

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра физики

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**  
**по дисциплине**

**"Физика"**

Для направлений подготовки:

*09.03.01 Информатика и вычислительная техника*

*09.03.02 Информационные системы и технологии*

*09.03.03 Прикладная информатика*

*10.03.01 Информационная безопасность*

*10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем*

Форма обучения *очная*

Тула – 2021

## Семестр 3

12. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ	
12.1. Поле покоящегося точечного заряда. Напряженность и потенциал поля. Принцип суперпозиции.	
Поле системы покоящихся зарядов. Сила Кулона.....	65
12.2. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле.....	66
12.3. Связь напряженности и потенциала электростатического поля. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности.....	67
12.4. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля.....	68
12.5. Применение теоремы Гаусса для расчета напряженности: поле равномерно заряженного шара, провода (нити), плоскости.....	68
12.6. Теорема Гаусса для электростатического поля в дифференциальной форме.....	70
12.7. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля.....	70
12.8. Электрический диполь. Энергия диполя в электрическом поле, действующая на него сила и момент сил.....	71
13. ПРОВОДНИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ	
13.1. Поверхностные заряды. Поле вблизи поверхности заряженного проводника.....	72
13.2. Явление электрической индукции. Экранировка поля проводящим слоем. Электростатическая защита.....	73
13.3. Электрическая ёмкость проводника. Конденсаторы и ёмкость конденсаторов.....	73
13.4. Энергия взаимодействия системы электрических зарядов. Энергия заряженного конденсатора.....	75
14. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ	
14.1. Причины поляризации диэлектриков. Вектор поляризованности. Объемные и поверхностные связанные заряды.....	76
14.2. Диэлектрическая проницаемость среды и вектор электрической индукции.....	77
14.3. Теорема Гаусса для векторов поляризованности и электрической индукции.....	77
14.4. Электрическое поле в диэлектрике.....	78
14.5. Поле на границе диэлектрика. Граничные условия для векторов напряженности и электрической индукции.....	79
14.6. Плотность энергии электростатического поля в диэлектрике.....	79
15. СТАЦИОНАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	
15.1. Сила тока и плотность тока.....	80
15.2. Уравнение непрерывности электрического заряда и условие стационарности тока.....	81
15.3. Электрическое поле в проводнике с током и закон Ома в локальной форме.....	81
15.4. Причина затухания тока. Электрическое сопротивление проводника. Законы Ома и Джоуля-Ленца.....	82
15.5. Условие квазистационарности тока.....	83
15.6. Причины появления электродвижущей силы. Источники ЭДС.....	84
15.7. Закон Ома для неоднородного участка цепи.....	84
15.8. Разветвленные электрические цепи. Правила Кирхгофа и их применение.....	85
16. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ	
16.1. Причина появления магнитного поля. Вектор индукции магнитного поля.....	86
16.2. Сила Лоренца.....	87
16.3. Магнитное поле движущегося электрического заряда и элемента тока. Закон Био-Савара-Лапласа.....	88
16.4. Сила Ампера.....	89
16.5. Теорема Гаусса для индукции магнитного поля.....	90
16.6. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля.....	90
16.7. Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитного поля: поле цилиндрического провода с током, поверхностного тока, соленоидальной и тороидальной катушки с током.....	91
16.8. Теорема о циркуляции вектора индукции в дифференциальной форме.....	92
16.9. Сравнение особенностей электростатического и магнитостатического полей.....	93
16.10. Движение заряженной частицы в постоянных магнитном и электрическом полях.....	93
16.11. Дипольный магнитный момент контура с током.....	94
16.12. Энергия замкнутого проводника с постоянным током во внешнем магнитном поле.	
Сила и момент силы, действующие на контур с током.....	94
17. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ	
17.1. Намагничивание среды и вектор намагниченности.....	95
17.2. Магнитная проницаемость среды и вектор напряженности магнитного поля.....	96
17.3. Теорема о циркуляции вектора напряженности и вектора намагниченности.....	97
17.4. Магнитное поле в магнетиках. Поле постоянного магнита.....	98
17.5. Поле на границе магнетика. Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.....	99
17.6. Причины появления диа-, пара- и ферромагнетизма.....	100
18. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ	
18.1. Природа ЭДС электромагнитной индукции в проводниках, движущихся в магнитном поле.	
Принцип действия электромотора и генератора электрического тока.....	101
18.2. Вихревое электрическое поле и причина его появления.....	102
18.3. Закон Фарадея и правило Ленца.....	103

18.4. Проводник и постоянный магнит в переменном магнитном поле. Индукционные токи (токи Фуко).....	103
18.5. Коэффициент индуктивности. Индуктивность соленоида.....	104
18.6. Плотность энергии магнитного поля.....	105
18.7. Явление самоиндукции и ЭДС самоиндукции.....	105
18.8. Явление взаимной индукции. Коэффициенты взаимной индуктивности и принцип действия трансформатора.....	106
<b>19. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ</b>	
19.1. Электрический колебательный контур. Собственные электрические колебания в контурах (незатухающие и затухающие), их характеристики.....	107
19.2. Вынужденные электрические колебания.....	108
19.3. Резонанс напряжения на конденсаторе и тока в контуре. Добротность контура.....	109
19.4. Полное сопротивление (импеданс) контура. Эффективные ток и напряжение.....	110
<b>20. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ</b>	
20.1. Ток смещения.....	111
20.2. Система уравнений Максвелла.....	112
20.3. Поток плотности энергии электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга и теорема Пойнтинга.....	113

### **Семестр 3-4**

<b>21. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ.</b>	
21.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля в идеальном диэлектрике (вакууме).....	115
21.2. Электромагнитные волны. Волновой вектор. Скорость электромагнитных волн. Связь напряженности электрического и магнитного поля в электромагнитной волне.....	115
21.3. Шкала электромагнитных волн.....	116
21.4. Энергия и импульс электромагнитной волны.....	117
21.5. Излучение электромагнитных волн ускоренными зарядами. Волновая зона.....	118

### **Семестр 4**

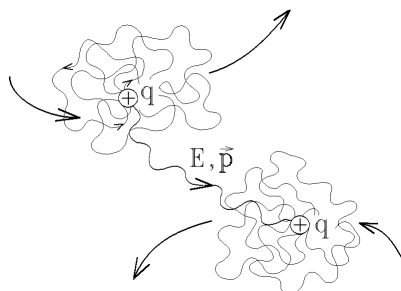
21.6. Суперпозиция электромагнитных волн. Условие когерентности и возникновение интерференции.....	119
21.7. Оптическая разность хода. Условия максимума и минимума при интерференции.....	120
21.8. Интерференционная схема Юнга.....	120
21.9. Интерференция в тонких пленках.....	122
21.10. Принцип Гюйгенса-Френеля.....	123
21.11. Дифракция света на узкой щели и круглом препятствии. Условие дифракционного минимума.....	123
21.12. Многолучевая интерференция. Дифракционная решетка и принцип спектрометрии.	
Критерий Рэлея. Разрешающая способность дифракционной решетки.....	126
21.13. Поляризация электромагнитных волн. Поляризаторы и закон Малюса.....	127
<b>22. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ</b>	
22.1. Характеристики теплового излучения. Энергетическая светимость, излучательная и поглощательная способность.....	129
22.2. Закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина для теплового излучения абсолютно черного тела. Коэффициент поглощения.....	130
22.3. Неприменимость законов классической физики. Гипотеза Планка.....	132
<b>23. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МИКРОЧАСТИЦ</b>	
23.1. Фотон. Энергия и импульс фотона.....	132
23.2. Внешний и внутренний фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Работа выхода электрона из металла и красная граница фотоэффекта.....	132
23.3. Эффект Комптона.....	133
23.4. Гипотеза де Бройля. Волна де Бройля.....	134
23.5. Опыты по дифракции микрочастиц.....	134
23.6. Корпускулярно-волновой дуализм.....	135
<b>24. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ АТОМА</b>	
24.1. Планетарная модель атома. Постулат Бора. Боровские электронные орбиты в одноэлектронном атоме. Спектр энергии одноэлектронного атома.....	135
24.2. Излучение одноэлектронного атома. Спектральные серии.....	136
24.3. Орбитальный момент импульса и орбитальный магнитный момент электрона в атоме. Орбитальное и магнитное квантовые числа.....	137
24.4. Опыты Штерна-Герлаха.....	138
24.5. Собственный момент импульса и собственный магнитный момент электрона. Спиновое квантовое число.....	138
24.6. Система четырех квантовых чисел и принцип Паули.....	139
24.7. Заполнение электронами оболочек и подоболочек в атоме.....	139
<b>25. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МИКРОСИСТЕМ</b>	
25.1. Опыт с прохождением микрочастицы через двухщелевую диафрагму. Волновая функция.....	140
25.2. Вероятностный смысл волновой функции. Квантовый принцип суперпозиции.....	141
25.3. Принцип неопределенности Гейзенберга. Соотношения неопределенностей и их	

смысл.....	142
25.4. Стационарное уравнение Шредингера.....	143
25.5. Микрочастица в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы.....	144
25.6. Туннельный эффект.....	145
25.7. Квантовый гармонический осциллятор.....	145
26. ОСНОВЫ ТЕОРИИ АТОМНОГО ЯДРА	
26.1. Состав атомного ядра. Нуклоны. Массовое и зарядовое число. Изотопы.....	146
26.2. Деление ядер.....	146
26.3. $\alpha$ -, $\beta$ - и $\gamma$ -излучение. $\alpha$ - и $\beta$ -распад ядер.....	147
26.4. Естественная радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Период полураспада.....	148
26.5. Энергия выхода ядерной реакции распада. Дефект масс.....	149
26.6. Удельная энергия связи нуклонов в ядре. Устойчивость и неустойчивость ядер.	
Возможность термоядерного синтеза.....	150

## 12. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.

### 12.1. Поле покоящегося точечного заряда. Напряженность и потенциал поля. Принцип суперпозиции. Поле системы покоящихся зарядов. Сила Кулона

Электрическое поле возникает вокруг тел, имеющих электрический заряд. Действительно, каждое заряженное



тело окружено "облаком" непрерывно испускаемых и поглощаемых виртуальных частиц (виртуальных фотонов). Возникают эти частицы в соответствии с законами квантовой физики, и образуемое ими "облако" проявляется в виде электромагнитного поля, позволяющего заряженным частицам взаимодействовать на расстоянии. Заряженные тела взаимодействуют на расстоянии, обмениваясь виртуальными фотонами, переносящими энергию  $E$  и импульс  $\vec{p}$  от одной заряженной частицы к другой, как показано на рисунке.

Вначале мы рассмотрим свойства покоящихся зарядов, между которыми действуют только электрические силы. Электрическое поле, созданное системой покоящихся зарядов, называется электростатическим полем.

Электрический заряд  $q$  характеризует величину электрического взаимодействия и измеряется в кулонах. Точечным зарядом является заряженное тело, геометрическими размерами которого в данных условиях можно пренебречь. Закон Кулона устанавливает, что сила Кулона или сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся в вакууме на расстоянии  $r$  друг от друга, определяется выражением

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}, \text{ а постоянная } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м называется электрической постоянной.}$$

Заметим, что нескомпенсированный заряд в 1 Кл — это очень большой заряд: два точечных заряда в 1 Кл каждый, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, будут отталкиваться с силой Кулона  $F_{\text{кул}} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н}$ !

Заметим также, что закон Кулона для двух точечных взаимодействующих зарядов и закон гравитационного притяжения Ньютона для двух материальных точек имеют аналогичный вид. Так, если поместить один точечный заряд  $q$  в начало координат (рис.), то на другой точечный заряд  $q_0$  будет действовать сила Кулона

$$\vec{F}_{\text{кул}} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \text{ где } \vec{e}_r = \vec{r}/r - \text{единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора,}$$

соединяющего заряды. Подобным же образом запишется и сила гравитационного притяжения Ньютона для аналогично расположенных материальных точек с массами  $m$  и  $m_0$ :

$$\vec{F}_{\text{грав}} = G \frac{mm_0}{r^2} \vec{e}_r. \text{ Поэтому все классические законы для электростатического и гравита-}$$

ционного полей одинаковы по форме. Однако между электростатическим и гравитационным взаимодействиями существуют и некоторые отличия.

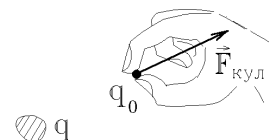
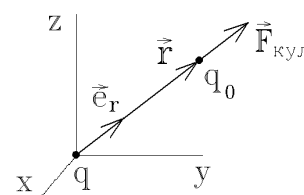
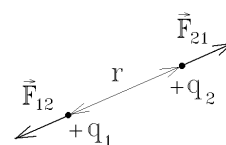
1) Знак массы (гравитационного заряда) всегда положителен, и гравитационная сила **притягивает** положительные массы. Электрический же заряд  $q$  может быть и положительным, и отрицательным, причем сила Кулона **отталкивает** одноименные заряды и **притягивает** разноименные.

2) Электрическое взаимодействие намного сильнее гравитационного. А так как наш мир электрически нейтрален, т.е. полный (положительный и отрицательный) заряд в нем равен нулю, то значительно более слабые гравитационные силы в нем становятся заметными и могут достигать огромной величины только из-за большой суммарной массы всех частиц.

3) Электрический заряд нельзя уменьшать до сколь угодно малой величины. Имеется минимально возможный и **неделимый** заряд, равный или заряду электрона  $|e| = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , или зарядам кварков —  $|e|/3, 2|e|/3$ . Но кварки объединены в элементарные частицы, заряды которых также кратны заряду электрона  $e$ . Поэтому все заряды в природе кратны заряду электрона:  $q = Ne$ , где  $N$  - целое.

Величину электрического поля точечного заряда  $q$  характеризуют или напряженностью, или потенциалом. Поднесем к заряду  $q$  некоторый пробный заряд  $q_0$  и разделим силу их взаимодействия на величину пробного заряда. Полученный вектор называется напряженностью поля, созданного точечным зарядом  $q$  на расстоянии  $r$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{кул}}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$



Напряженность поля численно равна кулоновской силе, действующей на единичный положительный заряд, внесенный в поле, и направлена вдоль этой силы.

Но кулоновская сила центральна, а все центральные силы **консервативны**, т.е. работа силы Кулона при изменении расстояния  $r$  между точечными зарядами  $q$  и  $q_0$  идет на изменение потенциальной энергии кулоновского электрического взаимодействия между зарядами (энергию электромагнитных взаимодействий принято обозначать буквой  $W$ ):

$$dA = \vec{F}_{\text{кул}} d\vec{r} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \cdot |d\vec{r}| = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -dW_{\text{кул}}.$$

Интегрируя, получаем выражение этой энергии:

$$W_{\text{кул}} = \int \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Потенциальная энергия определена с точностью до постоянной, которую считаем равной нулю (заряды, разнесенные на бесконечное расстояние  $r = \infty$  не взаимодействуют, а поле любого заряда на бесконечном удалении равно нулю).

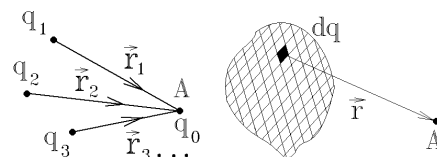
Разделив эту энергию на величину пробного заряда  $q_0$ , получаем потенциал поля, созданного точечным зарядом  $q$  на расстоянии  $r$ :

$$\phi = \frac{W_{\text{кул}}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Потенциал – это скалярная характеристика электрического поля, равный энергии единичного положительного заряда, находящегося в данном поле.

Если поле создается системой точечных зарядов, то напряженности полей, созданных каждым точечным зарядом  $q_i$ , складываются векторно, и результирующее поле в точке А, указанной на рисунке, выражается формулой

$$\vec{E}_A = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i. \text{ Это – принцип суперпозиции полей.}$$



Аналогично вычисляется суммарный потенциал электрического поля системы точечных зарядов:

$$\phi_A = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}.$$

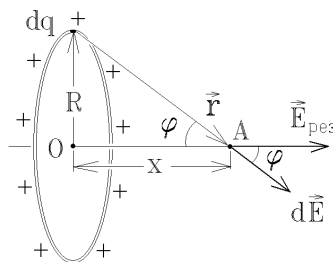
Заметим, что **результирующий потенциал системы вычислить проще**, так как потенциалы отдельных зарядов складываются скалярно, без учета направления их полей, но записанная сумма будет **алгебраической**, учитывающей знаки отдельных зарядов.

В прикладных технических задачах обычно заряд распределен по некоторой области. В этом случае объём, заполненный зарядом разбивают на крошечные участки  $dV$ , которые имеют заряд  $dq$  и которые можно считать **точечными**

**зарядами**. Вводят величину объёмной плотности электрического заряда  $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \right]$ . Тогда  $dq = \rho dV$  и можно применить тот же принцип суперпозиции, заменяя сумму на интеграл по объему, заполненному зарядом:

$$\vec{E}_A = \int_V d\vec{E} = \int_V \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad \text{и} \quad \phi_A = \int_V d\phi = \int_V \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

*Пример:* пусть заряд  $q$  равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса  $R$ .



В этом случае вводят линейную плотность заряда  $\rho_{\text{лин}} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right]$ , разбивая

кольцо на крошечные участки длиной  $dl$ , заряды  $dq = \rho_{\text{лин}} dl$  на которых будут точечными (в данном примере  $\rho_{\text{лин}} = q/2\pi R$ ). Тогда, так как  $r = R^2 + x^2$  и  $\cos \varphi = x/r$ , то в точке А на оси кольца на расстоянии  $x$  от его центра О получим

$$E_{\text{рез}} = \int dE \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \varphi}{r^2} \int dq = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

## 12.2. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле

Если точечный заряд  $q_0$  движется в поле системы точечных зарядов  $q_i$ , то, используя принцип суперпозиции

$dA = \vec{F}_{\text{рез}} \cdot d\vec{r} = \sum_i \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_i dA_i$  и интегрируя, находим работу по перемещению заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2 в электростатическом поле системы **покоящихся** точечных зарядов:  $A_{1 \rightarrow 2} = \sum_i A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left( \frac{q_i q_0}{r_{1i}} - \frac{q_i q_0}{r_{2i}} \right)$ , где  $r_{1i}$ ,  $r_{2i}$  – рас-

стояния от точек 1 и 2 до заряда  $q_i$ . Учитывая выражение для потенциала данной системы зарядов, записываем данную формулу в более удобном виде:

$$A_{12} = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Работа по перемещению точечного заряда в электростатическом поле равна произведению заряда на величину разности потенциалов в точках начального и конечного положения заряда.

Можно сказать, что энергия точечного заряда  $q$  в поле с потенциалом  $\varphi$  равна  $W = q\varphi$ .

В качестве единицы работы или энергии часто используют внесистемную, но очень удобную единицу электрон - вольт – это приращение кинетической энергии электрона, прошедшего разность потенциалов в 1 Вольт:

$$1 \text{ эВ} = e \cdot 1 \text{ В} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

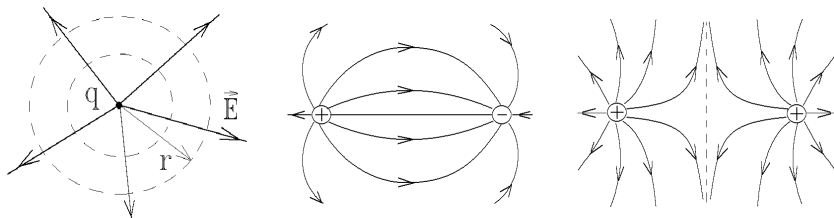
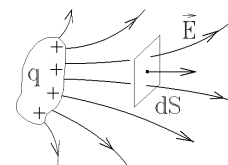
*Пример:* пролетая через заряженный конденсатор частица с положительным зарядом  $q_0$  должна ускориться в электрическом поле конденсатора и увеличить свою кинетическую энергию. С другой стороны изменение кинетической энергии равно изменению потенциальной энергии:  $\Delta E_{\text{кин}} = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = q_0 (\varphi|_{x=\infty} - \varphi|_{x=-\infty}) = q_0 (0 - 0) = 0$  (потенциалы на бесконечном удалении равны нулю). Попытайтесь объяснить это противоречие.

*Замечание:* можно доказать теорему Ирншоу: любая система зарядов не может находиться в равновесии под действием только электростатических сил между ними.

### 12.3. Связь напряженности и потенциала электростатического поля. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Удобно изображать электростатическое поле с помощью силовых линий – это линии, касательные, к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности  $\vec{E}$  (не имеющий начальной скорости свободный точечный заряд  $q_0$  в электрическом поле всегда начинает двигаться под действием кулоновской силы вдоль силовой линии). Плотность силовых линий или число силовых линий  $dN$ , пересекающих расположенную под прямым углом площадку  $dS$ , пропорциональна величине напряженности поля  $E$  в данной точке:  $dN/dS = E$ .

Окружим точечный заряд  $q$  сферическими поверхностями  $S$  с разными радиусами  $r$ . Так как  $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ , то число силовых линий, пересекающих каждую сферическую замкнутую поверхность с площадью  $S = 4\pi r^2$  не зависит от расстояния до заряда:  $N = \int E dS = q/\epsilon_0 = \text{const}$ .



Следовательно, силовые линии не могут начинаться или заканчиваться в вакууме. Силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность.

Вспомним, что любая консервативная сила связана с потенциальной

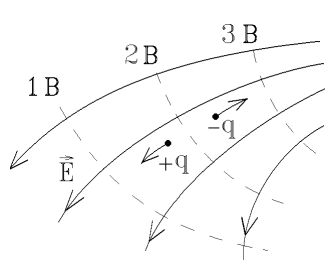
энергией соотношением  $\vec{F} = -\text{grad } W$ . Разделив левую и правую часть этого выражения на пробный заряд  $q_0$ , получим соотношение между потенциалом и напряженностью электростатического поля:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\vec{\nabla} \varphi = -\left( \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Так как в случае радиальной симметрии, когда потенциал зависит только от расстояния  $r$  до центра заряженной системы  $\varphi = \varphi(r)$ , оператор градиента имеет вид  $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial/\partial r$ , то, например, для точечного заряда получаем записанную ранее

формулу закона Кулона:  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

Обратная связь выражается интегралом:  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} E_x dx + \int_{y_1}^{y_2} E_y dy + \int_{z_1}^{z_2} E_z dz$ .



Совокупность точек (поверхность) с одинаковым потенциалом  $\varphi = \text{const}$  называется эквипотенциальной поверхностью. Вектор напряженности  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$  и силовые линии поля всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям, которые изображены штриховыми линиями на рисунке. Вектор  $\text{grad } \varphi$  направлен в сторону максимального возрастания потенциала; силовые линии направлены противоположно. Поэтому свободные **положительные** заряды стремятся двигаться вдоль силовой линии в сторону **уменьшения** потенциала, а **отрицательные** – в сторону **возрастания** потенциала. При движении заряда по эквипотенциальной поверхности электрические силы не

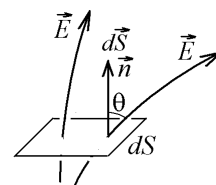
совершают работу:  $A = q \cdot \Delta\varphi = 0$ .

Чем гуще расположены эквипотенциальные поверхности, тем больше  $\text{grad } \varphi$  в данной точке поля, и тем больше электрическая сила  $\vec{F}_{\text{кул}} = -q \cdot \text{grad } \varphi$ .

Заметим также, что для сложной системы зарядов проще вычислить потенциал, а затем, по известному распределению потенциала  $\varphi$  всегда можно вычислить напряженность поля  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ .

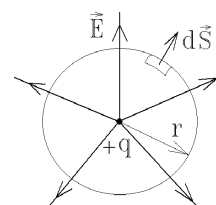
## 12.4. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля

Любую площадку  $dS$  описывают нормальным к ней вектором  $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали. Поток вектора  $\vec{E}$  через эту площадку, как и поток любого вектора, равен скалярному произведению вектора  $\vec{E}$  на вектор площадки:  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \theta = dN$  – это число силовых линий  $\vec{E}$  электростатического поля, пересекающих площадку  $dS$ .



Разбивая любую **замкнутую** поверхность  $S$  на элементарные площадки  $d\vec{S}$ , договоримся всегда направлять вектор нормали  $\vec{n}$  и вектор площадки  $d\vec{S}$  из замкнутой поверхности **наружу**, как показано на рисунке. Тогда входящие в замкнутую поверхность силовые линии  $\vec{E}$  создают отрицательный поток, так как  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} < 0$  (они отмечены знаком "-"), а выходящие из нее линии  $\vec{E}$  создают положительный поток, так как для них  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$  (отмечены знаком "+"). Если внутри замкнутой поверхности  $S$  электрических зарядов нет, то все вошедшие в нее линии  $E$  должны выйти (см. рисунок), и поток вектора  $\vec{E}$  через такую поверхность будет равен нулю.

Охватим теперь точечный заряд  $q$  сферической поверхностью радиуса  $r$ , тогда  $\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos 0^\circ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \text{const}$  – это число силовых линий, пересе-



кающих замкнутую сферическую поверхность  $S$ . А так как силовые линии не возникают и не исчезают в вакууме, то их число  $\Phi_E$  будет одинаково для любой замкнутой поверхности  $S$  произвольной формы. На участке AC (см. левый рисунок) линии  $\vec{E}$  выходят из замкнутой поверхности  $S$  и берутся со знаком "+", а на участке AB они же входят со знаком "-", т.е. поток вектора напряженности не зависит от формы замкнутой поверхности, охватывающей электрический заряд  $q$ :  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \text{const}$ .

Если внутри замкнутой поверхности находится система электрических зарядов, то используем принцип суперпозиции:

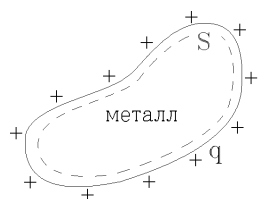
$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \oint \sum_i \vec{E}_i d\vec{S} = \oint \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos 0^\circ = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}.$$

Это – **теорема Гаусса** для электростатического поля в вакууме:

поток вектора напряженности электростатического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ .

Если заряд распределен внутри поверхности непрерывно с плотностью  $\rho$ , то  $\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$ , где интеграл берется по объему внутри рассматриваемой замкнутой поверхности.

## 12.5. Применение теоремы Гаусса для расчета напряженности: поле равномерно заряженного шара, провода (нити), плоскости



### 1. Заряженный проводник.

Свободные электроны в проводнике (металле) распределяются так, что результирующее поле внутри проводника отсутствует, т.е.  $\vec{E} = 0$  (иначе электроны будут перемещаться в поле  $\vec{E}$  до тех пор, пока оно не исчезнет).

Выберем любую замкнутую поверхность  $S$  внутри проводника (см. рисунок)



Согласно теореме Гаусса для нее  $\frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \oint_{\vec{S}=0} \vec{E} d\vec{S} = 0$

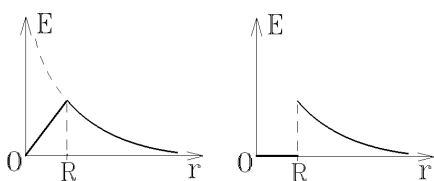
т.е. внутри проводящей среды нескомпенсированного покоящегося заряда быть не может. Свободный заряд, сообщенный проводящему телу, распределяется только по его поверхности.

## 2. Заряженный шар.

Пусть заряд  $q$  равномерно распределен по объему шара радиуса  $R$  с объемной плотностью  $\rho = q / \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$ . Окружим шар сферической поверхностью радиуса  $r > R$ . В силу симметрии распределения заряда величина  $|\vec{E}|$  должна быть одинаковой в каждой

точке этой поверхности  $S$ . Тогда  $\oint \vec{E} d\vec{S} = E \cos 0^\circ \cdot 4\pi r^2 = q / \epsilon_0$ , откуда с учетом направления линий поля получаем

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$  при  $r > R$  (вне равномерно заряженного шара его совпадает с полем точечного заряда  $q$ , помещенного в центр шара).



Охватим теперь центр шара другой сферической поверхностью радиуса  $r < R$ . Снова  $|\vec{E}| = E = \text{const}$  во всех точках этой поверхности, и, используя теорему Гаусса, находим  $\oint \vec{E} d\vec{S} = E \cos 0^\circ \cdot 4\pi r^2 = q_{\text{внутри}} / \epsilon_0$ , но внутри поверхности теперь находится заряд  $q_{\text{внутри}} = \rho \cdot 4\pi r^3 / 3$ . Поэтому внутри шара поле выражается формулой

$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$  при  $r < R$ . Зависимость напряженности поля равномерно заряженного шара от расстояния  $r$  до центра шара

изображена на левом рисунке. Но если шар сделан из проводящего материала, то весь свободный заряд равномерно распределится по его поверхности ( $q_{\text{внутри}} = 0$ ), и напряженность поля такого шара (или поля равномерно заряженной сферы радиуса  $R$ ) будет иметь вид, показанный на правом рисунке.

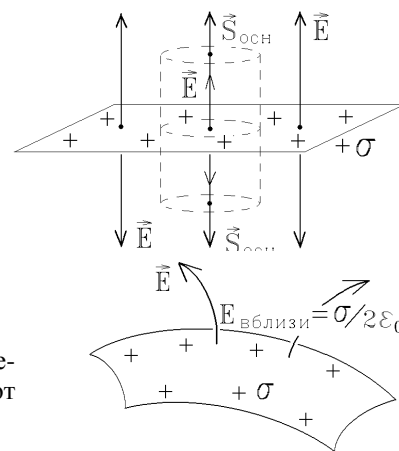
## 3. Равномерно заряженная плоскость.

Если заряд распределен по бесконечной плоскости равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$  (это заряд, приходящийся на единицу площади), то вследствие симметрии линии  $\vec{E}$  перпендикулярны плоскости, как показано на рисунке. Выберем замкнутую поверхность в виде цилиндра с площадью основания  $S_{\text{осн}}$ . Линии  $\vec{E}$  пересекают только основания, поэтому

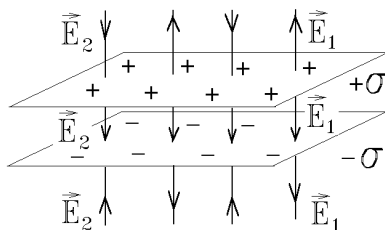
$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 2ES_{\text{осн}} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\epsilon_0} \quad \text{и} \quad E_{\text{заряд плоскости}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Поле равномерно заряженной плоскости не зависит от расстояния до неё.

Эту формулу можно применить и для заряженной плоскости конечных размеров, и для заряженных искривленных поверхностей, но только в точках, удаленных от краев и находящихся **вблизи** поверхности.



