и I ?
9. Какая величина называется логарифмическим декрементом затухания колебаний θ ? Выразите величину θ через параметры C , L и R .
10. В электрическом колебательном контуре сопротивление R и индуктивность L увеличили в два раза. Во сколько раз надо изменить ёмкость C , чтобы логарифмический декремент затухания колебаний не изменился?
11. Как определяется величина ЭДС взаимной индукции? Какова роль этой ЭДС в данной работе?
12. Объясните, как возникает картина затухающих колебаний на экране осциллографа? Какова роль генератора прямоугольных импульсов?
13. Объясните, как определить величину логарифмического декремента затухания θ по картине, наблюдаемой на экране?
14. Каким образом по данной картине можно определить величину периода затухающих колебаний?
15. Период собственных затухающих колебаний в электрическом колебательном контуре $T = 2$ мс. За время $\Delta t = 10$ мс амплитуда таких колебаний уменьшается в $e = 2,71828$ раз. Чему равен логарифмический декремент затухания колебаний?
16. В контуре с заданными параметрами C и R изменяют индуктивность L . При каком значении L циклическая частота собственных колебаний имеет максимальную величину? Чему равна ω_{\max} ?

Работа №30. Определение характеристик колебательного контура методом резонанса

Электрическая схема лабораторной установки показана на рис.2.41. Источник переменной ЭДС с амплитудой ε_0 и циклической частотой ω включен в цепь электрического колебательного контура, состоящую из катушки с индуктивностью L , конденсатора с переменной ёмкостью C и резистора с сопротивлением R .

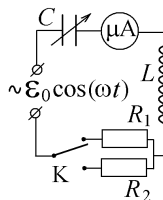


Рис.2.41

Правило Кирхгофа для такой замкнутой цепи имеет вид $U_R + U_C = \varepsilon_c + \varepsilon_0 \cos(\omega t)$, где $U_R = IR$ – падение напряжения на резисторе, $U_C = q/C$ – падение напряжения на конденсаторе с зарядом q , $\varepsilon_c = -L dI/dt$ – ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке. Подставляя выражение тока $I = dq/dt$, созданного изменением заряда на конденсаторе, получаем уравнение вынужденных электрических колебаний

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos(\omega t), \text{ где } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \beta = \frac{R}{2L}.$$

Подставляя в это уравнение выражение для установившихся колебаний заряда, происходящих с частотой внешней ЭДС и с амплитудой A , не зависящей от времени, $q = A \cos(\omega t - \varphi)$, приходим к равенству

$$A\omega^2 \underbrace{(-\cos(\omega t - \varphi))}_{=\cos(\omega t - \varphi + \pi)} + 2\beta A\omega \underbrace{(-\sin(\omega t - \varphi))}_{=\cos(\omega t - \varphi + \pi/2)} + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos(\omega t)$$

Три колебания с одинаковой частотой ω и разными начальными фазами в левой части этого уравнения складываем методом векторной диаграммы (рис.2.42), получая в результате сложения вектор, соответствующий правой части. Из прямоугольного треугольника на этом рисунке следует, что

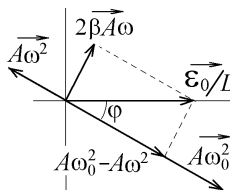


Рис.2.42

$$A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta A\omega)^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{L^2}; \quad \text{tg } \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Отсюда видно, что амплитуда вынужденных колебаний заряда на конденсаторе зависит от частоты переменной ЭДС:

$$A(\omega) = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Такая же зависимость от частоты ω будет у амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе $U_C = q/C$ (рис.2.43,а).

Находя ток в цепи, $I = dq/dt = -A\omega \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$, видим, что колебания тока опережают колебания напряжения U_C по фазе на $\pi/2$. Амплитуда тока

$$I_0(\omega) = A(\omega)\omega = \frac{\varepsilon_0}{\frac{L}{\omega} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}}$$

также зависит от частоты ω (рис. 2.43,б). Её связывают с амплитудой ЭДС внешнего источника формулой, аналогичной закону Ома в цепи постоянного тока:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}, \text{ где ве-}$$

личину

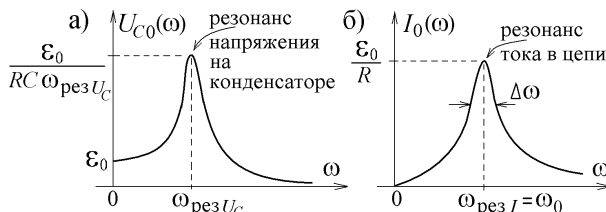


Рис.2.43

$$Z(\omega) = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2} \text{ называют } \underline{\text{полным сопротивлением цепи}}$$

переменному току. Записанная формула связывает **амплитуды** тока и ЭДС. Сопротивление $X_C = 1/\omega C$ называется ёмкостным сопротивлением, а $X_L = \omega L$ - индуктивным сопротивлением (эти сопротивления называют реактивными). Амплитуды падения напряжения на конденсаторе $U_{C0} = q_{\max}/C = X_C I_0$ и на катушке индуктивности (если $R_{\text{катушки}} = 0$), $U_{L0} = |-L dI/dt|_{\max} = X_L I_0$ связаны с амплитудой тока I_0 реактивными сопротивлениями. Но, поскольку колебания U_C и U_L сдвинуты по фазе относительно колебаний тока на величину $\pi/2$, то средняя мощность тока для них равна нулю. Например,

$$P_C = \frac{1}{T} \int_0^T U_C I dt \sim \int_0^T \cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi) dt = 0. \text{ При протекании пере-$$

менного тока на реактивных сопротивлениях не выделяется джоулево тепло.

На обычном омическом сопротивлении R резистора, которое называется активным сопротивлением, выделяется средняя мощность

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R \cos^2(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} I_0^2 R. \text{ Амперметр в цепи}$$

(рис. 4.41) измеряет не амплитудное, а эффективное или действующее значение тока $I_{\text{эфф}} = I_0 / \sqrt{2}$. Это величина такого постоянного тока, который выделяет в цепи ту же мощность, что и переменный ток с амплитудой I_0 .

Из рис.2.43 видно, что при некоторой частоте внешней ЭДС наблюдается явление резонанса – резкое увеличение амплитуды тока в цепи или амплитуды напряжения на конденсаторе. Такая частота называется резонансной частотой $\omega_{\text{рез}}$ и определяется из условия макси-

мума. Для напряжения на конденсаторе амплитуда $U_{C0} = A(\omega) / C$ максимальна при минимальном значении знаменателя:

$$\frac{d}{d\omega^2} \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right) = 0, \text{ что дает } \omega_{\text{рез}U_C} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

– резонансная частота для амплитуды заряда или напряжения на конденсаторе.

Амплитуда тока максимальна, если $\frac{1}{C\omega} - L\omega = 0$, т.е.

$$\boxed{\omega_{\text{рез}I} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \text{ – резонансная частота для амплитуды тока в цепи.}$$

Обычно резонанс используется в контурах с очень малым коэффициентом затухания $\beta \ll \omega_0$, для которых $\omega_{\text{рез}U_C} \approx \omega_{\text{рез}I} = 1/\sqrt{LC}$.

Резонансные свойства колебательного контура определяются двумя характеристиками. Это волновое или характеристическое сопротивление контура ρ – величина его ёмкостного (или индуктивного) сопротивления при резонансной частоте:

$$\rho = X_{C_{\text{рез}}} = X_{L_{\text{рез}}} = L\omega_{\text{рез}}I, \quad \text{т.е.} \quad \boxed{\rho = \sqrt{L/C}}.$$

Другая характеристика – добротность Q контура. Это – отношение амплитуды напряжения на индуктивности (или на конденсаторе) к амплитуде ЭДС при резонансе: $Q = \frac{U_{L0}}{\varepsilon_0} = \frac{X_L I_0}{\varepsilon_0} = \frac{L\omega_{\text{рез}} I_0}{I_0 R}$, т.е.

$$\boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}}.$$

Чем больше добротность, тем выше и уже ширина резонансных кривых на рис.2.43. Ширина $\Delta\omega$ резонансной кривой на высоте $0,7 \cdot I_{0\text{max}}$ приблизительно равна $\Delta\omega \approx \omega_0/Q \approx R/L$ (рис.2.43,б). В приемных устройствах надо использовать контуры с очень большой добротностью и малым затуханием колебаний, чтобы выделить и усилить сигнал с определенной частотой, попадающей в интервал $\Delta\omega$. В технике добротность определяют как величину, пропорциональную отношению запасенной в контуре энергии к энергии, теряемой за период T в виде джоулева тепла, выделяющегося на активном сопротивлении R :

$$Q \sim \frac{LI_0^2}{2} \bigg/ \left(\frac{RI_0^2}{2} T \right).$$

В данной работе источник ЭДС имеет постоянную частоту $\omega = 2\pi\nu$, где $\nu = 50$ Гц. Строится зависимости тока в цепи от переменной ёмкости C включенного в цепь конденсатора. При выполнении условия резонанса тока $\omega = 1/\sqrt{LC}$ или $C_{\text{рез}} = 1/(L\omega^2)$ амплитуда тока будет максимальна (рис.2.44), что позволяет рассчитать индуктивность цепи $L = 1/(C_{\text{рез}}\omega^2)$, её волновое сопротивление $\rho = \sqrt{L/C_{\text{рез}}}$ и добротность колебательного контура $Q = \rho/R$.

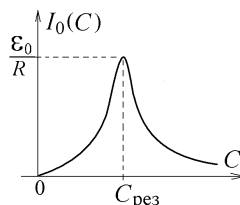


Рис.2.44

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 30

1. Какая цепь называется электрическим колебательным контуром?
2. Нарисуйте замкнутую цепь, содержащую конденсатор с ёмкостью C , катушку с индуктивностью L , резистор R и источник тока с переменной ЭДС $\varepsilon_0 \cos(\omega t)$. Запишите правило Кирхгофа с учетом ЭДС самоиндукции в катушке и приведите его к дифференциальному уравнению

вынужденных электрических колебаний.

3. Какова амплитуда и частота вынужденных колебаний? С помощью метода векторной диаграммы получите выражения для амплитуды напряжения U_C на конденсаторе и амплитуды силы тока I в цепи.
4. Какова разность фаз между вынужденными колебаниями U_C и I ?
5. Какие величины называются индуктивным, ёмкостным, активным и полным сопротивлением цепи переменному току?
6. Какая величина называется эффективным (действующим) значением тока (напряжения)? На каких элементах цепи выделяется эффективная мощность?
7. Какое явление называется резонансом? Что такое резонансная частота и как её вычислить?
8. Резонанс какой величины наблюдается в данной работе?
9. Найти резонансную частоту для колебаний заряда на конденсаторе.
10. Найти резонансную частоту для колебаний силы тока в цепи.
11. Частоту внешнего источника ЭДС постепенно увеличивают. Резонанс какой величины, U_C или I , наступит раньше?
12. Какая величина называется волновым сопротивлением контура? Как её вычислить?
13. Какая величина называется добротностью электрического колебательного контура?
14. Что происходит с кривой амплитудно-частотной характеристики тока (рис.2.43,б) при увеличении активного сопротивления R цепи?
15. Почему в радиоприемниках надо использовать приемный контур с высокой добротностью?

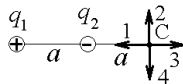
3. Подготовка к выполнению тестовых заданий по физике

В этом разделе приводятся примеры тестовых заданий, предлагаемых студентам в процессе тестирования при проведении двух текущих аттестаций, а также во время экзамена. Вопросы разбиты по темам, соответствующим порядку изучения учебного материала. Формулировка тестовых заданий, проверяющих приобретенные умения и навыки, предусматривает выбор ответа, но такие же задания могут быть предложены на экзамене без вариантов ответа. Задания, предлагавшиеся в процессе проверки остаточных знаний ФЭПО отмечены символом (*).

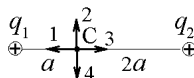
Для ответа на данные тесты необходимо иметь представления об основных явлениях электромагнетизма и ознакомиться с основными законами и формулами физики в любом учебном пособии или на лекционных занятиях. Предполагается, что при подготовке студент будет самостоятельно искать правильный ответ, но для контроля правильные ответы приведены в конце раздела.

3.1. Напряженность электростатического поля

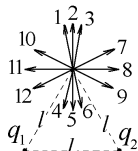
1.1*. Электрическое поле создано точечными зарядами q_1 и q_2 . Если $q_1 = +9q$, $q_2 = -2q$, а расстояния от заряда q_1 до заряда q_2 и от заряда q_2 до точки С равны a , то вектор напряженности поля в точке С ориентирован в направлении: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) равен 0;



1.2*. Электрическое поле создано точечными зарядами $q_1 = +q$ и $q_2 = +4q$. Вектор напряженности поля в точке С, находящейся на расстоянии a от заряда q_1 и на расстоянии $2a$ от заряда q_2 , ориентирован в направлении: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) равен 0;



1.3. Положительный точечный заряд $q_1 = +q$ и отрицательный точечный заряд $q_2 = -2q$ находятся в двух вершинах равностороннего треугольника с длиной стороны l . Указать направление вектора напряженности \vec{E} созданного ими электрического поля в третьей вершине этого треугольника:



а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5; е) 6; ж) 7; з) 8; и) 9; к) 10; л) 11; м) 12;

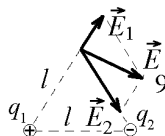
Решение. Направления векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , созданных положительным и отрицательным зарядом в третьей вершине треугольника, пока-

зано на рисунке справа. Так как величина $E_2 = 2q / (4\pi\epsilon_0 l^2)$ в 2 раза

больше величины $E_1 = q / (4\pi\epsilon_0 l^2)$, то направление

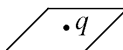
суммарного вектора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ отмечено цифрой “9”.

При ответе аккуратно рисуйте направления и учитывайте и величину векторов напряженности, созданных каждым из зарядов.

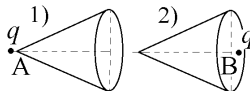


3.2. Теорема Гаусса для электростатического поля

2.1. Точечный заряд q находится на бесконечной плоскости. Чему равен поток вектора напряженности электростатического поля, созданного этим зарядом, через данную плоскость: а) 0; б) q/ϵ_0 ; в) $q/2\epsilon_0$; г) ∞ ;



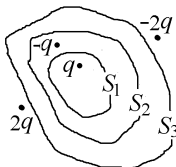
2.2. Частица с зарядом q находится **вне** конуса: в случае “1” – вблизи вершины конуса А; в случае “2” – вблизи центра его основания В (см. рисунок). Что можно сказать о величине



потока вектора электрической индукции \vec{D} через боковую поверхность?

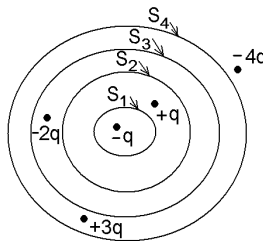
- а) она больше в первом случае; б) она больше во втором случае;
в) в обоих случаях потоки одинаковы; г) для ответа не хватает данных;

2.3*. Дана система точечных зарядов в вакууме и замкнутые поверхности S_1, S_2, S_3 . Поток вектора напряженности электрического поля равен нулю сквозь...



- а) поверхности S_2 и S_3 ;
б) поверхность S_3 ; в) поверхность S_2 ; г) поверхность S_1 ;

2.4. Дана система точечных зарядов в вакууме и замкнутые поверхности S_1, S_2, S_3 и S_4 . Через какую поверхность поток вектора напряженности электростатического поля, созданного зарядами, равен $-2q/\epsilon_0$?



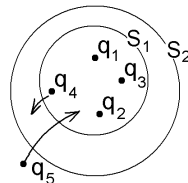
- а) S_1 ; б) S_2 ; в) S_3 ; г) S_4 ;

2.5. На рисунке показаны две замкнутые поверхности S_1 и S_2 и положение точечных зарядов

$q_1 = +1$ мкКл, $q_2 = -2$ мкКл, $q_3 = +3$ мкКл,

$q_4 = -4$ мкКл и $q_5 = +4$ мкКл, которые создают

электростатическое поле с индукцией \vec{D} . Поток вектора \vec{D} через замкнутые поверхности S_1 и S_2 равен, соответственно, Φ_1 и Φ_2 . Заряды q_4 и q_5 переместили в новые положения, указанные стрелками. При этом отношение Φ_1/Φ_2 :



а) увеличилось в 2 раза; б) увеличилось в 3 раза; в) поменяло знак;

г) уменьшилось в 3 раза и поменяло знак; д) не изменилось;



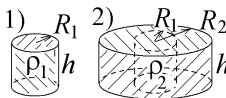
Если в задании приведено много ответов, не пытайтесь проверить каждый из них. Это займет много времени. Найдите то, что требуется в задании, сравните Ваш ответ с приведенными и выберите из них правильный.

Решение. Поток $\Phi = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{\text{внутри}}$ - это сумма зарядов внутри поверхности S с учетом их знака! Вначале

$\Phi_1 = \Phi_2 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$ мкКл. После перемещения зарядов $\Phi_1' = q_1 + q_2 + q_3 + q_5 = +6$ мкКл;

$\Phi_2' = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = +2$ мкКл. Отношение Φ_1/Φ_2 увеличилось в 3 раза.