## 4. Заряженный плоский конденсатор.



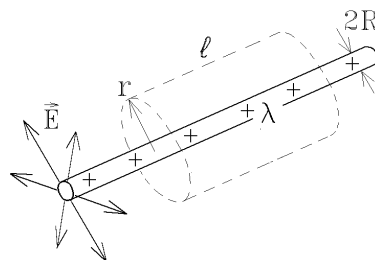
В таком конденсаторе разноименно заряженные с поверхностной плотностью  $\sigma \approx \text{const}$  пластины находятся на малом расстоянии друг от друга, и приближенно их можно считать бесконечными.

В отрицательно заряженную плоскость линии  $\vec{E}_2$  входят, а из положительно заряженной плоскости линии  $\vec{E}_1$  выходят. Поэтому между пластинами  $E = E_1 + E_2 = 2 \cdot \sigma / 2\epsilon_0$ , т.е. **внутри** конденсатора  $E = \sigma / \epsilon_0$ .

а вне конденсатора  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$  (поля положительно и отрицательно заряженных пластин конденсатора взаимно компенсируются).

## 5. Заряженный цилиндр (нить).

Пусть заряд распределен по бесконечному прямому цилиндру радиуса  $R$  с линейной плотностью  $\rho_{\text{лин}} = \lambda$  (это заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра или нити). Охватим участок цилиндра коаксиальной замкнутой цилиндрической поверхностью длины  $l$  и радиуса  $r$ .



Так как в силу симметрии распределения заряда линии  $\vec{E}$  должны расходиться вдоль радиальных направлений, то они будут пересекать только боковую поверхность цилиндра, причем на одинаковом удалении  $r$  от оси величина

$$E = \text{const. Из теоремы Гаусса находим } \oint \vec{E} d\vec{S} = E \cdot S_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r l = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}. \text{ Поэтому вне равномерно заря-}$$

женного цилиндра (или прямой нити) поле убывает с расстоянием  $r$  по закону  $E_{\text{заряд нити}} = \lambda / 2\pi\epsilon_0 r$ .

## 12.6. Теорема Гаусса для электростатического поля в дифференциальной форме

Из курса векторного анализа известна теорема Остроградского: поток любого вектора  $\vec{A}$  через любую замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции  $\vec{A}$  по объёму, охватываемому этой поверхностью, т.е.

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} dV.$$

Дивергенцию вектора  $\vec{A}$  легко найти по формуле

$$\text{div} \vec{A} \equiv \nabla \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Применим теперь теорему Остроградского к вектору напряженности электрического поля:  $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV$ . С другой

стороны, согласно теореме Гаусса,  $\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$ , где интеграл берется по всему объёму  $V$ , охваченному

замкнутой поверхностью  $S$  и заполненному зарядом с объемной плотностью  $\rho$ . Так как эти две теоремы справедливы для произвольного объема  $V$ , то из равенств интегралов следует равенство подынтегральных функций, т.е.

$$\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0.$$

Это – теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в дифференциальной форме. Она позволяет по известной функции напряженности (или потенциала) электростатического поля вычислить распределение плотности электростатического заряда, создающего это поле.

Заметим, что в тех точках поля, где дивергенция любого вектора  $\vec{A}$  положительна ( $\text{div} \vec{A} > 0$ ), возникают линии вектора  $\vec{A}$ . Эти точки называются источниками векторного поля  $\vec{A}$ . В точках, где  $\text{div} \vec{A} < 0$ , линии вектора  $\vec{A}$  исчезают (это – стоки поля  $\vec{A}$ ). Например, в точках, где имеется положительный заряд,  $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 > 0$ , появляются силовые линии электрического поля (как уже говорилось раньше, они начинаются на положительных зарядах). А в тех точках, где имеется отрицательный заряд,  $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 < 0$ , силовые линии электрического поля исчезают (на отрицательных зарядах). В точках, где заряда нет,  $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 = 0$  (но  $\vec{E} \neq 0$ ), силовые линии не могут исчезать или появляться.

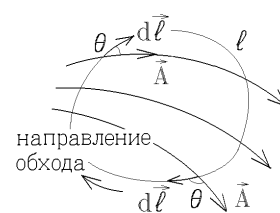
## 12.7. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля

Величина, равная интегралу от любого вектора  $\vec{A}$  по замкнутому контуру  $l$ , т.е.:

$$\oint_l \vec{A} d\vec{l} = \oint_l \vec{A} \cdot \cos \theta dl, \text{ называется } \underline{\text{циркуляцией вектора } \vec{A} \text{ по замкнутому контуру } l}. \text{ Она за-}$$

висит от направления обхода контура (при изменении направления обхода изменяется знак циркуляции).

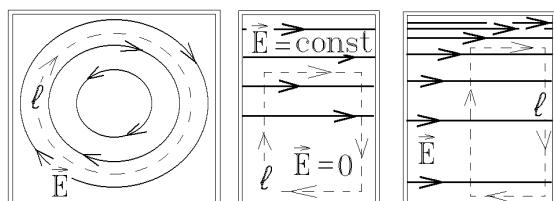
$$\text{Но для электростатического поля } \oint_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \phi_1 - \phi_2. \text{ Поэтому}$$



$$\text{Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю: } \oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Это – теорема циркуляции вектора  $\vec{E}$  для электростатического поля. Она эквивалентна утверждению о том, что при перемещении по замкнутому пути работа кулоновских сил равна нулю. Иначе говоря, все поля, циркуляция вектора напряженности которых по любому замкнутому контуру равна нулю, потенциальны, а силы в этих полях **консервативны**.

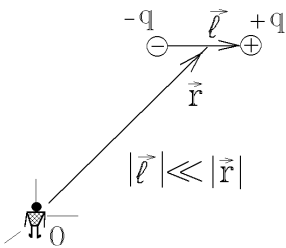
Из теоремы о циркуляции следует, что не могут существовать **электростатические** поля, фрагменты силовых линий которых изображены на рисунках слева. Действительно циркуляция  $\vec{E}$  вдоль замкнутых контуров  $l$ , показанных штриховыми линиями на этих фрагментах, не равна нулю, что нарушает теорему о циркуляции  $\vec{E}$ .



## 12.8. Электрический диполь. Энергия диполя в электрическом поле, действующая на него сила и момент сил

Электрическим диполем называется электронеутральная система зарядов, как правило, малого размера, у которой центры положительного и отрицательного заряда не совпадают. Простейший электрический диполь – это два точечных, одинаковых по величине и разных по знаку заряда, расстояние  $l$  между которыми мало по сравнению с расстоянием  $r$  от диполя до точки наблюдения  $O$ .

Электрический диполь характеризуется электрическим моментом:  $\vec{p}_e = ql\vec{l}$ , направленным от центра отрицательного заряда к центру положительного.



Вычислим потенциал электростатического поля, создаваемого простейшим диполем в точке  $O$ . С учетом суперпозиций полей двух точечных зарядов находим:

$$\varphi = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}.$$

Но из  $\triangle AOB$  на рисунке следует, что  $r_1^2 = r_2^2 + l^2 - 2r_2 l \cos \theta$  где  $l^2 \approx 0$ , так как  $l \leq r_2 \approx r_1 \approx r$  (второй порядок малости:),

т.е.  $r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2r l \cos \theta$ . С точностью до малых

высших порядка  $r_2 + r_1 \approx 2r$  и  $r_2 r_1 \approx r^2$ , т.е.  $r_2 - r_1 \approx l \cos \theta$  и

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

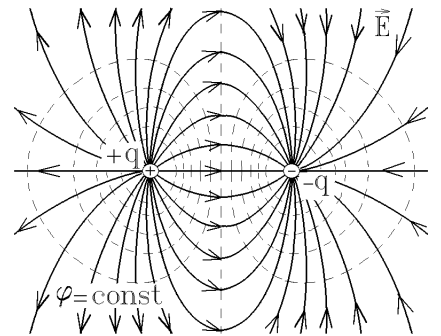
– это потенциал поля электрического диполя.

Напряженность поля, созданного диполем, получим, подставляя выражение grad в полярных координатах  $r, \theta$ :

$\vec{E}_{\text{дип}} = -\text{grad} \varphi_{\text{дип}} = -\left( \vec{e}_r \frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial \theta} \right)$ , т.е.  $\vec{E}_{\text{дип}} = \vec{e}_r \vec{E}_r + \vec{e}_\theta \vec{E}_\theta$  (здесь  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  – единичные орты в радиальном и перпендикулярном направлении). Радиальная составляющая вектора напряженности  $\vec{E} \equiv_r$  и перпендикулярно составляющая  $\vec{E}_\theta$  определяется, как  $\vec{E}_r = -\frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial r} = \frac{2p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$  и  $\vec{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial \theta} = \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ .

Тогда  $\vec{E}_{\text{дип}} = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$ . Т.е. величина напряженности

поля электрического диполя зависит от угла ориентации диполя  $\theta$  и расстояния  $r$  до диполя. Картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (штриховые линии) простейшего электрического диполя из двух точечных зарядов изображена на рисунке справа.



Во внешнем электрическом поле  $\vec{E}_{\text{вн}}$  на диполь действует пара сил, старающаяся повернуть электрический момент диполя  $\vec{p}_e$  вдоль силовой линии внешнего поля, как показано на рисунке. Момент этой пары сил имеет величину

$$M = F \cdot \underbrace{l \sin \theta}_{\text{плечо}} = q E_{\text{вн}} l \sin \theta = p_e E_{\text{вн}} \sin \theta,$$

где  $\theta$  – угол между векторами  $\vec{p}_e$  и  $\vec{E}_{\text{вн}}$ .

С учетом направления векторов, указанных на рисунке, вектор момента электрических сил, действующих на диполь, можно записать в виде векторного произведения:  $\vec{M} = [\vec{p}_e, \vec{E}_{\text{вн}}]$ .

Под действием этих сил свободные электрические диполи стремятся ориентироваться (повернуться) в направлении силовых линий внешнего электрического поля.

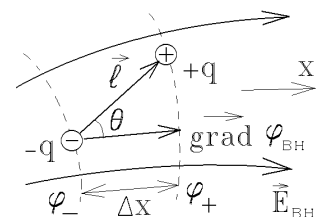
Принцип суперпозиции позволяет также вычислить энергию простейшего электрического диполя во внешнем электрическом поле:  $W_{\text{дип}} = q\varphi_+ + (-q)\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-)$ , где  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  – потенциалы внешнего поля в точках, где находятся заряды  $+q$  и  $-q$ .

Если направить ось  $x$  вдоль силовых линий внешнего поля, как показано на рисунке, то  $\varphi_+ - \varphi_- \approx \frac{\partial \varphi_{\text{вн}}}{\partial x} \cdot \Delta x = |\text{grad} \varphi_{\text{вн}}| \cdot l \cos \varphi = \vec{l} \cdot \text{grad} \varphi_{\text{вн}} = -\vec{l} \cdot \vec{E}_{\text{вн}}$ .

Следовательно, энергия диполя во внешнем электрическом поле:

$$W_{\text{дип}} = +q \cdot \varphi_+ - q \cdot \varphi_- = -q \vec{l} \cdot \vec{E}_{\text{вн}} = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}_{\text{вн}}$$

Тогда сила, действующая на диполь во внешнем электрическом поле, может быть представлена в виде



$$\vec{F} = -\text{grad} W_{\text{дип}} = \vec{\nabla} (\vec{p}_e \cdot \vec{E}_{\text{вн}})$$

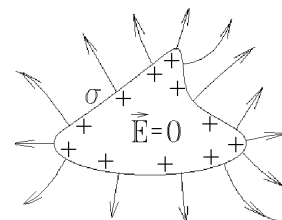
Эта сила стремится втянуть диполь в область более сильного электрического поля с большей величиной напряженности.

### 13. ПРОВОДНИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

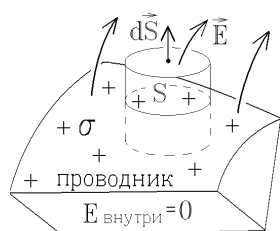
#### 13.1. Поверхностные заряды. Поле вблизи поверхности заряженного проводника

Из теоремы Гаусса следовало, что покоящиеся электрические заряды  $q$  распределяются только по поверхности проводника с некоторой поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , где  $q = \oint \sigma dS$  (интеграл берется по всей поверхности). А так как внутри проводника  $\vec{E} = -\text{grad} \phi_{\text{пров}} = 0$ , то в любой точке однородного проводника его потенциал одинаков:  $\phi_{\text{пров}} = \text{const}$ , т.е. **поверхность проводника является эквипотенциальной**. Но на границе двух разных проводников может возникать скачок потенциала.

Линии  $\vec{E}$  перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям, поэтому силовые линии электростатического поля всегда перпендикулярны к поверхности заряженного проводника (как бы ни был распределен в нем заряд  $\sigma$ ).

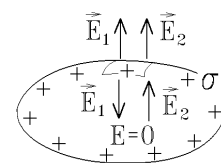


Поле  $\vec{E}$  **вблизи** поверхности проводника можно определить из теоремы Гаусса, выбирая



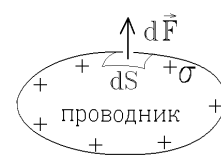
замкнутую поверхность в виде цилиндра с основанием  $S$  (вектор  $d\vec{S}$  перпендикулярен к поверхности проводника) и с очень малой высотой, эта замкнутая поверхность охватывает участок поверхности проводника с зарядом  $\sigma S$ . Линии  $\vec{E}$  пересекают только верхнее основание, поэтому  $\Phi_E = ES \cos 0^\circ = \sigma S / \epsilon_0$ , т.е. вблизи проводника в вакууме  $E = \sigma / \epsilon_0$ .

Это поле определяется не только зарядом  $\sigma$  в данном месте проводника. Дело в том, что заряд  $\sigma$  на участке поверхности создает поле  $\vec{E}_1$  (вблизи поверхности поле  $\vec{E}_1$  совпадает с полем бесконечной плоскости, заряженной с плотностью  $\sigma$ , т.е.  $E_1 = \sigma / 2\epsilon_0$ ). Остальной заряд на всей остальной поверхности проводника создает в этой же точке поле  $\vec{E}_2$ . Внутри проводника эти поля компенсируются:  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$ , как показано на рисунке, а вне проводника  $E = E_1 + E_2 = 2E_1 = \sigma / \epsilon_0$ . Т.е. половина напряженности поля вблизи проводника создается поверхностным зарядом  $\sigma$  в данном месте проводника, а половина – всем остальным зарядом проводника.

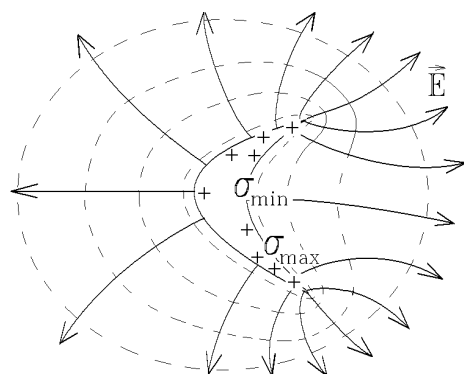


Но тогда весь остальной заряд проводника действует на участок заряда  $dq = \sigma dS$  с кулоновской силой

$$d\vec{F} = \sigma dS \vec{E}_2 = \frac{1}{2} \sigma \vec{E} dS = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S}.$$

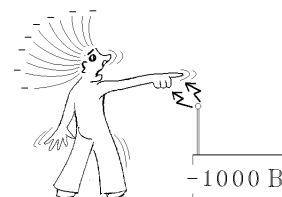


Эта сила нормальна к поверхности и старается растянуть поверхность заряженного проводника. Конечно, суммарная результирующая сила, действующая на весь заряженный проводник, обращается в нуль:  $\vec{F}_{\text{рез}} = \oint \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S} = 0$  (иначе заряженный проводник начнет самопроизвольно двигаться в вакууме).



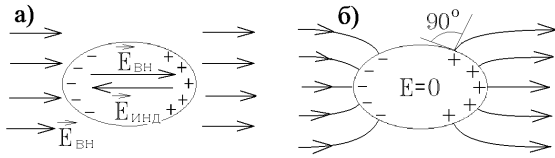
Если форма проводника несимметрична, то заряд распределится по поверхности проводника неравномерно:  $\sigma \neq \text{const}$ . Действительно, на большом удалении поле заряженного проводника (системы зарядов) совпадает с полем точечного заряда, имеющего сферические эквипотенциальные поверхности. Вблизи же проводника эквипотенциальные поверхности совпадут с его поверхностью, т.е. вблизи выступов эквипотенциальные поверхности **сгущаются**, и величина вектора  $\vec{E} = -\text{grad} \phi$  увеличивается. Но  $E = \sigma / \epsilon_0$ , и поэтому плотность зарядов  $\sigma$  на поверхности проводника будет максимальна на выступах и минимальна на впадинах.

*Пример:* статические электрические заряды стекают на конец каждого острия (волоса на рисунке). Не следует приближаться к выступающим (острым) концам заряженного проводника. Из-за большого электрического поля вблизи этих мест легко происходит электрический пробой и велика опасность поражения электрической искрой.



### 13.2. Явление электрической индукции. Экранировка поля проводящим слоем. Электростатическая защита

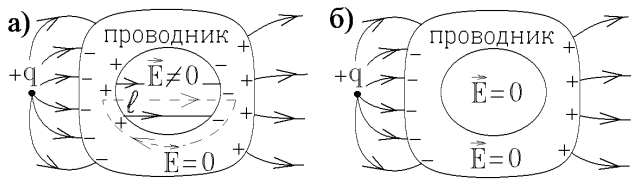
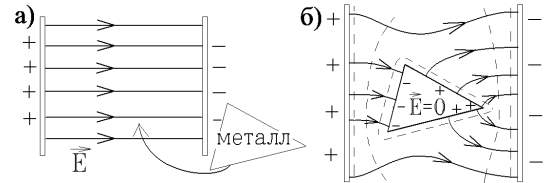
При внесении проводника во внешнее электрическое поле (рисунок а) свободные заряды начнут на нем начнут перераспределяться и движутся до тех пор, пока созданное ими поле не скомпенсирует внешнее поле внутри проводника (рисунок б).



Такое явление называется электрической индукцией, а появившиеся на поверхности проводника заряды – индуцированными зарядами. Поле, создаваемое индуцированными зарядами, складывается с

внешним полем, и силовые линии вне проводника искривляются.

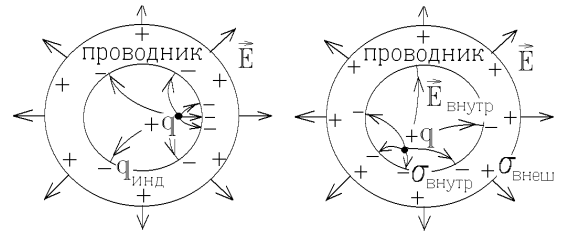
Например, после внесения куска металла в однородное электростатическое поле между двумя заряженными пластинами (рисунок а) на поверхности металла образуются разделившиеся индуцированные заряды разного знака (их сумма равна нулю, так как первоначально металл был незаряжен), а картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей вне металла показана на рисунке б.



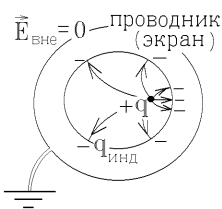
Поместим во внешнее электростатическое поле, созданное, например, точечным зарядом  $+q$  проводник (металл) с полостью внутри. Если бы на поверхности полости возникали индуцированные заряды, то циркуляция  $\vec{E}$  по контуру, показанному на рисунке а) штриховой линией, была бы отлична

от нуля:  $\oint \vec{E} d\vec{l} = E_{\text{в полости}} \cdot l \neq 0$ . Это нарушает теорему о циркуляции  $\vec{E}$ . Поэтому индуцированные заряды появляются только на внешней поверхности проводника, а внутри полости, охватываемой слоем металла, поле отсутствует  $\vec{E}_{\text{в полости}} = 0$  (рисунок б).

Точно так же, если поместить заряд  $+q$  внутрь полости и перемещать его, то поле  $\vec{E}$  внутри полости будет изменяться, как показано на рисунке. Но внутри слоя металла  $\vec{E} = 0$  и все силовые линии обязаны закончиться на отрицательном индуцированном заряде  $q_{\text{инд}} = -q$  распределенном по поверхности полости. На внешней поверхности первоначально незаряженного проводника появится положительный индуцированный заряд той же величины  $q_{\text{инд}} = +q$ . Но он распределен так, как если бы на уединенный проводник поместили заряд  $+q$ . По сфере, изображенной на рисунке, он распределится равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma_{\text{внеш}} = q/4\pi r^2$ . И как бы мы не перемещали заряд внутри полости, распределение заряда по внешней поверхности  $\sigma_{\text{внеш}}$  **не изменится!**

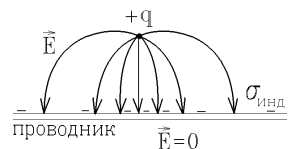


**Вывод:** замкнутый металлический слой разделяет пространство на две области: внутреннюю и внешнюю. И никакое перераспределение зарядов (изменение электрического поля) в одной области не влияет на поле в другой области. Это свойство проводников называется экранировкой поля, которая справедлива только для электростатических полей.



Чтобы устранить поле вне проводника, необходимо **заземлить** экранирующий металлический слой. Тогда индуцированный заряд стекает с внешней поверхности на землю и  $\vec{E}_{\text{вне}} = 0$ . Так осуществляется **электростатическая защита**.

Пример: в качестве экранирующего проводника рассмотрим тонкий плоский бесконечный проводящий слой. Поднесем сверху заряд  $+q$ . На верхней поверхности слоя образуется индуцированный заряд с поверхностной плотностью  $-\sigma_{\text{инд}}$ , на котором



закончатся **все** силовые линии, вышедшие из заряда  $+q$ . На нижней поверхности слоя должен появиться положительный индуцированный заряд, но он распределится равномерно и его плотность  $+\sigma_{\text{инд}} = +q/S_{\text{слоя}} = 0$ ! Поэтому по другую сторону протяженного проводящего слоя поле практически отсутствует.

### 13.3. Электрическая ёмкость проводника. Конденсаторы и ёмкость конденсаторов

Рассмотрим уединенный проводник, то есть проводник, настолько удаленный от других тел, что заряды на них практически не приводят к перераспределению индуцированных зарядов на проводнике. Можно считать, что **уединенный проводник окружен бесконечной вакуумной средой**.

Увеличим заряд  $q$  на уединенном проводнике в  $k$  раз. При этом в  $k$  раз возрастет поверхностная плотность заря-

да  $\sigma$ , и в  $k$  раз возрастет потенциал  $\phi$  поверхности проводника:  $\phi = \oint \sigma dS / 4\pi\epsilon_0$ . Поэтому потенциал уединенного проводника пропорционален величине заряда на нем:  $q = C\phi$ .

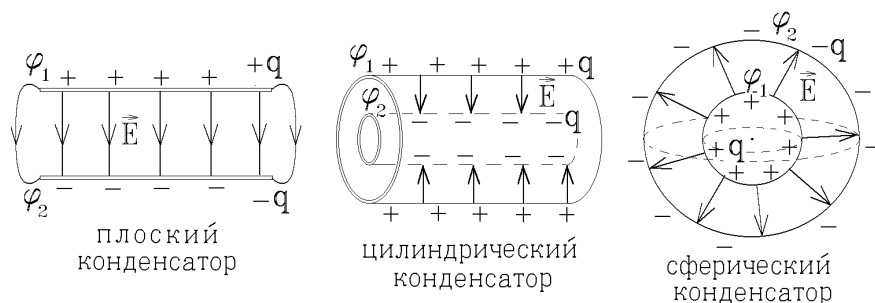
Коэффициент пропорциональности  $C$ , зависящий от формы и размера уединенного проводника, называется его электрической емкостью (сокращенно его называют просто емкостью проводника). Измеряют емкость в фарадах: 1 фарад – это емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на  $\Delta\phi = 1$  В при увеличении заряда на нем на  $\Delta q = 1$  Кл.

Вычислим, например, емкость уединенного металлического шара с радиусом  $R$  и с зарядом  $+q$ , который равномерно распределяется по поверхности шара и создает вне его поле с напряженностью  $E = q / 4\pi\epsilon_0 r^2$  ( $r \geq R$ ). Тогда

$$\phi|_{r=R} - \phi|_{r=\infty} = \int_R^{\infty} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_R^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{C}, \text{ в результате чего нашли } \boxed{C_{\text{шара}} = 4\pi\epsilon_0 R}.$$

**Емкость уединенных проводов очень мала.** Например, емкость такого огромного шара, как Земля ( $R \approx 6400$  км), составляет всего  $C_{\text{Земли}} \approx 7,1 \cdot 10^{-4}$  Ф. Поэтому на уединенных проводниках нельзя накопить большой заряд. При большом  $q$  потенциал  $\phi$  будет очень большим и произойдет электрический пробой (стекание заряда с проводника в виде искры или молнии). Малая емкость уединенного проводника  $C$  связана с тем, что поле такого заряда занимает огромный объем пространства вокруг него.

Чтобы увеличить емкость и при небольших потенциалах  $\phi$  накопить на проводниках большие заряды  $q$ , надо уменьшить объем электрического поля, создаваемого этими зарядами. Для этого используют системы из нескольких (в частности, из двух) проводников, называемые конденсаторами.



Плоский конденсатор образован двумя проводящими пластинами (обкладками). Если заряды на них одинаковы по величине и противоположны по знаку, то силовые линии  $\vec{E}$ , начинающиеся на одной пластине, должны закончиться на другой, и практически всё электрическое поле сосредоточено в объеме между пластинами.

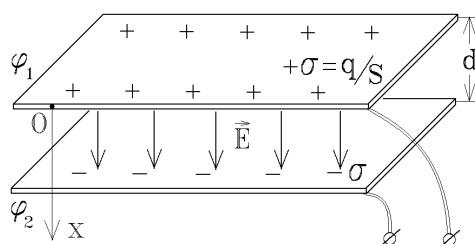
Обкладками цилиндрического конденсатора являются цилиндрические проводящие поверхности, имеющие общую ось, а сферический конденсатор – это две проводящие сферы с общим центром.

Заряд на всех конденсаторах пропорционален разности потенциалов на их обкладках (или напряжению  $U = \phi_1 - \phi_2$ , приложенному к конденсатору):

$$\boxed{q = C(\phi_1 - \phi_2) = CU}.$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  между зарядом и напряжением называется емкостью конденсатора, она всегда положительна.

Вычислим емкость некоторых конденсаторов:



а) плоский конденсатор с обкладками площади  $S$  и расстоянием между пластинами  $d$ . Поле между пластинами однородно и имеет напряженность

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S} = \text{const}. \text{ Тогда } \phi_1 - \phi_2 = \int_0^d E dx = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S} \equiv \frac{q}{C}, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{C_{\text{плоского конденсатора}} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}}.$$

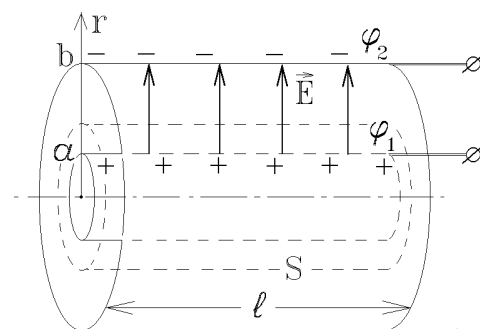
б) цилиндрический конденсатор длины  $l$  с радиусами обкладок  $a$  и  $b$ . Окружим внутреннюю обкладку с зарядом  $q$  коаксиальной цилиндрической поверхностью радиуса  $r$ , где  $a < r < b$  и длины  $l$ . Из теоремы Гаусса

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r l = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon\epsilon_0} \text{ находим величину напряженности}$$

электрического поля внутри конденсатора:  $E = q / (2\pi\epsilon_0 l r)$ . Тогда

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_a^b E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{b}{a} \equiv \frac{q}{C}, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{C_{\text{цилиндр конденсатора}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}}.$$

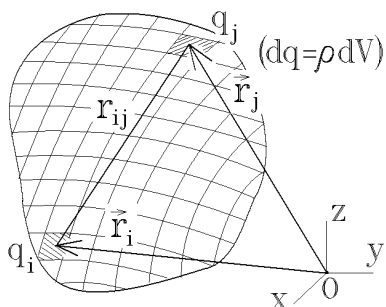


Из полученных формул видно, что при уменьшении объема электрического поля между обкладками, емкость конденсаторов резко возрастает. Появляется возможность накапливать большой заряд  $q$  на обкладках при малой разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между ними. Следует иметь в виду, что при достаточно большой разности потенциалов между обкладками любая диэлектрическая среда между ними “пробивается” электрической искрой; при этом конденсатор мгновенно разряжается. Поэтому, кроме емкости, каждый конденсатор характеризуется напряжением пробоя. Конденсатор **нельзя заряжать очень сильно**, чтобы напряжение на нем не достигло этого максимального значения.

### 13.4. Энергия взаимодействия системы электрических зарядов. Энергия заряженного конденсатора

Разобьем заряженную среду на очень маленькие участки, каждый из которых можно считать **точечным зарядом**  $q_i$ .

Любой из этих зарядов находится в поле всех остальных зарядов и поэтому имеет энергию



$$W_i = q_i \varphi_i = q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Чтобы найти полную энергию системы зарядов, следует сложить энергии  $W_i$  всех точечных зарядов  $q_i$ , но в такой сумме энергия взаимодействия любых двух точечных зарядов будет учитываться дважды:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \dots,$$

поэтому сумму надо уменьшить в два раза:

$$W_{\text{системы}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Если заряд распределен в пространстве непрерывно с объемной плотностью  $\rho = \rho(\vec{r})$ , то зарядом элемента с объемом  $dV$ , будет  $dq = \rho dV$ , и энергия системы вычисляется с помощью интеграла

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV \quad \text{или} \quad W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_V \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV',$$

где интегрирование производится по всему объему  $V$ , занимаемому зарядом.

#### 1) Энергия заряженного проводника.

Потенциал уединенного проводника произвольной формы, имеющего заряд  $q$ , **одинаков во всех его точках**. Поэтому

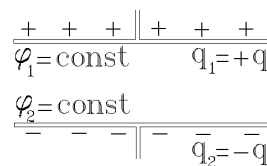
$$W_{\text{заряд проводника}} = \frac{1}{2} \oint \rho \varphi dV = \frac{1}{2} q \varphi.$$

(Фактически этот интеграл следует брать не по объему, а по поверхности заряженного проводника.)

#### 2) Энергия заряженного конденсатора.

Потенциал каждой *проводящей* обкладки конденсатора также одинаков во всех точках. Поэтому

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \underbrace{\frac{1}{2} \varphi_1 q_1}_{\text{энергия верхней пластины}} + \underbrace{\frac{1}{2} \varphi_2 q_2}_{\text{энергия нижней пластины}} = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU.$$



С учетом соотношения  $q = CU$  энергию любого заряженного конденсатора можно записать в виде одной из трех формул:

$$W_{\text{конденсатора}} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

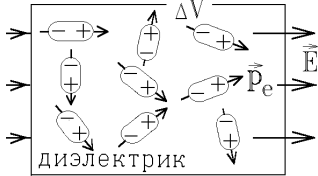
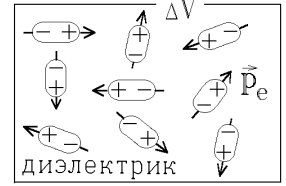
Этот же результат можно получить другим способом: чтобы увеличить заряд конденсатора на  $dq$ , надо перенести этот добавочный заряд с отрицательно заряженной на положительно заряженную обкладку, совершив при этом работу  $\delta A = -(\varphi_1 - \varphi_2) dq$  против электрических сил. Эта работа расходуется на изменение потенциальной энергии конденсатора  $dW = -\delta A$ . Таким образом, энергия заряженного конденсатора емкости  $C$  будет равна

$$W = \int dW = \int_0^q (\varphi_1 - \varphi_2) dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C}.$$

## 14. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

### 14.1. Причины поляризации диэлектриков. Вектор поляризованности. Объемные и поверхностные связанные заряды

Идеальная диэлектрическая среда не содержит свободных заряженных частиц и поэтому не проводит электрический ток. Ее молекулы в целом нейтральны. Если молекулы диэлектрика несимметричны или полярны (как, например, молекулы NaCl), то они обладают дипольным электрическим моментом  $\vec{p}_e$ . При этом электрические моменты соседних молекул разупорядочены, направлены хаотично и в сумме дают ноль.

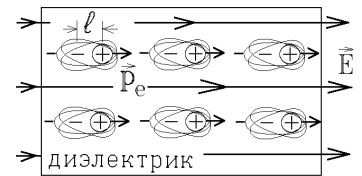


При помещении диэлектрика во внешнее поле с напряженностью  $\vec{E}$  электростатические силы стремятся развернуть диполи по направлению  $\vec{E}$ , приводя их в состояние с минимальной энергией  $W_{\min} = -p_e E$ . Но в таком состоянии энтропия упорядоченной системы молекул была бы минимальной. Поэтому тепловое движение стремится увеличить энтропию системы молекул и, наоборот, **разупорядочить** дипольные моменты. В результате дипольные моменты молекул только частично ориентируются по полю.

Возьмем векторную сумму всех дипольных моментов молекул в достаточно малом объеме среды  $\Delta V$  и разделим на этот объем. Полученный вектор  $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{\Delta V} \vec{p}_{e\text{мол}} / \Delta V$  называется вектором поляризованности диэлектрика.

Чем сильнее внешнее поле  $\vec{E}$ , тем сильнее должна быть ориентация дипольных моментов молекул, то есть величина  $\vec{P}$  пропорциональна величине  $\vec{E}$ :  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ . Константу пропорциональности  $\kappa$  называют диэлектрической восприимчивостью среды. Она безразмерна.

Если молекулы диэлектрической среды симметричны или неполярны (например,  $O_2$ ), то в отсутствие внешнего электрического поля их дипольный момент равен нулю:  $\vec{p}_e = 0$ . Но во внешнем электрическом поле центры положительного и отрицательного заряда такой молекулы смещаются, и у симметричных молекул также появляются дипольные моменты  $\vec{p}_e$ . Причем, чем сильнее внешнее поле, тем больше смещаются заряды и тем больше величина  $\vec{p}_e = q\vec{l}$ , следовательно, связь  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$  по-прежнему справедлива.



*Замечание:* эта связь  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$  справедлива только для **изотропной** диэлектрической среды. В случае анизотропной среды степень ориентации молекул по разным направлениям различна, вследствие чего постоянная  $\kappa$  должна зависеть от направления в среде. Такая анизотропная среда характеризуется тензором диэлектрической восприимчивости

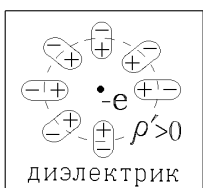
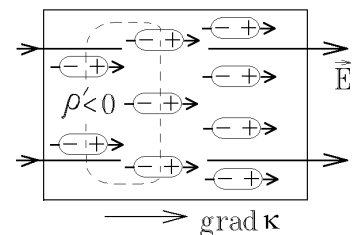
$$\|\kappa\|, \text{ а непараллельные векторы } \vec{P} \text{ и } \vec{E} \text{ связаны матричным соотношением } \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Но в любой точке среды существуют три выделенных взаимно перпендикулярных оси (главные оси поляризации), в ко-

$$\text{торых тензор } \|\kappa\| \text{ диагонален: } \|\kappa\| = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{zz} \end{pmatrix}.$$

Электрические заряды, создающие внешнее поле  $\vec{E}$ , называются сторонними (это могут быть, например, свободные заряды). Во внешнем поле первоначально электронейтральная среда поляризуется – заряды молекул в ней разделяются, как было показано на рисунках. Однако, эти заряды связаны с молекулами и **не могут передвигаться свободно**. Их называют связанными и, в отличие от сторонних и свободных зарядов, отмечают штрихом:  $q'$ . Разделение связанных зарядов в молекулах под действием внешнего электрического поля называется поляризацией диэлектрика.

Заметим, что связанные заряды внутри диэлектрика (объемные связанные заряды с плотностью  $\rho'$ ) возникают в двух случаях. Либо **среда неоднородна**, например концентрация её молекул не постоянна, что вызывает появление ненулевого градиента диэлектрической восприимчивости  $\text{grad } \kappa \neq 0$  (см. правый рисунок). В этом случае после поляризации молекул во



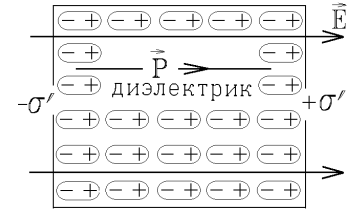
внешнем поле  $\vec{E}$  получаем  $\rho' = -\frac{\epsilon_0 \vec{E}}{\kappa + 1} \cdot \text{grad } \kappa$  (обратите внимание на знак  $\rho'$ ).

Либо в диэлектрической среде присутствуют сторонние (свободные) заряды, например – свободный электрон, показанный на левом рисунке. Эти заряды своим полем ориентируют дипольные моменты соседних молекул диэлектрика. В этом случае  $\rho' = -\kappa \rho / (\kappa + 1)$ , где  $\rho$  – объёмная плотность сторонних за-



рядов.

Если диэлектрик **однороден** ( $\kappa = \text{const}$ ) и **идеален**, т.е. **не содержит свободных зарядов** ( $\rho = 0$ ), то во внешнем электрическом поле  $\vec{E}$  внутри диэлектрика связанные заряды ориентировались по полю молекул компенсируются (см. рисунок) и связанные заряды появляются только на поверхности диэлектрика с поверхностной плотностью  $\sigma'$ .



## 14.2. Диэлектрическая проницаемость среды и вектор электрической индукции

Согласно принципу суперпозиции суммарное поле  $\vec{E}$  в каждой точке диэлектрика создается как свободными зарядами  $q$ , так и связанными зарядами  $q'$ :  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{q'}$ . В вакууме молекул нет, и  $\sum \vec{p}_e = 0$ , поэтому  $\vec{P}_{\text{в вакууме}} = 0$  и  $\kappa_{\text{вакуума}} = 0$ .

Можно показать, что дивергенция вектора поляризованности выражается через объёмную плотность связанных зарядов:  $\text{div } \vec{P} = -\rho'$ , т.е. **линии вектора  $\vec{P}$  начинаются только на отрицательных связанных зарядах** ( $\text{div } \vec{P} > 0$ ), **а заканчиваются только на положительных связанных зарядах** ( $\text{div } \vec{P} < 0$ ).

Подставляя эту связь в теорему Гаусса для  $\vec{E}$  в дифференциальной форме:  $\text{div } \vec{E} = (\rho + \rho')/\epsilon_0$  (электрическое поле внутри диэлектрика создается и сторонними (свободными)  $\rho$ , и связанными  $\rho'$  зарядами). Тогда получим

$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\text{div } \vec{P}}{\epsilon_0}$  или  $\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$ . Вектор  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  называют **вектором электрической индукции** или **электрического смещения**. Подставляя связь  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ , получаем

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

где безразмерный коэффициент  $\epsilon = 1 + \kappa$  называется **диэлектрической проницаемостью** изотропной диэлектрической среды.

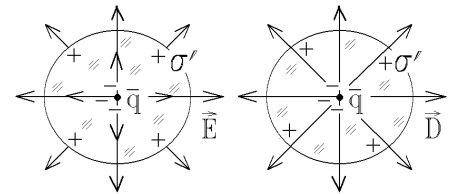
Из полученных соотношений видно, что электрическое поле в диэлектрике удобно описывать не вектором напряженности  $\vec{E}$ , а вектором индукции  $\vec{D}$ , для которого теорема Гаусса в дифференциальной форме принимает вид  $\text{div } \vec{D} = \rho$ . Из нее следует, что линии вектора  $\vec{D}$  начинаются только на положительных **сторонних** зарядах ( $\rho > 0$ ) и заканчиваются только на отрицательных **сторонних** зарядах ( $\rho < 0$ ).

В анизотропных диэлектриках векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  не параллельны и связаны через тензор диэлектрической проницаемости  $\|\epsilon\| = 1 + \|\kappa\|$ :

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 + \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & 1 + \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & 1 + \kappa_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

В вакууме  $\kappa = 0$ ,  $\epsilon = 1$  и  $\vec{D}_{\text{в вакууме}} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{в вакууме}}$ .

**Пример:** точечный заряд окружен слоем диэлектрика. Часть линий вектора  $\vec{E}$  начинается на связанных зарядах  $+\sigma'$  на поверхности диэлектрика. Линии же вектора  $\vec{D}$  начинаются только на стороннем заряде  $q$ . Эти линии, в отличие от линий  $\vec{E}$ , не будут обрываться или возникать на неоднородностях среды, где отсутствуют сторонние заряды.



## 14.3. Теорема Гаусса для векторов поляризованности и электрической индукции

Записанные ранее выражения  $\text{div } \vec{P} = -\rho'$  и  $\text{div } \vec{D} = \rho$  являются записью теоремы Гаусса для векторов поляризованности и электрической индукции в дифференциальной форме. Используя теорему Остроградского, можно записать эту теорему в интегральной форме:

$$\Phi_D = \oint \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i \text{ внутри} = \oint \rho dV_{\text{внутри}}.$$

поток вектора электрической индукции электростатического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних (свободных) зарядов.

Для расчета поля в диэлектрике удобнее вычислять не  $\vec{E}$ , а вектор электрической индукции  $\vec{D}$ , который связан только с распределением сторонних зарядов и не требует знания распределения связанных зарядов.

Теорема Гаусса для вектора  $\vec{E}$  в однородном изотропном диэлектрике, где  $\epsilon = \text{const}$  и справедлива связь  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ , записывается в виде  $\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \sum q_{\text{внутри}} / \epsilon \epsilon_0$ .

Аналогично, поток вектора поляризованности через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности связанных зарядов, взятой со знаком “минус”:

$$\Phi_P = \oint \vec{P} d\vec{S} = - \sum_{\text{внутри } S} q'.$$

Применим эту теорему для нахождения вектора  $\vec{P}$  на плоской границе между однородным поляризованным диэлектриком и вакуумом. Выберем на этой границе замкнутую поверхность в виде косоугольного цилиндра с основанием  $S$ , параллельным плоскости раздела сред, и боковыми направляющими, параллельными линиям вектора  $\vec{P}$  (или  $\vec{E}$ ). Эта поверхность охватывает участок границы со связанным зарядом  $q' = \sigma' S$ .

Тогда по теореме Гаусса для вектора  $\vec{P}$ :  $\oint \vec{P} d\vec{S} = PS \cos(180^\circ - \theta) = -PS \cos \theta = -\sigma' S$

( $\theta$  – это угол между направлением поля  $\vec{E}$  и нормалью  $\vec{n}$  к границе раздела сред). Таким образом, на границе диэлектрика и вакуума поверхностная плотность связанного заряда  $\sigma'$  равна проекции вектора  $\vec{P}$  на направление внешней нормали  $\vec{n}$  к границе:

$$\sigma' = P \cos \theta = P_n.$$

#### 14.4. Электрическое поле в диэлектрике

Введем в заряженный плоский конденсатор с вакуумом между обкладками и с напряженностью поля  $E_{\text{вак}} = \sigma / \epsilon_0$  в вакууме плоскую пластину из однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . На ее поверхности возникает связанный заряд с поверхностной плотностью  $\pm \sigma'$ . Поле этого связанного заряда вычисляется, аналогично полю заряженного конденсатора, по формуле  $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{P_n}{\epsilon_0} = \frac{\kappa \epsilon_0 E}{\epsilon_0} = \kappa E$ , где  $E$  – напряженность поля внутри диэлектрической пластины.

Так как вектор  $\vec{E}'$  направлен противоположно вектору  $\vec{E}_{\text{вак}}$ , то результирующим полем в диэлектрике будет

$E = E_{\text{вак}} - E' = E_{\text{вак}} = \kappa E$  откуда  $E_{\text{вак}} = (1 + \kappa) E = \epsilon E$ , т.е. **из-за наличия связанных зарядов поле в диэлектрике ослаблено в  $\epsilon$  раз по сравнению с полем в вакууме:**

$$E_{\text{диэл}} = E_{\text{вак}} / \epsilon.$$

**Замечание:** этот результат справедлив только в том случае, когда однородная диэлектрическая среда полностью заполнит пространство между двумя эквипотенциальными поверхностями такого поля в отсутствие диэлектрика. Если в плоский конденсатор, эквипотенциальные поверхности поля в котором тоже плоскости, параллельные обкладкам, внести шар из диэлектрика, то поле не только будет ослаблено в диэлектрике, но силовые линии нового поля изогнутся так, как показано на рисунке.

Обратим также внимание на то, что формулы связи  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$  справедливы только в изотропных диэлектрических средах, поляризация которых вызвана внешним сторонним электрическим полем. В сегнетоэлектриках, которые тоже являются диэлектриками, эта поляризация сохраняется и после снятия внешнего поля. Иначе говоря, в сегнетоэлектриках электрическое поле может быть создано остаточной “замороженной” поляризацией молекул, которая не исчезает после выключения внешнего поля. В этом случае соотношения  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$  не выполняются, но определение  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  верно всегда.

Рассмотрим теперь точечный заряд  $q$ , находящийся в изотропной диэлектрической

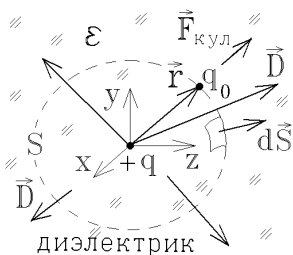
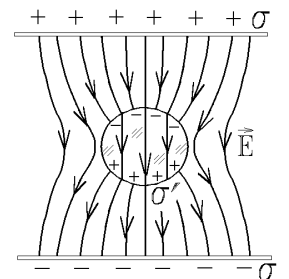
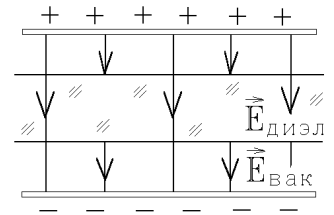
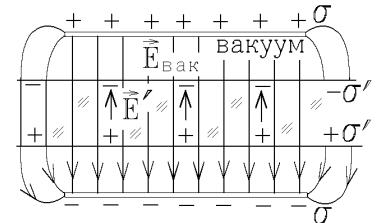
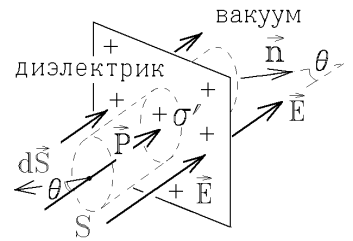
среде и окружим его сферической поверхностью  $S$  радиуса  $r$ . Линии вектора  $\vec{D}$  начинаются на заряде  $q$ . Поток через эту поверхность вектора  $\vec{D}$ , линии которого начинаются на стороннем заряде  $q$ , не зависит от наличия диэлектрика и связанных зарядов, и по

теореме Гаусса  $\oint \vec{D} d\vec{S} = D \cdot 4\pi r^2 = q$ . Но  $E = \frac{D}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2}$  или  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^3} \vec{r}$ . Следова-

тельно, кулоновская сила взаимодействия двух точечных зарядов  $q$  и  $q_0$ , находящихся в диэлектрической среде, уменьшается в  $\epsilon$  раз:

$$\vec{F}_{\text{кул}} = \frac{qq_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^3} \vec{r},$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r}.$$



Поэтому все формулы и теоремы для электрического поля в вакууме, полученные из закона Кулона, остаются справедливыми и **внутри** изотропной однородной диэлектрической среды с проницаемостью  $\epsilon$ . Но во всех выражениях

надо произвести замену  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon\epsilon_0$  (для вакуума  $\epsilon_{\text{вак}} = 1$ ). Чтобы не учитывать дополнительного искривления силовых линий на связанных зарядах, обычно считают, что диэлектрик заполняет все пространство, т.е. ограничен эквипотенциальной поверхностью  $\phi|_{\infty} = 0$ .

*Замечание:* строго говоря, сказанное относится только к жидкому изотропному диэлектрику. Твердый диэлектрик в результате действия внешнего электрического поля на связанные заряды начнет деформироваться. Вследствие этого, помимо электрических кулоновских, могут появиться дополнительные механические силы упругости, которые также надо учитывать.

#### 14.5. Поле на границе диэлектрика. Граничные условия для векторов напряженности и электрической индукции

Пусть на границе двух изотропных однородных диэлектриков с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  отсутствуют сторонние (свободные) заряды. Тогда на этой границе появляется только связанный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma'$ . Выберем узенький контур ABCD, охватывающий участок границы, со сторонами  $AB=CD=l$ , параллельными поверхности раздела. Так как  $AD \approx BC \approx 0$ , то по теореме о циркуляции вектора  $\vec{E}$ :

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = E_{1\tau}l - E_{2\tau}l = 0$$

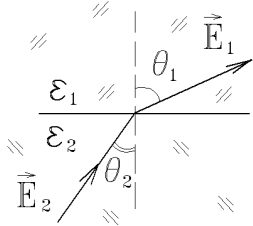
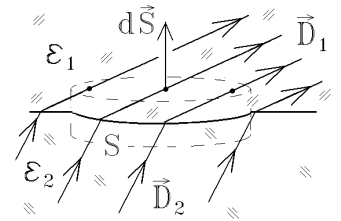
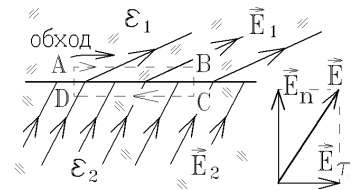
т.е. на границе раздела двух диэлектриков тангенциальная (касательная к границе раздела сред) составляющая вектора  $\vec{E}$  не изменяется:  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ .

Часть линий  $\vec{E}$  будет обрываться на связанных зарядах  $\sigma'$ , а линии  $\vec{D}$  не прерываются. А так как  $E_{\tau} = D_{\tau}/\epsilon_0\epsilon$ , то на границе

$$D_{1\tau}/D_{2\tau} = \epsilon_1/\epsilon_2.$$

Выберем теперь замкнутую поверхность в виде очень короткого цилиндра с основаниями, имеющими площадь  $S_{\text{осн}}$ , и параллельными границе раздела диэлектриков. Эта поверхность охватывает участок границы раздела, но сторонних зарядов внутри нее нет, поэтому по теореме Гаусса  $\oint \vec{D} d\vec{S} \approx D_{1n}S_{\text{осн}} - D_{2n}S_{\text{осн}} = 0$ , т.е. на границе раздела сохраняется нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  и не сохраняется нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$ :

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{и} \quad E_{1n}/E_{2n} = \epsilon_2/\epsilon_1.$$



Таким образом, на границе раздела диэлектриков, не обладающих сегнетоэлектрическими свойствами, силовые линии электростатического поля претерпевают излом, где  $\text{tg } \theta_1 = E_{1\tau}/E_{1n}$ ;  $\text{tg } \theta_2 = E_{2\tau}/E_{2n}$  и  $\text{tg } \theta_1/\text{tg } \theta_2 = \epsilon_1/\epsilon_2$ . Полученные выражения справедливы и на границе диэлектрик – вакуум, если учесть, что для вакуума  $\epsilon_{\text{вак}} = 1$ . На границе диэлектрик – проводник все линии  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  обязаны закончиться на сторонних зарядах, индуцированных на поверхности проводника.

#### 14.6. Плотность энергии электростатического поля в диэлектрике

Выразим энергию заряженного плоского конденсатора через напряженность поля  $\vec{E}$ . Если конденсатор заполнен диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ , то поле  $\vec{E}$  между обкладками и падение напряжения  $U = \phi_1 - \phi_2 = \int_0^d E dx = Ed$  между обкладками уменьшены в  $\epsilon$  раз, а емкость плоского конденсатора (как и всех конденсаторов, заполненных диэлектриком) увеличена в  $\epsilon$  раз:  $C = q/U = \epsilon\epsilon_0 S/d$ . Тогда из формулы для энергии конденсатора получим:

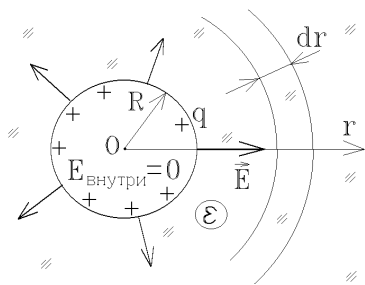
$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V, \quad \text{где } V = Sd \text{ – объем внутри конденсатора.}$$

Мы выразили энергию системы зарядов на конденсаторе через энергию создаваемого этими зарядами электрического поля. В электростатическом случае **эти энергии одинаковы и фактически являются одной и той же величиной**. Если исчезнут заряды, то исчезнет и связанное с ними поле.

В изотропной диэлектрической среде (или вакууме) с учетом соотношения  $D = \epsilon\epsilon_0 E$  плотность энергии электрического поля (энергия единицы объема) вычисляется по формуле

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}. \quad \text{Размерность этой величины } [w] = \text{Дж/м}^3.$$

Можно вычислять энергию заряженной системы или как  $W = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV$ , или как  $W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV$ . Результат будет одинаковым! Интеграл во втором выражении берется **по всему объему, занимаемому полем**, т.е. по всем точкам пространства, где  $\vec{E} \neq 0$ .



В качестве примера рассмотрим поле уединенного заряженного проводящего шара радиуса  $R$ , окруженного бесконечной диэлектрической средой с проницаемостью  $\epsilon$ , и имеющего емкость  $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$  и энергию  $W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R}$ .

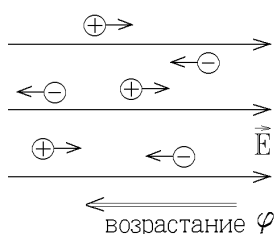
С другой стороны, энергия электрического поля шара (а оно существует только вне шара и совпадает с полем точечного заряда  $q$ ):

$$W_{\text{поля}} = \int_V \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_R^\infty \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{объем сферического слоя}} \cdot \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R} -$$

тот же результат!

## 15. СТАЦИОНАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 15.1. Сила тока и плотность тока



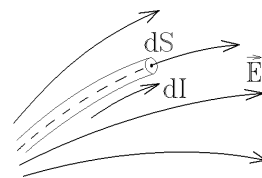
Среда, имеющая свободные носители заряда (например, электроны) называется проводящей (или проводником). Под действием электрического поля свободные заряды начинают перемещаться (положительные – по полю  $\vec{E}$ , отрицательные – против  $\vec{E}$ ), образуя электрический ток.

Сила тока  $I$  равна заряду, протекающему через поперечное сечение проводника (перпендикулярное вектору  $\vec{E}$ ) за единицу времени:  $I = dq / dt$ . Сила тока измеряется в амперах.

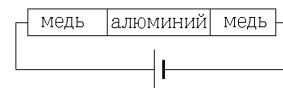
Линии тока направлены по движению зарядов, то есть вдоль вектора  $\vec{E}$ . Направление тока совпадает с направлением движения положительных зарядов.

Если выделить в пространстве трубку, направленную вдоль линий  $\vec{E}$ , и разделить ток  $dI$ , протекающий внутри трубки, на ее поперечное сечение  $dS$ , то получим вектор плотности тока  $\vec{j}$ , направленный вдоль вектора  $\vec{E}$  по касательной к линии тока:  $\vec{j} = dI / dS$ .

Плотность тока  $j$  – это ток, протекающий через единицу площади поперечного сечения проводника. Поэтому сила тока, т.е. ток, протекающий через любую поверхность  $S$ , равна потоку вектора  $\vec{j}$  через эту поверхность:  $I = \int \vec{j} d\vec{S}$ .



Для того чтобы определить вид свободных носителей тока в металлах, Рикке примерно в течение года (1901 г.) пропускал ток через цепь, составленную из разнородных металлов (см. рисунок). За это время протек заряд  $\sim 3,5 \cdot 10^6$  Кл, но структура и химический состав металлов не изменились. Опыт Рикке доказывает, что ток в металлах не связан с движением атомов (ионов).



Возьмем теперь кусок металла длины  $l$ , двигавшийся со скоростью  $v_0$  вдоль оси  $x$ ,

и резко затормозим его с ускорением  $a < 0$ . Свободные носители заряда  $q_0$  с массой

$m_0$  по инерции будут продолжать двигаться с прежней скоростью  $v_0$ , пересекая сечение проводника и создавая ток. Но вылететь из незамкнутого проводника они не могут, и скапливаются у переднего конца 2, создавая избыточный заряд и электрическое поле  $\vec{E}$ , стремящееся оттолкнуть их обратно. Электрическая сила уравнивает силу инерции:  $m_0 a = q_0 E = \text{const}$  В результате на концах проводника создается разность потенциалов (напряжение)

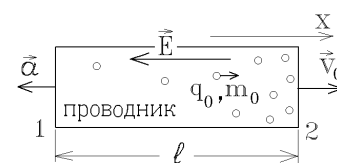
инерции:  $m_0 a = q_0 E = \text{const}$  В результате на концах проводника создается разность потенциалов (напряжение)

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dx = \frac{m_0 a}{q_0} \int_0^l dx = \frac{m_0 a l}{q_0}.$$

Но если проводник замкнуть, то, в соответствии с законом Ома, по нему потечет ток  $I = \frac{dq}{dt} = \frac{U}{R} = \frac{m_0 a l}{q_0 R}$ , где

$dq = \frac{m_0 a l}{q_0 R} dt$  – это заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за время  $dt$ , а  $R$  – сопротивление провод-

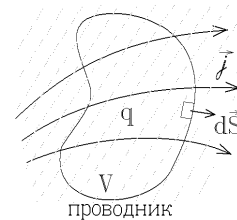
ника. За все время торможения  $t$  через него протечет заряд  $q = \int_0^t dq = \frac{m_0 l}{q_0 R} \int_0^t a dt = \frac{m_0 l v_0}{q_0 R}$



В опытах Толмена – Стюарта провод в виде спирали (катушки) раскручивали до скорости  $v_0 \approx 10^3 : 10^5$  м/с и измеряли заряд  $q$ , протекающий при остановке спирали. Таким образом, был определен удельный заряд свободных носителей тока  $q_0 / m_0 = l v_0 / q R$ . Он оказался равным удельному заряду электрона  $e / m_e = 1,65 \cdot 10^{11}$  Кл/кг. Эти опыты доказывают, что носителями тока в металлах являются свободные электроны.

## 15.2. Уравнение непрерывности электрического заряда и условие стационарности тока

Окружим участок проводника, по которому течет ток с плотностью  $\vec{j}$ , замкнутой поверхностью  $S$ . По определению вектора  $\vec{j}$  его поток по этой поверхности равен суммарному току  $I$ , вытекающему из замкнутой поверхности  $S$ :  $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I = -\frac{dq}{dt}$ , где  $q$  – суммарный электрический заряд внутри поверхности  $S$ . (Если ток вытекает из поверхности, то заряд внутри нее уменьшается, так как направление тока определяется направлением перемещения положительных зарядов). Но  $q = \int_V \rho dV$ , где  $\rho$  – это плотность заряда. Применяя теорему Остроградского,



$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \left( -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV$ , приравниваем подынтегральные выражения. Полученные уравнения

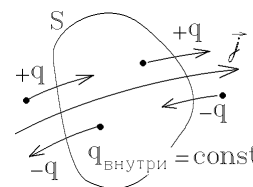
$$\boxed{\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad \text{и} \quad \boxed{\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_{\text{внутри}}}{dt}}$$

называются уравнениями непрерывности электрического заряда (в дифференциальной и интегральной формах соответственно). Они выражают закон сохранения электрического заряда и означают то, что заряд не может бесследно исчезнуть или возникнуть в какой-либо области. При изменении заряда в некоторой области он должен вытекать или втекать в нее, создавая электрический ток.

Но если заряды в проводнике перераспределяются (в одной области суммарный заряд уменьшается, а в другой – увеличивается), то изменяются и потенциалы этих областей. Изменение потенциалов со временем приводит к изменению электрического поля. Поэтому ток  $\vec{j}$  не будет постоянным. Отсюда следует условие стационарности тока:

$$\boxed{\text{div } \vec{j} = 0} \quad \text{и} \quad \boxed{\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0}.$$

Для того чтобы ток был постоянен, распределения потенциала и заряда в любой области проводящей среды должны быть постоянными во времени. Заряды могут перемещаться по проводнику, но какой заряд втекает в любую его область, такой же заряд и вытекает из нее.



А так как точки, где  $\text{div } \vec{j} \neq 0$  являются точками, где линии вектора  $\vec{j}$  возникают или исчезают, то линии постоянного или стационарного тока нигде не должны начинаться или заканчиваться: они **замкнуты**.

Цепь постоянного тока обязательно должна быть замкнута.

Рассмотрим теперь переменный ток  $j = j(t)$ . Пусть он изменяется достаточно медленно.

При изменении потенциалов в каком-либо месте проводника изменение электрического поля передается со скоростью света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Если размер проводника равен  $l$ , то за время  $\tau = l/c$  во всех его точках успеет установиться новое распределение потенциалов, соответствующее новому значению тока в данный момент времени. Это аналогично установлению квазиравновесного состояния в термодинамической системе. Поэтому время  $\tau$  также называется **временем релаксации**.