2.6. Внутри цилиндрической поверхности с радиусом $R_1 = R$ находится равномерно распределенный с плотностью ρ_1 электрический заряд q . Такой же заряд q с плотностью ρ_2 распределен внутри второй цилиндрической поверхности с радиусом $R_2 = 3R$. Φ_1 - поток вектора напряженности электрического поля через поверхность радиуса R_1 на рис.1, а Φ_2 - такой же поток через поверхность того же радиуса R_1 , на рис.2. Высота h цилиндров одинакова. Чему равно отношение Φ_1/Φ_2 ? а) 81; б) 27; в) 9; г) 3; д) 1;



Решение. Внутри указанной поверхности на рис.1 находится заряд q и создает поток $\Phi_1 = \oint \vec{E} d\vec{S} = q/\epsilon_0$. Внутри такой же поверхности на рис.2 находится заряд q' , пропорциональный объему первоначального цилиндра: $q' = q \cdot \pi R_1^2 h / \pi R_2^2 h = q/9$, создающий поток

$\Phi_2 = \oint \vec{E} d\vec{S} = q'/\epsilon_0$. Поэтому $\Phi_1/\Phi_2 = 9$.

2.7*. Даны формулы для вычисления напряженности электростатического поля:

$$\text{А) } E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}; \text{ Б) } E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}; \text{ В) } E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}; \text{ Г) } E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

Укажите их соответствие с источником поля: 1) равномерно заряженная длинная нить; 2) равномерно заряженная бесконечная плоскость; 3) область внутри равномерно заряженного шара; 4) область вне равномерно заряженного шара:

а) 1А, 2Б, 3В, 4Г; б) 1Б, 2А, 3Г, 4В; в) 1Б, 2А, 3В, 4Г; г) 1Б, 2А, 3Г, 4В;

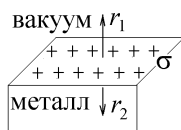
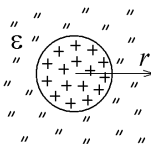
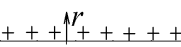
2.8. По бесконечно длинному и очень тонкому цилиндрическому прямому проводу с одинаковой во всех точках плотностью $\rho = \text{const}$ распределен электрический заряд. На расстоянии r от оси провода величина напряженности электрического поля, созданного этим зарядом, равна E . Если измерить величину напряженности поля на расстоянии $2r$ от оси провода, то она окажется равной:

а) $E/4$; б) $E/2$; в) E ; г) $2E$; д) $4E$;

2.9. По объему шара с равномерной плотностью $\rho = \text{const}$ распределен электрический заряд. Шар окружен бесконечной диэлектрической средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. На расстоянии r от центра шара (за его пределами) величина напряженности электрического поля, созданного этим зарядом, равна E . Если убрать диэлектрик, то поле с вдвое меньшей величиной напряженности $E/2$ будет наблюдаться в вакууме за пределами шара на следующем расстоянии от его центра:

а) $r/8$; б) $r/4$; в) $r/2$; г) r ; д) $2r$; е) $4r$; ж) $8r$; з) другой ответ;

2.10. По практически бесконечной плоской поверхности очень толстой металлической пластины, фрагмент которой показан на рисунке, равномерно с поверхностной плотностью σ распределен положительный электрический заряд. На расстоянии r_1 с одной стороны поверхности величина напряженности электрического поля, созданного этим зарядом, равна E_1 . На расстоянии $r_2 = 2r_1$ с другой стороны поверхности величина напряженности равна E_2 . ε_0 – электрическая постоянная. Разность величин (модулей) напряженностей $E_2 - E_1$ равна:



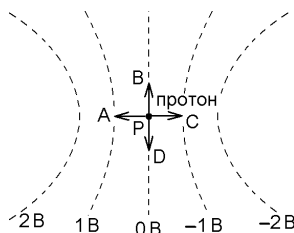
- а) $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$; б) $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$; в) $\frac{2\sigma}{\varepsilon_0}$; г) $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$; д) $-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$; е) $-\frac{2\sigma}{\varepsilon_0}$; ж) 0;

3.3. Потенциал электростатического поля.

Работа по перемещению заряда

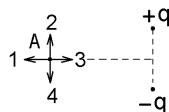
3.1. На рисунке показаны эквипотенциальные линии электростатического поля и значения потенциала на них. Свободный протон, вначале покоившийся в точке P :

- а) начнет двигаться в направлении A ;
 б) начнет двигаться в направлении C ;
 в) будет двигаться в направлении B или D ;
 г) останется неподвижным в точке P с потенциалом 0 В ;



3.2. Система из двух точечных зарядов, создает электрическое поле. Укажите направление вектора градиента потенциала этого поля в точке A :

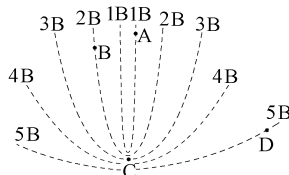
- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;



Решение. Нарисуйте линии \vec{E} поля электрического диполя и убедитесь, что в точке A вектор \vec{E} направлен вдоль стрелки 4, а вектор $\text{grad } \varphi = -\vec{E}$ – в противоположном направлении.

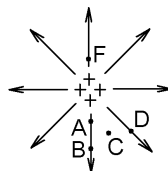
3.3. На рисунке показана картина эквипотенциальных линий электростатического поля и значения потенциала на них. Отмечены точки A , B , C и D . Укажите точку, в которой величина напряженности поля будет наименьшей:

- а) A ; б) B ; в) C ; г) D ;

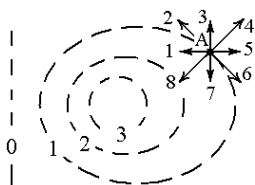


Решение. Величина напряженности $E = |-\text{grad } \varphi| \sim \Delta\varphi/\Delta x$ уменьшается с увеличением расстояния Δx между эквипотенциальными поверхностями. В точке D это расстояние будет максимальным, а E – минимальна.

3.4. Силовые линии электростатического поля расходятся в радиальных направлениях. Величина разности потенциалов в этом поле имеет наименьшее значение между следующими точками:



а) A и B ; б) A и C ; в) A и D ; г) A и F ;



3.5. На рисунке штриховыми линиями показаны эквипотенциальные линии системы зарядов и значения потенциала на них (в вольтах). Вектор напряженности электрического поля в точке A ориентирован в направлении:

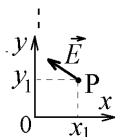
а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5; е) 6; ж) 7; з) 8;

3.6*. Создано электростатическое поле, потенциал которого описывается функцией $\varphi = -4y^2$. Куда направлен вектор напряженности электрического поля в точке, показанной на рисунке?



а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;

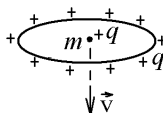
3.7*. Вектор напряженности \vec{E} электростатического поля в точке $P(x_1, y_1)$ направлен под некоторым углом к оси y (см. рисунок). Какая зависимость потенциала электрического поля от координат может соответствовать такому направлению \vec{E} ?



а) $\varphi = 3x^2 - 2y^2$; б) $\varphi = 3x^2 + 2y^2$; в) $\varphi = 3x^2$; г) $\varphi = 2y^2 - 3x^2$;

Решение. Проекция вектора $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ согласно рисунку имеют знак $E_x = -\partial \varphi / \partial x < 0$, $E_y = -\partial \varphi / \partial y > 0$, что соответствует ответу (а).

3.8. По закрепленному кольцу распределен электрический заряд $+q$. В его центре первоначально покоилась свободная частица с массой m и таким же по величине и знаку зарядом $+q$. Удалившись под действием электрических сил на бесконечное расстояние, частица приобретает скорость, равную v . Каким будет выражение для расчета радиуса R кольца?



а) $\frac{4\pi\epsilon_0}{mq^2 v^2}$; б) $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$; в) $\frac{2\pi\epsilon_0}{mq^2 v^2}$; г) $\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 m v^2}$; д) $\frac{\pi\epsilon_0}{mq^2 v^2}$;

Решение. Работа электрического поля идет на увеличение кинетической энергии заряда q : $A = q(\varphi_0 - \varphi_\infty) = mv^2/2$. В центре кольца его заряд создает потенциал $\varphi_0 = q/(4\pi\epsilon_0 R)$, а на бесконечном удалении $\varphi_\infty = 0$. Отсюда $R = q^2 / (2\pi\epsilon_0 m v^2)$.

3.4. Проводники в электростатическом поле

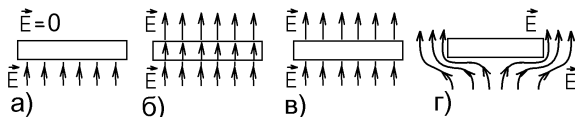
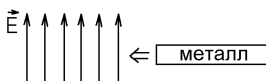
4.1. К концу “В” первоначально незаряженно-го металлического стержня поднесли положительный точечный заряд $+q$, после чего на стержне появился индуцированный заряд (см. рисунок). Каким станет соотношение между потенциалами противоположных концов стержня:



а) $\varphi_A < \varphi_B$; б) $\varphi_A > \varphi_B$; в) $\varphi_A = \varphi_B$; г) все индуцированные заряды должны иметь один знак;

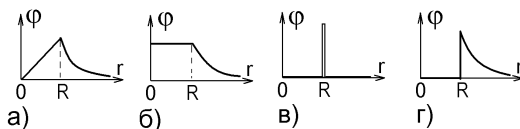
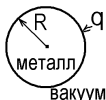
Решение. В случае покоящихся зарядов во всех точках проводника потенциал одинаков.

4.2. Небольшую плоскую металлическую пластинку внесли в однородное электростатическое поле с напряжённостью \vec{E} .

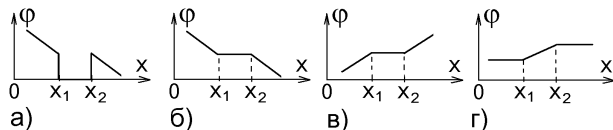


Укажите, какой станет после этого картина силовых линий электрического поля?

4.3. Заряд q поместили на уединённый металлический шар радиуса R . Укажите правильный график зависимости величины потенциала электрического поля от расстояния r до центра шара:



4.4. Металлическая пластинка внесена в однородное электрическое поле с напряжённостью \vec{E} , и на ней появляется индуцированный электрический заряд, показанный на рисунке. Каким будет график зависимости величины потенциала в зависимости от координаты x ?



4.5. Положительный заряд $+q$ поместили на уединенный металлический шар радиуса R , окруженный бесконечной однородной диэлектрической средой с диэлектрической проницаемостью ϵ . Разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_O$ в точке A на поверхности шара (на шаре) и в точке O его центра будет равна:



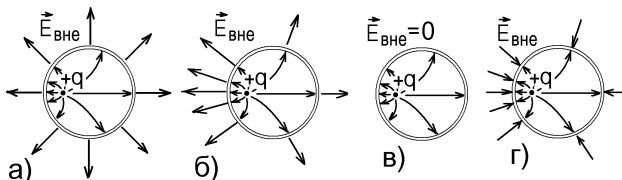
- а) $+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$; б) $+\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}$; в) 0; г) $-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$; д) $-\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2}$;

Решение. Потенциал в центре металлического шара равен потенциалу на его поверхности $\varphi_O = \varphi_A = q/(4\pi\epsilon_0\epsilon R)$.

4.6. Внутри первоначально незаряженной полый металлической сферы поместили точечный положительный электрический заряд, сместив его из центра сферы, как показано на рисунках. Укажите правильную картину силовых линий электрического поля в вакууме внутри и вне сферы:

Решение.

На внутренней поверхности металлической сферы появляется отрицательный индуцированный заряд $-q$, на котором заканчиваются все линии \vec{E} внутри сферы, не проникая в металл.



На внешней поверхности сферы окажется положительный индуцированный заряд $+q$, распределенный **равномерно**, независимо от положения зарядов внутри сферы (экранировка электрического поля). Он создает поле вне сферы, указанное на рис.а.

3.5. Электрическое поле в диэлектриках. Граничные условия

5.1*. Для электронной поляризации диэлектрика характерно (выберите все правильные утверждения):

- а) влияние теплового движения молекул на степень поляризации диэлектрика; б) смещение подрешетки положительных ионов по направлению вектора напряженности внешнего электрического поля, а отрицательных – против поля; в) ориентирующее действие внешнего электрического поля на собственные дипольные моменты молекул; г) возникновение у молекул индуцированного дипольного момента при помещении диэлектрика во внешнее электрическое поле;

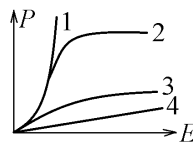
5.2*. На рисунке представлены графики, схематически отражающие характер зависимости поляризованности P от напряженности поля E .

Сегнетоэлектрикам соответствует зависимость:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;

Диэлектрикам соответствует зависимость:

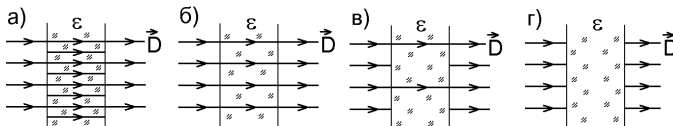
а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;



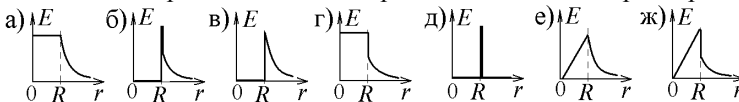
Решение. Кривая намагнизованности сегнетоэлектрика аналогична кривой намагниченности ферромагнетика. В сильных полях сегнетоэлектрик электризуется до насыщения (кривая 2).

Для обычного изотропного диэлектрика в тестах ФЭПО предполагается зависимость $\vec{P} = \epsilon_0 k \vec{E}$ (кривая 4), которая выполняется только в относительно слабых полях \vec{E} . В сильных полях будет наблюдаться заметное отклонение от графика 4.

5.3. Плоский слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\epsilon > 1$ поместили в вакууме перпендикулярно к линиям индукции \vec{D} внешнего однородного электростатического поля. Укажите правильную картину линий \vec{D} электрического поля внутри диэлектрика:

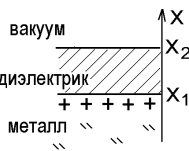


5.4. Положительный заряд $+q$ поместили на уединенный металлический шар радиуса R , окруженный бесконечной однородной диэлектрической средой с диэлектрической проницаемостью ϵ . Каким будет график зависимости величины напряженности электрического поля от расстояния r до центра шара:

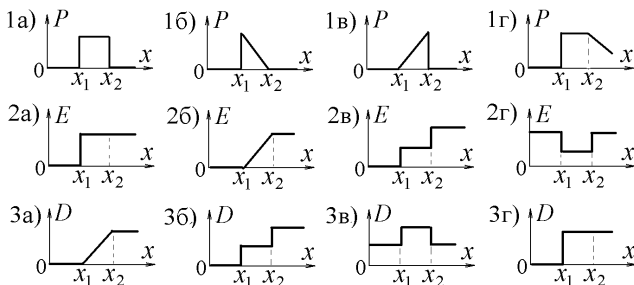


Решение. Внутри металла $E = 0$. Вблизи его заряженной поверхности, на диэлектрике, возникает связанный заряд противоположного знака, уменьшающий поле в диэлектрике в ϵ раз. Правильный график – (б). Если бы шар находился в вакууме, то поле E изменялось бы по закону (в).

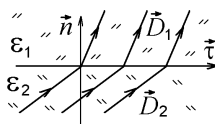
5.5. По плоской поверхности металла распределен с поверхностной плотностью σ электрический заряд. Сверху лежит плоский слой однородного идеального диэлектрика (см. рисунок). Какими будут в этом случае графики зависимости величины



- 1) вектора поляризованности \vec{P} ; 2) вектора напряженности \vec{E} ; 3) вектора электрической индукции \vec{D} ?

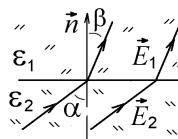


5.6. На рисунке показаны линии вектора электрической индукции \vec{D} на плоской границе двух диэлектрических сред с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1 = 3$ и $\epsilon_2 = 2$. Проекция этого вектора на касательное к границе направление $\vec{\tau}$ с разных сторон от границы равны $D_{1\tau}$ и $D_{2\tau}$. Чему равна величина $D_{2\tau}$, если $D_{1\tau} = 6$ мкТл/м²?



- а) 1 мкТл/м²; б) 1,5 мкТл/м²; в) 4 мкТл/м²;
г) 6 мкТл/м²; д) 9 мкТл/м²;

5.7. На рисунке показаны линии вектора напряженности \vec{E} на плоской границе двух диэлектрических сред с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Эти линии образуют углы α и β с нормалью к границе. Выберите правильное соотношение:



- а) $\epsilon_1 \cos \alpha = \epsilon_2 \cos \beta$; б) $\epsilon_2 \cos \alpha = \epsilon_1 \cos \beta$;
в) $\epsilon_1 \tan \alpha = \epsilon_2 \tan \beta$; г) $\epsilon_2 \tan \alpha = \epsilon_1 \tan \beta$;

Решение. Проекция вектора \vec{E}_1 на нормальное и касательное к границе направления равны $E_{1n} = E_1 \cos \beta$; $E_{1\tau} = E_1 \sin \beta$, откуда $E_{1\tau} = E_{1n} \cdot \tan \beta$. Аналогично $E_{2\tau} = E_{2n} \cdot \tan \alpha$. Используя граничные условия $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ и $D_{1n} = \epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n} = D_{2n} = \epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n}$ получаем

$$E_{1n}/E_{2n} = E_{1\tau}\operatorname{tg}\alpha/E_{2\tau}\operatorname{tg}\beta \quad \text{или} \quad \varepsilon_2/\varepsilon_1 = \operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta.$$

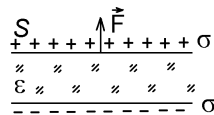
3.6. Конденсаторы. Энергия электрического поля.