Пусть ток  $j = j(t)$  меняется **медленно** в течение промежутка времени  $t \gg \tau$ . Тогда в любой момент  $t$  во всех точках проводника будет выполняться условие  $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ , позволяющее считать ток в данный момент практически постоянным. Такой медленно изменяющийся со временем ток называется квазистационарным. Например, если ток изменяется по гармоническому закону:  $I = I_0 \cos \omega t$ , то условие квазистационарности тока имеет вид  $\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{c}{l}$ , где  $l$  – размер цепи.

Для квазистационарных токов можно применять все законы постоянного тока.

В компьютерах, например, размер цепей  $l \approx 0,1$  м, и условие квазистационарности принимает вид

$$\omega \ll \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{0,1 \text{ м}} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}. \text{ Поэтому, даже в компьютерных цепях, где частота переменного тока достигает } 100 \text{ МГц,}$$

можно использовать законы постоянного тока. В бытовых электросетях ток с малой частотой  $\nu = 50$  Гц заведомо квазистационарен.

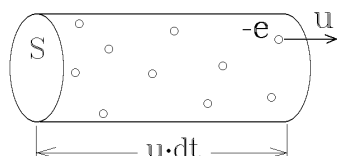
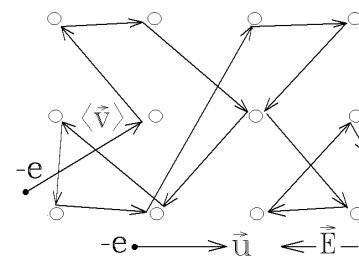
## 15.3. Электрическое поле в проводнике с током и закон Ома в локальной форме

Электрический ток в металлах – это направленное движение свободных электронов под действием электрического поля. Будем считать, что напряженность этого поля постоянна:  $\vec{E} = \text{const}$ . Но электроны движутся в нем почти хаотически со средней тепловой скоростью  $\langle v \rangle \approx 2 \cdot 10^6$  м/с, сталкиваясь с атомами и рассеиваясь на них подобно молекулам

газа. При этом каждый электрон лишь незначительно сдвигается противоположно линиям  $\vec{E}$ , дрейфует. Средняя скорость такого смещения  $\vec{u}$  называется дрейфовой скоростью.

Электрический ток в металлах – это совместное движение с малой дрейфовой скоростью  $\vec{u}$  хаотически мечущихся по решетке металла свободных электронов.

Пусть по проводу с сечением  $S = 1 \text{ мм}^2$  течет ток  $I = 1 \text{ А}$ . Концентрация свободных электронов в металле  $n \sim N_{\text{Авогадро}} / 1 \text{ см}^3 \sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$ . За время  $dt$  через поперечное сечение проводника переносится заряд  $dq = -e \cdot n \cdot S u dt$ , где  $S u dt$  – объ-



ем участка провода, показанный на рисунке, а  $n \cdot S u dt$  – количество электронов, находившихся в этом участке и пересекших за время  $dt$  поперечное сечение. Из определения тока  $I = |dq/dt| = enuS$ . Плотность тока в проводнике  $j = I/S = enu$ . С учетом направления векторов, связываем плотность тока с дрейфовой скоростью:

$$\boxed{\vec{j} = -en\vec{u}}$$

В рассматриваемом примере  $u = I/enS \approx 0,1 \text{ мм/с} \ll \langle v \rangle \approx 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ , т.е. дрейфовая скорость направленного движения электронов, создающего ток, действительно очень мала и электроны практически мечутся на месте.

*Вопрос:* почему при такой маленькой скорости  $u$  при замыкании выключателя лампочка на большом удалении от него загорается практически моментально?

Меняющие направление движения электроны пролетают между двумя последовательными столкновениями расстояние  $\lambda$  (среднюю длину свободного пробега) за время  $\tau = \lambda/\langle v \rangle$ . Кулоновская сила сообщает им некоторую дополнительную скорость  $\vec{v}'$ , направленную против линий вектора  $\vec{E}$ :  $m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -e\vec{E}$ , где  $m$  – масса электрона, а  $(-e)$  – его заряд.

За время  $t$  каждый электрон приобретает скорость  $\vec{v}' = \int_0^t \frac{eE}{m} dt = \frac{eE}{m} t$  и практически полностью теряет её при последующем столкновении.

Среднюю скорость, приобретаемую электроном между двумя последовательными столкновениями – это дрейфовая скорость  $\vec{u}$ :

$$u = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v' dt = \frac{eE}{m\tau} \int_0^{\tau} t dt = \frac{eE}{2m} \tau = \frac{eE\lambda}{2m\langle v \rangle}$$

закон Ома в локальной форме:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

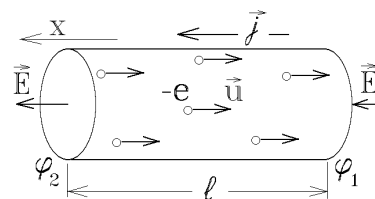
где величина  $\sigma = \frac{e^2 n \lambda}{2m\langle v \rangle}$  называется удельной проводимостью проводника. Эта характеристика зависит только от

свойств самого проводника. Обратная ей величина  $\boxed{\rho = 1/\sigma}$  называется удельным сопротивлением проводника. Таким образом, ток  $\vec{j}$  в проводнике существует только если в нем создано электрическое поле  $\vec{E}$ .

#### 15.4. Причина затухания тока. Электрическое сопротивление проводника. Законы Ома и Джоуля-Ленца

Рассмотрим участок тонкого однородного провода длины  $l$  и сечения  $S = \text{const}$ . Ток течет вдоль оси провода, поэтому и поле  $\vec{E}$  направлено вдоль оси.

Разность потенциалов между концами проводника называется падением напряжения на нем:  $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^l E dx = El$  или  $E = U/l$ . Из выражения для закона



Ома в локальной форме следует, что  $j = \frac{I}{S} = \sigma E = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}$  или  $\boxed{U = IR}$  – это закон Ома для участка однородного проводника. Одновременно получили выражение для сопротивления этого участка:  $\boxed{R = \rho \frac{l}{S}}$  – сопротивление проводника,

прямо пропорциональное его длине  $l$  и обратно пропорциональное площади поперечного сечения  $S$ .

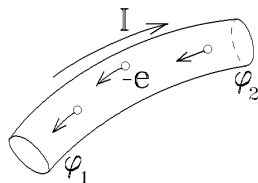
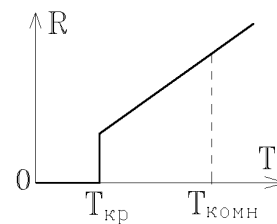
Величина удельного сопротивления в классической электронной теории выражается через найденную выше величину удельной проводимости  $\rho = 1/\sigma$ . Откуда

$$\boxed{R = \frac{2m\langle v \rangle l}{e^2 n \lambda S}}$$

Эта формула классической физики показывает, что причиной появления электрического сопротивления является рассеяние свободных электронов электрическими полями атомов кристаллической решетки. Чем чаще сталкивается с

атомами электрон, тем меньше его длина свободного пробега  $\lambda$ , и тем больше сопротивление  $R$ . С ростом концентрации  $n$  свободных электронов сопротивление, наоборот, падает.

*Замечание:* в действительности, рассмотренное классическое описание механизма возникновения электрического сопротивления дает только качественные представления и приводит к неправильной зависимости сопротивления  $R$  от температуры  $T$ . **Истинный механизм рассеяния электронов можно описать только в квантовой теории.** Правильная зависимость  $R$  от  $T$  приведена на рисунке. Вблизи комнатной температуры  $T_{\text{комн}}$  сопротивление  $R$  возрастает с ростом  $T$  практически линейно, а для некоторых металлов при определенной критической температуре  $T_{\text{кр}}$  может скачком падать до нуля (явление сверхпроводимости).



При протекании тока  $I$  по участку проводника, заряд  $dq = Idt$  проходит разность потенциалов (падение напряжения на участке  $\phi_1 - \phi_2 = U$ ). Кулоновские силы совершают над зарядом работу  $dA = dq(\phi_1 - \phi_2) = UI dt$ , которая должна идти на увеличение энергии носителей заряда (электронов). Но так как их средняя дрейфовая скорость и концентрация  $n$  неизменны, то эта энергия выделяется в проводнике, по которому течет ток в виде тепла:

$dQ = UI dt$ . С учетом закона Ома  $U = IR$ , количество выделившегося тепла при пропускании

тока в однородном проводнике выражается формулой:

$$Q = \int UI dt = \int I^2 R dt.$$

Это **закон Джоуля-Ленца**, который определяет количество тепла, выделяющегося в проводнике за время  $t$  при протекании электрического тока.

Этот закон легко понять с точки зрения классической электронной теории, если учесть, что пролетая среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  за время  $\tau = \lambda / \langle v \rangle$ , электроны приобретают дополнительную скорость  $v' = \frac{eE}{m} \tau = \frac{eE\lambda}{m\langle v \rangle}$ .

При столкновении с атомами эта скорость теряется, а кинетическая энергия  $\frac{mv'^2}{2}$ , приобретаемая свободным электроном под действием поля  $\vec{E}$  за время между соударениями, переходит в тепло. Если умножить среднюю энергию, выделяемую одним электроном при соударении, на число таких соударений за время  $dt$  и на число всех свободных электронов  $nSl$  в участке проводника, а также учесть закон Ома, то получим то же самое выражение теплоты  $dQ = I^2 R dt$ .

Джоулево тепло при протекании тока выделяется за счет неупругих соударений носителей тока (электронов) с атомами среды.

### 15.5. Условие квазистационарности тока

Рассмотрим теперь переменный ток  $j = j(t)$ . Пусть он изменяется достаточно медленно. При изменении потенциалов в каком-либо месте проводника изменение электрического поля передается со скоростью света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Если размер проводника равен  $l$ , то за время  $\tau = l/c$  во всех его точках успевает установиться новое распределение потенциалов, соответствующее новому значению тока в данный момент времени. Это аналогично установлению квазиравновесного состояния в термодинамической системе. Поэтому время  $\tau$  также называется **временем релаксации**.

Пусть ток  $j = j(t)$  меняется **медленно** в течение промежутка времени  $t \gg \tau$ . Тогда в любой момент  $t$  во всех точках проводника будет выполняться условие  $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ , позволяющее считать ток в данный момент практически постоянным. Такой медленно изменяющийся со временем ток называется **квазистационарным**. Например, если ток изменяется по гармоническому закону:  $I = I_0 \cos \omega t$ , то **условие квазистационарности тока** имеет вид  $\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{c}{l}$ , где  $l$  — размер цепи.

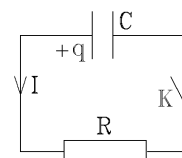
Для квазистационарных токов можно применять все законы постоянного тока.

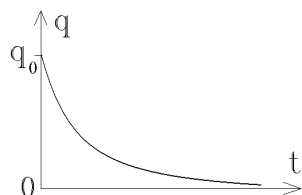
В компьютерах, например, размер цепей  $l \approx 0,1$  м, и условие квазистационарности принимает вид

$\omega \ll \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{0,1 \text{ м}} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ . Поэтому, даже в компьютерных цепях, где частота переменного тока достигает 100 МГц,

можно использовать законы постоянного тока. В бытовых электросетях ток с малой частотой  $\nu = 50$  Гц заведомо квазистационарен.

*Пример:* конденсатор емкости  $C$  с зарядом  $q$  в момент времени  $t = 0$  замкнули на сопротивление  $R$ . Разряд происходит достаточно медленно, и ток разряда  $I = -dq/dt$  квазистационарен. Падения напряжения на конденсаторе и сопротивлении одинаковы:  $U = \frac{q}{C} = IR = -\frac{dq}{dt} R$ . Раз-





деляя переменные и интегрируя, находим  $\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$  или  $\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC}$ , откуда

$q = q_0 e^{-t/(RC)}$ . Заряд на разряжающемся конденсаторе будет изменяться по экспоненциальному закону и за время  $\tau = RC$  убывает в  $e=2,72$  раз.

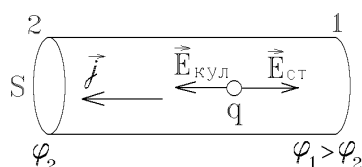
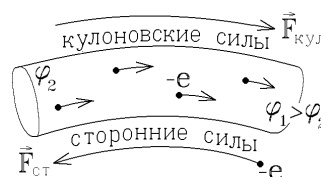
*Замечание:* переменный ток нельзя считать квазистационарным в таких устройствах, как антенны, микроволновые приборы, импульсные радиоустройства (включая линии задержки).

## 15.6. Причины появления электродвижущей силы. Источники ЭДС

Если на концах проводника создать разность потенциалов, то свободные носители заряда под действием электростатических сил быстро перераспределятся так, чтобы скомпенсировать поле внутри проводника и сделать потенциал проводника всюду одинаковым ( $\varphi_{\text{проводника}} = \text{const}$ ). Электрический ток при этом прекращается.

Поэтому для поддержания ненулевой разности потенциалов  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  и создания постоянного тока должны присутствовать дополнительные силы **неэлектростатической природы**. Это химические, диффузионные и другие силы. Они совершают работу против электростатических кулоновских сил, возвращая свободные носители заряда обратно, и называются сторонними силами.

При наличии постоянного тока в проводнике на свободные носители заряда  $q$  действуют, вообще говоря, как кулоновские силы  $\vec{F}_{\text{кул}} = q\vec{E}_{\text{кул}}$ , так и сторонние силы



$\vec{F}_{\text{ст}} = q\vec{E}_{\text{ст}}$ , где  $\vec{E}_{\text{ст}}$  – напряженность поля сторонних сил. Тогда закон Ома в локальной форме для однородного проводника  $\vec{j} = \sigma\vec{E}_{\text{кул}}$  при появлении сторонних сил запишется как

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{ст}}) ..$$

Участок проводника, на котором действуют сторонние силы, называется неоднородным.

## 15.7. Закон Ома для неоднородного участка цепи

В тонком неоднородном проводнике векторы  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  направлены вдоль оси, перпендикулярно сечению проводника  $S$ . Интегрируя по длине проводника обе части предыдущего равенства, в случае постоянного (или квазистационарного) тока получим:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} . \text{ чтем, что } \frac{1}{\sigma} = \rho, \quad j = \frac{I}{S} = \text{const}, \text{ поэтому } \int_1^2 \frac{1}{\sigma} j dl = I\rho \frac{l}{S} = IR .$$

Первое слагаемое справа, как следует из законов электростатики, является разностью потенциалов:  $\int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Работу сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда называют электродвижущей силой (э.д.с.)  $\epsilon$ , действующей на данном участке цепи:

$$\epsilon_{12} = \frac{A_{\text{ст}}}{q} = \frac{1}{q} \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} .$$

Как и разность потенциалов, э.д.с. измеряется в вольтах.

С учетом этого определения получаем выражение  $IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \epsilon_{12}$ .

Это – закон Ома для неоднородного участка проводника, включающего э.д.с.  $\epsilon_{12}$ , причем  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  – разность потенциалов на его концах или падение напряжения на неоднородном участке цепи:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \epsilon_{12} - IR .$$

Еще раз подчеркнем, что ненулевая разность потенциалов, а, следовательно, и отличное от нуля электростатическое поле  $\vec{E}_{\text{кул}} = -\text{grad } \varphi$  внутри проводника могут существовать только в одном случае – если на границах проводника возникают неэлектростатические сторонние силы, поддерживающие разность потенциалов неизменной, несмотря на перемещение свободных зарядов.

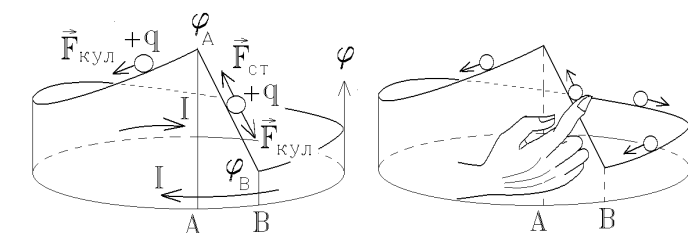
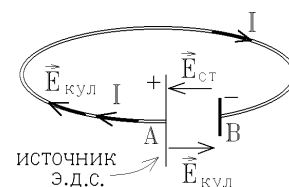
Сторонние силы возникают только в местах химической неоднородности проводников, в местах контакта разнородных проводников, или в местах, где на проводник действует переменное магнитное поле. Эти места называются источниками э.д.с. Именно на их краях возникает постоянная разность потенциалов, приводящая к появлению тока в цепи.



**Пример:** замкнутая цепь, в которой положительная клемма А и отрицательная клемма В источника э.д.с. замкнуты однородным проводником.

Потенциал  $\varphi_A > \varphi_B$ , и линии тока  $I$  выходят из клеммы «+» источника э.д.с. и входят в клемму «—», так как под действием кулоновских сил в однородном проводнике ток должен течь в сторону убывания потенциала

$$\vec{E}_{\text{кул}} = -\text{grad } \varphi. \text{ Изменение потенциала } \varphi \text{ вдоль этой цепи показано на левом рисунке. Поскольку линии постоянного тока замкнуты, то один и тот же ток } I \text{ должен течь в одном направлении во всех точках цепи. На однородном участке цепи движение положительных зарядов } +q, \text{ создающее ток } I, \text{ обусловлено}$$



электростатической силой  $\vec{F}_{\text{кул}}$ . А в источнике э.д.с. (участок АВ) это движение поддерживается сторонней силой  $\vec{F}_{\text{ст}}$ , и ток течет в сторону возрастания потенциала.

На правом рисунке показан аналогичный пример из механики: шарик скатывается по желобу под действием силы тяжести, и поднимается на горку АВ сторонней силой.

Как правило, в цепях постоянного тока э.д.с.  $\mathcal{E}$  создается в специальных устройствах: батареях, аккумуляторах, гальванических элементах. Каждый такой элемент обозначается символом  $\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}$  и имеет некоторое сопротивление  $r$ ,

которое называется внутренним сопротивлением источника э.д.с. Оно последовательно с сопротивлениями остальных участков цепи. Поэтому закон Ома для участка цепи, содержащего источник э.д.с.  $\mathcal{E}$ , имеет вид:

$$I(R+r) = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E},$$

где  $R$  – суммарное сопротивление однородных проводников на этом участке цепи.

Если цепь постоянного тока, содержащая несколько источников э.д.с. (батарей), замкнута (точка 1 совпадает с точкой 2), то  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ . Тогда получим закон Ома для замкнутой

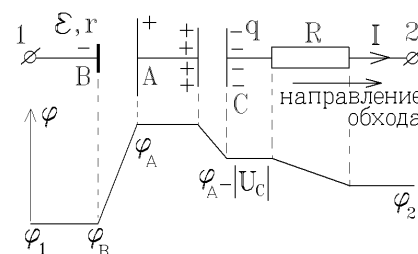
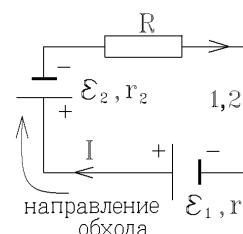
$$\text{цепи: } \sum \mathcal{E} = I(R+r) \text{ или } I = \frac{1}{R+r} \sum \mathcal{E}.$$

В числителе последней формулы стоит алгебраическая сумма всех э.д.с. в цепи, а в знаменателе – сумма всех сопротивлений, включающая внутренние сопротивления источников э.д.с.

Чтобы правильно записать знаки э.д.с. в этой сумме, необходимо прежде всего выбрать направление обхода цепи. Тогда знак э.д.с. определяется ориентацией полюсов батареи относительно направления обхода. Например, для цепи, показанной на рисунке, формула закона Ома примет вид:  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I(R+r_1+r_2)$ .

**Замечание:** квазистационарный ток может протекать по участку цепи, включающему конденсатор. На конденсаторе появляется заряд  $q$ , а на его обкладках – разность потенциалов  $U_C = q/C$ . Распределение потенциала на этом участке показано на рисунке, где  $\varphi_1 - \varphi_2$  – падение напряжения на данном участке цепи.

Аналогично падение напряжения на клеммах батареи с э.д.с.  $\mathcal{E}$  и с внутренним сопротивлением  $r$  будет равно  $U = \mathcal{E} - Ir$ , если ток  $I$  **разряжает** батарею (создан батареей) и будет равно  $U = \mathcal{E} + Ir$ , если ток  $I$  **заряжает** батарею.



## 15.8. Разветвленные электрические цепи. Правила Кирхгофа и их применение

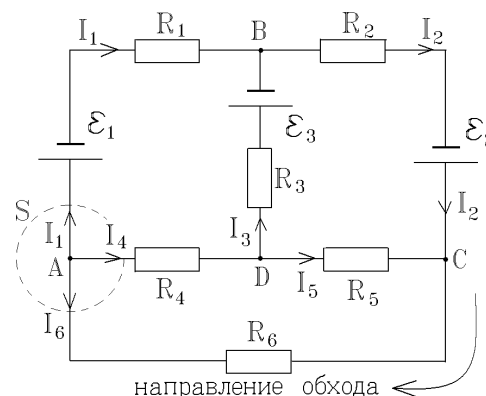
Если электрическая цепь имеет сложный, разветвленный вид, то законы постоянного тока для нее пишутся в виде правил Кирхгофа. Пример такой цепи показан на рисунке.

**Узлом** называется точка, в которой соединяются три или более проводников. Так, например, цепь на рисунке имеет четыре узла А, В, С и D.

Первое правило Кирхгофа следует из условия стационарности тока. Окружим, например, узел А замкнутой поверхностью  $S$ . Тогда  $\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ , т.е. заряд (ток), вытекающий из поверхности  $S$ , равен заряду (току), втекающему в нее. Поэтому

$$\text{алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю: } \sum_i I_i = 0.$$

Это первое правило Кирхгофа. Число токов в сумме должно равняться числу проводников, сходящихся в узле. Токи, направленные к узлу или от него, входят в сумму с разными знаками. Так, для узла В на рисунке имеем  $I_1 - I_2 + I_3 = 0$ .



Чтобы записать правила Кирхгофа, надо вдоль каждого выходящего из узла проводника в произвольном направлении обозначить стрелкой текущий по этому проводнику ток. Если направление тока выбрано неверно, то при решении системы уравнений знак тока получится отрицательным, а его величина будет верной.

Второе правило Кирхгофа является следствием закона Ома для неоднородных участков проводника.

Замкнутым контуром называется сплошная линия, проведенная из любого узла вдоль проводников цепи, и возвращающаяся в этот узел, нигде не пересекая себя. Так, рассматриваемая на рисунке цепь имеет семь различных замкнутых контуров, показанных справа.

Разбиваем любой замкнутый контур на участки, соединяющие соседние узлы. Например, для внешнего контура цепи это будут участки АВ, ВС и СА. Записываем для них закон Ома с учетом направления обхода:

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_1 r_1 &= \varphi_A - \varphi_B - \varepsilon_1, \\ I_2 R_2 + I_2 r_2 &= \varphi_B - \varphi_C + \varepsilon_2, \\ -I_6 R_6 &= \varphi_C - \varphi_A \end{aligned} \right\}$$

и складываем полученные выражения. Разности потенциалов в сумме дают ноль, и мы получаем второе правило Кирхгофа:

Алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления (включая внутренние сопротивления источников э.д.с.) в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме э.д.с. в этом же замкнутом контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \varepsilon_i.$$

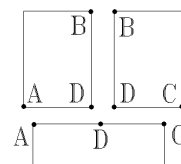
Чтобы учесть знаки в указанной сумме, выбираем направление обхода контура. Если выбранное произвольно направление (стрелка) тока совпадает с **направлением обхода**, то в сумму соответствующее слагаемое входит со знаком «+», в противном случае – со знаком «-». Правило определения знаков э.д.с. таково: если положительная (большая) клемма источника э.д.с. совпадает с направлением обхода, то в сумму эта э.д.с. входит со знаком «+», в противном случае – со знаком «-». Так, например, для внешнего замкнутого контура рассматриваемой цепи с учетом выбранного направления обхода второе правило Кирхгофа запишется в виде

$$I_1 (R_1 + r_1) + I_2 (R_2 + r_2) - I_6 R_6 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

*Замечание:* не следует писать правила Кирхгофа для всех узлов и всех замкнутых контуров цепи. Эти уравнения линейно зависимы. Если цепь имеет  $N$  узлов, то первые правила Кирхгофа следует писать для любых  $(N - 1)$  узлов. Вторые правила Кирхгофа можно записать только для наименьших замкнутых контуров, внутри которых нет других участков цепи (рисунок справа). Записанная таким образом линейная система уравнений достаточна для определения всех неизвестных токов  $I_i$  во всех ветвях цепи.

Наконец, если токи в разветвленной цепи квазистационарны, а в цепь включены конденсаторы, то при записи второго правила Кирхгофа следует учесть сумму падений напряжения на конденсаторах в выбранном замкнутом контуре:

$$\sum_i I_i R_i + \sum_i I_i r_i + \sum_i U_{Ci} = \sum_i \varepsilon_i.$$

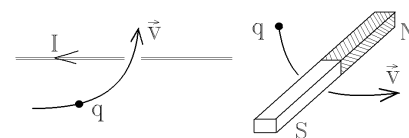


## 16. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### 16.1. Причина появления магнитного поля. Вектор индукции магнитного поля

Поместим **неподвижную** свободную частицу с зарядом  $q$  вблизи проводника с током или постоянного магнита. Постоянный магнит на покоящуюся частицу не действует, а электрическим полем проводника с током можно пренебречь. В самом деле, хотя ток в металле создан движением свободных электронов, но заряд этих электронов практически компенсирован положительным зарядом ионов решетки, и в целом проводник с током можно считать электронейтральным.

Но если частица с зарядом  $q$  движется, то ее траектория вблизи проводника с током, а также вблизи постоянного магнита начнет искривляться. Из этого следует, что на нее действует какая-то сила неэлектростатической природы. Она была названа магнитной.

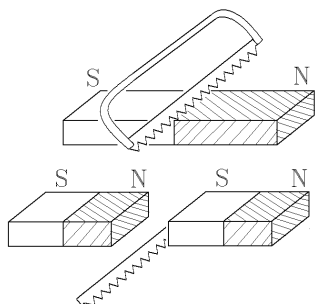


Магнитные силы действуют только на движущиеся заряды (токи) или на магниты.

Отдельные электрические заряды (положительные и отрицательные) существуют, а отдельных магнитных зарядов («северного» и «южного»), которые отталкивались или притягивались бы магнитными силами, в природе не наблюдается. Если распилить постоянный магнит пополам, то получим два новых постоянных магнита.

Магнитная сила имеет ту же природу, что и электрическая. Она является следствием релятивистских эффектов, возникающих при движении заряженных частиц.

Пусть по прямолинейному тонкому бесконечно длинному проводнику течет ток  $I$ . Параллельно проводнику на расстоянии  $r$  со скоростью  $\vec{v}$  в ту же сторону, что и ток, движется положительный точечный заряд  $q$ . Из опыта следует, что магнитная сила начнет притягивать заряд  $q$  к проводнику с током.



Но в другой инерциальной системе  $K'$ , движущейся вместе с зарядом  $q$  со скоростью  $\vec{v}$ , этот заряд покоится, и магнитной силы быть не должно. А по принципу относительности законы движения во всех инерциальных системах одинаковы, то есть сила притяжения должна сохраниться. Откуда же она берется?

Дело в том, что ток  $I = jS = enuS$  – это направленное движение вдоль проводника свободных электронов,  $n$  – их концентрация,  $S$  – площадь сечения проводника. Тогда  $n \cdot S \cdot 1\text{м}$  – это число свободных электронов в единице длины проводника, а  $l_0 = 1/(n \cdot S)$  – это среднее расстояние между соседними свободными электронами, если они движутся «цепочкой», что справедливо для очень тонкого проводника в системе отсчета  $K$ , где проводник покоится, а сторонний заряд  $q$  движется со скоростью  $v$ .

При этом дрейфовая скорость направленного движения носителей тока  $u \approx 0,1\text{мм/с}$  очень мала, а так как на каждый свободный электрон приходится положительный ион решетки с зарядом  $+e$ , то среднее расстояние между положительными зарядами тоже равно  $l_0$ . В сумме положительные и отрицательные заряды компенсируют друг друга, и проводник с током не заряжен и не взаимодействует с зарядом  $q$  электростатически.

Но в системе  $K'$ , где покоится сторонний заряд  $q$ , свободные электроны движутся со скоростью  $v + u$ , а положительные ионы – со скоростью  $v$ . Из-за релятивистского сокращения длины расстояние между свободными электронами будет чуть меньше, чем расстояние между положительными ионами:  $L_- = l_0 \sqrt{1 - ((v+u)/c)^2} < L_+ = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$ . Заряды уже не компенсируют друг друга и распределены вдоль проводника с результирующей линейной плотностью  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{+e}{L_+} + \frac{-e}{L_-} = \frac{e}{l} \left( \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-1/2} - \left[ 1 - \frac{(v+u)^2}{c^2} \right]^{-1/2} \right) \approx \frac{e}{l_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{(v+u)^2}{c^2} \right) \approx -\frac{euv}{l_0 c^2} = -enS \frac{v}{c^2} = -I \frac{v}{c^2}. \text{ Отсюда видно,}$$

что вследствие эффекта Лоренца сокращения длины, проводник с током в системе  $K'$  оказывается линейно заряженным с плотностью  $\lambda$ . Этот заряд создает на расстоянии  $r$  электрическое поле с напряженностью  $E'$ , которая была вычислена ранее для заряженной нити:  $E' = \lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$ . Это поле притягивает неподвижный в системе  $K'$  заряд  $q$  к проводнику с силой

$$F_3' = q|E'| = qv \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}. \text{ Согласно принципу относительности эта сила рав-}$$

на магнитной силе в неподвижной системе отсчета  $K$ :  $F_M = F_3' = qvB$ , где величина  $B = I / (2\pi\epsilon_0 c^2 r) = \mu_0 I / (2\pi r)$  характеризует магнитное поле, создаваемое прямолинейным током  $I$ , а также любого другого магнитного поля. Она называется индукцией магнитного поля. Постоянная  $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2) = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  называется магнитной постоянной. Единица измерения магнитной индукции в СИ – тесла [Тл].

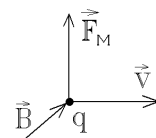
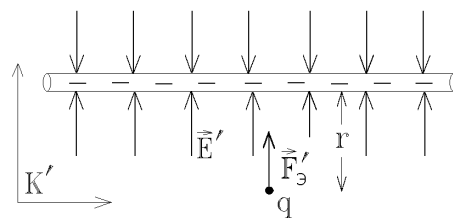
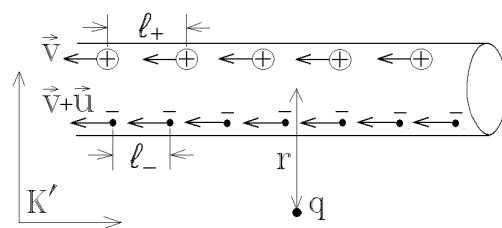
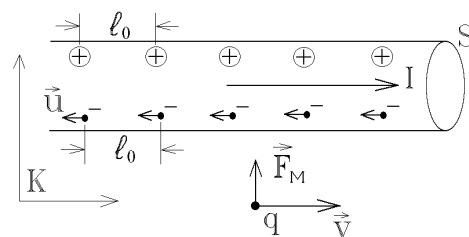
Выводы:

- 1) Магнитное создают движущиеся электрические заряды или токи.
- 2) Магнитные силы имеют одну природу с электрическими. В одной инерциальной системе отсчета наблюдатель измеряет магнитную силу, а в другой она превращается в электрическую силу. Магнитное поле для одного наблюдателя является электрическим для другого. Поэтому электрическое и магнитное поля взаимосвязаны и образуют одно целое – электромагнитное поле.

## 16.2. Сила Лоренца

Но сила  $\vec{F}_M$ , притягивающая движущийся заряд к току  $I$  – это вектор, ортогональный вектору  $\vec{v}$  скорости заряда  $q$ . Поэтому индукция магнитного поля также должна быть вектором. Тогда три вектора  $\vec{F}_M$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  можно связать формулой векторного произведения (с учетом направления этих векторов):  $\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}]$  – это магнитная сила, действующая на частицу с зарядом  $q$ , движущуюся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ .

Но в другой системе отсчета, как показано выше, магнитное поле превращается в электрическое. Поэтому следует рассматривать силу, действующую на заряд, движущийся в обоих этих полях:



$$\vec{F} = \underbrace{q\vec{E}}_{=\vec{F}_{\text{эл}}} + q \underbrace{[\vec{v}, \vec{B}]}_{=\vec{F}_{\text{маг}}}.$$

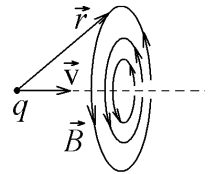
Это – сила Лоренца. Её первое слагаемое – это электрическая сила  $\vec{F}_{\text{эл}}$ , которая в электростатическом поле равна силе Кулона. Второе слагаемое  $\vec{F}_{\text{маг}}$  – это магнитная составляющая силы Лоренца.

### 16.3. Магнитное поле движущегося электрического заряда и элемента тока. Закон Био-Савара-Лапласа

Пусть частица с зарядом  $q$  движется с нерелятивистской скоростью  $\vec{v}$  (даже огромная средняя скорость хаотического движения свободных электронов в металле  $\langle v \rangle \approx 2 \cdot 10^6$  м/с много меньше скорости света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с). Вектор индукции магнитного поля, созданного движением такой заряженной частицы на расстоянии  $\vec{r}$  от нее вычисляется по формуле

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Линии индукции  $\vec{B}$  охватывают линию, вдоль которой направлен вектор скорости частицы и **замкнуты**, в отличие от линий напряженности электростатического поля, которые начинаются и заканчиваются на электрических зарядах.



Магнитное поле, созданное одной движущейся частицей очень мало. Рассмотрим для примера две такие частицы, движущиеся на расстоянии  $r$  друг от друга с одинаковыми скоростями  $\vec{v}$  параллельно друг другу. Электрическая сила Кулона  $\vec{F}_э = qE = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  расталкивает их, а магнитная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_м = q[\vec{v}, \vec{B}] = \frac{\mu_0 v^2 q^2}{4\pi r^2}$  – притягивает, как следует из формулы для векторного произведения  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Но отношение сил  $\frac{F_м}{F_э} = \epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \ll 1$  для нерелятивистских частиц. Особенно заметна малость магнитного поля, созданного одним электроном при направленном движении с дрейфовой скоростью  $u \sim 0,1$  мм/с, создающем ток в металлических проводниках. Тогда  $\frac{F_м}{F_э} = \frac{u^2}{c^2} \sim 10^{-25}$ !

Практически магнитные силы должны исчезать на фоне электрических. Но дело в том, что положительные и отрицательные заряды в веществе точно скомпенсированы, и поэтому результирующая кулоновских сил ничтожна мала. А крайне малые магнитные силы, действующие на каждый свободный электрон, суммируются, то есть умножаются на число электронов, имеющее порядок числа Авогадро, и в итоге создаются достаточно большие магнитные поля. Заметное магнитное поле возникает при направленном движении достаточно большого заряда.

Рассмотрим тонкий проводник с током  $I$  и вырежем из него маленький участок длины  $dl$ . Все движущиеся в нем носители заряда создают магнитные поля. Согласно принципу суперпозиции для магнитного поля индукции полей, создаваемых разными источниками, складываются векторно, и результирующее поле всех движущихся электронов равно

$$\vec{B}_{\text{рез}} = \sum_i \vec{B}_i = \frac{\mu_0 (-e)}{4\pi} \sum_i \frac{[\vec{v}_i, \vec{r}_i]}{r_i^3}.$$

Однако свободные электроны в проводнике движутся **хаотически**, их скорости  $\vec{v}_i$  и

векторы магнитной индукции  $\vec{B}_i$  направлены в разные стороны и в сумме дают ноль. Поэтому кусок металла, вообще говоря, не создает магнитного поля, хотя в нем имеются движущиеся заряды.

Но ток в проводнике – это направленное результирующее движение свободных электронов с одной и той же дрейфовой скоростью  $\vec{u}$ . В участке проводника с объемом  $dV = Sdl$  будет  $nSdl$  таких электронов, и, двигаясь совместно, они

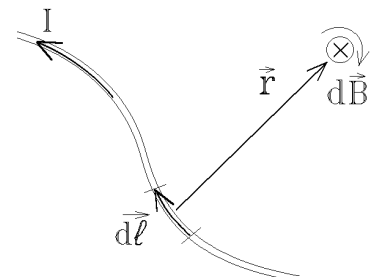
создадут в точке А на расстоянии  $\vec{r}$  от участка  $dl$  поле с индукцией  $d\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i = nSdl \frac{\mu_0 (-e)}{4\pi} \frac{[\vec{u}, \vec{r}]}{r^3}$ , где  $n$  – концен-

трация или число свободных электронов в единице объема, а  $nSdl$  – это число электронов в выделенном участке,  $\frac{\mu_0 (-e)}{4\pi} \frac{[\vec{u}, \vec{r}]}{r^3}$  – поле одного электрона. Учтем, что

$-en\vec{u} = \vec{j}$  – плотность тока. Назовем векторную величину  $I d\vec{l} = \vec{j} S dl = -en\vec{u} S dl$ , направленную по линиям тока, элементом тока. Получаем закон Био – Савара – Лапласа:

Элемент тока  $I d\vec{l}$  создает на расстоянии  $\vec{r}$  магнитное поле с индукцией

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

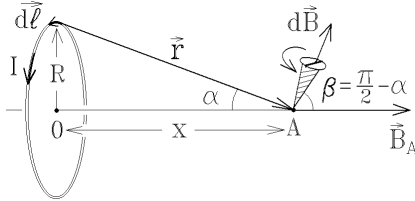
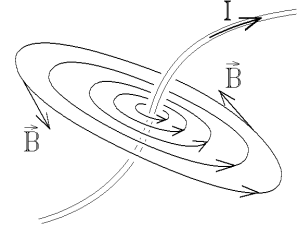


Этот закон позволяет, зная токи, рассчитать магнитное поле в любой точке пространства. Чтобы найти поле, созданное всем проводником с током, надо проинтегрировать полученное для  $d\vec{B}$  выражение по всей длине проводника:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

Как и в случае движущегося заряда, линии индукции  $\vec{B}$  замкнуты и охватывают проводник с током.

Вычислим магнитное поле, созданное некоторыми проводниками с током.

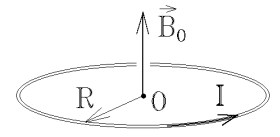


1) Поле на оси кругового витка радиуса  $R$  с током  $I$ . Каждый элемент тока  $Id\vec{l}$  создает в точке  $A$  на оси витка на расстоянии  $x$  от его центра  $O$  поле  $d\vec{B}$ . Для определения результирующей индукции  $\vec{B}_A$ , направленной в силу симметрии вдоль оси витка, надо суммировать проекции всех векторов  $d\vec{B}$  на ось (поперечные составляющие  $d\vec{B}_\perp$  взаимно компенсируют друг друга):

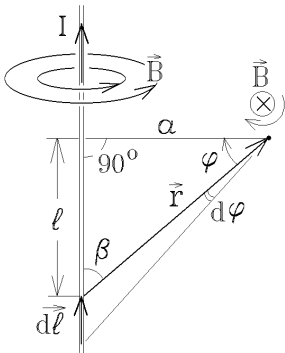
$$B_A = \oint d\vec{B} \cdot \cos\beta = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin 90^\circ}{r^2} \cos\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos\beta \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \cos\beta \oint dl$$

Так как  $r^2 = R^2 + x^2$  и  $\cos\beta = \sin\alpha = R/r$ , то индукция  $\vec{B}_A$ , направленная вдоль оси  $x$ ,

уменьшается с расстоянием  $x$  от центра витка  $O$  и имеет величину  $B_A = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$ .



в центре  $O$  кругового витка с током  $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$  (направление  $\vec{B}_0$  показано на рисунке).



2) Поле на расстоянии  $a$  от бесконечного прямолинейного тонкого проводника с током  $I$ .

Из прямоугольного треугольника, изображенного на рисунке ниже, следует:

$$\sin\beta = \cos\varphi; \quad r = \frac{a}{\cos\varphi}; \quad l = a \cdot \tan\varphi. \quad \text{Тогда } dl = a \cdot d(\tan\varphi) = \frac{a \cdot d\varphi}{\cos^2\varphi} \text{ и величину индукции}$$

$$d\vec{B}, \text{ созданной элементом тока } Id\vec{l}, \text{ можно выразить через одну независимую переменную } \varphi: \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\beta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos\varphi d\varphi.$$

Если поле создано конечным участком прямолинейного тонкого проводника с током, то в точке  $A$  на расстоянии  $a$  от проводника индукцию магнитного поля можно найти, вычислив интеграл по всей длине проводника (угол  $\varphi$  изменяется от  $-\varphi_1$  до  $+\varphi_2$ ):

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \sin\varphi \right]_{-\varphi_1}^{+\varphi_2} = B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1).$$

Для бесконечно длинного проводника  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  и

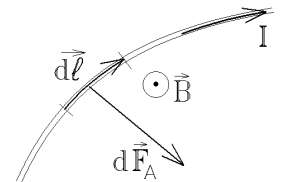
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \text{— это же выражение для индукции } \vec{B}, \text{ создан-$$

ной бесконечным тонким прямолинейным током  $I$  на расстоянии  $a$  от проводника. Это же выражение мы получали раньше при выводе магнитной силы.

## 16.4. Сила Ампера

Внесем металлический проводник с током во внешнее магнитное поле  $\vec{B}$ . На движущиеся внутри свободные электроны действуют силы Лоренца  $\vec{F}_M = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ . Скорости свободных электронов складываются из скорости хаотического движения  $\vec{v}_{хд}$  и дрейфовой скорости  $\vec{u}$ , приводящей к появлению тока:  $\vec{v} = \vec{v}_{хд} + \vec{u}$ . Скорости хаотического движения электронов направлены в разные стороны. Поэтому в разные стороны будут направлены и соответствующие им магнитные силы, которые в сумме равны нулю. Совместное же дрейфовое движение свободных электронов со скоростью  $\vec{u}$  приводит к появлению суммарной силы

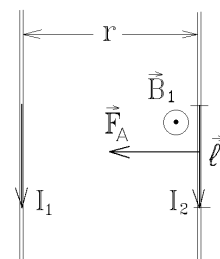
$d\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{Mi} = -e[\vec{u}, \vec{B}] \cdot nSdl$ , так как  $nSdl$  — число свободных электронов на участке проводника длины  $dl$  и сечения  $S$ , а  $-e[\vec{u}, \vec{B}]$  — сила, действующая на один электрон. Сила  $d\vec{F}_A$  называется силой Ампера. Действуя на все свободные заряды



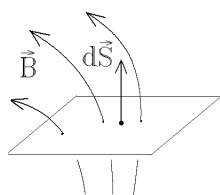
в проводнике, она действует и на сам проводник. Так как  $-enS\vec{v}dl = \vec{j}Sdl = I\vec{dl}$  (элемент тока), то на элемент проводника с током  $I$ , помещенный во внешнее магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  (рис.), действует сила Ампера  $d\vec{F}_A = I[\vec{dl}, \vec{B}]$ . Это – закон Ампера. На весь проводник с током действует сила Ампера  $\vec{F}_A = \int_l I[\vec{dl}, \vec{B}]$ .

*Пример:* рассмотрим два параллельных проводника с током на расстоянии  $r$  друг от друга, АО которым текут **в одном направлении** токи  $I_1$  и  $I_2$ . Первый ток создает вблизи второго поле  $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ . В этом поле на участок второго тока длины  $l$  действует сила Ампера  $F_A = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} l$ , **притягивающая** токи друг к другу.

**Если заряды одного знака отталкиваются, то однонаправленные токи притягиваются силой Ампера, а разнонаправленные токи отталкиваются.**



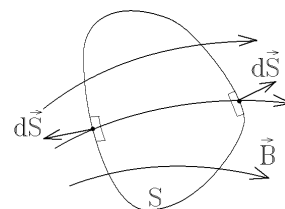
## 16.5. Теорема Гаусса для индукции магнитного поля



Поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  через произвольную площадку  $d\vec{S}$  называется магнитным потоком:  $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . Численно он равен числу линий магнитной индукции, пересекающих площадку  $dS$ . В СИ единицу измерения  $\Phi_B$  называют вебером [Вб].

Но линии  $\vec{B}$  замкнуты, они нигде не начинаются и нигде не кончаются. Поэтому сколько линий  $\vec{B}$  входит внутрь замкнутой поверхности  $S$ , столько же и выходит из нее. Входящие линии образуют тупой угол с  $d\vec{S}$ , и для них  $\vec{B} \cdot d\vec{S} < 0$ , а для выходящих линий  $\vec{B} \cdot d\vec{S} > 0$ . Поток вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю:

$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$  – это теорема Гаусса для вектора индукции  $\vec{B}$  любого магнитного поля.



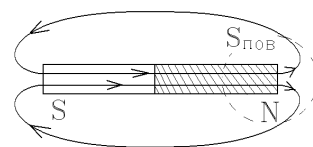
Используя теорему Остроградского  $\oint \vec{B} d\vec{S} = \int \text{div } \vec{B} dV$ , получаем теорему Гаусса для вектора  $\vec{B}$  в дифференциальной

форме:

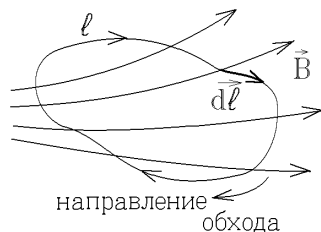
$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

либо оканчиваться, либо начинаться. Условие  $\text{div } \vec{B} = 0$  означает отсутствие начала или конца линий  $\vec{B}$ , то есть их **замкнутость**.

*Пример:* окружим северный полюс постоянного магнита замкнутой поверхностью  $S_{\text{пов}}$ . Чтобы выполнялась теорема Гаусса число линий  $\vec{B}$ , выходящих из поверхности, должно быть числу линий  $\vec{B}$ , входящих в неё. Внутри магнита тоже есть магнитное поле, а линии  $\vec{B}$  нигде не обрываются, они замкнуты.

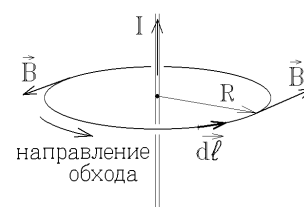


## 16.6. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля



По определению циркуляцией вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру называется интеграл  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ , знак которого зависит от направления обхода контура.

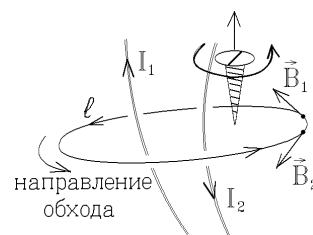
Вычислим циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по круговому контуру радиуса  $R$ , окружающему прямой бесконечный проводник с током  $I$ . Контур совпадает с линией индукции  $\vec{B}$ , и величина  $B = \mu_0 I / 2\pi R$  при интегрировании постоянна. Тогда  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl \cos 0^\circ = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint dl = \mu_0 I$ .



Результат не изменится, если форма проводника с током и форма охватывающего его контура будут произвольны (см. рисунок слева). Если контур охватывает несколько токов, то их поля по принципу суперпозиции складываются:  $\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$ , и циркуляция результирующего вектора  $\vec{B}$  определяется выражением  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_i \oint \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$ .



Но токи могут течь по проводникам в разных направлениях. К тому же можно изменить и направление обхода контура, что изменит знак циркуляции. Поэтому сумма в правой части должна быть алгебраической: следует учитывать знаки токов. Для этого надо поставить перпендикулярно плоскости контур винт и вращать его по направлению обхода контура. Если направление поступательного движения винта совпадает с направлением тока, охватываемого контуром, то этот ток входит в сумму со знаком “+”. Если же ток направлен противоположно направлению движения винта, то он входит в сумму со знаком “-”. Так циркуляция  $\vec{B}$  в примере, показанном на рисунке, будет равна  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$ .

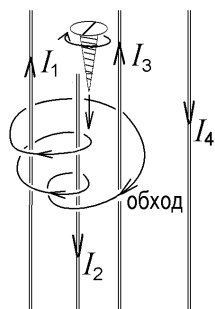


Обобщая все сказанное выше, приходим к выводу:

циркуляция вектора  $B$  по любому замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

Это – теорема о циркуляции для вектора индукции магнитного поля.



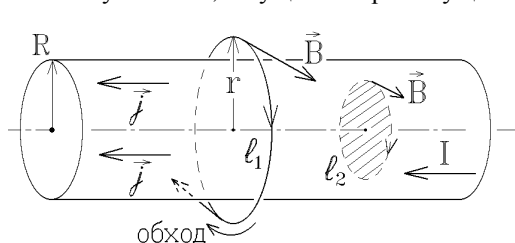
*Замечание:* контур может охватывать каждый ток несколько раз. Так на левом рисунке ток  $I_1$  охватывается контуром 2 раза, ток  $I_2$  - 3 раза, ток  $I_3$  - 1 раз. В соответствии с заданным направлением обхода теорема о циркуляции  $\vec{B}$  запишется в виде  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (-2I_1 + 3I_2 - I_3)$ . Ток  $I_4$  тоже создает магнитное поле  $\vec{B}_4$ , этот ток не охватывается контуром и его циркуляция  $\oint \vec{B}_4 \cdot d\vec{l} = 0$ . Этот ток в сумму не входит.

## 16.7. Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитного поля: поле цилиндрического провода с током, поверхностного тока, соленоидальной и тороидальной катушки с током

### 1) Цилиндрический проводник с током

Полученная ранее формула для индукции магнитного поля тонкого прямого бесконечно длинного проводника с током  $B = \mu_0 I / 2\pi r$  дает некорректный результат  $B \rightarrow \infty$  на оси проводника, т.е. при  $r = 0$ . Этого можно избежать, если учесть, что любой реальный проводник имеет конечное поперечное сечение, и ток в нем распределен с конечной плотностью.

Пусть ток  $I$ , текущий по прямому цилиндрическому проводнику радиуса  $R$ , имеет одинаковую во всех точках

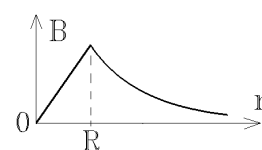


плотность  $j = I / \pi R^2$ . Для кругового контура  $l_1$  радиуса  $r > R$  теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  имеет вид:  $\oint_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ . Величина  $B =$

$\text{const}$  на одинаковой удалении  $r$  от оси. Таким образом, поле вне длинного прямого цилиндрического проводника с током совпадает с полем

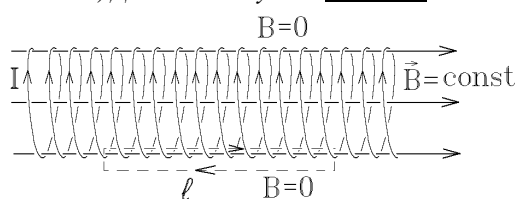
бесконечно тонкого прямого проводника с током:  $B|_{r \geq R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

Другой контур  $l_2$  радиуса  $r < R$  охватывает участок проводника, заштрихованный на рисунке, через поперечное сечение которого течет ток  $I' = j\pi r^2$ . В этом случае теорема о циркуляции  $\vec{B}$  дает:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 j\pi r^2 = \mu_0 I r^2 / R^2$ . Поэтому внутри проводника на удалении  $r$  от его оси индукция магнитного поля  $B|_{r \leq R} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$ . Зависимость величины  $B$  от рас-



стояния  $r$  до оси проводника представлена на графике. Как видно, на оси проводника  $B = 0$ , а на поверхности проводника с током магнитное поле имеет наибольшую индукцию.

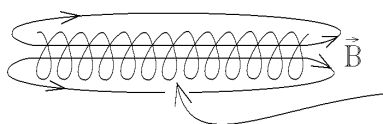
### 2) Длинная катушка-соленоид с током.



Линии индукции магнитного поля должны замыкаться (выходя из одного конца соленоиды, они возвращаются в другой). Если соленоид имеет очень большую длину, то линии  $\vec{B}$  практически уходят в бесконечность. Внутри такого соленоиды с равномерной намоткой витков  $\vec{B} = \text{const}$ , а вне его, вдали от концов соленоиды,  $\vec{B} = 0$ .

Циркуляция  $\vec{B}$  по очень узкому прямоугольному контуру длины  $l$ , одна сторона которого лежит внутри соленоиды, а другая – вне его,

равна  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{\text{внутри}} l + B_{\text{вне}} l = \mu_0 I N$ , так как контур охватывает  $N$  витков с током  $I$ , текущим по каждому витку. Таким образом, индукция магнитного поля внутри длинного прямого соленоида, где  $n = N/l$  – число витков на единицу длины

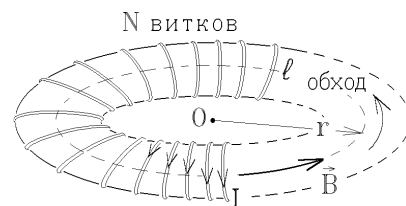


соленоида, будет равна  $B_{\text{в соленоиде}} = \mu_0 n I$ .

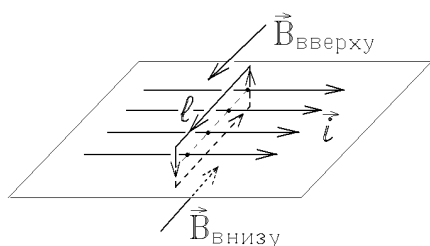
Бесконечно длинных соленоидов не существует и применять эту формулу можно вдали от краев длинных и узких соленоидов.

### 3) Тороидальная катушка с током.

Линии индукции  $\vec{B}$  внутри катушки образуют замкнутые окружности. Выберем контур  $l$  радиуса  $r$ , совпадающий с такой линией. Он охватывает все  $N$  витков катушки, по которым течет ток  $I$ , и из теоремы о циркуляции  $\vec{B}$  следует, что  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I N$ , т.е. индукция магнитного поля внутри тороидальной катушки зависит от расстояния  $r$  до ее центра О:  $B_{\text{в тороиде}} = \mu_0 N I / (2\pi r)$ .



### 4) Плоскость с поверхностным током.



Пусть по бесконечной плоскости течет постоянный ток с линейной плотностью  $i$  (это – ток, протекающий по полосе ширины  $1\text{м}$ :  $I = i l$ , где  $l$  – ширина полосы с током). Выберем симметричный прямоугольный контур, охватывающий участок плоскости ширины  $l$ . Тогда из теоремы о циркуляции  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{\text{вверху}} l + B_{\text{внизу}} l = \mu_0 i l$ , где  $i l$  – охватываемый ток. Из-за симметрии контура относительно плоскости с током  $B_{\text{вверху}} = B_{\text{внизу}}$  и

$B_{\text{плоскости с током}} = \mu_0 i / 2$ . Полученная величина индукции магнитного поля, созданного бесконечной плоскостью с однородным поверхностным током, не

зависит от расстояния до плоскости.

**Замечание:** формулу  $B = \mu_0 i / 2$  можно применять для точек, **достаточно близких** к поверхности любой формы, по которой течет ток с линейной плотностью  $i$ . Рядом с поверхностью основной вклад в  $B$  дает близлежащий участок тока, который можно считать плоским.

## 16.8. Теорема о циркуляции вектора индукции в дифференциальной форме

Кроме теоремы Остроградского, в векторном анализе важна другая **теорема Стокса**, позволяющая вычислить циркуляцию любого вектора  $\vec{A}$ :

циркуляция вектора  $\vec{A}$  по произвольному замкнутому контуру равна интегралу от  $\text{rot } \vec{A}$  по поверхности произвольной формы, ограниченной этим контуром:  $\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$ .

Заметим, что поверхность  $S$  может иметь какую угодно форму, лишь бы она была ограничена замкнутым контуром  $l$  – результат при этом не изменится:

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_2} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}_2.$$

Вектор  $\text{rot } \vec{A}$  называется ротором вектора  $\vec{A}$  и вычисляется как векторное произведение  $\text{rot } \vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}]$  или

$$\text{rot } \vec{A} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \text{ где } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ – орты декартовой системы координат}$$

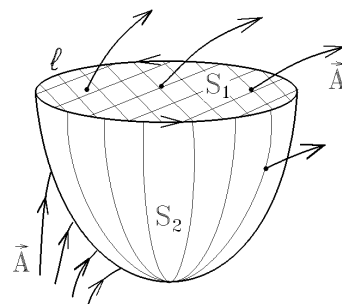
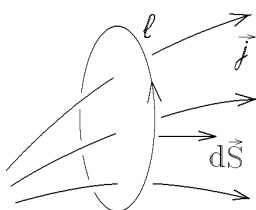
(сравните выражения  $\text{grad } A$ ,  $\text{div } \vec{A}$  и  $\text{rot } \vec{A}$ ). Векторы  $d\vec{S}$ , как и раньше, направлены перпендикулярно к элементарной площадке  $dS$ .

Применим теперь теорему Стокса к магнитному полю:

$$\int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{охватываемый ток}} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \text{ где } S \text{ – площадь, охватываемая контуром}$$

это теорема о циркуляции  $\vec{B}$

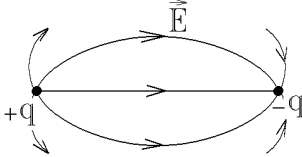
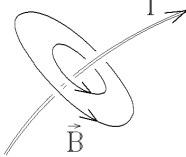
ром. Так как это равенство выполняется для произвольных поверхностей  $S$ , то равны подынтегральные функции:  $\text{rot } \vec{B} = [\vec{\nabla}, \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}$  – это теорема о циркуляции индукции  $\vec{B}$  магнитного поля в дифференциальной форме (зная поле  $\vec{B}(x, y, z)$ , можно вычислить плотность тока  $\vec{j}$ , создающего это поле).





## 16.9. Сравнение особенностей электростатического и магнитостатического полей

Сопоставим полученные ранее законы для этих полей, записав их в виде следующей таблицы:

	Электростатическое поле	Постоянное магнитное поле
Теорема Гаусса	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$ или $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ или $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Теорема о циркуляции	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ или $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$ или $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
Линии поля	Линии $\vec{E}$ начинаются и заканчиваются на электрических зарядах 	Линии $\vec{B}$ замкнуты и охватывают токи. Магнитных зарядов нет 

Если ротор вектора напряженности поля во всех точках пространства равен нулю, то такое поле называется потенциальным. Дивергенция этого вектора отлична от нуля только в тех точках, где расположены заряды, создающие поле. Для потенциального поля существует скалярная функция, называемая потенциалом поля  $\varphi$ , такая, что вектор напряженности является градиентом этой функции:  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ . Силы этого поля всегда **консервативны**. Ротор напряженности потенциального поля всегда равен нулю:  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ . Например, потенциальны все центральные поля (электростатическое, и гравитационное).

Если же, наоборот, дивергенция вектора индукции равна нулю во всех точках пространства, то поле называется вихревым (или соленоидальным). Ротор этого вектора отличен от нуля только в тех точках, где плотность тока, создающего такое поле, отлична от нуля (где присутствуют "вихри"). Зарядов – источников вихревого поля не существует, как не существует однозначного потенциала  $\varphi$ .

В отличие от консервативных сил потенциальных полей магнитная сила перпендикулярна траектории движения заряда. Поэтому **силы магнитного поля работы не совершают**, и невозможно определить через работу сил потенциальную энергию для вихревого поля. Нельзя построить машину, которая работала бы за счет энергии магнитного поля. Силы вихревого поля неконсервативны.

И все же, несмотря на такие различия, электростатическое и магнитное поля имеют одну природу и преобразуются одно в другое при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

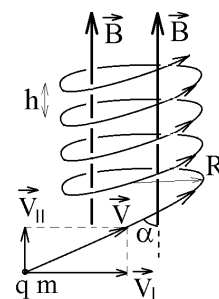
## 16.10. Движение заряженной частицы в постоянных магнитном и электрическом полях

Если частица с массой  $m$  и зарядом  $q$  ускоряется в электрическом поле разностью потенциалов  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , то совершаемая полем работа превращается в кинетическую энергию частицы  $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = mv^2/2$ , и частица приобретает скорость  $v = \sqrt{2qU/m}$ . Отношение  $q/m$  называется удельным зарядом частицы.