Теорема о циркуляции

6.1. Чему равно отношение C_1/C_2 ёмкости C_1 уединённого металлического шара с радиусом $R_1 = 4R$ к ёмкости C_2 уединённого металлического шара с радиусом $R_2 = R$?

- а) 0,0625; б) 0,25; в) 0,5; г) 1; д) 2; е) 4; ж) 16;

6.2. Плоский конденсатор с площадью обкладки S заполнен диэлектриком с проницаемостью ε и заряжен. Поверхностная плотность заряда на обкладке равна σ . Какой формулой определяется сила, действующая на каждую пластину-обкладку конденсатора?



- а) $F = \varepsilon\varepsilon_0\sigma^2 S$; б) $F = \frac{\sigma^2 S}{\varepsilon\varepsilon_0}$; в) $F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0}$; г) $F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\sigma^2 S}{2}$;

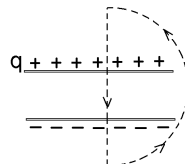
6.3*. Присоединенный к источнику постоянного напряжения плоский конденсатор имеет энергию W . Если пространство между обкладками заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε , то энергия конденсатора станет равна: а) W ; б) εW ; в) $(\varepsilon-1)W$; г) W/ε ;

6.4. Из конденсатора, подключенного к источнику тока с ЭДС \mathcal{E} , убирают заполняющий его диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$. Что при этом происходит с ёмкостью C и с энергией W конденсатора?



- а) C уменьшается, а W увеличивается в 2 раза;
б) и C , и W уменьшаются в 2 раза;
в) C увеличивается, а W уменьшается в 2 раза;
г) C уменьшается в 2 раза, а W не изменяется;

6.5. Электрическое поле создано зарядом q , помещённым на пластины плоского конденсатора. Что можно сказать о величине интеграла $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$ от вектора напряжённости этого поля по замкнутому контуру, показанному на рисунке штриховой линией?

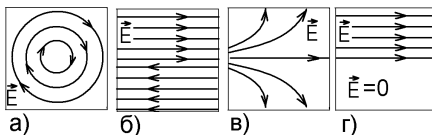


- а) $\oint \vec{E} d\vec{r} > 0$; б) $\oint \vec{E} d\vec{r} < 0$; в) $\oint \vec{E} d\vec{r} = 0$; г) $\oint \vec{E} d\vec{r} = \infty$;
д) недостаточно данных;

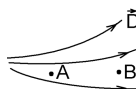
Решение. Каким бы ни был замкнутый контур, теорема о циркуля-

ции для электростатического поля дает $\oint \vec{E} d\vec{r} = 0$

6.6. На рисунках приведены картины силовых линий для фрагментов некоторых электрических полей. Какой из приведенных фрагментов **может** соответствовать электростатическому полю (использовать теорему о циркуляции)?

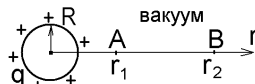


6.7. На рисунке показаны линии вектора \vec{D} электрической индукции электростатического поля. Каково соотношение между плотностью энергии w такого поля в точках А и В?



- а) $w_A > w_B$; б) $w_A = w_B$; в) $w_A < w_B$; г) недостаточно данных;

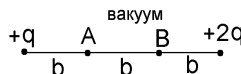
6.8. На металлический уединённый шар радиуса R поместили заряд q . Во сколько раз плотность энергии электростатического поля в точке В на расстоянии $r_2 = 3R$ от центра шара меньше плотности энергии поля в точке А на расстоянии $r_1 = 2R$ от центра шара?



- а) в 1,5 раза; б) в 2 раза; в) в 2,25 раз; г) в 4 раза; д) в 5,0625 раз;

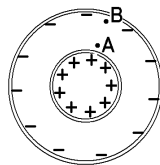
Решение. Вне шара напряженность поля $E = q / (4\pi\epsilon_0\epsilon r^2)$, а плотность энергии $w = \epsilon_0\epsilon E^2 / 2$. Поэтому $w_1/w_2 = r_2^4/r_1^4 = (3/2)^4 = 81/16$.

6.9. Электрическое поле создано двумя одинаковыми по знаку зарядами $+q$ и $+2q$. Каким будет соотношение между плотностью энергии w_A этого поля в точках А и В? Расстояния от заряда $+q$ до точки А, от точки А до точки В и от точки В до заряда $+2q$ одинаковы и равны b (см. рисунок).



- а) $w_A > w_B$; б) $w_A = w_B$; в) $w_A < w_B$; г) недостаточно данных;

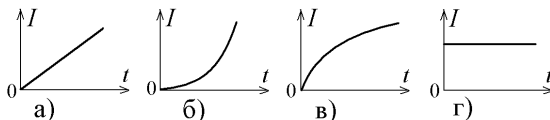
6.10. Две металлические тонкостенные сферы образуют заряженный воздушный сферический конденсатор (см. рисунок). Как соотносятся между собой плотности энергии w электрического поля в точках А и В внутри такого конденсатора?



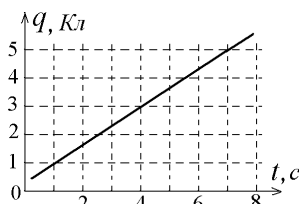
- а) $w_A > w_B$;
б) $w_A = w_B$; в) $w_A < w_B$; г) недостаточно данных;

3.7. Квазистационарный ток. Законы Ома и Джоуля-Ленца

7.1. Величина электрического заряда q , протекающего через поперечное сечение проводника, меняется со временем t по закону, изображённому на рис.1. Укажите зависимость от времени величины тока I , текущего по проводнику:



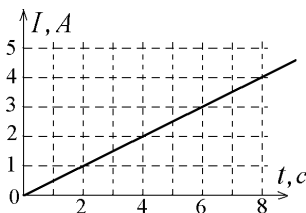
7.2. Величина электрического заряда, переносимого через поперечное сечение проводника, меняется со временем t по закону, изображённому на рисунке. Чему в момент времени $t = 4$ с равна величина тока I , текущего по проводнику?
а) 0,5 А; б) 0,667 А;
в) 0,75 А; г) 1,5 А; д) 1,667 А; е) 2 А;



Решение. Производная $I = \frac{dq}{dt} = 1,5$ А.

Это тангенс угла наклона прямой линии графика к оси t .

7.3. Величина электрического тока, текущего по проводнику, меняется со временем t по закону, изображённому на рисунке. Чему равна величина электрического заряда, протекшего через поперечное сечение проводника за интервал времени $0 \leq t \leq 6$ с?

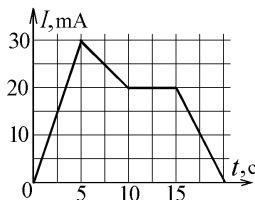


а) 0,5 Кл; б) 0,75 Кл; в) 9 Кл; г) 2 Кл;
д) 18 Кл; е) 16 Кл;

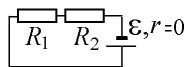
Решение. Интеграл $q = \int Idt = 9$ Кл будет равен площади треугольника под графиком тока

7.4*. На рисунке справа показана зависимость силы тока, протекающего в проводнике от времени. Заряд, протекший по проводнику за интервал времени $0 \leq t \leq 15$ с равен:

а) 200 мКл; б) 300 мКл;
в) 400 мКл; г) 150 мКл;

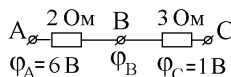


7.5*. Если значения сопротивлений R_1 и R_2 со схемы на рисунке увеличить вдвое, то разность потенциалов на концах сопротивления R_1 :



- а) увеличится в 4 раза; б) увеличится в 2 раза; в) не изменится;
г) уменьшится в 2 раза; д) уменьшится в 4 раза;

7.6. В замкнутой электрической цепи имеется участок, состоящий из двух резисторов, соединенных последовательно. В точках соединения резисторов А и С известны потенциалы φ_A и φ_C (см. рисунок).

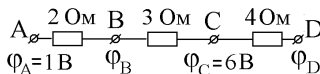


Укажите значение потенциала φ_B в точке В:

- а) 7,5 В; б) 0 В; в) 4 В; г) 3 В; д) 2 В;

Решение. Через сопротивления течет ток I . Его величина определяется из закона Ома: $I = \frac{6 \text{ В} - \varphi_B}{2 \text{ Ом}} = \frac{\varphi_B - 1 \text{ В}}{3 \text{ Ом}}$, откуда $\varphi_B = 4 \text{ В}$.

7.7. В замкнутой цепи имеется участок, состоящий из трех резисторов, соединенных последовательно. В точках



соединения резисторов А и С известны потенциалы φ_A и φ_C , приведенные на рисунке. Укажите значение разности потенциалов $\varphi_D - \varphi_B$ в точках D и В:

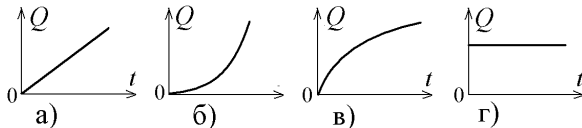
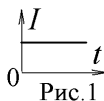
- а) 5 В; б) 7 В; в) -7 В; г) -5 В; д) 1 В; е) -5 В;

7.8*. По однородному проводу переменного сечения течет постоянный электрический ток I . Что можно сказать о соотношении между объемными плотностями



тепловой мощности P_A и P_B в точке А и в точке В? а) $P_A > P_B$; б) $P_A < P_B$; в) $P_A = P_B$;

7.9. Ток I , текущий по проводнику меняется со временем t по закону, изображенному на рис.1. По какому закону будет меняться со временем t величина джоулева тепла Q , выделяющегося в проводнике?



7.10. Величина джоулева тепла, выделившегося в проводнике с сопротивлением 3 Ом, возрастает со временем t по закону $Q = 4t^3$ (время t в этой формуле измеряется в секундах, а тепло Q – в джоулях). Чему в момент времени $t = 2$ с равна величина тока I , текущего по проводнику?

- а) 1 А; б) 2 А; в) 3 А; г) 4 А; д) 6 А; е) 12 А;

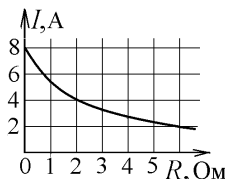
7.11. Реостат с общим сопротивлением $R_{\text{общ}} = 2$ Ом подключен к источнику тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Движок реостата перемещают влево (см. рисунок). Максимальная тепловая мощность будет выделяться в реостате при ... а) крайнем правом положении движка; б) среднем положении движка; в) крайнем левом положении движка; г) при любом положении движка;



Решение. Ток, текущий по цепи $I = \mathcal{E} / (R + r)$, а выделяемая на сопротивлении R мощность $P = I^2 R = \mathcal{E}^2 R / (R + r)^2$. При перемещении движка реостата меняется величина R . Условие максимума – равенство нулю производной $\frac{dP}{dR} \sim \frac{d}{dR} \frac{R}{(R + r)^2} = \frac{(R + r) - 2R}{(R + r)^3} = 0$. Т.е. $P = \max$ при $R = r = 1$ Ом $= R_{\text{общ}} / 2$. Движок должен находиться в среднем положении.

7.12*. К источнику тока с внутренним сопротивлением 2 Ом подключили реостат. На графике дана зависимость силы тока в реостате от его сопротивления. Максимальная тепловая мощность, которая выделяется в реостате, равна:

- а) 20 Вт; б) 50 Вт; в) 36 Вт; г) 32 Вт;



7.13*. По двум однородным цилиндрам одинакового сечения, но разной длины, изготовленным из одинакового материала, течет постоянный ток. Каким будет соотношение между величинами напряженностей электрического поля в цилиндре А и в цилиндре В? а) $E_A < E_B$; б) $E_A = E_B$; в) $E_A > E_B$; г) для ответа надо знать соотношение между длиной и площадью цилиндра;



7.14*. Два однородных сплошных цилиндра А и В из одинакового материала подключены параллельно к источнику постоянного напряжения U . Что можно сказать о соотношении между величинами напряженностей электрического поля в этих цилиндрах?



а) $E_A = E_B$; б) $E_A < E_B$; в) $E_A > E_B$;
г) для ответа надо знать точное соотношение между длиной и площадью цилиндра;

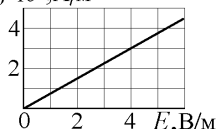
Решение. Величину E можно найти из закона Ома в локальной форме, выражая плотность тока j через ток I : $E = j/\sigma = j\rho = \rho I/S$. Величина тока следует из закона Ома: $I = U/R$, где $R = \rho l/S$. Отсюда $I/S = U/\rho l$. После подстановки находим $E = U/l$. Результат не зависит от площади поперечного сечения S цилиндра, а зависит от его длины l , которая заметно больше у цилиндра А. Поэтому $E_A < E_B$.

Этот же результат можно было сразу получить из связи напряженности с разностью потенциалов на краях цилиндра: $\Delta\varphi = U = \int E dl = El$. Как видим, для ответа можно использовать материал разных разделов физики.

7.15*. Дан график зависимости плотности тока в проводнике от напряженности электрического поля. Удельное сопротивление проводника в единицах $\text{Ом} \cdot \text{м}$

равно: а) $0,75 \cdot 10^{-8}$;

б) $3 \cdot 10^{-8}$; в) $1,33 \cdot 10^{-8}$; г) $1,5 \cdot 10^{-8}$;



7.16*. Удельное сопротивление проводника $\rho = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, концентрация электронов проводимости в нем $n = 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, величина заряда электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. При напряженности электрического поля $E = 3,2 \text{ В/м}$ скорость упорядоченного движения (дрейфа) электронов в проводнике (в мм/с) равна:

а) 1; б) 0,25; в) 0,5; г) 2;

Решение. Плотность тока связана с дрейфовой скоростью \vec{u} : $\vec{j} = -en\vec{u}$. Закон Ома в локальной форме дает $\vec{j} = \vec{E}/\rho$, откуда $u = E/(\rho en) = 2 \text{ мм/с}$.

7.17. Вдоль цилиндрического провода радиуса r , участок которого длины L имеет сопротивление R , действует стороннее электрическое поле с напряжённостью E . Чему равна плотность тока, вызванного этим полем?

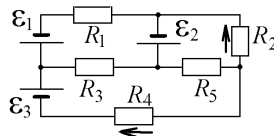
а) $j = \frac{\pi r^2 RE}{L}$; б) $j = \frac{\pi r^2 E}{RL}$; в) $j = \frac{EL}{\pi r^2 R}$; г) $j = \frac{\pi r^2 R}{EL}$; д) $j = \frac{LR}{\pi r^2 E}$;

3.8. Разветвленные электрические цепи. Правила Кирхгофа



Чтобы ответить на тестовое задание, связанное с использованием правил Кирхгофа в разветвленной цепи, перерисуйте приведенную схему, не ошибаясь в заданных направлениях ЭДС и токов. Расставьте на ней все приведенные в условии числовые данные. После этого найдите замкнутый контур, в котором известны величины всех элементов, кроме того, который надо определить. Не ошибаясь в знаках, запишите уравнение 2-го правила Кирхгофа для этого контура и найдите из него требуемую величину.

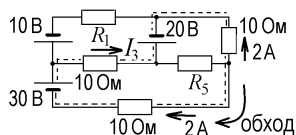
8.1. В электрической схеме, показанной на рисунке, $R_2 = R_3 = R_4 = 10 \text{ Ом}$, $\varepsilon_1 = 10 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 20 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 30 \text{ В}$. Внутренние сопротивления источников тока равны нулю. Определите направление и силу тока, протекающего через резистор R_3 , если через резистор R_4 протекает ток 2 А справа налево, а через резистор R_2 протекает ток 2 А снизу вверх.



- а) 1 А , налево; б) 1 А , направо; в) $0,5 \text{ А}$, направо; г) $0,5 \text{ А}$, налево;
д) $1,5 \text{ А}$, направо; е) $1,5 \text{ А}$, налево; ж) ток равен нулю;

Решение.

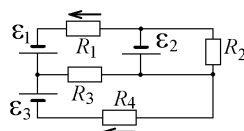
Обозначив на схеме величины всех известных из условия элементов цепи, видим, что в контуре, выделенном на рисунке пунктиром, не определен только ток I_3 , протекающий через сопротивление R_3 .



Указывая его направление стрелкой и выбирая направление обхода по часовой стрелке, запишем 2-е правило Кирхгофа: $I_3 R_3 - I_2 R_2 + I_4 R_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, или, подставляя числа, $I_3 \cdot 10 - 2 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 30 - 20$, откуда $I_3 = +1 \text{ А}$. Знак “+” показывает, что направление тока I_3 выбрано верно, он течет направо.

8.2. В электрической схеме, показанной на рисунке, $R_1 = R_4 = 10 \text{ Ом}$, $\varepsilon_1 = 70 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 50 \text{ В}$.

Внутренние сопротивления источников тока равны нулю. Найдите подходящий замкнутый контур цепи и определите величину ЭДС ε_2 ,

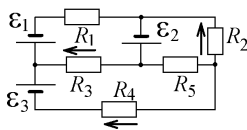


если через резистор R_4 протекает ток 2 А справа налево, а через резистор R_1 протекает ток 1 А тоже справа налево.

- а) 90 В; б) 100 В; в) 45 В; г) 60 В; д) 120 В; е) 30 В;

8.3. В электрической схеме, показанной на рисунке, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_4 = 5 \text{ Ом}$, $\varepsilon_2 = 25 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 10 \text{ В}$.

Внутренние сопротивления источников тока равны нулю. Определите величину сопротивления резистора R_3 , если через него протекает ток 0,5 А справа налево, через резистор R_4 протекает ток 1 А также справа налево, а через резистор R_2 течет ток 3 А снизу вверх.