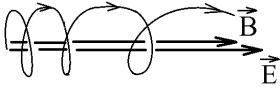
Пусть ускоренная частица со скоростью  $\vec{v}$  влетает в постоянное однородное магнитное поле под углом  $\alpha$  к линиям индукции поля  $\vec{B}$ . Скорость частицы можно разложить на перпендикулярную к полю  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  и параллельную к полю составляющую  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ . Магнитная сила Лоренца  $F_M = [q\vec{v}, \vec{B}] = qBv \sin \alpha = qBv_{\perp}$  будет направлена перпендикулярно как скорости частицы, так и к линиям магнитного поля, и приведет к движению частицы с постоянной по величине скоростью  $v_{\perp}$  по окружности радиуса  $R$  с нормальным (центростремительным) ускорением  $a_n = v_{\perp}^2 / R$ . Из уравнения динамики  $ma_n = m \frac{v_{\perp}^2}{R} = F_M = qBv_{\perp}$  находим радиус траектории:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} \text{ и период обращения } T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}, \text{ который не зависит от скорости частицы.}$$

Вдоль линий  $\vec{B}$  магнитная сила не действует, и частица будет лететь с постоянной скоростью  $v_{\parallel}$ , одновременно вращаясь вокруг линий  $\vec{B}$  с периодом  $T$ . Результирующим движением будет винтовая линия или спираль с радиусом



$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} \text{ и с шагом } h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{qB}, \text{ показанная на рисунке.}$$



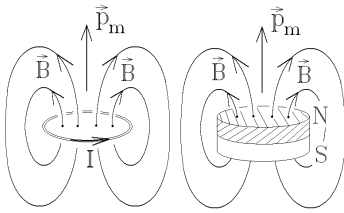
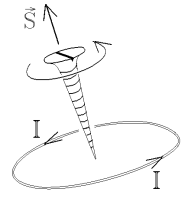
Если одновременно с магнитным полем на заряженную частицу действует электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , то траектория частицы будет достаточно сложной кривой линией. В наиболее простом случае направления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  совпадают. Тогда под действием электрического поля  $ma_{\parallel} = F_z = qE$  частица будет двигаться вдоль линий  $\vec{B}$  с ускорением  $a_{\parallel}$  с меняющейся со временем скоростью  $v_{\parallel} = v_{0\parallel} + a_{\parallel}t$  по винтовой линии с тем же радиусом  $R$ , но с переменным шагом  $h$ .

Если линии  $\vec{E}$  образуют угол  $\alpha$  с линиями  $\vec{B}$ , то заряженная частица совершает сложные петли, но постепенно смещается (“дрейфует”) в направлении перпендикулярном к векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  со средней скоростью  $\langle \vec{v}_{\text{др}} \rangle = [\vec{E}, \vec{B}] / B^2$ , которая также называется скоростью дрейфа  $\langle v_{\text{др}} \rangle = E \sin \alpha / B$ .

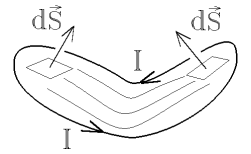
### 16.11. Дипольный магнитный момент контура с током

Под контуром с током здесь подразумевается замкнутый тонкий проводник, по которому течет **постоянный** ток. Если этот контур имеет малые размеры, то его также называют магнитным диполем. Такой диполь характеризуется дипольным магнитным моментом  $\vec{p}_m = I\vec{S}$ .

В этой формуле  $S$  – это площадь контура с током, а вектор площади  $\vec{S}$  направлен перпендикулярно по правилу винта. Винт, установленный в центре контура вращают **по направлению тока  $I$**  (см. рисунок). Поступательное движение винта показывает направление вектора площади  $\vec{S}$  контура с током и направление магнитного момента  $\vec{p}_m$ .



Заметим, что магнитное поле контура с током совпадает с полем постоянного магнита той же формы. Поэтому постоянные магниты тоже описывают магнитным моментом  $\vec{p}_m$ . В задачах можно заменять постоянные магниты эквивалентными замкнутыми контурами с током той же формы и наоборот. Если контур с током не плоский, то его магнитный момент вычисляется по формуле  $\vec{p}_m = I \int d\vec{S}$ , где интеграл берется по любой поверхности, ограниченной плоскостью с током. Результат не зависит от формы поверхности.

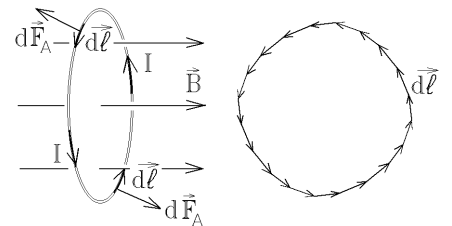


Результат не зависит от формы поверхности.

### 16.12. Энергия замкнутого проводника с постоянным током во внешнем магнитном поле. Сила и момент сил, действующие на контур с током

Рассмотрим замкнутый проводник или контур с током, находящийся в магнитном поле. На каждый элемент тока  $I d\vec{l}$  действует сила Ампера  $d\vec{F}_A = I[d\vec{l}, \vec{B}]$ . Если поле **однородно** ( $\vec{B} = \text{const}$ ), то результирующая сила, действующая на весь контур,  $\vec{F}_A = \oint d\vec{F}_A = I[\oint d\vec{l}, \vec{B}] = 0$ , так как для замкнутого контура  $\oint d\vec{l} = 0$ .

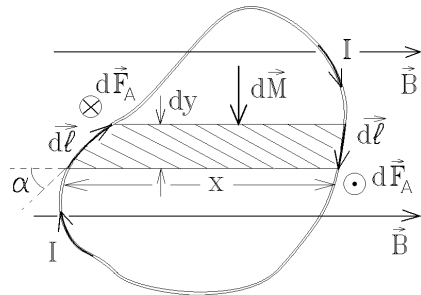
Таким образом, в **однородном магнитном поле силы Ампера стремятся растянуть или сжать замкнутый контур с током, но в сумме они равны нулю и поэтому не могут сдвинуть контур с места.**



Однако, суммарный момент

сил Ампера  $\vec{M} = \oint I[\vec{r}, d\vec{F}_A]$  не равен нулю и стремится повернуть контур с током.

Вычислим этот момент сил. Для этого разобьем плоский контур с током на очень узкие полоски ширины  $dy$ , как показано на рисунке. На два элемента тока  $I d\vec{l}$ , выделенные этой полоской, действует пара сил  $d\vec{F}_A$ , направленных в противоположные стороны. Момент этой пары сил равен  $dM = x \cdot IB dl \sin \alpha = IBx dy = IB dS$ , где  $dS = x dy$  – это площадь заштрихованной на рисунке полоски. Суммарный момент сил, поворачивающий весь контур с током, вычисляется, как  $M = IB \int dS = IBS$ . Как и раньше, будем определять на-



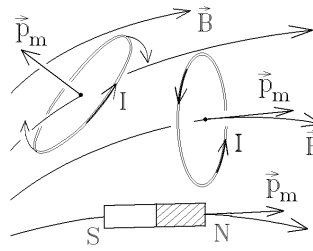
правление вектора  $\vec{S}$  площади, ограниченной контуром с током, по правилу правого винта, вращая его “по току”. Тогда выражение для вектора момента сил запишется как  $\vec{M} = [I\vec{S}, \vec{B}]$  или, с помощью магнитного момента контура, как

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$$

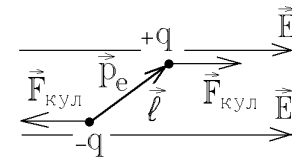
Момент сил Ампера  $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$  стремится повернуть плоскость контура с током перпендикулярно линиям индукции  $\vec{B}$  так, чтобы магнитный момент  $\vec{p}_m$  был направлен одинаково с вектором  $\vec{B}$ .

Точно так же постоянный магнит (магнитная стрелка) разворачивается вдоль линий вектора  $\vec{B}$ , а электрический диполь поворачивается вдоль линий напряженности  $\vec{E}$  электрического поля.

Если через  $\varphi$  обозначить угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ , то при повороте контура с током в магнитном поле на угол  $d\varphi$  (причем  $d\varphi < 0$ , так как угол  $\varphi$  **уменьшается** (см. рисунок ниже), момент сил совершает работу  $dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} = -p_m B \sin \varphi d\varphi = -dW$ , кото-



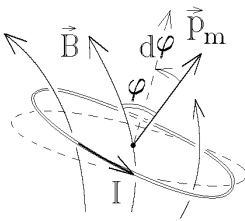
Магнитный диполь  $\vec{p}_m = I\vec{S}$   
 $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}] \quad W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$



Электрический диполь  $\vec{p}_e = ql$   
 $\vec{M} = [\vec{p}_e, \vec{E}] \quad W = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}$

рая идет на изменение потенциальной энергии контура с током в магнитном поле. Интегрируя это уравнение, получим

выражение для этой энергии:  $W = \int dW = \int p_m B \sin \varphi d\varphi = -p_m B \cos \varphi$  или  $W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$ .



*Замечание:* хотя магнитное поле  $\vec{B}$  не потенциально, но контур с током в нем обладает потенциальной энергией, которая определена с точностью до постоянной. Знак “-” показывает, что эта энергия минимальна, когда векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  параллельны и направлены в одну сторону. Магнитный диполь стремится повернуться в состояние с минимальной энергией.

В неоднородном поле ( $\vec{B} \neq \text{const}$ ) формула

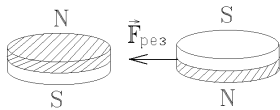
$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$  справедлива, если **размер контура достаточно мал** (тогда в пределах контура поле можно считать приближенно однородным). Следовательно, контур с током по-прежнему стремится развернуться так, чтобы его магнитный момент  $\vec{p}_m$  был направлен вдоль линии вектора  $\vec{B}$ .

Но, кроме того, на контур действует результирующая сила

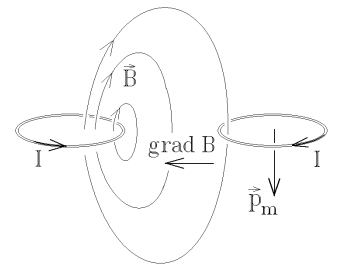
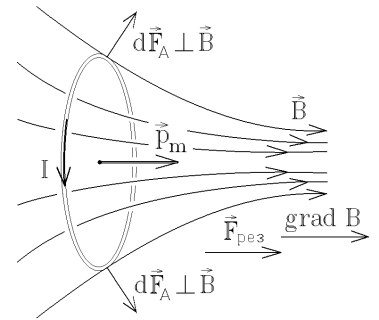
$$\vec{F}_{\text{рез}} = -\text{grad } W = -\text{grad}(-\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = p_m \text{grad } B,$$

которая равна нулю в случае однородного поля  $\vec{B} = \text{const}$ . Эта сила действует на контур с током или на постоянный магнит с моментом  $\vec{p}_m$  и **втягивает их в область более сильного магнитного поля**.

*Пример:* два круговых витка с противоположно направленными токами расположены в одной плоскости. Как видно из рисунка, потенциальная энергия взаимодействия магнитного момента  $\vec{p}_m$  правого витка с магнитным полем  $\vec{B}$ , созданным левым витком, будет уменьшаться, по мере удаления витков друг от друга:



$W = -p_m |\text{grad } B| \cos 0^\circ$ . Поэтому силы Ампера притягивают витки с противоположно направленными токами. Это легко увидеть, если заменить витки с током постоянными магнитами с эквивалентными магнитными моментами (рисунок слева). Если токи будут течь в одну сторону, то витки будут отталкиваться.



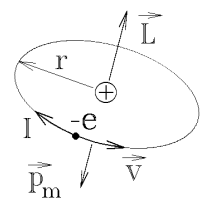
## 17. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 17.1. Намагничивание среды и вектор намагниченности

При внесении ряда веществ (особенно таких, как железо) в магнитное поле, оно изменяется. Подобные среды называются **магнетиками**. Очевидно, в них возникает какое-то дополнительное магнитное поле. Но магнитное поле создается только токами (или движущимися зарядами), т.е. в магнетиках или магнитных средах существуют дополнительные токи, которые Ампер назвал **молекулярными токами**.

Примером такого тока будет движение электрона, вращающегося вокруг положительного ядра по орбите радиуса  $r$  со скоростью  $v$  и совершающего один оборот за время  $\Delta t = T = 2\pi r / v$ . При таком движении электрона переносится заряд  $\Delta q = e$ , что эквивалентно появлению кругового

тока  $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{ev}{2\pi r}$ . Этот ток  $I$  направлен противоположно скорости  $\vec{v}$  отрицательно заряженного



электрона и создает орбитальный магнитный момент, имеющий величину  $p_m = I \cdot \pi r^2 = evr / 2$ . Заметим, что магнитный момент  $\vec{p}_m$  вращающегося электрона связан с его моментом импульса (механическим моментом)  $L = mvr$  соотношением

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m} \vec{L} \quad (\text{направлены эти векторы противоположно}).$$

Приведенное соотношение называется гиромагнитным отношением.

Все молекулярные токи создаются движением электронов по замкнутым орбитам вокруг ядра, молекулы, или, может быть, группы молекул вещества. Таким образом, все молекулярные токи являются замкнутыми и

обладают магнитным моментом  $p_m = I_{\text{мол}} S_{\text{орбиты}} \approx \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}$ .

Ясно, что в среде слишком много движущихся в разных направлениях электронов, и если все молекулярные токи направлены хаотично, то их магнитные моменты в сумме компенсируются, и вещество не создает дополнительного магнитного поля, т.е. практически не является магнетиком (дерево, пластик).

Но если молекулярные токи каким-либо образом ориентированы, то в сумме они создают магнитное поле, и говорят, что вещество намагничено.

Сложим векторно магнитные моменты всех молекулярных токов в достаточно малом объеме  $\Delta V$  вещества, разделим на этот объем и перейдем к пределу  $\Delta V \rightarrow 0$ . Полученный вектор

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}$$

называется вектором намагниченности среды (магнетика). Заметим, что это определение аналогично определению вектора поляризованности диэлектрика:  $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum \vec{p}_e / \Delta V$ .

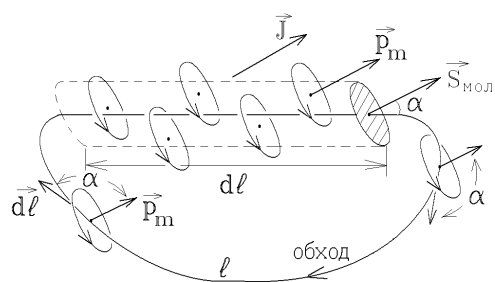
Если микроскопические молекулярные токи  $I_{\text{мол}}$  в магнетике каким-либо образом ориентированы, то, складываясь, они создают результирующие токи намагничивания. Такие токи, в отличие от обычных токов проводимости, не приводят к перемещению заряда по магнетик. Действительно, двигаясь по замкнутым микроскопическим орбитам, электроны "привязаны" к данной точке среды, т.е. не свободны. На них не действует никакое электрическое поле, заставляющее их перемещаться, просто они не могут находиться в покое.

Роль токов намагничивания заключается только в создании дополнительного магнитного поля в веществе. (В отличие от токов проводимости, эти токи и созданное ими дополнительное магнитное поле будем отмечать штрихом.)

## 17.2. Магнитная проницаемость среды и вектор напряженности магнитного поля

Молекулярные токи  $I_{\text{мол}}$  и образуемые ими токи намагничивания создают дополнительное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}'$ . Чтобы найти это поле, выберем внутри магнетика любой замкнутый контур  $l$  и запишем для него теорему о циркуляции  $\vec{B}'$ :

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{мол}} - \text{токи, охватываемые контуром.}$$



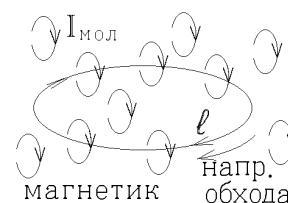
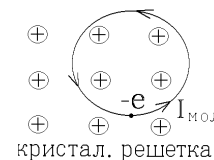
Но кольцевые токи  $I_{\text{мол}}$ , полностью лежащие внутри контура, не дают вклада в сумму: они охватываются дважды, протекая в противоположных направлениях, т.е. в сумме надо учесть только те молекулярные токи, которые, в свою очередь, охватывают линию контура  $l$ , как показано на рисунке.

Если взять элемент контура длины  $dl$ , то это те токи, центры которых лежат внутри косоугольного цилиндра с основанием  $S_{\text{мол}}$ , равным площади кругового молекулярного тока. Объем этого цилиндра  $dV = S_{\text{мол}} dl \cos \alpha$ , где угол  $\alpha$  — это угол между направлением обхода контура  $d\vec{l}$  и магнитными моментами  $\vec{p}_m$  всюду одинаково ориентированных молекулярных токов (направление их ориентации определяется вектором  $\vec{J}$ ). Если  $n$  — концентрация молекулярных токов в магнетике (число таких токов в единице объема), то малый цилиндр длины  $dl$  содержит  $n S_{\text{мол}} dl \cos \alpha$  молекулярных токов, а при обходе по всему замкнутому контуру их число равно  $\oint n S_{\text{мол}} \cos \alpha dl$ .

Умножая это число на величину одного молекулярного тока  $I_{\text{мол}}$ , получим сумму молекулярных токов, охватываемых контуром  $l$ :

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint n I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} \cos \alpha dl.$$

Примем во внимание, что  $p_m = I_{\text{мол}} S_{\text{мол}}$  — магнитный момент одного молекулярного тока. Тогда при одинаково ориентированных молекулярных токах вектор намагниченности будет равен суммарному магнитному моменту единицы



объема магнетика:  $\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V} = n\vec{p}_m$ . Тогда  $\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint J dl \cos \alpha = \mu_0 \oint \vec{J} \cdot d\vec{l}$ , а так как это равенство выполняется для любого контура  $l$ , то получаем величину индукции дополнительного магнитного поля, созданного всеми молекулярными токами среды:

$$\boxed{\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}}.$$

В сумме все молекулярные токи создают результирующий ток намагничивания с плотностью  $\vec{j}'$ . Учитывая теорему о циркуляции  $\vec{B}'$  в дифференциальной форме:  $\text{rot } \vec{B}' = \mu_0 \vec{j}'$ , получаем теорему о циркуляции вектора намагниченности  $\vec{J}$  в дифференциальной форме:

$$\boxed{\text{rot } \vec{J} = \vec{j}'}$$

Это выражение определяет плотность токов намагничивания, создающих дополнительное магнитное поле. (В электростатике аналогичной формулой будет выражение для плотности связанных зарядов, создающих дополнительное электрическое поле:  $\rho' = -\text{div } \vec{P}$ ).

Магнитное поле в среде создается и обычными токами проводимости, и токами намагничивания. Однако вычислить магнитное поле в некоторых случаях можно, пользуясь распределением только обычно известных токов проводимости. Для этого учтем, что для суммарного поля в среде  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}')$ , и подставим сюда полученную формулу для

плотности тока намагничивания  $\vec{j}' = \text{rot } \vec{J}$ . После подстановки находим:  $\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} - \text{rot } \vec{J} = \text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) = \vec{j}$ . Выражение в

круглых скобках называют вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{J}$ , для которого  $\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j}}$ .

Обычно ориентация молекулярных токов происходит под действием внешнего магнитного поля. Энтропийные силы, с другой стороны, стремятся разориентировать магнитные моменты  $\vec{p}_m$  молекулярных токов, поэтому их магнитные моменты лишь частично ориентированы вдоль поля  $\vec{B}$ . Чем сильнее магнитное поле  $\vec{B}$ , тем больше степень ориентации моментов  $\vec{p}_m$ , т.е.  $\sum \vec{p}_m \sim \vec{J} \sim \vec{B} \sim \vec{H}$ .

Такую линейную зависимость вектора намагниченности среды  $\vec{J}$  от величины внешнего магнитного поля принято записывать в виде  $\boxed{\vec{J} = \chi \vec{H}}$ . Постоянная  $\chi$  называется магнитной восприимчивостью (сравните с формулой для вектора поляризованности среды во внешнем электрическом поле:  $\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$ ).

Подставляя это выражение для  $\vec{J}$  в определение  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H}$ , находим  $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$ . Величину  $\mu = 1 + \chi$  называют магнитной проницаемостью среды.

Следовательно, в изотропном магнетике связь индукции и напряженности магнитного поля имеет вид:

$$\boxed{\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}}.$$

В вакууме, а также в любой немагнитной среде  $\chi = 0$ ,  $\vec{J} = 0$  и  $\mu_{\text{вакуума}} = 1$ . Заметим следующее: если однородный изотропный магнетик с проницаемостью  $\mu$  полностью заполняет объем, ограниченный замкнутой поверхностью, образованной линиями  $\vec{B}_{\text{пр}}$  (где  $\vec{B}_{\text{пр}}$  – индукция поля, созданного **только токами проводимости**), то индукция магнитного поля в таком магнетике будет в  $\mu$  раз больше, чем в вакууме:  $\vec{B} = \mu \vec{B}_{\text{вак}}$ . В частности, это справедливо для магнетика, заполняющего все бесконечное пространство (так как  $B|_{\infty} = 0$ ). В таком случае при удалении магнетика ни величина, ни направление напряженности магнитного поля не изменятся:  $\vec{H} = \vec{B} / \mu \mu_0 = \vec{B}_{\text{вак}} / \mu_0 = \vec{H}_{\text{вак}}$ .

### 17.3. Теорема о циркуляции вектора напряженности и вектора намагниченности

Выше было получено выражение  $\boxed{\text{rot } \vec{H} \equiv [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{j}}$ , которое является теоремой о циркуляции вектора  $\vec{H}$  в дифференциальной форме. Хотя в эту формулу входит только плотность обычных токов проводимости  $\vec{j}$ . Для определения  $\text{rot } \vec{H}$  не надо учитывать неизвестное распределение молекулярных токов или токов намагничивания (сама напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  зависит как от токов проводимости, так и от токов намагничивания).

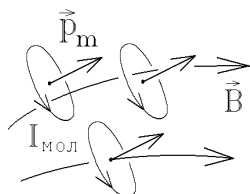
Используя теорему Стокса, получаем  $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_s \vec{j} \cdot d\vec{S}$  или

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i \quad \text{— Это теорема о циркуляции } \vec{H} \text{ в интегральной форме:}$$

циркуляция вектора  $\vec{H}$  по любому замкнутому контуру равна алгебраической сумме обычных токов проводимости, охватываемых этим контуром.

Аналогично, формула  $\text{rot } \vec{J} = \vec{j}'$  приводит к теореме о циркуляции вектора намагниченности  $\vec{J}$  по любому замкнутому контуру: циркуляция  $\vec{J}$  равна алгебраической сумме токов намагничивания, охватываемых этим контуром:

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = \sum I'_{\text{охват}}.$$



Но нельзя считать, что вектор  $\vec{J}$  определяется только токами намагничивания  $\vec{j}'$ . Сами молекулярные токи ориентируются, когда их магнитные моменты  $\vec{p}_m$  поворачиваются вдоль линий индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}$ , которое создается обычными токами проводимости  $\vec{j}$ . Иначе говоря, намагничивание среды может быть вызвано магнитным полем обычных

токов проводимости. Поэтому вектор  $\vec{J}$  определяется распределением всех токов: и токов намагничивания  $\vec{j}'$ , и токов проводимости  $\vec{j}$  в среде.

Заметим, что благодаря связи  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в однородном магнетике с проницаемостью  $\mu$  запишется как

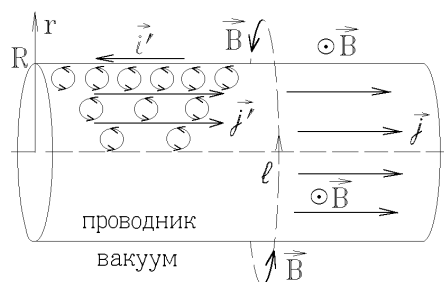
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu \sum_i I_i.$$

Наконец отметим, что основными характеристиками электрического и магнитного полей являются векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Вспомогательные векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$  используют для определения полей в ряде задач, чтобы не учитывать явно распределение связанных зарядов и токов намагничивания.

#### 17.4. Магнитное поле в магнетиках. Поле постоянного магнита

Рассмотрим проводник радиуса  $R$ , сделанный из однородного магнетика с проницаемостью  $\mu$ , по которому течет ток проводимости с плотностью  $\vec{j}$ . Из теоремы о циркуляции для напряженности  $\vec{H}$ , получим

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = \begin{cases} j \cdot \pi R^2 = I & \text{при } r \geq R \\ j \cdot \pi R^2 = I \frac{r^2}{R^2} & \text{при } r \leq R \end{cases} \quad \text{откуда } H = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r} & \text{при } r \geq R, \\ \frac{Ir}{2\pi R^2} & \text{при } r \leq R, \end{cases}$$

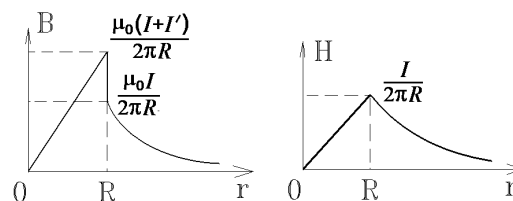


т.е. несмотря на присутствие токов намагничивания в проводнике величину напряженности  $H$  можно найти только по известному распределению токов проводимости  $\vec{j}$ .

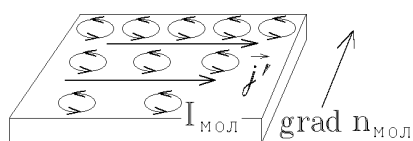
Однако, чем больше магнитное поле, созданное токами проводимости, тем сильнее ориентируются магнитные моменты молекулярных токов в этом поле, тем больше их сумма  $\vec{J}$  и величина плотности  $\vec{j}'$  токов намагничивания (см. рисунок). Суммируясь, токи  $\vec{j}'$  увеличивают величину индукции  $B$ , но на границе проводника с вакуумом они исчезают, и по поверхности

проводника, как видно на рисунке, в противоположную сторону течет поверхностный ток с плотностью  $\vec{i}'$ , полностью компенсирующий вклад объемного тока намагничивания. Индукция магнитного поля уменьшается на границе скачком. Напряженность магнитного поля, как получено выше, этого скачка не испытывает.

Другой причиной появления токов намагничивания в объеме магнетика будет его неоднородность. Например, увеличение концен-



трации молекул среды  $\text{grad } n_{\text{мол}} \neq 0$  приводит к такому же увеличению концентрации молекулярных токов, их нескомпенсированности в каждой точке среды и к появлению нескомпенсированного тока  $\vec{j}'$ , как показано на рисунке слева.

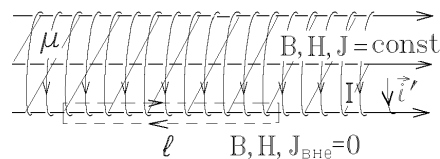


**Объемных токов намагничивания нет в однородном магнетике, в котором отсутствуют токи проводимости. Если поместить такой магнетик во внешнее магнитное поле, то токи намагничивания возникнут только на поверхности (на границе) магнетика.**

В качестве другого примера рассмотрим длинную катушку-соленоид, у которой на длину  $l$  приходится  $N$  витков обмотки, по которой течет ток  $I$ . Внутри катушки помещен сердечник из магнетика с проницаемостью  $\mu$ . Запишем теорему о циркуляции для  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  по очень узкому прямоугольному замкнутому контуру длины  $l$ , охватывающему  $N$  витков с током  $I$ :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{\text{внутри}} \cdot l = IN \text{ или } H_{\text{внутри}} = I \frac{N}{l};$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{\text{внутри}} \cdot l = \underbrace{\mu_0 (IN + i'l)}_{\text{охватываемые токи}} = \mu_0 l (H_{\text{внутри}} + J)$$



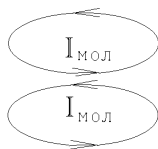
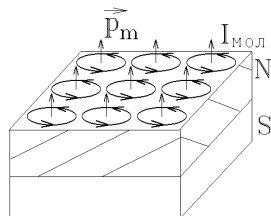
Подставив в последнее выражение  $J = \chi H$ , найдем

$B_{\text{внутри}} = \mu_0 (1 + \chi) H_{\text{внутри}} = \mu_0 \mu H_{\text{внутри}} = \mu \mu_0 IN / l$ . Индукция магнитного поля  $\vec{B}$  внутри очень длинного соленоида возрастает в  $\mu$  раз при введении в соленоид сердечника с магнитной проницаемостью  $\mu$ .

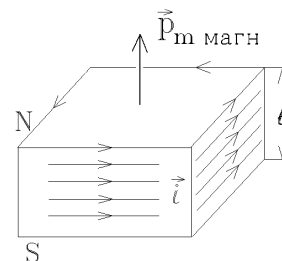
Отметим еще один важный факт:

формулы  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{J} = \chi \vec{H}$ ,  $\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}$  справедливы только в однородном изотропном магнетике, в котором эффект намагничивания создан магнитным полем обычных токов проводимости. В постоянных магнитах (в ферромагнитных средах), где остаточные токи намагничивания и созданное этими токами остаточное магнитное поле  $\vec{B}'_{\text{ост}}$  сохраняются даже в отсутствие внешнего магнитного поля, записанные выше формулы не применимы! Но соотношение  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$  выполняется в любом случае.

В постоянных магнитах молекулярные токи ориентированы в одном направлении. Если среда однородна, то в каждой точке внутри среды молекулярные токи направлены навстречу друг другу и компенсируют друг друга как показано на рисунке.



Поэтому сохраняется только результирующий поверхностный ток намагничивания с плотностью  $\vec{i}'$ , обтекающий боковую поверхность магнита и создающий его магнитный момент  $\vec{p}_m$ . Такая классическая картина наглядна, но не верна. Как показал



Н.Бор, классические токи намагничивания должны компенсировать друг друга и появление дополнительного магнитного поля  $\vec{B}'$  в любой среде – это следствие квантовых эффектов.

Тем не менее, картина появления поверхностного тока  $\vec{i}'$ , показанная на рисунках, позволяет рассчитать поле магнита.

В качестве примера рассмотрим очень длинный цилиндрический постоянный магнит радиуса  $r$ . Его магнитное поле и линии  $\vec{B}$  имеют такой же вид, как и в случае длинной катушки – соленоида с током  $I$ .

Молекулярные токи образуют поверхностный ток намагничивания с линейной плотностью  $i'$ . Других токов нет. Охватим участок поверхности магнита очень узким контуром длины  $l$ , показанным на рисунке штриховой линией. Вне очень длинного магнита  $\vec{J} = 0$ ,  $\vec{B} \approx 0$ . Внутри –  $\vec{J} = \text{const}$ . Тогда по теореме о циркуляции вектора  $\vec{J}$  для этого контура  $\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = J l = i' l$  (где  $i' l$  – охватываемый ток намагничивания), т.е.  $J = i'$ , а по теореме о циркуляции для вектора  $\vec{B}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{B'_{\text{ост}}}_{\text{внутри}} \cdot l + \underbrace{B_{\text{вне}}}_{=0} \cdot l = \mu_0 i' l \text{ или } B'_{\text{ост}} = \mu_0 i' = \mu_0 J \text{ – это индукция поля внут-}$$

ри магнита. Она называется остаточной индукцией намагничивания. Токов проводимости здесь нет и напряженность

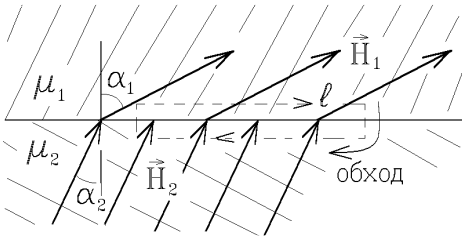
магнитного поля  $\vec{H}$  внутри такого магнита  $H = \frac{B'_{\text{ост}}}{\mu_0} - J = 0$  и вне, и внутри магнита, хотя  $B_{\text{внутри}} = B'_{\text{ост}} \neq 0$ , т.е. не-

справедлива связь  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ .

## 17.5. Поле на границе магнетика. Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля

На плоской границе двух достаточно протяженных (бесконечных) магнетиков с различными магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  линии индукции  $\vec{B}$  и напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля испытывают излом.

Для замкнутой поверхности в виде цилиндра с бесконечно малой высотой, одно основание  $S$  которого лежит в одной среде, а другое – в другой, теорема Гаусса для  $\vec{B}$  дает:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_{1n}S - B_{2n}S = 0$  (линии индукции практически пересекают только основания  $S$  цилиндрической замкнутой поверхности), т.е.  $B_{1n} = B_{2n}$ .



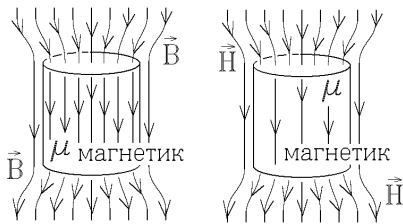
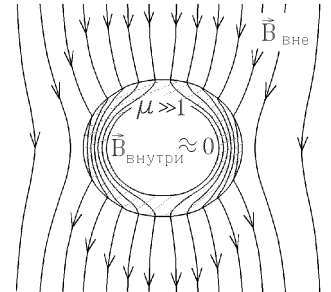
С другой стороны, если на границе отсутствуют токи проводимости, то для очень узкого прямоугольного замкнутого контура длины  $l$ , охватывающего часть границы, из теоремы о циркуляции  $\vec{H}$  получим  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1\tau}l - H_{2\tau}l = 0$ , так как охватываемый ток проводимости равен нулю.

Следовательно, на границе двух сред сохраняется тангенциальная составляющая вектора напряженности и нормальная составляющая вектора индукции магнитного поля:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Если среды не являются ферромагнитными, то на границе их раздела с учетом связи  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  должны выполняться условия:  $\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ ,  $\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ . Поэтому  $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{B_{1\tau}/B_{1n}}{B_{2\tau}/B_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между линией индукции (напряженности) и нормалью к поверхности раздела магнетиков.

**Замечание:** линии вектора  $\vec{B}$  всегда замкнуты, они нигде не могут обрываться или возникать. Поэтому при внесении в магнитное поле оболочки из магнетика с большим  $\mu$  линии  $\vec{B}$  отклоняются к ее внешней поверхности, где они сгущаются, и поле  $\vec{B}$  усиливается. Соответственно, внутри оболочки поле  $\vec{B}$  будет заметно ослабевать, т.е. замкнутые железные оболочки ( $\mu_{\text{железа}} \gg 1$ ) можно использовать в качестве магнитной защиты (экранировка магнитного поля).



Что касается линий  $\vec{H}$ , то для рассматривавшейся ранее замкнутой цилиндрической поверхности  $S$   $\oint \vec{H} \cdot d\vec{S} = H_{1n}S - H_{2n}S \neq 0$ , так как  $H_{1n} \neq H_{2n}$ . Тогда из теоремы Остроградского  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int \text{div } \vec{H} dV \neq 0$  следует, что на границе раздела двух различных магнетиков  $\text{div } \vec{H} \neq 0$ , т.е. на этой границе (как уже отмечалось ранее) линии  $\vec{H}$  могут возникать или обрываться.

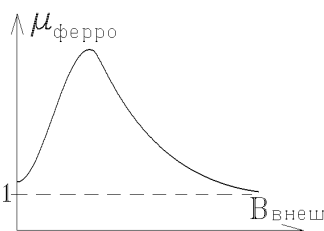
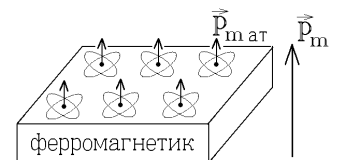
## 17.6. Причины появления диа-, пара- и ферромагнетизма

По своим магнитным свойствам все магнетики делятся на три типа в зависимости от величины магнитной проницаемости  $\mu$ :

- 1)  $\mu = 1 + \chi \gg 1$  - это **ферромагнетики** (Fe, Ni, Co и т.п.);
- 2)  $\mu = 1 + \chi \geq 1$  (магнитная восприимчивость  $\chi \approx 10^{-4} \ll 1$ ) – это **парамагнетики** (кислород, большинство металлов);
- 3)  $\mu = 1 + \chi \leq 1$  ( $\chi \approx -10^{-5} < 0$ ) - это **диамагнетики** (водород, вода, Cu, благородные газы).

### 1. Ферромагнетизм

В ферромагнетиках начинают действовать большие по величине силы квантовой природы, названные **обменными силами**. Эти силы заставляют магнитные моменты  $\vec{p}_{\text{мат}}$  всех атомов в некоторой области **выстраиваться строго параллельно**. Такая область ферромагнетика называется **доменом** и обладает очень большим результирующим магнитным моментом  $\vec{p}_m = \sum \vec{p}_{\text{мат}}$  т.е. обладает свойствами постоянного магнита. Ориенти-



руясь вдоль направления внешнего магнитного поля, домены способны создать очень сильное намагничение среды, чем объясняется большая величина  $\mu \gg 1$ .

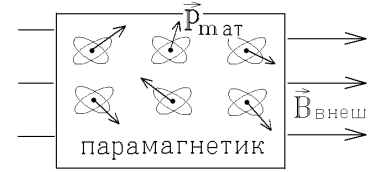
Заметим только, что степень этой ориентации зависит от величины внешнего поля. Поэтому проницаемость  $\mu$  ферромагнитной среды также непостоянна и зависит от величины  $B_{\text{внеш}}$ . В очень сильных магнитных полях ферромагнетик приближается по своим свойствам к парамагнетику.



## 2. Парамагнетизм

Движение электронов по замкнутым орбитам в атомах создает молекулярные токи с магнитными моментами  $\vec{p}_{\text{торб}}$ . Но, кроме того, как оказывается, все элементарные частицы электроны, протоны, нейтроны – сами ведут себя как крошечные магниты, т.е. обладают некоторыми собственными магнитными моментами  $\vec{p}_{\text{собст}}$  (их природа будет рассмотрена дальше). Магнитные моменты атомов среды складываются из всех этих магнитных моментов составляющих атом частиц:  $\vec{p}_{\text{мат}} = \sum (\vec{p}_{\text{торб}} + \vec{p}_{\text{собст}})$ .

В парамагнетике обменные силы не действуют, и магнитные моменты отдельных атомов направлены хаотически в разные стороны. При помещении парамагнетика во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_{\text{внеш}}$  магнитным моментам атомов энергетически выгодно быть ориентированными по полю. С другой стороны, тепловое движение препятствует ориентации  $\vec{p}_{\text{мат}}$  вдоль линий  $\vec{B}_{\text{внеш}}$ , разориентируя их (и увеличивая энтропию среды). Поэтому магнитные моменты атомов лишь частично (и очень слабо) ориентированы по полю, вследствие чего степень этой ориентации  $\chi$  мала.



## 3. Диамагнетизм

Для некоторых веществ сумма орбитальных и собственных магнитных моментов всех составляющих атом частиц равна нулю:  $\vec{p}_{\text{мат}} = \sum (\vec{p}_{\text{торб}} + \vec{p}_{\text{собст}}) = 0$ , т.е. атомные магнитные моменты, способные ориентироваться по внешнему магнитному полю, отсутствуют. Но каждый электрон вращается вокруг атомного ядра и образует маленький волчок, гироскоп, на который во внешнем магнитном поле действует момент сил

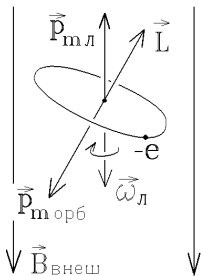
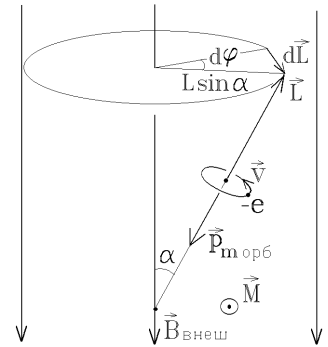
$$\vec{M} = [\vec{p}_{\text{торб}}, \vec{B}_{\text{внеш}}].$$

Такой гироскоп совершает прецессию. Его момент импульса  $\vec{L}$  (или ось) поворачивается за время  $dt$  на угол

$$d\varphi \approx \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{M dt}{L \sin \alpha} = \frac{p_{\text{торб}} B_{\text{внеш}} \sin \alpha dt}{L \sin \alpha}. \text{ Учитывая, что гиромагнитное отношение}$$

$$\frac{p_{\text{торб}}}{L} = \frac{e}{2m_e}, \text{ где } m_e - \text{масса, } e - \text{заряд электрона, находим циклическую частоту пре-}$$

$$\text{цессии, которая называется ларморовой частотой прецессии: } \omega_L = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e B_{\text{внеш}}}{2m_e}.$$



Но если волчок совершает прецессию, то и любая точка на волчке тоже вращается с угловой скоростью  $\omega_L$  вокруг линий  $B_{\text{внеш}}$ . Это дополнительное вращение создает дополнительный молекулярный ток и дополнительный нескомпенсированный магнитный момент  $\vec{p}_{\text{мл}}$  ориентированный против поля  $B_{\text{внеш}}$  (рисунок слева). Поэтому эффект ларморовой прецессии магнитных моментов молекулярных токов  $\vec{p}_{\text{торб}}$  во внешнем магнитном поле ослабляет это поле ( $\chi < 0$ ).

Этот эффект имеется, естественно, у всех веществ, но он очень мал, и в ферро- и парамагнитных средах перекрывается выстраиванием ненулевых магнитных моментов атомов по полю.

Замечен он только в диамагнетиках, где  $\vec{p}_{\text{мат}} = 0$ .

## 18. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

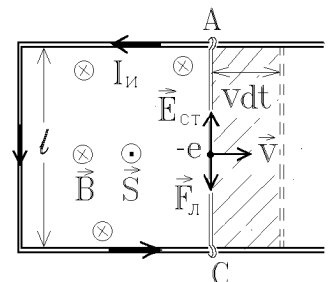
18.1. Природа ЭДС электромагнитной индукции в проводниках, движущихся в магнитном поле. Принцип действия электромотора и генератора электрического тока

Свернем проводник в замкнутый контур и будем изменять магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром. Тогда в замкнутом проводнике возникает квазистационарный ток (его линии должны быть замкнутыми), названный индукционным. Это явление называется электромагнитной индукцией.

Магнитный поток  $\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{S}$  (или  $\Phi = BS \cos \alpha$  для плоского контура в однород-

ном магнитном поле) можно изменять разными способами: изменяя величину индукции магнитного поля  $B$ , площадь контура  $S$  или угол между ними  $\alpha$ .

Пусть изменяется площадь  $S$  проводящего контура, находящегося в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Например, пусть однородное постоянное поле  $\vec{B}$  направлено перпендикулярно к плоскости рамки с током  $I$ , у которой одна сторона  $AC$  скользит со скоростью  $\vec{v}$ , как показано на рисунке.



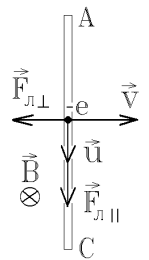
Вместе с проводником АС движутся в магнитном поле и все находящиеся в нем свободные электроны. На них действует магнитная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_M = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ , заставляющая их двигаться по проводнику, т.е. создавать ток  $I_{\text{и}}$ . Эта сила неэлектростатической природы является **сторонней**. Благодаря ей в движущемся проводнике возникает э.д.с. электромагнитной индукции

$$\varepsilon_{\text{и}} = \int_A^C \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \frac{\vec{F}_M \cdot d\vec{l}}{-e} = \int_A^C [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l} = vBl.$$

За время  $dt$  проводник сместится на расстояние  $vdt$ . Тогда  $lvdt = dS$  – это бесконечно малое приращение площади рами  $\varepsilon_{\text{и}} = BdS/dt$ . Но площадь задается вектором  $\vec{S}$ , направление которого определяют по правилу винта, вращая его по направлению возникающего индукционного тока  $I_{\text{и}}$ . Поэтому векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$  направлены противоположно, и, внося постоянную величину  $\vec{B} = \text{const}$  под знак производной, находим  $\varepsilon_{\text{и}} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$ .

Причиной возникновения э.д.с. электромагнитной индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле, является действие магнитной составляющей силы Лоренца на свободные электроны в проводнике.

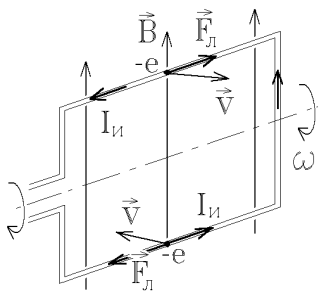
Но магнитная составляющая лоренцевой силы перпендикулярна к скорости заряженных частиц и поэтому работу совершать не должна. Однако, в нашем случае  $\varepsilon_{\text{и}} \sim \int \vec{F}_M \cdot d\vec{l} \neq 0$ . Дело в том, что создавая ток  $I_{\text{и}} = eniS$ , свободные электроны, имеющие концентрацию  $n$ , движутся по проводнику поперечного сечения  $S$  со средней дрейфовой скоростью  $\vec{u}$ , и на них действует еще одна, перпендикулярная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_{M\perp} = -e[\vec{u}, \vec{B}]$ , которая **препятствует перемещению проводника в магнитном поле** (см. рисунок). Поэтому работа этой силы за время  $dt$  при перемещении свободного электрона вместе с проводником отрицательна:  $dA_1 = -|\vec{F}_{M\perp}| \cdot vdt = -euB \cdot vdt$  и компенсирует работу э.д.с. индукции по перемещению того же электрона вдоль проводника за то же время  $dt$ :  $dA_2 = +|\vec{F}_{M\parallel}| \cdot udt = +evB \cdot udt$ . Суммарная работа силы Лоренца равна нулю!



**Выводы:** 1) при перемещении замкнутого проводника в магнитном поле возникает сила, препятствующая этому перемещению;  
2) индукционный ток возникает за счет **механической** работы, совершенной при перемещении проводника против такой силы. В итоге эта работа преобразуется в джоулево тепло, выделяемое током.

По той же причине, если проводник с поперечным размером  $l$  движется в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  перпендикулярно линиям индукции со скоростью  $v$ , то сила Лоренца  $\vec{F}_{M\parallel}$  заставляет собираться свободные электроны вблизи одного из концов проводника, на другом конце образуется нескомпенсированный из-за оттока электронов положительный заряд. Т.е. на противоположных концах проводника возникнет разность потенциалов  $\phi_1 - \phi_2 = |\varepsilon_{\text{и}}| = vBl$ .

Можно показать, что выражение  $\varepsilon_{\text{и}} = -d\Phi/dt$  **справедливо при любом перемещении контура в магнитном поле**, например, при вращении рамки в магнитном поле; когда угол  $\alpha$  между линиями индукции  $\vec{B}$  и вектором площади  $\vec{S}$  изменяется с течением времени:  $\alpha = \omega t$ :  $\Phi = BS \cos \omega t$  и  $\varepsilon_{\text{и}} = BS \omega \sin \omega t$ .

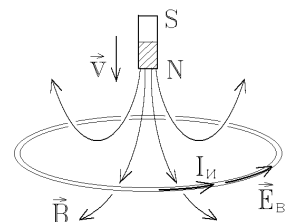


Если рамку вращать в магнитном поле, то в ней появляется индукционный ток. Такая система будет **генератором переменного тока**. Наоборот, если рамку подключить к внешнему источнику тока, то момент сил Ампера начнет поворачивать ее в магнитном поле. Такая система работает как **электродвигатель** или **электромотор**.

**Замечание:** работа по повороту рамки происходит не за счет энергии внешнего магнитного поля, а за счет дополнительной работы внешнего источника тока против возникающей э.д.с. электромагнитной индукции.

## 18.2. Вихревое электрическое поле и причина его появления

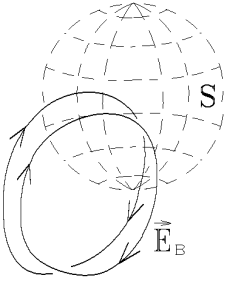
Фарадей экспериментально доказал, что тот же закон  $\varepsilon_{\text{и}} = -d\Phi/dt$  справедлив и тогда, когда контур **не движется** в магнитном поле, а изменяется само магнитное поле  $\vec{B}$ . Пусть, например, постоянный магнит приближается к покоящемуся проводящему контуру (суммарные силы Лоренца, действующие на хаотически движущиеся в проводнике электроны, равны нулю). Начавшееся упорядоченное движение свободных электронов под действием э.д.с.  $\varepsilon_{\text{и}}$  можно объяснить только появлением нового электрического поля  $\vec{E}_B$ , силовые линии которого направлены вдоль контура, т.е. **замкнуты**, аналогично линиям индукции магнитного поля. Это поле  $\vec{E}_B$  **неэлектростатической природы** называется **вихревым**.



Циркуляция напряженности  $\vec{E}_B$  по замкнутому контуру создает э.д.с. индукции  $\epsilon_{\text{и}} = \oint \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . Применяя

теорему Стокса,  $\oint \vec{E}_B d\vec{l} = \int \text{rot } \vec{E}_B d\vec{S}$ , получаем уравнение  $\text{rot } \vec{E}_B = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , смысл которого заключается в том, что

вихревое электрическое поле  $\vec{E}_B$  порождается не электрическими зарядами, а изменяющимся со временем магнитным полем.



С другой стороны, **поток вектора  $\vec{E}_B$  по любой замкнутой поверхности  $S$  равен нулю:**  $\oint \vec{E}_B \cdot d\vec{S} = 0$  или  $\text{div } \vec{E}_B = 0$  (действительно, сколько замкнутых линий  $\vec{E}_B$  входит внутрь этой поверхности, столько же и выходит из нее).

Свободная заряженная частица начинает двигаться в вихревом электрическом поле вдоль замкнутых линий  $\vec{E}_B$  все время ускоряясь под действием силы  $\vec{F}_3 = q\vec{E}_B$ . Это причина ускорения заряженных элементарных частиц в бетатроне.

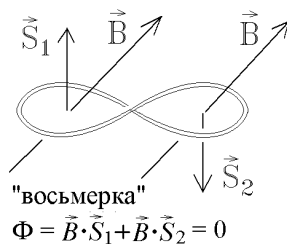
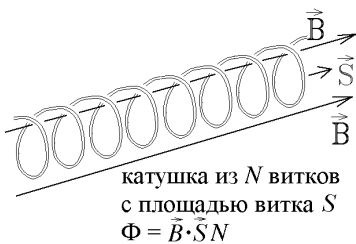
### 18.3. Закон Фарадея и правило Ленца

Суммируя приведенные результаты, можно сформулировать закон Фарадея:

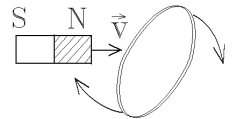
при изменении магнитного потока через поверхность  $S$ , опирающуюся на замкнутый проводящий контур, в контуре возникает э.д.с. электромагнитной индукции  $\epsilon_{\text{и}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt}$ . Эта э.д.с. возникает за счет сил

Лоренца, если проводник движется в магнитном поле, пересекая линии  $\vec{B}$ , или за счет возникновения вихревого электрического поля, если со временем меняется само магнитное поле  $\vec{B}$ .

Закон Фарадея  $\epsilon_{\text{и}} = -d\Phi/dt$  справедлив и тогда, когда действуют обе причины возникновения  $\epsilon_{\text{и}}$ , т.е. и проводник движется в магнитном поле, и само это поле  $\vec{B}$  меняется со временем.



Заметим также, что замкнутый проводник может образовывать **несколько витков**. Поэтому в законе Фарадея надо учитывать полный магнитный поток  $\Phi = \Phi_1 N$ , где  $\Phi_1$  – магнитный поток через один виток, а  $N$  – число витков



Вспомним теперь, что возникающие силы противодействуют движению проводника в магнит-

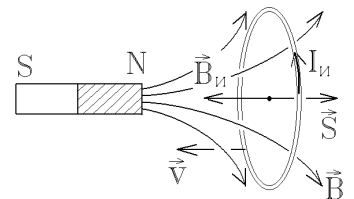
ном поле. Можно сформулировать общее правило – правило Ленца:

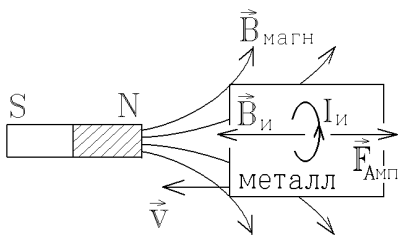
э.д.с. электромагнитной индукции создает в замкнутом проводнике индукционный ток, текущий в таком направлении, что порождаемый этим током магнитный поток стремится скомпенсировать изменение первоначального магнитного потока. Иначе говоря, э.д.с. индукции противодействует изменению магнитного потока, являющегося причиной ее возникновения.

### 18.4. Проводник и постоянный магнит в переменном магнитном поле. Индукционные токи (токи Фуко)

Чтобы понять действие правила Ленца, рассмотрим в качестве примера проводящее кольцо, которое перемещают в область более сильного магнитного поля. Поток  $\Phi = \int \vec{B}_{\text{магнита}} d\vec{S}$  растет. Поэтому индукционный ток  $I_{\text{и}}$  потечет в таком направлении, чтобы созданный им магнитный поток  $\Phi_{\text{и}} = \int \vec{B}_{\text{и}} d\vec{S}$  был отрицателен и компенсировал увеличение потока  $\Phi$ .

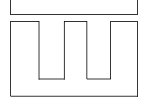
То же самое произойдет при приближении к магниту куска металла (или приближении магнита к куску металла). С одной стороны, в металле возникают токи намагничивания, которые делают металл магнитом, притягивающимся к постоянному магниту (ферро- или парамагнетизм). Но с другой стороны, каждый замкнутый контур внутри металла является проводящим контуром, и в нем появится индукционный ток  $I_{\text{и}}$ . Сила Ампера, действующая на этот ток со стороны магнитного поля магнита, будет **отталкивать** его от магнита.





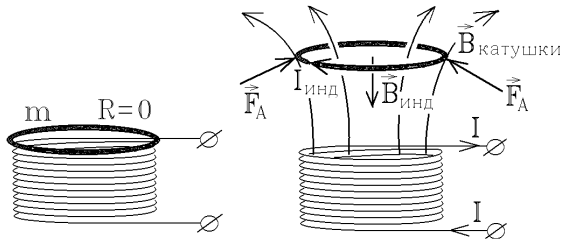
зи мощных установок с быстропеременным магнитным полем могут также нагреваться металлические кольца на пальцах и, что еще хуже, - металлические зубы!)

Сердечники трансформаторов, чтобы они не грелись, делают из тонких пластинок, чтобы разорвать замкнутый контур в поперечном к пластинкам направлении и устранить токи Фуко (сейчас изготавливают ферритовые сердечники, не проводящие ток).



Индукционный ток в тонком замкнутом проводнике с сопротивлением  $R$  выражается, как  $I_{\text{и}} = \frac{\epsilon_{\text{и}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$ .

**В сверхпроводящем состоянии** (при низких температурах  $T \rightarrow 0$ )  $R = 0$  и так как ток  $I_{\text{и}}$  не может стать бесконечным, то  $d\Phi/dt = 0$  или  $\Phi = \text{const}$ . Как бы ни двигать, как бы ни деформировать в магнитном поле контур из сверхпроводника, магнитный поток через него не изменяется! Иначе говоря, незатухающий индукционный ток в **сверхпроводнике** всегда имеет такую величину, чтобы полностью скомпенсировать изменение потока внешнего магнитного поля.



*Пример:* кольцо из сверхпроводника весом  $mg$  лежит на отключенной катушке электромагнита. Электромагнит включают. Но созданное им поле должно компенсироваться полем возникающего индукционного тока (снова  $\Phi = 0$ ). Появляются силы Ампера  $\vec{F}_A = \oint I_{\text{и}} [d\vec{l}, \vec{B}_{\text{катушки}}]$ , которые в неоднородном магнитном поле катушки выталкивают сверхпроводящий виток с током  $I_{\text{и}}$  вверх. Когда  $F_A \geq mg$  виток повиснет в воздухе над электромагнитом.

Такая идея "подвески" в неоднородном магнитном поле осуществляется для транспорта на магнитной "подушке". Вагон, в проводящем днище которого циркулируют возникающие индукционные токи, приподнимается на высоту нескольких миллиметров над электромагнитом. Отсутствие силы трения позволяет обеспечить огромную скорость такого транспорта.

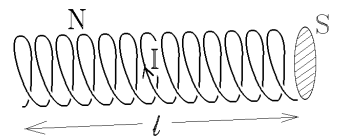
## 18.5. Коэффициент индуктивности. Индуктивность соленоида

Протекая по замкнутому проводнику, ток  $I$  создает магнитное поле  $\vec{B}_{\text{тока}}$  и магнитный поток  $\Phi = \int \vec{B}_{\text{тока}} d\vec{S}$ , пронизывающий площадь, охватываемую проводником. А так как  $B_{\text{тока}} \sim I$ , то величина такого магнитного потока пропорциональна величине тока в проводнике:

$$\Phi = LI.$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называется **индуктивностью проводника**. В системе СИ индуктивность измеряется в **генри** [Гн]. 1 Гн - это индуктивность такого контура, для которого магнитный поток равен 1 Вб при протекающем по контуру токе 1 А.

Вычислим, например, индуктивность **очень длинного** соленоида с площадью каждого витка  $S$ , в котором на длину  $l$  приходится  $N$  витков. Если по соленоиду, заполненному магнетиком с проницаемостью  $\mu$ , течет ток  $I$ , то, пренебрегая ослаблением поля на краях соленоида, получаем внутри него индукцию магнитного поля  $B = \mu_0 \mu N I / l$ .

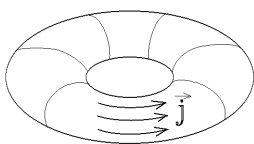
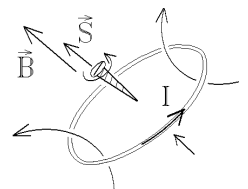


Тогда **полный магнитный поток** через все  $N$  витков будет равен  $\Phi = BSN = \mu_0 \mu N^2 S I / l = LI$ . Отсюда **индуктивность со-**

**леноида**

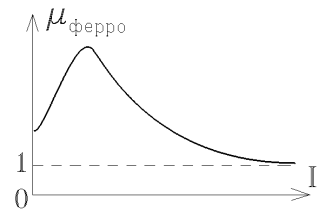
$$L_{\text{соленоида}} = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S.$$

Так как магнитный поток  $\Phi$  создается самим током  $I$ , то по правилу винта векторы  $\vec{B}_{\text{тока}}$  и  $\vec{S}$  направлены в одну сторону и  $\Phi > 0$ . Поэтому **индуктивность проводника  $L$  всегда положительна.**



Заметим также, что формула  $\Phi = LI$  применима **только для тонких проводников**, в которых проводящий контур практически совпадает с осью проводника. Для толстых проводников (как показано на левом рисунке) выбор контура в определении  $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}$  (выбор площади, пронизываемой линиями  $\vec{B}$ ) неоднозначен, поэтому для толстых проводников формулу  $\Phi = LI$  применять нельзя.

Индуктивность проводников  $L$  постоянна в немагнитных, диамагнитных и парамагнитных средах и **зависит от величины тока  $I$  в присутствии ферромагнетика**, в котором от тока зависит проницаемость  $\mu$ . В очень сильных полях ферромагнетик ведет себя как парамагнетик, так как  $\mu \rightarrow 1$ . По такому же закону будет меняться коэффициент  $L$ .



## 18.6. Плотность энергии магнитного поля

При изменении магнитного потока  $\Phi = LI$  через площадь проводящего контура в нем должна возникнуть э.д.с. электромагнитной индукции. Вспомогая формулу для работы по перемещению заряда в электрическом поле и определение тока, находим, что работа по перемещению заряда  $dq$  против этой э.д.с. равна

$$\delta A = dq \cdot |\Phi_1 - \Phi_2| = dq \cdot |\epsilon_{\text{и}}| = dq \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot d(LI) = I \cdot d(LI) = dW.$$

(эта работа идет на изменение энергии  $W$  создаваемого в контуре тока). Пусть ток возрастает от 0 до  $I$ , тогда в случае от-

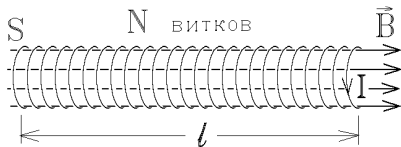
сутствия ферромагнетика  $L = \text{const}$  и

$$W_{\text{тока}} = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

(сравните с формулой для энергии заряженного проводника (конденсатора) с емкостью  $C$ :  $W_{\text{заряда}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}$ ).

Полученная энергия  $W_{\text{тока}}$  проводника с током является одновременно энергией магнитного поля, созданного током  $I$ , текущим по проводнику с индуктивностью  $L$ . Если исчезнет ток, то исчезнет и созданное им магнитное поле.

Рассмотрим бесконечно длинный соленоид с током  $I$ . Постоянное магнитное поле с индукцией  $B = \mu_0 \mu N I / l$  имеется только внутри соленоида, а энергия тока, текущего по участку соленоида длины  $l$ , равна



$$W_{\text{тока}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} SI^2 = \frac{1}{2\mu_0 \mu} \left( \mu_0 \mu \frac{N}{l} \right)^2 l S = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V = W_{\text{магн поля}},$$

где  $V$  – объем участка поля внутри соленоида. Эта энергия будет одновременно энергией магнитного поля, созданного таким током. Отсюда, используя связь  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ , получаем выражение для плотности энергии магнитного поля, т.е. для

энергии единицы объема:

$$w_{\text{магн}} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} = \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{2}.$$

(сравните с формулой для плотности энергии электрического поля  $w_{\text{элек}} = \frac{\vec{D}^2}{2\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\vec{D} \vec{E}}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2}{2}$ ).