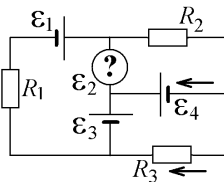
- а) 5 Ом; б) 2 Ом; в) 4 Ом; г) 10 Ом; д) 6 Ом; е) 3 Ом;








Если нет контура, в котором величина, которую Вы хотите найти, остается единственной неизвестной, то найдите узел, в котором один из токов не известен, или контур, для которого можно определить одно из не заданных величин R или ε . Знание их величины поможет найти ответ.

8.4. В электрической схеме, показанной на рисунке, $R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$, $\varepsilon_3 = 20 \text{ В}$, $\varepsilon_4 = 15 \text{ В}$.

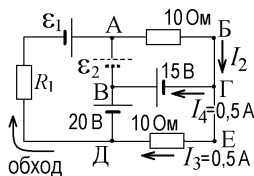
Внутренние сопротивления источников тока равны нулю. Какова величина ЭДС источника тока ε_2 и его расположение в цепи, если через резистор R_3 протекает ток 0,5 А справа налево, а через источник тока ε_4 также справа налево течет ток 0,5 А?



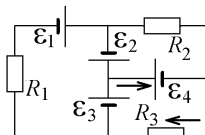
- а) , 10 В; б) , 10 В; в) , 5 В; г) , 5 В; д) , 15 В;

Решение. В контуре АБЕД имеется две неизвестные величины – ЭДС ε_2 и ток I_2 , который можно найти, записав 1-е правило Кирхгофа для узла Г: $I_2 = I_3 + I_4 = 1 \text{ А}$. Тогда, выбрав направление ε_2 , как

показано на рисунке, записываем 2-е правило Кирхгофа для контура АБГЕДВ (обход – по часовой стрелке): $I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$. Подстановка числовых данных в системе СИ дает $\mathcal{E}_2 = 10 \cdot 1 + 10 \cdot 0,5 - 20 = -5$ В. Знак “–” означает, что направление \mathcal{E}_2 было выбрано неверно и правильный ответ – (г).

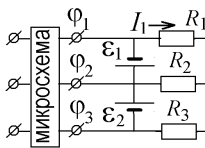


8.5. В электрической схеме, показанной на рисунке, $R_3 = 10$ Ом, $\mathcal{E}_2 = 25$ В, $\mathcal{E}_3 = 20$ В. Внутренние сопротивления источников тока равны нулю. Чему равно сопротивление резистора R_2 , если через резистор R_3 протекает ток 0,5 А справа налево, а через источник тока \mathcal{E}_4 слева направо течет ток 1 А?



- а) 25 Ом; б) 20 Ом; в) 15 Ом; г) 10 Ом; д) 5 Ом;

8.6. На рисунке показана часть электрической схемы, для которой известны некоторые параметры. $R_1 = 4$ Ом, $R_3 = 1$ Ом. Оба источника тока имеют одинаковые внутренние сопротивления. Потенциалы $\varphi_1 = 3$ В, $\varphi_3 = 7$ В. Сила тока через сопротивление R_1 равна $I_1 = 1$ А. Чему равна сила тока через сопротивление R_3 ?



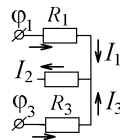
- а) 0,8 А; б) 8 А; в) 0 А;
г) нельзя рассчитать, т.к. не хватает данных;

Решение.

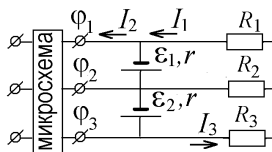


Старайтесь выделить только ту часть условий, которая приведет Вас к ответу.

Заданная разность потенциалов $U = \varphi_3 - \varphi_1$ – это падение напряжения на показанном справа участке цепи, где стрелками обозначены токи, текущие по сопротивлениям R_1 и R_3 . С учетом их направлений $\varphi_3 - \varphi_1 = I_3 R_3 - I_1 R_1$, откуда $I_3 = 8$ А.



8.7. Гоказана часть электрической схемы, для которой известны следующие параметры: $R_1 = 4$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $\mathcal{E}_1 = 3$ В. Внутренние сопротивления источников тока

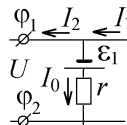


$r = 1 \text{ Ом}$ одинаковы. Направление текущих по проводникам токов заны стрелками, и они равны $I_1 = 1 \text{ А}$, $I_2 = 2 \text{ А}$, $I_3 = 0,5 \text{ А}$. Чему равна величина разности потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$?

- а) $0,8 \text{ А}$; б) 8 А ; в) 0 А ; г) нельзя рассчитать, т.к. не хватает данных;

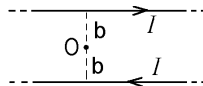
Решение.

$U_1 = \varphi_2 - \varphi_1$ - это падение напряжения на клеммах источника тока \mathcal{E}_1 , равное $\mathcal{E}_1 - I_0 r$. На выделенном справа фрагменте схемы видно, что текущий через источник \mathcal{E}_1 ток $I_0 = I_1 - I_2 = -1 \text{ А}$. Его направление противоположно указанному, и он будет не разряжать, а заряжать батарею \mathcal{E}_1 . Поэтому падение напряжения $\varphi_2 - \varphi_1 = U_1 = 3 - 1 \cdot (-1) = 4 \text{ В}$ больше величины ЭДС \mathcal{E}_1 .



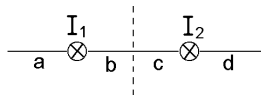
3.9. Расчет магнитных полей. Теорема Био-Савара-Лапласа

9.1. По двум параллельным прямым бесконечным проводникам текут токи одинаковой величины так, как показано на рисунке. В точке O на одинаковом расстоянии b от обоих проводников эти токи создают магнитное поле с напряжённостью H . Чему равна величина каждого из токов?

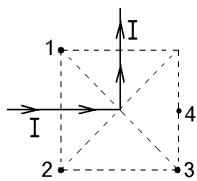


- а) $I = bH$; б) $I = 2bH$; в) $I = 2\pi bH$; г) $I = \pi bH$; д) $I = 2\pi bH$; е) определить нельзя, так как в этой точке $H = 0$;

9.2*. На рисунке изображены сечения двух параллельных прямолинейных длинных проводников с однонаправленными токами, причем $I_1 = 2I_2$. На каком участке находится точка, в которой индукция магнитного поля этих токов равна нулю? а) a ; б) b ; в) c ; г) d ;

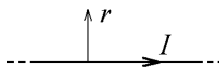


9.3. Длинный проводник с током I согнут под прямым углом (см. рисунок). Индукция \vec{B} магнитного поля, созданного этим током, имеет наибольшую величину в следующей из точек, указанных на рисунке:



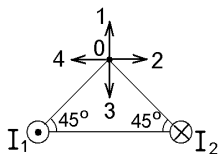
- а) в точке 1; б) в точке 2; в) в точке 3; г) в точке 4;

9.4. На расстоянии $r_1 = 6 \text{ м}$ от бесконечного прямого проводника с током I величина индукции магнитного поля, созданного током, равна $B_1 = 3 \text{ мкТл}$. На каком расстоянии от проводника величина индукции



равна $B_2 = 4$ мкТл?

- а) 0,5 м; б) 2 м; в) 4,5 м; г) 16 м; д) 24 м;



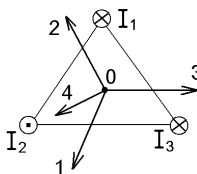
9.5. Два параллельных прямолинейных длинных проводника с текущими в противоположные стороны токами одинаковой величины $|I_1| = |I_2|$ направлены перпендикулярно к плоскости

рисунка. Индукция \vec{B} магнитного поля этих токов в точке О имеет направление: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;

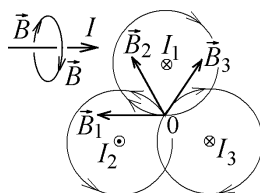
9.6. На рисунке изображены сечения трех параллельных прямолинейных длинных проводников с разнонаправленными токами одинаковой величины $|I_1| = |I_2| = |I_3|$. Расстояния между проводниками

одинаковы, и в точке О, равноудаленной от всех проводников, каждый из токов создает магнитное поле, величина индукции которого равна B . Вектор индукции суммарного магнитного поля всех токов в точке О имеет направление:

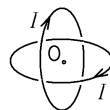
- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;



Решение. Круговые линии \vec{B} охватывают прямолинейные токи. Как видно из рисунка справа, эти линии направлены по часовой стрелке для токов I_1 , I_3 , и против часовой стрелки для тока I_2 . В центре треугольника О на одинаковом расстоянии от токов векторы индукции имеют одинаковую величину и направлены по касательным к окружностям. Видно, что их сумма будет направлена вдоль вектора \vec{B}_2 , созданного током I_2 . Ответ – (б).

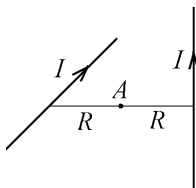


9.7. По двум круговым взаимно перпендикулярным виткам одинакового радиуса R текут одинаковые по величине токи I (см.рисунок). В их общем центре О токи создают магнитное поле с индукцией B . Чему равна величина радиуса R ?



- а) $R = \frac{\mu_0 I}{B}$; б) $R = \sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{2B}$; в) $R = \frac{\mu_0 I}{2B}$; г) $R = \sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{B}$; д) $R = 2 \frac{\mu_0 I}{B}$;

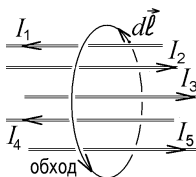
9.8. Два бесконечных прямых проводника взаимно перпендикулярны. По проводникам текут токи одинаковой величины. Наименьшее расстояние между проводниками равно $2R$ (см. рисунок). В точке А посередине этого отрезка токи создают магнитное поле с напряжённостью H . Чему равна величина каждого из токов?



- а) $I = \pi RH$; б) $I = \sqrt{2}\pi RH$; в) $I = 2\pi RH$; г) $I = \pi RH/2$;

3.10. Теорема о циркуляции для магнитного поля

10.1. На рисунке показано направление обхода замкнутого контура и направление токов I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 , текущих по проводникам. Чему равна циркуляция вектора индукции магнитного поля по этому контуру, делённая на магнитную постоянную $\oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0$?



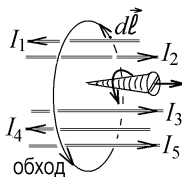
- а) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$; б) $-I_1 - I_2 - I_3 - I_4 - I_5$; в) $-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_5$; г) $I_1 - I_2 - I_3 + I_4 - I_5$;

Решение. Величина $\oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0$ равна алгебраической сумме токов, охватываемых замкнутым контуром.



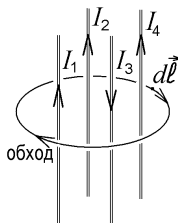
Чтобы определить знак тока в этой сумме, поставьте перпендикулярно плоскости контура винт и вращайте его по направлению обхода. Те токи, направление которых совпадает с направлением поступательного движения винта, войдут в сумму со знаком "+". Токи, направленные противоположно движению винта имеют знак "-".

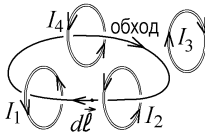
Как видно из рисунка справа, винт при вращении движется направо. В эту сторону направлены токи I_2, I_3 и I_5 . Поэтому $\oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0 = -I_1 + I_2 + I_3 - I_4 + I_5$.



10.2. Замкнутый контур охватывает проводники с токами I_1, I_2, I_3 и I_4 . Направление обхода контура и направления токов показаны на рисунке справа. Чему равна циркуляция вектора индукции магнитного поля по этому контуру, делённая на магнитную постоянную $\oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0$:

- а) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$; б) $-I_1 - I_2 - I_3 - I_4$;
в) $I_1 + I_2 - I_3 + I_4$; г) $-I_1 - I_2 + I_3 - I_4$;

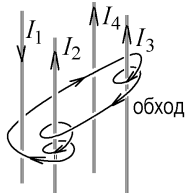




10.3. Имеется замкнутый контур и проводники с токами I_1 , I_2 , I_3 и I_4 . Направление обхода контура и направления токов показаны на рисунке слева. Чему равна циркуляция вектора индукции магнитного поля по этому контуру, делённая на магнитную постоянную $\oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0$?

- а) $I_1 - I_2 + I_4$; б) $-I_1 + I_2 - I_4$; в) $I_1 + I_2 - I_4$;
 г) $-I_1 - I_2 + I_4$; д) $I_1 + I_2 + I_3 - I_4$; е) $I_1 + I_2 - I_3 - I_4$;

10.4. Замкнутый контур может охватывать прямые проводники с токами I_1 , I_2 , I_3 и I_4 . Такой контур, направление его обхода и направления токов указаны на рисунке. Чему равна циркуляция вектора индукции магнитного поля по этому контуру, делённая на магнитную постоянную $\oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0$?



- а) $I_1 - I_2 - I_3 - I_4$; б) $-I_1 + I_2 + I_3 + I_4$; в) $I_1 - 3I_2 - 2I_3 - I_4$;
 г) $-I_1 + 3I_2 + 2I_3 + I_4$; д) $I_1 - 3I_2 - 2I_3$;

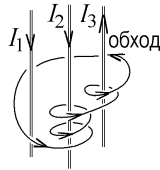
Решение.



Внимательно следите по рисунку, сколько раз контур охватывает ток. Столько же раз этот ток войдет в алгебраическую сумму.

Из рисунка видно, что контур охватывает ток I_1 один раз, ток I_2 - три раза, ток I_3 - два раза, а ток I_4 не охватывает совсем, так как проходит перед ним. Винт, вращаемый по направлению обхода, будет двигаться вниз. Поэтому $\oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0 = I_1 - 3I_2 - 2I_3$.

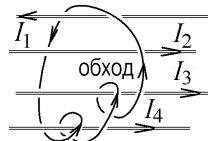
10.5. Замкнутый контур охватывает прямые проводники с токами I_1 , I_2 и I_3 . Направление обхода контура и направления токов указаны на рисунке. Чему равна циркуляция вектора индукции магнитного поля по этому контуру, делённая на магнитную постоянную $\oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0$:



- а) $I_1 + I_2 - I_3$; б) $-I_1 - I_2 + I_3$;
 в) $I_1 + 3I_2 - 2I_3$; г) $-I_1 - 3I_2 + 2I_3$; д) $I_1 + 3I_2 - I_3$;

10.6. Чему равна циркуляция вектора индукции магнитного поля по замкнутому контуру, делённая на магнитную постоянную $\oint \vec{B} d\vec{l} / \mu_0$?

Направление обхода контура и охватываемые им



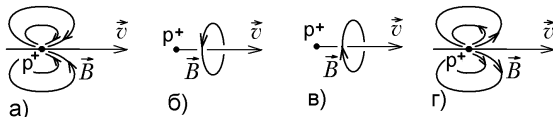
токи I_1, I_2, I_3 и I_4 показаны на рисунке.

- а) $I_1 - I_2 - I_3 - I_4$; б) $-I_1 + I_2 + I_3 + I_4$; в) $I_1 - I_2 - 2I_3 - 2I_4$; г) $-I_1 + I_2 + 2I_3 + 2I_4$;

3.11. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле.

Магнитное поле движущейся заряженной частицы

11.1. Протон движется вдоль прямой линии со скоростью v . Укажите правильный вид линии индукции магнитного поля, которое создаётся при его движении:



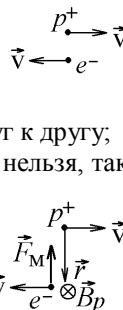
11.2*. В некоторый момент времени электрон движется параллельно бесконечному прямому проводнику с током I . Выберите правильные утверждения: а) нормальное ускорение электрона постоянно; б) в указанном положении на электрон действует сила Лоренца, направленная вправо; в) в точке нахождения электрона вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости рисунка “от нас”; г) кинетическая энергия электрона остается постоянной; д) траектория движения электрона – окружность;

Замечание. Правильные ответы – б), в). В тестах ФЕПО предусмотрено “школьное” представление о том, что в постоянном магнитном поле величина скорости электрона не меняется. В действительности, двигаясь с ускорением, он быстро теряет энергию за счет магнитно-тормозного излучения. Поэтому ответы а) и г), вообще говоря, неверны, хотя их тоже считают правильными.

11.3. Электрон и протон движутся на небольшом расстоянии друг от друга параллельно в разные стороны. Что можно сказать о направлении магнитной силы между ними?

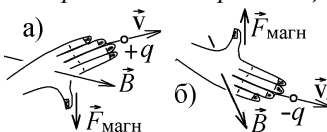
- а) эта сила равна нулю; б) она притягивает частицы друг к другу; в) она отталкивает частицы друг от друга; г) дать ответ нельзя, так как не задана величина расстояния между электронами;

Решение. На расстоянии \vec{r} , вблизи электрона, протон создает магнитное поле с индукцией $\vec{B}_p = \frac{\mu_0 q [\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi r^3}$, направление которой показано на рисунке справа. Действующая на электрон магнитная составляющая силы Лоренца $\vec{F}_M = -e[\vec{v}, \vec{B}_p]$ будет притягивать его к протону.

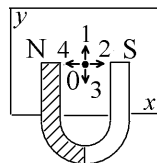




Определить направление силы Лоренца $\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}]$, действующей на частицу с положительным зарядом удобнее с помощью “правила левой руки”: если направить четыре пальца по первому вектору \vec{v} , а второй вектор \vec{B} входит в ладонь, то большой палец показывает направление силы \vec{F}_M . Для частицы с отрицательным зарядом используйте “правило правой руки”.

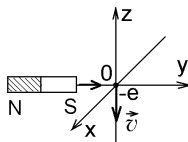


11.4. Светящееся пятно, образованное сфокусированным лучом на экране xu осциллографа, находилось в точке 0. К пятну, как показано на рисунке, подносят подковообразный магнит. Укажите, в какую сторону сместится светящееся пятно:



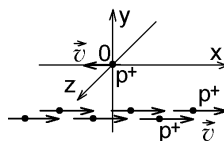
а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;

11.5. Пучок электронов движется со скоростью v против оси z . К этому пучку подносят вдоль оси y постоянный магнит (см. рисунок). Куда будут смещаться в результате взаимодействия с полем магнита электроны, пролетающие через начало координат O :



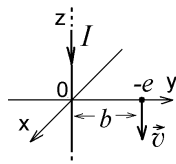
а) вдоль оси x ; б) против оси x ; в) вдоль оси y ;
г) против оси y ; д) вдоль оси z ; е) против оси z ;

11.6. Однородный пучок протонов, летящих со скоростью v в направлении оси x , находится в плоскости xu . В какую сторону этот пучок будет отклонять протон, движущийся против оси x и находящийся в начале координат O (см. рисунок)?



а) вдоль оси y ; б) против оси y ; в) вдоль оси z ; г) против оси z ;

Решение. Пучок положительно заряженных протонов создает ток I , направленный вдоль их скорости \vec{v} . Индукция \vec{B} магнитного поля этого тока в точке O направлена вдоль оси z , а сила Лоренца $\vec{F}_M = +q[\vec{v}, \vec{B}]$, действующая на протон в точке O , отклоняет его вверх, вдоль оси y .



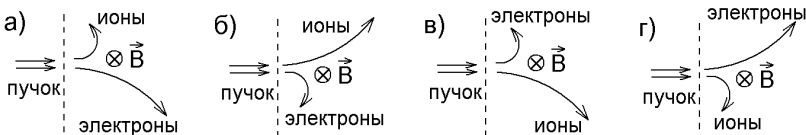
11.7. Ток I в прямом проводнике течёт против оси z . Электрон с зарядом $-e$, находится на оси y на расстоянии b от начала координат O и движется со

скоростью v в том же направлении. Найти проекцию на ось y ной силы, действующей на электрон со стороны тока?

а) $F_y = \frac{\mu_0 e I v}{2b}$; б) $F_y = -\frac{\mu_0 e I v}{2b}$; в) $F_y = \frac{\mu_0 e I v}{2\pi b}$; г) $F_y = -\frac{\mu_0 e I v}{2\pi b}$;

д) $F_y = 0$;

11.8. Смешанный пучок электронов и положительно заряженных ионов водорода, движущихся в плоскости рисунка с одинаковой скоростью, влетает в перпендикулярное магнитное поле, индукция которого направлена за плоскость рисунка. Выберите правильный рисунок траекторий движения частиц в этом поле:

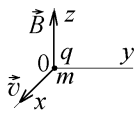


11.9. В циклотроне и положительные, и отрицательные ионы вращаются в перпендикулярном магнитном поле \vec{B} по круговым траекториям одинакового радиуса. Величины заряда ионов одинаковы. Чему равно отношение массы положительного иона к массе отрицательного иона, если величина скорости положительного иона в 4 раза меньше величины скорости отрицательного иона?

а) 16; б) 4; в) 0,0625; г) 0,25; д) нет правильного ответа;

11.10. Линии индукции однородного магнитного поля направлены вдоль оси z . Частица с удельным зарядом q/m в начальный момент вылетает из начала координат 0 со скоростью v , направленной вдоль оси x , а затем в первый раз возвращается в точку 0 спустя время Δt . Какая формула при этом правильно задаёт величину индукции B магнитного поля?

а) $B = \frac{q\Delta t}{2m}$; б) $B = \frac{2q\Delta t}{m}$; в) $B = \frac{\pi m}{2q\Delta t}$; г) $B = \frac{\pi m}{q\Delta t}$; д) $B = \frac{2\pi m}{q\Delta t}$;

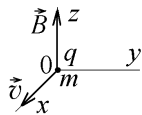


Решение. Частица, скорость которой $\vec{v} \perp \vec{B}$, вращается по круго-

вой траектории и вернется в точку 0 через период $T = \frac{2\pi m}{qB} = \Delta t$. От-

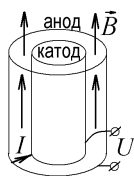
вет – (д).

11.11. Линии индукции \vec{B} однородного магнитного поля направлены вдоль оси z . Частица с удельным зарядом q/m в начальный момент вылетает из начала коор-



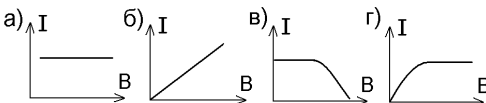
динат 0 со скоростью v , направленной вдоль оси x . Какая формула правильно задаёт величину Δr максимального удаления частицы от точки 0?

- а) $\Delta r = \frac{qv}{2mB}$; б) $\Delta r = \frac{qv}{mB}$; в) $\Delta r = \frac{2qv}{mB}$; г) $\Delta r = \frac{mv}{2qB}$; д) $\Delta r = \frac{2mv}{qB}$;



11-12. В пространстве между коаксиальными длинными цилиндрическими катодом и анодом создано однородное магнитное поле \vec{B} , параллельное их оси. Между анодом и катодом приложено прямое напряжение U , приводящее к появлению анодного тока I в цепи.

Укажите правильный график зависимости этого тока от величины магнитного поля B :



Решение. Вспомните результаты выполнения лабораторной работы №25. С увеличением индукции B растет величина силы Лоренца $\vec{F} = -e[\vec{v}, \vec{B}]$, отклоняющая летящие с катода на анод электроны, и при достижении критической величины B они перестают попадать на анод. Ответ – (в).

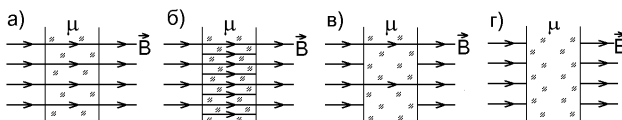


3.12. Магнитное поле в магнетиках

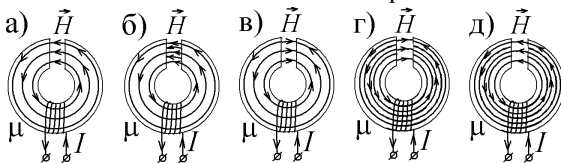
12.1*. \vec{B} – вектор индукции магнитного поля в веществе. \vec{H} – напряженность внешнего магнитного поля. Вещество является однородным, изотропным парамагнетиком, если магнитная восприимчивость ...

- а) $\ll 1$ и $\vec{B} \uparrow \downarrow \vec{H}$; б) $\ll 1$ и $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{H}$;
в) $\gg 1$ и $\vec{B} \uparrow \downarrow \vec{H}$; д) $\gg 1$ и $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{H}$;

12.2. Плоский слой магнетика с магнитной проницаемостью $\mu > 1$ расположен в вакууме перпендикулярно к линиям индукции \vec{B} внешнего однородного постоянного магнитного поля. Выберите правильную картину линий \vec{B} магнитного поля внутри магнетика:



12.3. Записывающая головка магнитофона имеет вид тороидального сердечника из материала с магнитной проницаемостью $\mu > 1$, в которой сделана прорезь. Ток I , текущий по обмотке, навитой на сердечник, создает в нем магнитное поле с линиями напряженности \vec{H} . Укажите рисунок с правильной картиной линий \vec{H} :



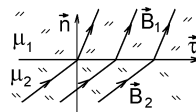
Решение.

Линии индукции \vec{B} всегда замкнуты, и величина B одинакова в прорези и в сердечнике. Так как $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, то $\mu \cdot H_{\text{в сердечнике}} = 1 \cdot H_{\text{в прорези}}$. В прорези напряженность магнитного поля в μ раз больше, чем в сердечнике. Правильная картина – (б).

12.4. Укажите рисунок с правильным направлением линий вектора намагниченности \vec{J} для постоянного магнита, находящегося в вакууме:

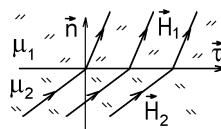


12.5. На рисунке показаны линии вектора магнитной индукции \vec{B} на плоской границе двух однородных магнетиков с магнитными проницаемостями $\mu_1 = 3$ и $\mu_2 = 2$. Проекция \vec{B} на нормальное к границе направление с разных сторон от границы равны B_{1n} и B_{2n} . Токи проводимости на границе сред отсутствуют. Чему равна величина B_{1n} , если $B_{2n} = 6$ Тл?



а) 1 Тл; б) 1,5 Тл; в) 4 Тл; г) 6 Тл; д) 9 Тл; е) другой ответ;

12.6. На рисунке показаны линии вектора напряженности \vec{H} магнитного поля на плоской границе двух однородных магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Проекция этого вектора на нормальное направление \vec{n} к границе с разных сторон от границы равны $H_{1n} = 6$ А/м и $H_{2n} = 4$ А/м. Токи проводимости на границе сред отсутствуют. Чему равна величина μ_1 , если $\mu_2 = 2$?

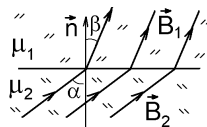


а) 1; б) 1,33; в) 1,5; г) 3; д) 12; е) другой ответ;

Решение. В отсутствии поверхностных токов проводимости на границе двух магнетиков сохраняются нормальные составляющие индукции: $B_{1n} = \mu_0 \mu_1 H_{1n} = B_{2n} = \mu_0 \mu_2 H_{2n}$.

Отсюда $\mu_1 = \mu_2 H_{2n} / H_{1n} = 1,33$.

12.7. На рисунке показаны линии вектора индукции \vec{B} магнитного поля на плоской границе двух однородных магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Эти линии образуют углы α и β с нормалью к границе. Выберите правильное утверждение:



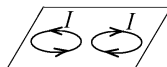
- а) $\mu_1 \cos \alpha = \mu_2 \cos \beta$; б) $\mu_2 \cos \alpha = \mu_1 \cos \beta$;
в) $\mu_1 \operatorname{tg} \alpha = \mu_2 \operatorname{tg} \beta$; г) $\mu_2 \operatorname{tg} \alpha = \mu_1 \operatorname{tg} \beta$;

3.13. Проводник с током в магнитном поле. Сила Ампера

13.1. По двум параллельным длинным прямым проводам в разные стороны текут токи I_1 и I_2 . Под действием магнитных сил эти провода:

- а) притягиваются; б) отталкиваются;
в) результат зависит от величины токов и расстояния между ними;

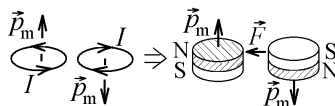
13.2. На гладкой горизонтальной поверхности лежат два одинаковых круговых витка с одинаковыми по величине, но направленными в противоположные стороны токами. Как будут вести себя под действием магнитных сил эти витки? Они:



- а) притягиваются; б) отталкиваются;

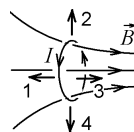
в) не взаимодействуют друг с другом;

Решение. Круговые токи являются магнитными диполями с величиной магнитного момента $p_m = IS$. Замените их эквивалентными постоянными магнитами с теми же по величине и направлению моментами \vec{p}_m .



Как и витки с токами, такие магниты будут притягиваться друг к другу.

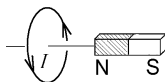
13.3. Линии неоднородного магнитного поля с индукцией \vec{B} симметричны относительно кругового витка с током I и пересекают его плоскость, как показано на рисунке. В каком направлении действует на виток магнитная сила?



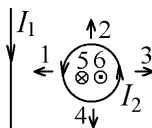
- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;
д) величина магнитной силы, равна нулю;

Решение. Укажите на рисунке правильное направление векторного произведения для силы Ампера $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$, действующей на каждый элемент тока, и Вы увидите, что сумма этих сил направлена направо.

13.4. По закреплённому витку течёт ток I . Постоянный магнит неподвижен относительно витка с током, а его ось совпадает с осью витка. Укажите направление силы, с которой текущий по витку ток действует на магнит:
 а) она притягивает магнит к витку с током; б) она отталкивает магнит от витка с током; в) она стремится сместить магнит вбок; г) она равна нулю, так как виток и магнит неподвижны;

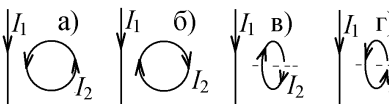


13.5. На гладкой горизонтальной плоскости закреплён прямой бесконечный провод с током I_1 , а рядом лежит круговой виток с током I_2 . В какую сторону направлена магнитная сила, старающаяся сместить виток с током?
 а) 1; б) 2; в) 3; г) 4;

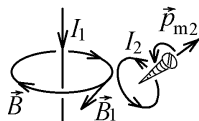


д) 5 (за рисунок); е) 6 (из рисунка наружу);

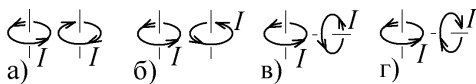
13.6. Рядом с бесконечным прямым проводником с током I_1 расположен круговой виток с током I_2 . Укажите правильное положение витка с током, в которое он будет поворачиваться под действием магнитных сил:



Решение. На рисунке справа показано, как линии индукции \vec{B}_1 магнитного поля тока I_1 охватывают этот ток. В этом поле магнитный момент \vec{p}_{m2} второго кругового тока I_2 , направление которого определяется по правилу винта, вращаемого “по току”, имеет энергию $W = -\vec{p}_{m2} \cdot \vec{B}_1 = -p_{m2}B_1 \cos \alpha$, где α – угол между векторами \vec{p}_{m2} и \vec{B}_1 . Момент сил поворачивает виток с током до тех пор, пока его энергия W не станет минимальной и равной $W = -p_{m2}B_1 \cdot 1$ при $\alpha = 0$, что соответствует рисунку (а).



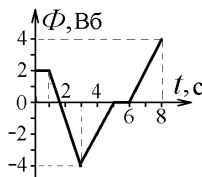
13.7. По двум близко расположенным виткам текут одинаковые по величине токи. При какой ориентации витков величина энергии их магнитно-



го взаимодействия будет наибольшей (центры витков во всех четырех случаях находятся на одинаковом расстоянии):

3.14. Явление электромагнитной индукции

14.1. На рисунке показана зависимость магнитного потока, пронизывающего некоторый замкнутый проводящий контур, от времени. Чему равно отношение $\varepsilon(t_1)/\varepsilon(t_2)$ величин (модулей) ЭДС электромагнитной индукции в контуре в моменты времени $t_1=2$ с и $t_2=7$ с?

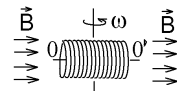


- а) 0,33; б) 0,5; в) 1; г) 1,5; д) 2;

Решение. Для линейных зависимостей $\varepsilon = |\Delta\Phi / \Delta t|$. Из графика видно,

$$\text{что } \varepsilon(t_1) = \left| \frac{-4 \text{ Вб} - 2 \text{ Вб}}{3 \text{ с} - 1 \text{ с}} \right| = 3 \text{ В}, \quad \varepsilon(t_2) = \left| \frac{4 \text{ Вб} - 0 \text{ Вб}}{8 \text{ с} - 6 \text{ с}} \right| = 2 \text{ В}, \quad \frac{\varepsilon(t_1)}{\varepsilon(t_2)} = 1,5.$$

14.2. Короткозамкнутая катушка из N витков, имеющая сопротивление R , вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к направлению линий индукции \vec{B} однородного постоянного магнитного поля. При каком условии величина индукционного тока, возникающего в катушке, равна нулю?



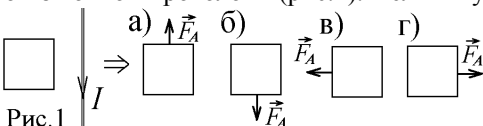
- а) ось катушки $00'$ параллельна вектору \vec{B} ;
б) ось катушки $00'$ перпендикулярна вектору \vec{B} ;
в) при указанных условиях индукционный ток всегда отличен от нуля;

Решение. Индукционный ток определяется величиной ЭДС ин-

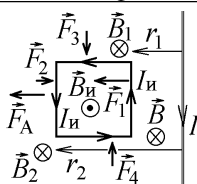
$$\text{дукции: } I = \frac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} (BSN \cos \alpha), \text{ где } \alpha = \omega t - \text{угол между}$$

дугу осью катушки и вектором \vec{B} . Взяв производную, находим $I \sim \sin \alpha$, т.е. $I = 0$ при $\alpha = 0$ - ответ (а).

14.3. Прямолинейный ток I параллелен стороне квадратного проводящего контура, сделанного из тонкой проволоки (рис.1). Величину тока I медленно увеличивают. Указать направление действующей на контур результирующей силы Ампера \vec{F}_A ?

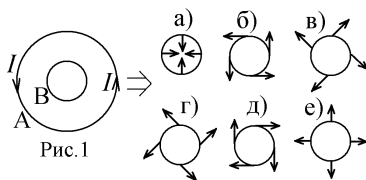


Решение. Направление индукции \vec{B} магнитного поля тока I показано на рисунке справа. С увеличением I растет магнитный поток через площадь контура. В нем возникает индукционный ток $I_{\text{и}}$, обтекающий контур против часовой стрелки и создающий магнитное поле с противоположно направленным вектором индукции $B_{\text{и}}$, компенсирующим увеличение индукции \vec{B} . На индукционный ток, текущий по сторонам квадрата действуют силы Ампера $\vec{F} = I_{\text{и}} [\vec{l}, \vec{B}]$, направления которых указаны на рисунке. Так как $B = \mu_0 I / (2\pi r)$, и $r_1 < r_2$, то $B_1 > B_2$. На ближнюю сторону квадрата действует большая сила \vec{F}_1 , чем противоположно направленная сила \vec{F}_2 , действующая на дальнюю сторону квадрата (силы \vec{F}_3 и \vec{F}_4 компенсируются). Поэтому результирующая сила Ампера $\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ направлена влево.

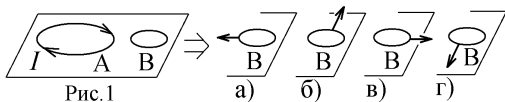


На заданный вопрос можно ответить проще, используя правило Ленца: чтобы скомпенсировать увеличение магнитного потока $\Phi = \int B dS$, контур стремится отодвинуться на большее расстояние r , чтобы величина индукции $B = \mu_0 I / (2\pi r)$ не менялась. Поэтому сила \vec{F}_A толкает его влево.

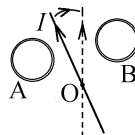
14.4. Два замкнутых круговых витка А и В из медной проволоки имеют общую ось и лежат в одной плоскости (рис.1). По витку А течет ток I . Каким будет направление сил Ампера, действующих на виток В, если величину силы тока в витке А уменьшать?



14.5. Два замкнутых контура А и В из медной проволоки находятся в одной плоскости, и по контуру А течет ток I (рис.1). Укажите, направление результирующей силы Ампера, действующей на контур В, если величина силы тока I возрастает:

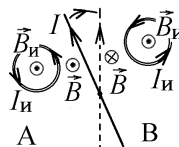


14.6. В одной плоскости лежат два кольца А и В из тонких проводников, а между ними – прямой провод, по которому течет постоянный ток I . Провод с током начали поворачивать **по часовой** стрелке вокруг перпендикулярной к плоскости оси О, как показано на рисунке. Потечет ли электрический ток по кольцам и, если да, то в какие стороны?



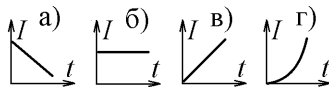
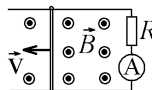
- а) в кольцах А и В потечет против часовой стрелки;
 б) в кольцах А и В потечет по часовой стрелке;
 в) в кольце В - по часовой стрелке, а в кольце А - против часовой стрелки;
 г) в кольце А - по часовой стрелке, а в кольце В - против часовой стрелки;

Решение. При повороте прямого провода с током I он удаляется от левого кольца А и приближается к правому кольцу В. Поток магнитной индукции через кольцо А уменьшается, и в нем возникает индукционный ток $I_{\text{и}}$, создающий индукцию $\vec{B}_{\text{и}}$ сонаправ-

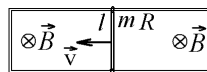


ленную с индукцией \vec{B} поля прямого тока и компенсирующую ослабление магнитного поля. В кольце В, наоборот, магнитный поток растёт и индукционный ток создаст поле $\vec{B}_{\text{и}}$, направленное противоположно \vec{B} и компенсирующее его увеличение. Как видно из рисунка, оба индукционных тока в кольцах текут против часовой стрелки.

14.7*. По прямоугольной рамке из тонких проводников, находящейся в однородном магнитном поле, с равномерно возрастающей скоростью перемещают проводящую перемычку (см. рисунок). Единственным сопротивлением R обладает резистор, включенный в цепь. Укажите правильный график зависимости индукционного тока от времени t :



14.8. Горизонтально расположенная П-образная рамка находится в постоянном магнитном поле, линии индукции \vec{B} которого перпендикулярны к плоскости рамки и направлены за плоскость рисунка. По рамке может без трения двигаться поперечная проводящая перекладина с массой m , длиной l и сопротивлением R . Перекладину толкнули влево с начальной скоростью \vec{v} . По замкнутому контуру, образованному рам-



кой и перекладиной начнет протекать индукционный ток, величина которого со временем ..., и который обтекает контур:

а) не изменяется, по часовой стрелке; б) уменьшается, по часовой стрелке; в) растёт, против часовой стрелки; г) уменьшается, против часовой стрелки; д) растёт, по часовой стрелке;

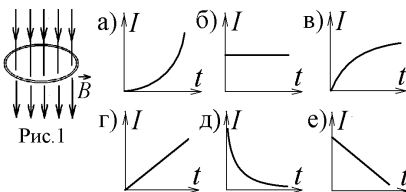
14.9. Линии индукции \vec{B} магнитного поля перпендикулярны замкнутому проводящему витку (см. рисунок). Величина B меняется со временем t по закону $B = \beta \cdot t^2$, где β –



положительная константа. Укажите зависимость величины возникающего в витке тока от времени и его направление:

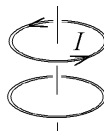
а) $I = \text{const} \cdot t^2$, по часовой стрелке; б) $I = \text{const} \cdot t^2$, против часовой стрелки; в) $I = \text{const} \cdot t$, по часовой стрелке; г) $I = \text{const} \cdot t$, против часовой стрелки; д) $I = \text{const}$, против часовой стрелки;

14.10. Закрепленный замкнутый проводящий круговой виток с сопротивлением R расположен в горизонтальной плоскости в магнитном поле, линии индукции которого вертикальны (рис.1), а величина индукции на-



чинает изменяться со временем t по закону $B = B_0 + \beta t^{3/2}$, где B_0 и β – положительные константы. Укажите правильный график зависимости от времени t величины индукционного тока, возникающего в витке:

14.11. Два тонких проводящих витка имеют общую ось и закреплены. Постоянный ток I_0 в верхнем витке начал убывать со временем t по квадратичному закону: $I = I_0 - \alpha t^2$, где α – положительная константа. При этом в нижнем витке возникает индукционный ток, величина которого изменяется со временем t по закону ..., и который направлен ...:



а) $I = \text{const} \cdot t^2$, по часовой стрелке; б) $I = \text{const} \cdot t^2$, против часовой стрелки; в) $I = \text{const} \cdot t$, по часовой стрелке; г) $I = \text{const} \cdot t$, против часовой стрелки; д) $I = \text{const}$, по часовой стрелке;

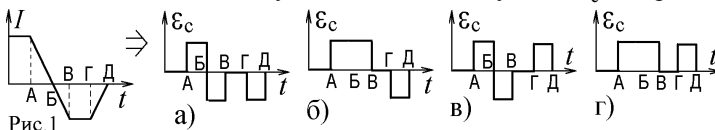
14.12*. Сила тока в проводящем круговом контуре с индуктивностью 200 мГн изменяется со временем t по закону



$I = (\alpha + \beta t)$, где $\alpha = 2 \text{ А}$, $\beta = 0,5 \text{ А/с}$. При этом величина ЭДС самоиндукции равна, а индукционный ток направлен

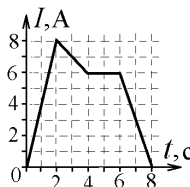
- а) 0,1 В, по часовой стрелке; б) 0,05 В, по часовой стрелке;
в) 0,05 В, против часовой стрелки; г) 0,01 В, против часовой стрелки;

14.13*. На рис.1 показана зависимость силы тока, протекающего в катушке индуктивности, от времени. Укажите правильный график изменения возникающей в катушке ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_c со временем.



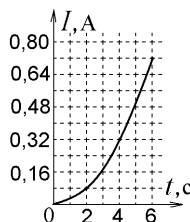
14.14. В катушке с индуктивностью $L = 3 \text{ Гн}$ течет ток, меняющийся со временем t , как показано на рисунке. Величину \mathcal{E} ЭДС самоиндукции в катушке измеряют 4 раза в моменты времени $t_1 = 1 \text{ с}$, $t_2 = 3 \text{ с}$, $t_3 = 5 \text{ с}$ и $t_4 = 7 \text{ с}$. Чему равна максимальная величина \mathcal{E} , измеренная в эти моменты времени?

- а) 4 В; б) 6 В; в) 8 В; г) 9 В; д) 12 В; е) 18 В;



14.15. По замкнутому проводящему контуру с индуктивностью $L = 2 \text{ Гн}$ течет ток, величина которого меняется со временем t по параболическому закону $(\sim t^2)$, как показано на графике. Определите величину ЭДС самоиндукции, возникающей в контуре в момент времени $t = 2 \text{ с}$:

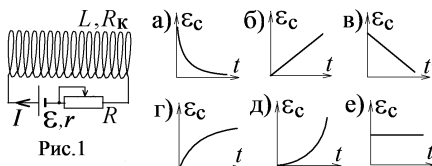
- а) 0,08 В; б) 0,16 В; в) 0,24 В;
г) 0,32 В; д) 0,48 В; е) 0,64 В; ж) 0,72 В;



Решение. Зависимость тока от времени $I = \alpha t^2$. Постоянную α можно найти по точкам графика: $I = 0,32 \text{ А}$ при $t = 4 \text{ с}$, откуда $\alpha = 0,02 \text{ А/с}^2$. Величина ЭДС $\mathcal{E}_c = \left| -d(LI)/dt \right| = 2L\alpha t = 0,32 \text{ В}$.

14.16. Источник ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r последовательно с реостатом подсоединен к катушке с индуктивностью L и сопротивлением R_k (рис.1). Движком реостата меняют величину его сопротивления так, что ток I , протекающий по цепи, меняется со временем t по закону $I = I_0 + \alpha_1 t - \alpha_2 t^2$, где I_0 , α_1 и α_2 — положи-

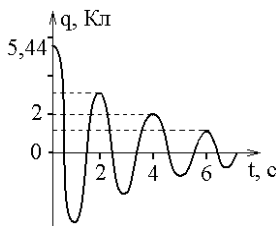
тельные константы. Укажите правильный график временной зависимости величины (модуля) ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_c , возникающей в катушке:



3.15. Собственные электрические колебания

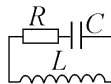
15.1. На рисунке показан график временной зависимости заряда q на конденсаторе в электрическом колебательном контуре, определяемый уравнением $q(t) = Ae^{-t/\tau} \sin(\omega t + \varphi)$. Укажите время τ релаксации (затухания) колебаний:

- а) 2 с; б) 4 с; в) 6 с; г) 1 с; д) 2,72 с;



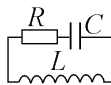
Решение. Из графика видно, что уменьшение начальной амплитуды $Ae^{-t/\tau}$ в $e = 2,72$ раз от величины $A = 5,44$ Кл до величины $Ae^{-1} = 2$ Кл происходит за время $\tau = t = 4$ с.

15.2. Собственные затухающие колебания в контуре с индуктивностью L , ёмкостью C и резистором R описываются уравнением $q(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$. С уменьшением величины индуктивности L при неизменных R и C :



- а) скорость уменьшения амплитуды колебаний не изменится;
 б) амплитуда колебаний будет уменьшаться со временем быстрее;
 в) амплитуда колебаний будет уменьшаться со временем медленнее;

15.3. Собственные затухающие колебания в колебательном контуре с индуктивностью L и ёмкостью C описываются уравнением $q(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$, где



$\beta = \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Во сколько раз изменится циклическая частота ω колебаний, если коэффициент затухания β уменьшить в $4/3 = 1,33$ раз?

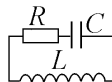
- а) не изменится; б) увеличится в 1,33 раза; в) уменьшится в 1,33 раз;

Решение. Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$,

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Коэффициент затухания был равен $\beta_1 = 4\omega_0/5$, стал равен $\beta_2 = 3\omega_0/5$. Частота увеличилась в

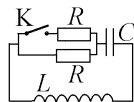
$$\omega_2/\omega_1 = \sqrt{(\omega_0^2 - \beta_2^2)/(\omega_0^2 - \beta_1^2)} = 4/3 = 1,33 \text{ раз.}$$

15.4. В электрическом колебательном контуре с индуктивностью L , ёмкостью C и резистором R происходят собственные затухающие электрические колебания с частотой ω и с коэффициентом затухания β . Если величину сопротивления R уменьшить при неизменных величинах C и L , то:



- а) ω уменьшается, β не меняется; б) ω уменьшается, β растёт;
 в) ω растёт, β не меняется; г) ω не меняется, β уменьшается;
 д) ω растёт, β уменьшается; е) ω не меняется, β растёт;

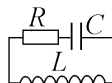
15.5. При разомкнутом ключе “К” циклическая частота собственных затухающих колебаний в контуре, изображённом на рисунке, определялась параметрами $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и $\beta = R/2L$. Укажите формулу циклической частоты собственных затухающих колебаний в данном контуре после замыкания ключа “К”:



- а) $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; б) $\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$; в) $\sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2}$; г) $\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2}}$; д) $\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}}$;

Решение. После подключения параллельного резистора омическое сопротивление контура уменьшилось в два раза: $R \rightarrow R/2$, как и коэффициент затухания колебаний: $\beta = R/2L \rightarrow \beta/2 = R/4L$. Правильный ответ – (д).

15.6. В электрическом колебательном контуре, изображённом на рисунке, постепенно увеличивают величину ёмкости C конденсатора. При этом собственные электрические затухающие колебания прекратятся при достижении



значения: а) $C = 4\frac{R^2}{L}$; б) $C = \frac{1}{4}\frac{L}{R^2}$; в) $C = 4\frac{L}{R}$; г) $C = \frac{1}{4}\frac{L}{R}$;

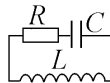
д) $C = 4\frac{L}{R^2}$; е) $C = \frac{1}{4}\frac{R^2}{L}$; ж) при любом значении R электрические колебания не прекращаются;

Решение. С ростом ёмкости C период собственных колебаний

$T = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$ растёт. Колебания прекратятся, когда знаменатель этого выражения станет равным нулю, т.е. при $C = 4L/R^2$.

15.7. В электрическом колебательном контуре можно:

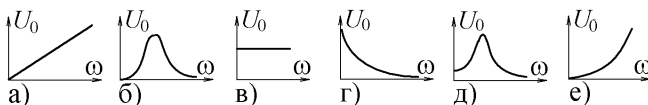
1) уменьшить величину сопротивления R ; 2) увеличить величину ёмкости C . При этом величина логарифмического декремента затухания электрических колебаний:



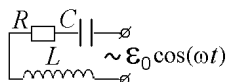
- а) 1 – уменьшится, 2 – увеличится; б) 1 – увеличится, 2 – уменьшится;
 в) 1 – уменьшится, 2 – уменьшится; г) 1 – увеличится, 2 – увеличится;
 д) 1 – увеличится, 2 – не изменяется; е) 1 – уменьшится, 2 – не изменяется;
 ж) для ответа не хватает знания величин L , C и R ;

3.16. Вынужденные электрические колебания

16.1. Укажите правильный график зависимости амплитуды U_0 напряжения на конденсаторе C от частоты ω источника внешней ЭДС для вынужденных электрических колебаний в цепи, изображенной на рисунке:



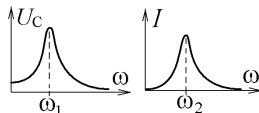
16.2. Частота собственных электрических колебаний контура, изображенного на рисунке, равна ω_c . Резонанс тока I в таком контуре будет



происходить при частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_p$. При этом

- а) $\omega_p < \omega_c$; б) $\omega_p = \omega_c$; в) $\omega_p > \omega_c$; г) резонанс тока I невозможен;
 г) в данном контуре резонанс тока I нет при любой частоте $\omega_{вн}$.

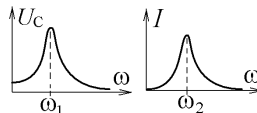
16.3. Зависимости амплитуд вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе U_C и тока I в электрическом колебательном контуре от частоты ω внешней ЭДС показаны на рисунке, где $\omega_1 = 10^6 \text{ с}^{-1}$, а коэффициент затухания для этого контура равен $\beta = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Какой должна быть величина частоты ω_2 ?



- а) $5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$; б) 10^6 с^{-1} ; в) $3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$; г) $1,72 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$; д) $2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$;

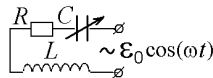
Решение. Резонансная частота для амплитуды напряжения на конденсаторе $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Отсюда резонансная частота для амплитуды тока в цепи $\omega_2 = \omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + 2\beta^2} = 3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$.

16.4. Зависимости амплитуды вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе U_C и амплитуды тока I в электрическом колебательном контуре от частоты ω внешней ЭДС показаны на рисунке. Какой может быть величина отношения ω_2/ω_1 частот, указанных на этом рисунке?



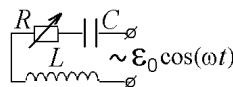
- а) 1,1; б) 1; в) 0,9; г) 0,5; д) $e^{-1} = 0,368$;

16.5. В электрический колебательный контур с активным сопротивлением R , ёмкостью C и индуктивностью L включен последовательно источник переменного тока с такой частотой ω , что амплитуда падения напряжения на сопротивлении R достигает максимальной резонансной величины. Ёмкость C конденсатора увеличили в 2 раза. Что надо сделать с параметрами контура, чтобы резонансное увеличение амплитуды падения напряжения на сопротивлении R по-прежнему наблюдалось при той же частоте ω ?



- а) увеличить L в 2 раза; б) увеличить R в 2 раза; в) ничего не менять;
г) уменьшить L в 2 раза; д) уменьшить R в 2 раза;

16.6. В электрический колебательный контур с активным сопротивлением R , ёмкостью C и индуктивностью L включен последовательно источник переменного тока с такой частотой ω , что амплитуда падения напряжения на конденсаторе C достигает максимальной резонансной величины. Переменное сопротивление R увеличили в 2 раза. Что надо сделать с параметрами контура, чтобы резонансное увеличение амплитуды падения напряжения на конденсаторе по-прежнему наблюдалось при той же частоте ω ?

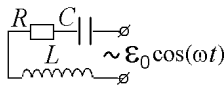


- а) и L , и C увеличить в 2 раза;
б) L увеличить, а C уменьшить в 2 раза;
в) C увеличить, а L уменьшить в 2 раза;
г) и L , и C уменьшить в 2 раза;

Решение. Резонансная частота для амплитуды напряжения на кон-

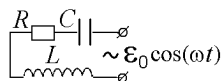
денсаторе $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$ не изменится, если вместе с увеличением R увеличить L в 2 раза и уменьшить C в 2 раза.

16.7. Полное сопротивление цепи, изображенной на рисунке (где R – активное сопротивление, L – индуктивность, C – ёмкость, ε_0 – амплитуда ЭДС внешнего источника) достигает **наибольшего возможного** значения, если частота ω внешнего источника равна:

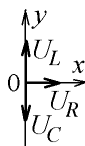


- а) $\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$; б) $\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$; в) $\sqrt{\frac{1}{LC}}$; г) $\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{2R^2}{L^2}}$; д) 0;

16.8*. Резистор, катушка индуктивности и конденсатор подключены к источнику ЭДС, создающей в цепи ток, изменяющийся по закону $I = I_0 \cos(\omega t)$, где



$I_0 = 0,1 \text{ A}$, $\omega = 3,14 \text{ с}^{-1}$. На втором рисунке представлена фазовая диаграмма падений напряжений на указанных элементах. Амплитудные значения напряжений равны, соответственно, $U_R = 3 \text{ В}$; $U_L = 1 \text{ В}$; $U_C = 5 \text{ В}$. При этом полное сопротивление контура равно:

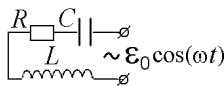


- а) 70 Ом; б) 50 Ом; в) 90 Ом; г) 120 Ом;

Решение. Амплитуды падения напряжения на реактивных и активном сопротивлении цепи связаны с амплитудой тока соотношениями $U_R = I_0 R$; $U_L = I_0 X_L = I_0 \omega L$; $U_C = I_0 X_C = I_0 / \omega C$. Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} = \frac{\sqrt{(U_C - U_L)^2 + U_R^2}}{I_0} = 50 \text{ Ом}.$$

16.9. В электрический колебательный контур с активным сопротивлением R , ёмкостью C и индуктивностью L включен источник переменной ЭДС с амплитудой ε_0 (см. рисунок). Какому соотношению должна удовлетворять его циклическая частота ω , чтобы амплитуда тока в цепи была в 2 раза меньше максимального резонансного значения?



- а) $\frac{1}{\omega C} - \omega L = 2R$; б) $\frac{1}{\omega C} - \omega L = R$; в) $\frac{1}{\omega C} - \omega L = \sqrt{2}R$; г) $\frac{1}{\omega C} - \omega L = \sqrt{3}R$;

Решение: Резонансная величина амплитуды тока $I_{0\max} = \varepsilon_0 / R$.

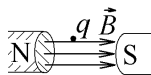
Амплитуда уменьшается в два раза $I_0 = \frac{I_{0\max}}{2} = \frac{\varepsilon_0}{Z}$, если полное со-

противление цепи переменному току $Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} = 2R$, от-

куда $\frac{1}{\omega C} - \omega L = \sqrt{3}R$.

3.17. Переменное электромагнитное поле. Уравнения Максвелла

17.1. Величина индукции магнитного поля \vec{B} между полюсами электромагнита начинает равномерно расти со временем. Что при этом можно сказать о возникающем электрическом поле?



- а) его силовые линии будут кругами, охватывающими линии \vec{B} ;
- б) его силовые линии будут направлены вдоль линий \vec{B} ;
- в) его силовые линии будут направлены по радиусам от оси магнита;
- г) в случае равномерного роста \vec{B} электрическое поле не возникает;

17.2*. Одно из уравнений Максвелла имеет вид $\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$.

Оно является обобщением:

- а) теоремы Гаусса для электростатического поля в среде;
- б) теоремы Остроградского-Гаусса для магнитного поля в среде;
- в) закона полного тока в среде; г) закона электромагнитной индукции;

17.3*. Следующая система уравнений Максвелла $\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = 0$; $\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \int_S \vec{j} d\vec{S}$; $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$; $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ справедлива

для: а) стационарных электрических и магнитных полей в отсутствии токов проводимости; б) переменного электромагнитного поля при наличии заряженных тел и токов проводимости; в) стационарных электрических и магнитных полей при наличии заряженных тел и токов проводимости; г) стационарных электрических и магнитных полей в отсутствии заряженных тел;

17.4. Следующая система уравнений Максвелла

$\text{rot } \vec{E} = 0$; $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$; $\text{div } \vec{D} = \rho$; $\text{div } \vec{B} = 0$ описывает:

- а) электростатическое поле; б) постоянное электромагнитное поле;
в) переменное электромагнитное поле; г) электромагнитную волну;

17.5*. Следующая система уравнений Максвелла

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

- а) не соответствует никакому реальному электромагнитному полю;
б) описывает постоянное электромагнитное поле;
в) описывает электромагнитную волну в вакууме или диэлектрике;
г) записана неверно (с ошибками);

17.6. Согласно уравнениям Максвелла в случае электромагнитного поля в идеальной диэлектрической среде циркуляция вектора напряженности электрического поля равна:

а) $\int_S \vec{j} d\vec{S}$; б) $\mu\mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}$; в) $\frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}$; г) $-\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$; д) $\int_V \rho dV$;

17-7. Какие из приведенных уравнений системы Максвелла записаны **без ошибок** (правильно)?

1) $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$;
2) $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \varepsilon\varepsilon_0 \int_V \rho dV$; 3) $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} + \int_S \vec{j} d\vec{S}$; 4) $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$;
а) 1 и 4; б) 2 и 3; в) 1 и 3; г) 3 и 4; д) 2 и 4; е) 1 и 2;

17-8. Какие из приведенных уравнений системы Максвелла записаны **с ошибкой** (неверно)?

1) $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$;
2) $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \rho dV$; 3) $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} + \int_S \vec{j} d\vec{S}$; 4) $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$;
а) 1 и 4; б) 2 и 3; в) 1 и 3; г) 3 и 4; д) 2 и 4; е) 1 и 2;

17.9. Какие из приведенных в дифференциальной форме уравнений системы Максвелла записаны **без ошибок** (правильно)?

1) $\text{rot } \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; 2) $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$; 3) $\text{div } \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \rho$; 4) $\text{div } \vec{B} = 0$;
а) 1 и 4; б) 2 и 3; в) 1 и 3; г) 3 и 4; д) 2 и 4; е) 1 и 2;

17.10. Какие из приведенных в дифференциальной форме уравнений системы Максвелла записаны **с ошибкой** (неверно)?

- 1) $\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; 2) $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \mu\mu_0 \vec{j}$; 3) $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$; 4) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$;
 а) 1 и 4; б) 2 и 3; в) 1 и 3; г) 3 и 4; д) 2 и 4; е) 1 и 2;

3.18. Электромагнитные волны. Вектор Пойнтинга

18.1. Выберите правильное перечисление диапазонов электромагнитных волн **в порядке убывания длин волн излучения**:

- а) ультракороткие радиоволны, видимый свет, инфракрасное излучение, микроволновый диапазон;
 б) оптический диапазон, инфракрасный диапазон, микроволновый диапазон, УКВ-диапазон;
 в) инфракрасное излучение, оптический диапазон, ультрафиолетовое излучение, рентгеновское излучение;
 г) рентгеновское излучение, оптический диапазон, ультрафиолетовое излучение, микроволновый диапазон;

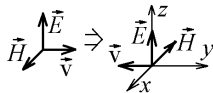
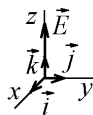
18.2*. Величина вектора напряженности электрического поля плоской электромагнитной синусоидальной волны, распространяющейся в диэлектрической среде с $\varepsilon > 1$ вдоль оси Ox , имеет вид $E = A \cdot \sin(\alpha t - \beta x)$, где $A = 0,01$ В/м, $\alpha = 6,28 \cdot 10^8$ с $^{-1}$, $\beta = 2$ м $^{-1}$. При этом длина волны равна: а) 3,14 м; б) 2 м; в) 3 м; г) 0,01 м;

18.3. Напряженность электрического поля плоской электромагнитной волны имеет вид $\vec{E} = \vec{k} E_0 \cos(\omega t + k y)$.

Напряженность \vec{H} магнитного поля этой волны имеет вид $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – орты декартовой системы координат:

- а) $\vec{i} H_0 \cos(\omega t + k y)$; б) $\vec{j} H_0 \cos(\omega t + k y)$;
 в) $-\vec{j} H_0 \cos(\omega t + k y)$; г) $-\vec{i} H_0 \cos(\omega t + k y)$;

Решение. Знак аргумента $(\omega t + k y)$ говорит о том, что волна распространяется **против** оси y – это направление её скорости \vec{v} . Векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{v} образуют правую тройку векторов. Повернув эту тройку вектором \vec{E} вдоль оси z , а вектором \vec{v} против оси y , видим, что \vec{H} направлен против оси x – ответ (г).



18.4. Напряженность магнитного поля плоской электромагнитной волны имеет вид $\vec{H} = -\vec{k} H_0 \cos(\omega t - kx)$.

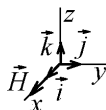
Напряженность \vec{E} электрического поля этой волны имеет вид ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат):



- а) $-\vec{j} E_0 \cos(\omega t - kx)$; б) $\vec{k} E_0 \cos(\omega t - kx)$; в) $-\vec{k} E_0 \cos(\omega t - kx)$; г) $\vec{j} E_0 \cos(\omega t - kx)$; д) такая волна не существует;

18.5. Напряженность магнитного поля плоской электромагнитной волны имеет вид $\vec{H} = \vec{i} H_0 \cos(\omega t - kz)$. На-

пряженность \vec{E} электрического поля этой волны имеет вид ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат):



- а) $-\vec{j} E_0 \cos(\omega t - kz)$; б) $\vec{k} E_0 \cos(\omega t - kz)$; в) $-\vec{i} E_0 \cos(\omega t - kz)$; г) $\vec{j} E_0 \cos(\omega t - kz)$; д) такая волна не существует;

Решение. Знак аргумента $(\omega t - kx)$ показывает, что волна должна распространяться вдоль оси x . По условию вектор \vec{H} направлен в ту же сторону, хотя должен быть перпендикулярен скорости волны \vec{v} . Таких “продольных” электромагнитных волн не существует.

18.6. В плоской электромагнитной волне, распространяющейся в вакууме, в некоторый момент вектор напряженности электрического поля направлен вдоль вектора \vec{i} , а вектор напряженности магнитного поля – **против** вектора \vec{k} , где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат. Вектором скорости этой волны будет (c – скорость света):

- а) $\vec{j} c$; б) $-\vec{j} c$; в) $(\vec{i} + \vec{k})c/\sqrt{2}$; г) $(\vec{i} - \vec{k})c/\sqrt{2}$; д) $(\vec{k} - \vec{i})c/\sqrt{2}$;

18.7. Энергия электромагнитного поля переносится электромагнитной волной вдоль оси Oz . В некоторый момент времени вектор напряженности электрического поля этой волны направлен вдоль оси Oy . В тот же момент времени вектор напряженности магнитного поля волны направлен:

- а) вдоль оси Ox ; б) против оси Oz ; в) против оси Oy ; г) против оси Ox ;

18.8. Амплитуда напряженности магнитного поля электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме, уменьшилась в 4 раза. При этом величина амплитуды вектора Пойнтинга для этой волны:

- а) увеличилась в 2 раза; б) уменьшилась в 2 раза;
 в) увеличилась в 4 раза; г) уменьшилась в 4 раза;
 д) увеличилась в 16 раз; е) уменьшилась в 16 раз;

Решение. Так как в электромагнитной волне напряженности электрического и магнитного полей пропорциональны, $\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$, то амплитуда вектора Пойнтинга $\vec{J}_W = [\vec{E}, \vec{H}]$ будет пропорциональна H^2 и уменьшится в 16 раз.

18.9. Величина амплитуды плотности энергии электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме, увеличилась в 4 раза. При этом амплитуда напряженности электрического поля этой волны:

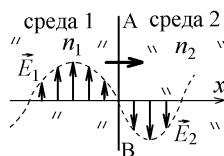
- а) увеличилась в 2 раза; б) уменьшилась в 2 раза;
 в) увеличилась в $\sqrt{2}$ раз; г) уменьшилась в $\sqrt{2}$ раз;
 е) увеличилась в 4 раза; ж) уменьшилась в 4 раза;

18.10. Величина амплитуды напряженности магнитного поля электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме, равна $H_0 = 1$ А/м. Известно, что $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м. Величина амплитуды вектора Пойнтинга этой волны равна:

- а) $2,65 \cdot 10^{-3}$ Дж/м²с; б) 1 Дж/м²с;
 в) 377 Дж/м²с; г) $7,04 \cdot 10^{-6}$ Дж/м²с;

18.11*. На рисунке представлена мгновенная «фотография» электрической составляющей электромагнитной волны, переходящей из среды 1 в среду 2 перпендикулярно границе раздела АВ. Напряженности электрического поля в первой и второй среде определяются формулами

$E_1 = E_0 \sin(\omega t - 5 \cdot 10^6 \pi x)$ и $E_2 = E_0 \sin(\omega t - 8 \cdot 10^6 \pi x)$. Относительный показатель преломления двух сред n_2/n_1 равен: а) 1,6; б) 1;
 в) 0,625;



Решение. При переходе из одной среды в другую не меняется частота волны ω , но меняются её скорость $v = c/n$ (c – скорость света в вакууме), длина волны $\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi c}{\omega n}$ и волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c}$,

входящее в уравнение $E = E_0 \sin(\omega t - kx)$. Поэтому $\frac{n_2}{n_1} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{8}{5} = 1,6$.

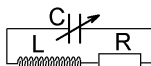
3.19. Задания, проверяющие владение изученным материалом

Такие задания приводятся в открытой форме без выбора варианта ответа. За ответы на них, и даже за правильную попытку ответа, дается максимальное число баллов.



Помните, что большая часть подобных заданий аналогична заданиям с выбором ответа, и только построена в форме, позволяющей проверить умение студента самостоятельно оценить суть вопроса и выбрать подходящий закон или формулу для ответа.

Пример 1. Первый экспериментатор считает, что собственные электрические колебания в цепи, изображенной на рисунке, имеют место при любой величине ёмкости C переменного конденсатора. Второй экспериментатор уверен, что колебания прекращаются при некотором значении ёмкости C_0 . Выскажите своё мнение о том, кто из них прав, обосновав его законами и формулами физики. Нарисуйте и объясните примерный график зависимости T от величины C . Если, по Вашему мнению, прав второй экспериментатор, то получите величину C_0 , выразив её через параметры цепи L и R .



Решение.



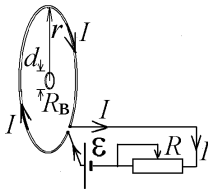
В формулировке вопроса уже можно найти указание на то, какую формулу или закон надо использовать для ответа.

Период собственных колебаний $T = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ стремится к бесконечности, когда знаменатель обращается в ноль, т.е. при $C = C_0 = \frac{4L}{R^2}$. Колебания прекращаются. Сравните это задание с вопросом 15.6. из раздела 3.15.



Не пытайтесь найти готовый ответ сразу на всю ситуацию, предложенную в задании. Решайте её по частям, следуя тексту задания, и Вы получите ответ на самые сложные вопросы.

Пример 2. В центре круглого проводящего витка с радиусом r находится маленький проводящий виток с диаметром d и с сопротивлением R_B ($d \ll r$, плоскости витков совпадают). Меняя



сопротивление R реостата (см. рисунок) изменяют ток I , протекающий по внешнему витку, причем этот ток меняется со временем t по закону $I = I_0 + \alpha t + \beta t^2$, где I_0, α, β – положительные константы. Выскажите своё обоснованное мнение о том, появится ли индукционный ток в маленьком внутреннем витке? Если да, то как этот ток будет зависеть от времени t и от параметров $R_B, d, r, I_0, \alpha, \beta$. Получите формулы и нарисуйте график зависимости индукционного тока от времени t .

Решение. Сделайте последовательную цепочку рассуждений:

- 1) по внешнему витку течет ток I , который создаёт в центре, в плоскости маленького витка магнитное поле с индукцией $B = \mu_0 I / 2r$;
- 2) это поле меняется вместе с током и создает переменный магнитный поток $\Phi = BS$ в плоскости маленького витка ($S = \pi d^2 / 4$ – его площадь);

- 3) поэтому во внутреннем витке создается ЭДС электромагнитной ин-

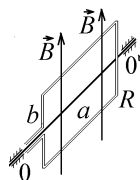
$$\text{дукции } \varepsilon_{\text{и}} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{\mu_0}{2r} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \frac{dI}{dt} = \frac{\mu_0 \pi d^2}{8r} (\alpha + 2\beta t);$$

- 4) ЭДС создает во внутреннем витке индукционный ток, ли-

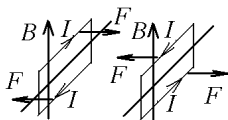
нейно меняющийся со временем: $I_{\text{и}} = \frac{\varepsilon_{\text{и}}}{R_B} = \frac{\mu_0 \pi d^2}{8r R_B} (\alpha + 2\beta t)$.



Пример 3. Экспериментатор уверен, что может продемонстрировать действие электромотора, пропуская ток по прямоугольной проволочной рамке с сопротивлением R , способной вращаться без трения в постоянном магнитном поле с индукцией B вокруг оси $00'$ (см. рисунок). Объясните, прав он или не прав, и что ему надо сделать, чтобы рамка, как и электромотор, вращалась все время в одну сторону? Ответ подтвердить с помощью физических законов и формул.



Решение. Если по рамке пропускать **постоянный** ток I в одном направлении, то вначале момент сил Ампера начнет поворачивать рамку по часовой стрелке (левый рисунок). После поворота на 90° момент сил поменяет направление и начнет тормозить вращение рамки. Повернувшись на 180° рамка остановится (правый рисунок), а затем начнет вращение в обратную сторону. Возникнут периодические колебания вокруг положения, в котором \vec{B} перпендикулярно плоскости рамки. Чтобы рамка совершала



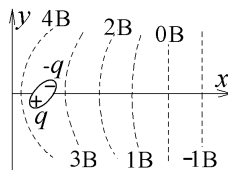
вращение только в одну сторону, по ней надо пропускать **переменный** ток с циклической частотой, равной угловой скорости вращения рамки (чтобы после поворота на 180° ток менял направление). Или с такой же частотой менять направление поля \vec{B} .

Примеры открытых тестов для поиска самостоятельного ответа.

19.4. Зависимость потенциала электростатического поля от координат имеет вид $\varphi = \beta \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$, где β – положительная константа. Нарисуйте на плоскости xy несколько эквипотенциальных поверхностей и силовых линий такого поля. Укажите направление вектора напряженности \vec{E} . Ответ обосновать и подтвердить формулами.

19.5. Напряженность электростатического поля зависит от координат x , y и z следующим образом: $\vec{E} = \vec{i}\alpha x^3 - \vec{j}\alpha y^2 - \vec{k}\alpha z$, где $\alpha = 1 \text{ В/м}^3$. На плоскости $z = 0$ нарисуйте линию $y = y(x)$ из точек, в которых объемная плотность электрического заряда, создающего данное поле, равна нулю. Ответ обосновать выводом формул.

19.6. На плоскости xy показана картина эквипотенциальных поверхностей электростатического поля, в котором находится полярная молекула с зарядами $+q$ и $-q$ на концах (см. рисунок). Какое положение примет эта молекула и как она будет двигаться? Ответ обосновать и подтвердить формулами.

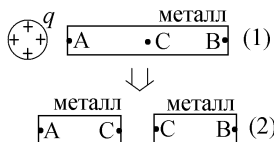


19.7. Свободная полярная молекула оказалась во внешнем однородном электростатическом поле с величиной напряженности E_0 , силовые линии которого перпендикулярны оси z , и повернулась так, что её электрический дипольный момент принял выражение $\vec{p}_e = -\vec{i} \cdot 3p_0 + \vec{j} \cdot 4p_0$, где p_0 – положительная константа, а \vec{i} и \vec{j} – орты декартовой системы координат. Нарисуйте линии \vec{E} на плоскости xy , укажите их направление, получите выражение зависимости потенциала данного поля от координат.

19.8. Плоскость $z = 0$ равномерно заряжена с поверхностной плотностью электрического заряда σ . Другие заряды отсутствуют. Объясните, как найти зависимость потенциала φ электростатического поля от координаты z , если известно, что потенциал точки

$x = y = z = 0$ равен φ_0 . Получите формулу для определения зависимости $\varphi(z)$ и постройте график зависимости величины $\varphi = \varphi(z)$ в интервале $-a \leq z \leq a$.

19.9. В эксперименте первоначально незаряженный металлический стержень АСВ подносят к телу с зарядом q (1). После этого стержень разделяют на две части АС и СВ и переносят разделенные части на очень большое удаление от заряженного тела (2). Выскажите свое мнение о том, какой должна быть разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ в точках А и В на концах стержня до разделения (рисунок 1) и после разделения и перемещения (рисунок 2). Определите причины возможного изменения величины $\varphi_A - \varphi_B$ или отсутствия этого изменения. Ответ обоснуйте физическими законами.

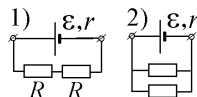


19.10. По металлическому шару радиуса r_1 равномерно с поверхностной плотностью σ распределен электрический заряд. Этот шар окружен тонкой металлической сферической поверхностью радиуса r_2 (центры шара и сферической поверхности совпадают). Как определить величину энергии электрического поля, заключенного между данными проводниками? Получите формулу этой энергии.

19.11. Плоский конденсатор подключен к источнику постоянной ЭДС \mathcal{E} , а его пластины, на которых находится заряд q , погружены в жидкий диэлектрик. Диэлектрик убирают, и по цепи при этом протекает заряд Δq . Можно ли по этим данным определить величину диэлектрической проницаемости ϵ диэлектрика? Если это можно сделать, то получите формулу для её вычисления



19.12. Два электронагревательных элемента с сопротивлениями R каждый в одном случае подключают к батарее с ЭДС \mathcal{E} и с внутренним сопротивлением $r = R$ последовательно (рисунок 1), а в другом – параллельно (рисунок 2). В каком случае нагреватели выделяют больше тепла и во сколько раз? Ответ обосновать и подтвердить формулами.

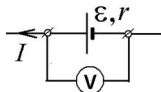


19.13. Сопротивление реостата, подключенного к источнику постоянной ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r , бы-

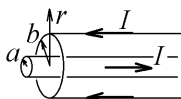


ло равно R . Передвинув ползунок реостата, увеличили его сопротивление в 2 раза: $R \rightarrow 2R$. Первый экспериментатор считает, что при этом тепловая мощность, выделяемая на реостате, обязательно должна измениться. По мнению второго экспериментатора выделяемая на реостате тепловая мощность не изменится при определенном соотношении между R и r . Выскажите свое обоснованное законами физики мнение о том, кто из них прав. Если прав второй экспериментатор, получите необходимое соотношение между R и r .

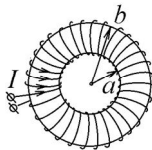
19.14. Через батарею с ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r течет ток I , как показано на рисунке. Чему равна величина разности потенциалов на клеммах батареи и как, по Вашему мнению, она изменится, если ток I поменять направление?



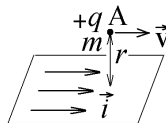
19.15. По центральной жиле радиуса a прямого коаксиального кабеля течет ток I . такой же ток I течет по внешнему цилиндрическому слою (“стакану”) радиуса b навстречу. Нарисуйте график зависимости величины напряженности магнитного поля, созданного этими токами, от расстояния r до оси кабеля. Ответ обосновать и подтвердить формулами.



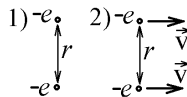
19.16. На ферромагнитный тороидальный сердечник равномерно намотаны N витков провода, по которому течет постоянный ток I (см. рисунок). Может ли величина индукции магнитного поля внутри в разных точках сердечника отличаться в два раза? Если да, то при каком условии? Ответ обосновать и подтвердить формулами.



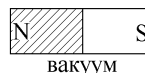
19.17. По бесконечной плоскости, участок которой показан на рисунке, течет однородный постоянный электрический ток с поверхностной плотностью \vec{i} . Над плоскостью на расстоянии r параллельно направлению тока летит со скоростью \vec{v} частица с положительным зарядом $+q$ и массой m . Может ли частица спустя некоторое время снова вернуться в точку А, не столкнувшись с плоскостью? Если да, то при каком условии это происходит и через какой промежуток времени Δt частица вернется в точку А? Ответ обосновать и подтвердить формулами.



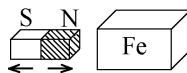
19.18. Два электрона находятся на одинаковом расстоянии r , но в случае (1) они покоятся, а в случае (2) летят параллельно друг другу с одинаковыми скоростями \vec{v} . Объясните, почему силы их взаимодействия имеют разную величину. Определите, в каком случае сила взаимодействия больше и во сколько раз. Ответ обосновать и подтвердить необходимыми законами и формулами.



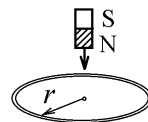
19.19. Постоянный магнит прямоугольной формы, изготовленный из ферромагнетика, находится в вакууме. Нарисуйте две картины: линий индукции магнитного поля, созданного магнитом, и линий напряженности этого поля. При построении учтите граничные условия для полей \vec{B} и \vec{H} . Могут ли линии напряженности \vec{H} обрываться? Ответ обосновать и подтвердить формулами.



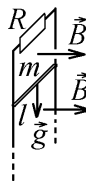
19.20. Постоянный магнит быстро приближают и удаляют от куска железа, которое при этом нагревается. Объясните причину и механизм этого нагревания.



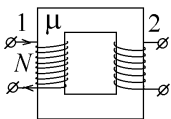
19.21. К закрепленному проводящему витку радиуса r приближают магнит так, что поток магнитной индукции через площадь витка убывает со временем t по закону $\Phi = \Phi_0 \exp(-\alpha t)$, где α – положительная константа. Определите величину и направление вектора напряженности \vec{E} электрического поля, возникающего в витке. По какой причине возникает это поле? Нарисуйте приблизительный график зависимости E от времени.



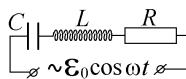
19.22. По двум вертикальным металлическим проводникам может без трения скользить поперечная металлическая перекладина длины l с массой m . Сопротивление проводников и перекладины равно нулю, а проводники сверху соединены сопротивлением R (см. рисунок). Перпендикулярно плоскости проводников создано магнитное поле с индукцией \vec{B} . Перекладину отпускают, и она начинает падать под действием силы тяжести с ускорением g . По какой причине скорость падения перекладины становится постоянной? При какой величине индукции B скорость падения перекладины не превысит значения v_0 ? Ответ обосновать и подтвердить формулами.



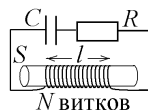
19.23. На ферромагнитный сердечник из материала с магнитной проницаемостью μ намотана первичная катушка (обмотка) из N витков провода "1" и вторичная обмотка "2" (см. рисунок). На клеммы обмотки "1" подается меняющееся с частотой ω по гармоническому закону напряжение с амплитудой U_0 . Сколько витков и почему должна содержать обмотка "2", чтобы на её клеммах создавалось большее напряжение с амплитудой $2U_0$? По какой причине происходит увеличение напряжения? Ответ обосновать и подтвердить формулами.



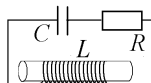
19.24. В цепь, показанную на рисунке, включена внешняя переменная ЭДС с циклической частотой ω . Меняя эту частоту, определили, что амплитуда напряжения на конденсаторе C имеет максимальную величину при $\omega = \omega_1$. Может ли максимальная величина амплитуды тока в цепи наблюдаться при частоте $\omega = 2\omega_1$? Если может, то как при этом индуктивность цепи L должна зависеть от параметров R и C ? Если нет, то почему? Ответ обосновать и подтвердить формулами.



19.25. Электрический колебательный контур содержит конденсатор с емкостью C , активное сопротивление R и катушку индуктивности, из провода, не имеющего активного сопротивления и намотанного на ферритовый сердечник с поперечным сечением S . Меняя число витков N в катушке и длину намотки l , т.е. меняя индуктивность катушки, экспериментатор после долгих опытов определил самое большое значение частоты собственных колебаний тока в такой цепи при заданных величинах C и R . Предложите свой способ найти это значение с помощью законов физики. Приведите его обоснование и получите формулу для максимальной частоты ω , выраженной через параметры C и R .



19.26. Два экспериментатора рассуждают о том, как может изменяться величина θ логарифмического декремента затухания собственных электрических колебаний в электрическом колебательном контуре, где величины активного сопротивления цепи R и емкости конденсатора C фиксированы, а индуктивность катушки L можно изменять в любых пределах $0 \leq L \leq \infty$. Первый считает, что величина θ не может превысить некоторого значения, а второй уверен в том, что величина



θ меняется неограниченно и достигает величины $\theta = \infty$ при $L = \infty$. Приведите свое мнение о том, кто из них прав, и обоснуйте его, определив пределы изменения величины θ . Может ли θ стать равной бесконечности или нулю, и если да, то при каком значении L ? Нарисуйте приблизительный график зависимости θ от L .

3.20. Ответы на вопросы тестовых заданий

1.1. в	1.2. д	2.1. а	2.2. б	2.3. а	2.4. в	2.7. в
2.8. б	2.9. д	2.10. г	3.1. б	3.2. б	3.3. г	3.4. г
3.5. г	3.6. а	4.2. в	4.3. б	4.4. б	4.5. в	5.1. а-г
5.2.	5.3. б	5.5. 1а 2в 3г		5.6. в	6.1. е	6.2. в
6.3. б	6.4. б	6.6. в	6.7. а	6.9. а	6.10. а	7.1. г
7.4. б	7.5. в	7.7. б	7.8. а	7.9. а	7.10. г	7.12. г
7.13. б	7.15. в	7.17. в	8.2. е	8.3. г	8.5. б	9.1. г
9.2. в	9.3. а	9.4. в	9.5. а	9.7. б	9.8. б	10.2. г
10.3. г	10.5. г	10.6. в	11.1. б	11.4. в	11.5. а	11.7. в
11.8. б	11.9. б	11.11. д	12.1. б	12.2. а	12.4. в	12.5. г
12.7. в	13.1. б	13.3. в	13.4. б	13.5. а	13.7. а	14.4. е
14.5. в	14.7. в	14.8. б	14.9. в	14.10. в	14.11. г	14.12. г
14.13. б	14.14. д	14.16. в	15.2. б	15.4. д	15.7. а	16.1. д
16.2. в	16.4. а	16.5. г	16.7. д	17.1. а	17.2. г	17.3. в
17.4. б	17.5. в	17.6. г	17.7. а	17.8. б	17.9. д	17.10. е
18.1. в	18.2. а	18.4. а	18.6. а	18.7. г	18.9. а	18.10. в

19.4.	$\vec{E} = -\beta(\vec{i}x + \vec{j}y) / \sqrt{x^2 + y^2}$, линии \vec{E} направлены к точке 0
19.5.	парабола $y = (3x^2 - 1) / 2$
19.7.	$\varphi = E_0(3x - 4y) / 5 + \text{const}$
19.8.	$\varphi(z) = \varphi_0 - \sigma z / (2\varepsilon_0\varepsilon)$
19.10.	$W = 2\pi\sigma^2 r_1^3 (r_2 - r_1) / (\varepsilon_0\varepsilon r_2)$
19.11.	можно, $\varepsilon = q / (q - \Delta q)$
19.13.	тепловая мощность не меняется, если $r = \sqrt{2}R$
19.16.	может, если $b > 2a$
19.17.	может, если $r > 4mv / (\mu_0 qi)$; $\Delta t = 4\pi m / (\mu_0 qi)$
19.18.	$F_1 / F_2 = 1 / (1 - \varepsilon_0\mu_0 v^2)$
19.21.	$E = \Phi_0 \exp(-\alpha t) / (2\pi\alpha r)$, по часовой стрелке
19.22.	$B \geq \sqrt{mgR / v_0 l^2}$
19.24.	может, $L = 2CR^2 / 3$
19.25.	$\omega_{\max} = 1 / RC$
19.26.	оба не правы; $0 \leq \theta \leq \infty$ при $R = 2\sqrt{L/C}$ (при $\beta = \omega_0$)

Библиографический список

- [1] Иродов И.Е. "Электромагнетизм. Основные законы", М.: "БИНOM", 2009, 320 с.
- [2] Матвеев А.Н. "Электричество и магнетизм", М.: "ОНИКС 21 век", 2005, 464 с.
- [3] Савельев И.В. "Курс физики" Т.2 " Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика ", СПб.;М.: Лань, 2008, 468 с.
- [4]. Трофимова Т.И. "Основы физики", М.: "Высш. шк.", 2007, 270 с.
- [5] Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. "Электричество и магнетизм: лекции по физике", Тула: Изд-во ТулГУ, 2008, 140 с.
- [6] Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. "Электромагнетизм и оптика: лекции по физике" Тула: Изд-во ТулГУ, 2010, 130 с.
- [7] Иродов И.Е. "Задачи по общей физике", М.: "Бином", 2007, 431 с.
- [8] Трофимова Т.И. "Физика. Справочник с примерами решения задач", М.: "Юрайт", 2010, 448 с.
- [9] Трофимова Т.И. "Руководство к решению задач по физике: учебное пособие для бакалавров ", М.: "Юрайт", 2011, 266 с.
- [10] Чертов А.Г., Воробьев А.А. "Задачник по физике. Уч. пособие для втузов", М.: "Изд-во физ.мат.лит-ры", 2001, 640 с.
- [11] Фирганг Е.В. "Руководство к решению задач по курсу общей физики", СПб., М.: "Лань", 2008, 352 с.
- [12] Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А. "Задачи и методы их решения: Пособие для подготовки к итоговому междисциплинарному экзамену по математическим и естественнонаучным дисциплинам", Тула: Изд-во ТулГУ, 1999, 101 с.
- [13] под ред. Ивероновой В.И. "Физический практикум. Электричество и оптика", М.: "Наука", 1968, 818 с.
- [14] под ред. Крынецкого И.Б., Струкова Б.А.. "Общая физика: руководство по лабораторному практикуму", М.: "ИНФРА-М", 2008, 599 с.

Учебное издание

Колмаков Юрий Николаевич

Кажарская Светлана Евгеньевна

ФИЗИКА. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.

**РУКОВОДСТВО К ПРОВЕДЕНИЮ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

Учебное пособие

Авторское редактирование

Подписано в печать 11.10.17. Формат бумаги 70/100 1/16

Бумага типограф. № 2. Офсетная печать.

Усл. печ. л. 12.7.

Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ТулГУ.

300012, Тула, просп. Ленина, 92.

Отпечатано в Издательстве ТулГУ.

300012, Тула, просп. Ленина, 95.