Энергию магнитного поля, заключенного в объеме  $V$ , определяют по формуле:  $W_{\text{магн}} = \int_V w_{\text{магн}} dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} dV$  (аналогич-

но вычисляется энергия электрического поля  $W_{\text{элек}} = \int_V w_{\text{элек}} dV = \int_V \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV$ ). Но эта формула справедлива, строго гово-

ря, только для неферромагнитной среды. Действительно, в присутствии ферромагнетика, помимо нагревания проводника с током, будут нагреваться и участки окружающей ферромагнитной среды, в которых возникнут заметные токи намагничивания Фуко. На это пойдет часть работы источника тока. Поэтому энергия магнитного поля в ферромагнитной среде, полученная при той же работе сторонней э.д.с., окажется меньше энергии поля в неферромагнитной среде.

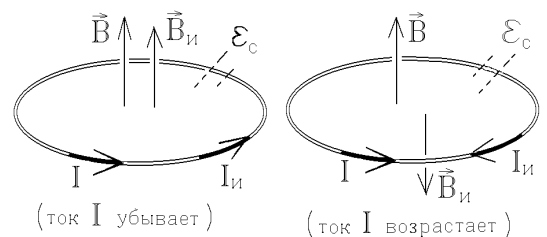
## 18.7. Явление самоиндукции и ЭДС самоиндукции

Как было сказано, при изменении тока  $I$  в проводнике меняется вызываемый им магнитный поток  $\Phi = LI$ . Поэтому, согласно закону Фарадея, в проводнике должна появиться э.д.с. индукции, называемая э.д.с. самоиндукции

$$\epsilon_c = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(LI)}{dt}$$

(причиной её появления служит не внешняя причина, а изменение тока в самом проводнике. Если **ферромагнетик отсутствует**, то

$$L = \text{const}, \text{ и } \epsilon_c = -L \frac{dI}{dt}.$$



Э.д.с. самоиндукции  $\varepsilon_c$  создает дополнительный индукционный ток  $I_{\text{и}}$ , направленный так, чтобы уменьшить первоначальное изменение тока  $I$  (см. рисунок). Изменяясь, ток  $I$  порождает э.д.с. самоиндукции, препятствующую этому изменению.

По этой причине работающие приборы чаще загораются при выключении - огромная э.д.с. самоиндукции создает вольтову дугу между размыкаемыми контактами.

### 18.8. Явление взаимной индукции. Коэффициенты взаимной индуктивности и принцип действия трансформатора

Магнитный поток, вызывающий появление э.д.с. электромагнитной индукции, вообще говоря, может создаваться магнитным полем какого-то **другого тока**, текущего в другом замкнутом проводнике. Поэтому следует говорить о **системе двух (нескольких) замкнутых проводников (контуров с токами)**.

Например, ток  $I_1$  в первом проводнике создает магнитный поток  $\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2$  через второй проводящий контур. Ясно, что с увеличением тока  $I_1$  будет пропорционально увеличиваться поток  $\Phi_2$ :

$$\Phi_2 = L_{21} I_1.$$

Коэффициент пропорциональности  $L_{21}$  называется **взаимной индуктивностью** (также измеряется в генри). Наоборот, если ток  $I_2$  потечет по проводнику 2, то он создает через контур 1 магнитный поток  $\Phi_1 = L_{12} I_2$ .

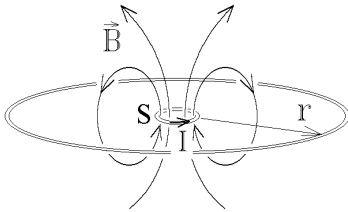
Появляющаяся в одном из контуров э.д.с. индукции, вызванная изменением тока в другом контуре называется **э.д.с. взаимной индукции**:

$$\varepsilon_{\text{вз}1} = - \frac{d(L_{12} I_2)}{dt} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{\text{вз}2} = - \frac{d(L_{21} I_1)}{dt}.$$

Имеется замечательная **теорема взаимности**: в отсутствие ферромагнетика коэффициенты взаимной индуктивности одинаковы:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Теорема взаимности означает, что при пропускании по контурам одинаковых по величине токов  $I_1 = I_2$  они создают в "чужих" контурах одинаковые магнитные потоки  $\Phi_1 = \Phi_2$ . Эта теорема позволяет вычислить коэффициенты взаимной индуктивности. Например, если в центре кругового витка радиуса  $r$  в той же плоскости установлена крохотная рамка с площадью  $S$  и током  $I$ . Пусть тот же ток  $I$  по внешнему витку. В плоскости рамки он



создает тот же магнитный поток  $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2r} \cdot S$ . Взаимная индуктивность этих провод-

ников  $L_{12} = \frac{\mu_0 S}{2r}$ . **Но в присутствии ферромагнетика  $L_{12} \neq L_{21}$ !**

Рассмотрим трансформатор с ферромагнитным сердечником. Практически все линии индукции магнитного поля проходят внутри сердечника. При включении тока  $I_1$  в первой обмотке (катушке) имеем  $B_1 = \mu(I_1) \mu_0 I_1 N_1 / l$ . Во второй обмотке с тем же сечением  $S$  возникает магнитный поток  $\Phi_2 = B_1 N_2 S = \mu(I_1) \mu_0 N_1 N_2 I_1 S / l = L_{21} I_1$ . Наоборот, при включении тока  $I_2$  во второй обмотке имеем  $B_2 = \mu(I_2) \mu_0 I_2 N_2 / l$  и  $\Phi_1 = B_2 N_1 S = \mu(I_2) \mu_0 N_2 N_1 I_2 S / l = L_{12} I_2$ . Отсюда видно, что

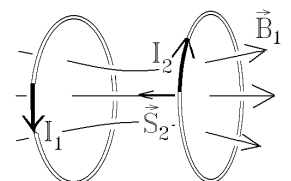
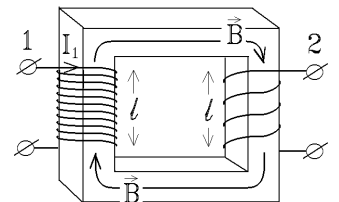
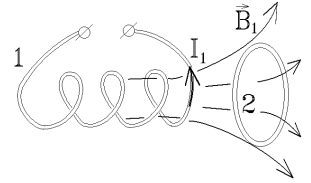
$L_{12} = \mu(I_2) \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S \neq L_{21} = \mu(I_1) \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S$  по причине зависимости магнитной проницаемости  $\mu$  ферромагнетика от величины тока  $I$ . Взаимная индуктивность также начинает зависеть от тока. Но в отсутствие ферромагнетика коэффициенты взаимной индуктивности постоянны.

Трансформаторы используют для увеличения или уменьшения амплитуды напряжения, подаваемого на обмотку "1" с сопротивлением  $R_1$ . Пусть оно равно  $U_1 = R_1 I_{01} \cos \omega t$ . Тогда в обмотке "2" с сопротивлением  $R_2$  создается падение напряжения, равное э.д.с. взаимной индукции

$$U_2 = \varepsilon_2 = - \frac{d(L_{21} I_1)}{dt} = - \mu \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S \frac{d}{dt} \left( \frac{U_{01}}{R_1} \cos \omega t \right) = \mu \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l R_1} S \omega U_{01} \sin \omega t = U_{02} \sin \omega t.$$

Меняя число витков  $N_2$  второй обмотки, можно добиться или увеличения амплитуды напряжения на выходе  $U_{02}/U_{01} > 1$  или уменьшения такой амплитуды.

**Замечание:** коэффициенты взаимной индуктивности  $L_{nm}$  в отличие от коэффициентов индуктивности  $L$  не обязательно положительны. Если токи  $I_1$  и  $I_2$  протекают по контурам в противоположных направлениях, то в соответствии с выбранным правилом определения направления вектора  $\vec{S}$  (правило винта) получим  $\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 < 0$ , откуда  $L_{21} < 0$ .

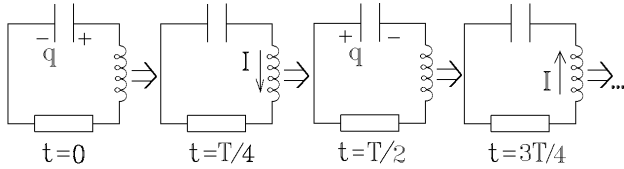
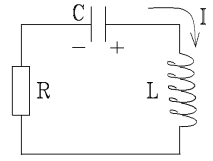


## 19. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### 19.1. Электрический колебательный контур. Собственные электрические колебания в контурах (незатухающие и затухающие), их характеристики

Электрический колебательный контур – это замкнутая электрическая цепь, обладающая некоторой емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ .

Если конденсатор емкости  $C$  первоначально был заряжен, то он начинает разряжаться, и в цепи возникает ток  $I = dq/dt$ , вызывающий появление э.д.с. самоиндукции  $\varepsilon_c = -L dI/dt$ , препятствующей изменению этого тока. В момент, когда конденсатор полностью разрядится, в цепи протекает ток  $I$ . Э.д.с. самоиндукции препятствует его мгновенному исчезновению, и он, постепенно затухая, начинает перезаряжать конденсатор. Затем конденсатор снова разряжается, ток течет в противоположном направлении и т.п.



**Электрические колебания происходят за счет превращения электрической энергии заряженного конденсатора в магнитную энергию тока в цепи и наоборот.**

Если к электрическому контуру не подключены никакие внешние источники переменной э.д.с., то колебания называются собственными. Изменяться по периодическому закону будет величина заряда на конденсаторе, величины силы тока и напряжения в цепи.

Получим уравнение этих колебаний. Ток в контуре будет квазистационарным (меняющимся достаточно медленно, чтобы можно было применять законы постоянного тока), если  $l/c \ll T$ , где  $l$  – линейный размер цепи,  $c$  – скорость света,  $T$  – период электрических колебаний. Обычно это условие выполняется и для такого тока, применимо правило

Кирхгофа  $IR + U_C = \varepsilon_c$ . Подставляя в него падение напряжения на конденсаторе  $U_C = \frac{q}{C}$ ,  $I = \frac{dq}{dt}$ ,  $\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$ ,

получаем  $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$  или  $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$  – это уравнение собственных затухающих колебаний,

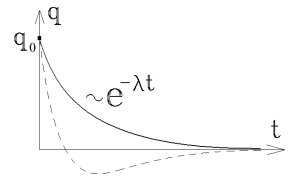
где коэффициент затухания колебаний  $\beta = R/2L$ , а квадрат циклической частоты незатухающих колебаний  $\omega_0^2 = 1/LC$ .

Решение этого уравнения ищем в виде  $q = Ae^{\lambda t}$ , где  $A, \lambda$  – некоторые постоянные. Подставляя это выражение в уравнение колебаний, получаем характеристическое уравнение  $A(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) = 0$ , имеющее корни  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .

При  $\beta^2 \geq \omega_0^2$  или  $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$  колебания в контуре отсутствуют – конденсатор разряжается

аперриодически, как показано на рисунке.

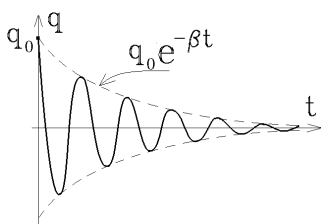
Собственные затухающие колебания не возникают, если сопротивление контура  $R$  больше некоторого критического сопротивления  $R_{кр} = 2\sqrt{L/C}$ , т.е. при  $R \geq R_{кр}$ .



Если  $\beta^2 < \omega_0^2$ , вводим обозначение  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ . Тогда  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$ , и искомое решение уравнения затухающих колебаний является суммой двух решений:  $q = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$ .

Это решение должно быть вещественным:  $q = q^* = e^{-\beta t} (A_1^* e^{-i\omega t} + A_2^* e^{i\omega t})$ , т.е.  $A_2 = A_1^*$ . Введем вместо постоянных  $A_1$  и

$A_2$  новые вещественные постоянные  $q_0$  и  $\varphi$ :  $A_1 = \frac{q_0}{2} e^{i\varphi}$ ,  $A_2 = A_1^* = \frac{q_0}{2} e^{-i\varphi}$ . Тогда  $q = e^{-\beta t} \frac{q_0}{2} (e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)})$ .



Но  $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2 \cos \alpha$ , следовательно

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Это – решение уравнения собственных затухающих колебаний. Как видно, собственные электрические колебания в контуре происходят с циклической частотой собственных

затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

и с уменьшающейся по экспоненциальному закону амплитудой  $q_{\max}(t) = q_0 e^{-\beta t}$ .

Время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, а энергия конденсатора – в  $e^2$  раз называется временем релаксации (временем затухания) электрических колебаний  $\tau = 1/\beta$ . Заметим, что частота  $\omega$  собственных затухающих колебаний уменьшается, а период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Причиной затухания колебаний в электрическом колебательном контуре является превращение части энергии тока в джоулево тепло на омическом сопротивлении  $R$ :  $dQ = I^2 R dt$  и рассеянии этого тепла в окружающую среду.

растет с ростом омического сопротивления  $R$  и становится равным бесконечности при  $R = R_{кр}$ .

Если сопротивление контура  $R$  пренебрежимо мало или отсутствует ( $R=0$ ), то колебания в контуре будут незатухающими:  $q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$  с постоянной амплитудой  $q_0 = \text{const}$ , с циклической частотой  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (это – собственная частота незатухающих колебаний) и с периодом  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  (формула Томсона).

Важной характеристикой, характеризующей затухающие колебания является логарифмический декремент затухания колебаний  $\theta$ . Это логарифм отношения амплитуды колебаний в момент времени  $t$  к амплитуде через период. Из

полученных формул следует, что  $\theta = \ln \left( \frac{q_0 \exp(-\beta t)}{q_0 \exp(-\beta(t+T))} \right) = \ln \left( \frac{1}{\exp(-\beta T)} \right)$  или  $\boxed{\theta = \beta T}$ .

Чем больше величина  $\theta$ , тем быстрее затухают колебания.

Вычислим ток в электрическом колебательном контуре:

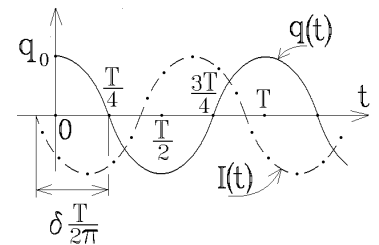
$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 \frac{d}{dt} (e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)) = -\beta q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi). \text{ Разделим и умножим это выражение на}$$

$$\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0 \text{ и обозначим } -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \cos \delta; \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \sin \delta.$$

Тогда  $I = q_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} e^{-\beta t} [\cos \delta \cos(\omega t + \varphi) - \sin \delta \sin(\omega t + \varphi)]$ . Но  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$ . Следовательно, ток в контуре изменяется по закону  $\boxed{I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \delta)}$ , где  $I_0 = q_0 \omega_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}$ .

Затухающие колебания тока происходят с той же частотой, что и колебания заряда  $q$  на конденсаторе (или напряжения  $U_C$  конденсатора), но опережают их по фазе на  $\delta = \arctg(-\omega/\beta)$ , а так как  $\cos \delta \leq 0$  и  $\sin \delta > 0$ , то  $\pi/2 \leq \delta < \pi$ .

Когда конденсатор разрядится полностью ( $q = 0$ ,  $\omega t + \varphi = \pi/2$ ), ток в контуре  $I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\pi/2 + \delta)$  еще не максимален, как показано на рисунке. И наоборот, когда конденсатор заряжается до амплитудного значения и энергия электрического поля в нем максимальна, в цепи течет разряжающий конденсатор ток, и часть энергии системы уже перешла в энергию магнитного поля. Только в том случае, когда электрический контур не имеет омического сопротивления ( $R = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\sin \delta = 1$ ,  $\cos \delta = 0$  и  $\delta = \pi/2$ ), колебания тока в контуре опережают колебания напряжения на конденсаторе на четверть периода ( $\delta = \pi/2$ ), и ток максимален в тот момент, когда конденсатор разряжен. В этом случае энергия электрического поля заряженного конденсатора полностью преобразуется в энергию



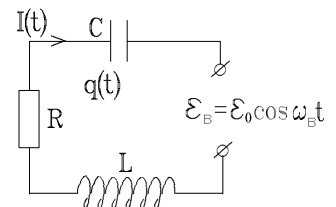
магнитного поля и наоборот:  $W_{\text{элек}} = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2 L}{2CL} = q_0^2 \omega_0^2 \frac{L}{2} = \frac{LI_0^2}{2} = W_{\text{магн}}$ .

## 19.2. Вынужденные электрические колебания

Подключим к электрическому колебательному контуру источник внешней э.д.с., изменяющейся по гармоническому закону с частотой  $\omega_b$  и имеющей амплитуду  $\varepsilon_0$ . Для этого контура запишем правило Кирхгофа:  $RI + U_C = \varepsilon_b + \varepsilon_c$ .

Подставляя в это выражение  $U_C = \frac{q}{C}$ ;  $I = \frac{dq}{dt}$ ;  $\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}$ , получим урав-

нение вынужденных гармонических колебаний  $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos \omega_b t$  или  $\boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega_b t}$ .



Решение неоднородного дифференциального уравнения с ненулевой правой частью складывается из общего решения однородного уравнения  $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$  и любого частного решения неоднородного уравнения.

Но возникающие собственные затухающие колебания заряда на обкладках конденсатора



$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi)$  (общее решение однородного уравнения) **быстро затухают**, и в контуре устанавливаются **вынужденные колебания, происходящие с постоянной амплитудой и частотой  $\omega_B$  внешней э.д.с.**

Ищем это частное решение для вынужденных колебаний в виде  $q = A \cos(\omega_B t - \varphi)$ . Подставляя его в уравнение, получим

$$\underbrace{A\omega_B^2}_{=a} \underbrace{[-\cos(\omega_B t - \varphi)]}_{=\cos(\omega_B t - \varphi + \pi)} + \underbrace{2\beta A\omega_B}_{=b} \underbrace{[-\sin(\omega_B t - \varphi)]}_{=\cos(\omega_B t - \varphi + \pi/2)} + \underbrace{\omega_0^2 A}_{=c} \cos(\omega_B t - \varphi) = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos(\omega_B t),$$

$$\text{или } a \cos(\omega_B t - \varphi + \pi) + b \cos(\omega_B t - \varphi + \pi/2) + c \cos(\omega_B t - \varphi) = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos(\omega_B t).$$

Сумму трех однонаправленных гармонических колебаний с одинаковой частотой  $\omega_B$  в левой части уравнения определим с помощью векторной диаграммы, изображенной на рисунке, на которой все векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{\varepsilon}_0/L$  вращаются вокруг оси О с угловой скоростью  $\omega_B$ . Чтобы левая часть уравнения была равна правой, необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\left(\frac{\varepsilon_0}{L}\right)^2 = b^2 + (c - a)^2, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{b}{c - a}\right).$$

Как видно, колебания заряда  $q$  всегда отстают по фазе на  $\varphi$  от колебаний внешней э.д.с  $\varepsilon_B$ .

Подставляя в полученные уравнения выражения для  $a = A\omega_B^2$ ;  $b = 2\beta A\omega_B$  и  $c = \omega_0^2 A$ , находим зависимости амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\varphi$  вынужденных колебаний заряда на конденсаторе  $q_{\text{вын}} = A \cos(\omega_B t - \varphi)$  от частоты вы-

нужденной э.д.с. и параметров контура:  $A^2 \left[ (2\beta\omega_B)^2 + (\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 \right] = \left(\frac{\varepsilon_0}{L}\right)^2$ . То есть амплитуда вынужденных электри-

ческих колебаний заряда на конденсаторе имеет вид  $A = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4\beta^2\omega_B^2}}$ , а начальная фаза таких колебаний

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\beta\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}\right) \quad (\text{вынужденные колебания происходят и в случае } \beta > \omega_0).$$

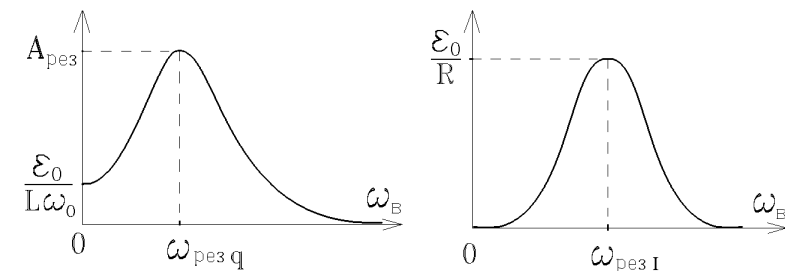
Напряжение на конденсаторе изменяется при этом по закону  $U_C = \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4\beta^2\omega_B^2}} \cdot \cos(\omega_B t - \varphi)$  и отстает по

фазе точно на  $\pi/2$  от колебаний тока в контуре:

$$I = \frac{dq}{dt} = A\omega_B [-\sin(\omega_B t - \varphi)] = A\omega_B \cos(\omega_B t - \varphi + \pi/2).$$

### 19.3. Резонанс напряжения на конденсаторе и тока в контуре. Добротность контура

Амплитуды вынужденных колебаний не зависят от времени, т.е. **постоянны**, но зависят от частоты  $\omega_B$  внешней э.д.с. График зависимости амплитуды от этой частоты называется амплитудно-частотной характеристикой контура. Приведем эти графики для амплитуды заряда на конденсаторе и для амплитуды тока в контуре.



При некоторой частоте внешнего источника  $\omega_B$ , как видно, амплитуды колебаний достигают максимума. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота – резонансной частотой  $\omega_{\text{рез}}$ .

Амплитуда тока в контуре:

$$I_0(\omega_B) = \frac{\varepsilon_0\omega_B}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_B^2\right)^2 + 4\frac{R^2}{4L^2}\omega_B^2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{L^2\left(\frac{1}{LC} - \omega_B^2\right)^2 + \frac{L^2 R^2}{\omega_B^2 L^2}\omega_B^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L\right)^2 + R^2}}, \quad \text{поэтому резонанс тока в контуре наступает при наименьшем}$$

значении знаменателя этого выражения, т.е. при  $\frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L = 0$  или при  $\omega_B^2 = \frac{1}{LC}$ . Резонансная частота для тока

$$\omega_{рез I} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Резонанс напряжения на конденсаторе ищем из условия максимума его амплитуды

$$\frac{dA(\omega_B)}{d\omega_B} = \frac{d}{d\omega_B} \left( \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4\beta^2 \omega_B^2}} \right) = 0. \text{ Приравняв нулю производную по } \omega_B \text{ от знаменателя этого выражения, полу-}$$

чим  $\omega_B^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$ . Т.е. резонансная частота для напряжения (заряда) на конденсаторе

$$\omega_{рез q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

При этой частоте амплитуда заряда на конденсаторе имеет величину

$$q_{max} = A_{рез} = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{\varepsilon_0/L}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

а резонансное значение амплитуды напряжения на конденсаторе  $U_{Cрез} = \left(\frac{q}{C}\right)_{max} = \frac{\varepsilon_0/LC}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{\varepsilon_0\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$

При  $\beta = R/2L \rightarrow 0$  (отсутствие активного сопротивления или очень большая индуктивность  $L$ ) амплитуда напряжения на конденсаторе стремится к бесконечности. Таким образом, даже если к контуру прикладывать малое внешнее напряжение  $\varepsilon_B$ , то напряжение на отдельных элементах контура может быть очень большим! В этом отношении **резонансные явления опасны** (пробой конденсатора, возникновение искры и т.п.)

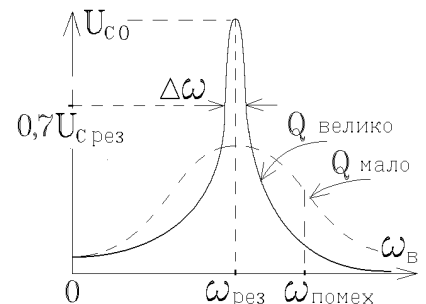
Резонансные явления в электрических цепях характеризуют величиной добротности электрического колебательного контура:  $Q = \frac{\pi}{\theta}$ , где  $\theta = \beta T$  – логарифмический декремент затухания, определенный ранее. Обычно в колебатель-

ных контурах затухание мало и поэтому  $\beta^2 \ll \omega_0^2$  и  $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$ . Для таких контуров с высокой добротностью

$$\theta \approx \frac{R}{2L} \cdot 2\pi\sqrt{LC} \approx \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{и} \quad Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Например, кварцевый резонатор в электронных часах имеет добротность  $Q \approx 20000$ , для частотно – стабилизированного  $CO_2$  - лазера  $Q \approx 10^9$ . Чем выше добротность контура, тем слабее затухают собственные колебания в нем, тем меньше потери энергии на выделение джоулева тепла.

Но добротность характеризует еще одно свойство электрического колебательного контура – его избирательную способность. Снова рассмотрим амплитудно-частотную характеристику напряжения на конденсаторе. Чем меньше затухание  $\beta$ , т.е. чем больше добротность  $Q$  контура, тем сильнее возрастает амплитуда в точке резонанса, т.е. тем **уже и выше** становится пик амплитудно-частотной характеристики. Принято считать, что **контур усиливает сигналы тех частот, для которых амплитуды отличаются от резонансного значения не больше, чем в  $1/\sqrt{2} \approx 0.7$  раз**. Интервал таких частот  $\Delta\omega$  называется полушириной резонанса.



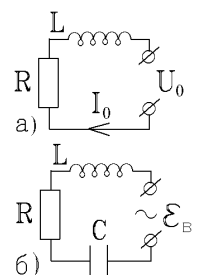
#### 19.4. Полное сопротивление (импеданс) контура. Эффективные ток и напряжение

Связь амплитуды тока и амплитуды внешней э.д.с. обычно записывают в виде  $I_0 = \varepsilon_0 / Z$ , похожем на закон Ома (если в цепь включен источник постоянного напряжения  $U_0 = \text{const}$ , то ам-

плитуды связаны соотношением  $I_0 = U_0 / R$ ). Величину  $Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L\right)^2 + R^2}$  называют полным сопротивлением цепи переменному току (или импедансом цепи).

Обычное (омическое) сопротивление  $R$  называют активным сопротивлением, а

$X = \frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L$  – реактивным сопротивлением цепи.



Как видим, для переменного тока сопротивлением обладает как емкость, так и индуктивность. Величину  $X_C = \frac{1}{\omega_b C}$  называют емкостным сопротивлением, а  $X_L = \omega_b L$  – индуктивным сопротивлением. Главное различие активного и реактивного сопротивления состоит в том, что на активном сопротивлении  $R$  выделяется джоулево тепло, а на реактивных сопротивлениях  $X_L$  и  $X_C$  – нет.

Действительно, средняя мощность, выделяемая переменным током на каком-либо элементе цепи за один период равна  $\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U I dt$ , где  $U$  – падение напряжения на этом элементе. Так как падение напряжения на емкости  $U_C = q/C$  отстает при вынужденных колебаниях по фазе на  $\pi/2$  от колебаний тока, то выделяемая на емкости мощность равна нулю:

$$\langle P_C \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_{C0} \cos(\omega_b t - \varphi) I_0 \underbrace{\cos(\omega_b t - \varphi + \pi/2)}_{= -\sin(\omega_b t - \varphi)} dt = \frac{U_{C0} I_0}{\omega_b T} \int_0^T \frac{1}{2} d(\cos^2(\omega_b t - \varphi)) = \frac{U_{C0} I_0}{\omega_b T} \frac{\cos^2(\omega_b t - \varphi)}{2} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0$$

(четная функция при интегрировании дает ноль). Аналогично не выделяется мощность на индуктивном сопротивлении, на котором падение напряжения  $U_L = -L di/dt$  опережает колебания тока по фазе на  $\pi/2$ . На активном же сопротивлении  $R$  за период выделяется мощность

$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_R I dt = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{1}{T} R I_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega_b t - \varphi + \pi/2) dt.$$

Последний интеграл в этой формуле равен  $T/2$ , так как  $\cos^2(\omega_b t) = (1 + \cos 2\omega_b t)/2$ , а  $\cos 2\omega_b t$  при интегрировании дает ноль, как четная функция поэтому

$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R.$$

**Вывод:** переменный ток  $I = I_0 \cos \omega_b t$  выделяет в цепи ту же мощность, что и постоянный ток  $I_{\text{эфф}} = I_0/\sqrt{2}$ , создающий на сопротивлении  $R$  падение напряжения  $U_{\text{эфф}} = U_0/\sqrt{2}$ . Величины  $I_{\text{эфф}}$  и  $U_{\text{эфф}}$  называются действующими или эффективными значениями тока и напряжения. Все амперметры и вольтметры, измеряющие переменный ток, градуированы в эффективных значениях  $I_{\text{эфф}}$  и  $U_{\text{эфф}}$  постоянного тока.

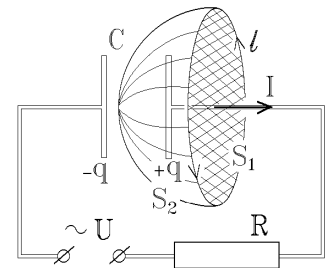
## 20. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### 20.1. Ток смещения

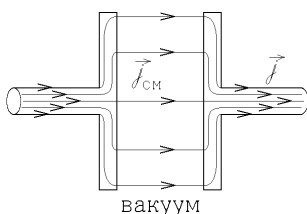
Переменный ток протекает по цепи, содержащей конденсатор (конденсатор обладает конечным емкостным сопротивлением переменному току). Но это должно нарушать теорему о циркуляции для вектора напряженности  $\vec{H}$  (или индукции  $\vec{B}$ ) магнитного поля. Для того, чтобы не учитывать возможные токи намагничения, рассмотрим теорему о циркуляции  $\vec{H}$ , а не  $\vec{B}$ , для контура  $l$ , изображенного на рисунке:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_{\text{охватыв}} = I. \text{ Причем } \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} \neq 0, \text{ а } \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Действительно согласно теореме Стокса интеграл в правой части можно вычислять по любой поверхности  $S_i$ , ограниченной контуром  $l$ . Но поверхность  $S_1$  линии тока



пересекают, и  $j = I/S_{\text{провода}} \neq 0$ , а через поверхность  $S_2$  – полусферу, охватывающую одну из пластин конденсатора – ток проводимости не течет (между пластинами конденсатора заряды не переносятся, и  $j = 0$ ). Линии тока проводимости  $\vec{j}$  обрываются на пластинах конденсатора, что приводит к противоречию. Для того, чтобы теорема о циркуляции  $\vec{H}$  не нарушалась, Максвелл предположил, что линии переменного тока  $\vec{j}$  нигде не обрываются (всюду замкнуты, как и линии постоянного тока), и между пластинами конденсатора они переходят в линии тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$ .



Но если между пластинами конденсатора находится вакуум, то движения зарядов там нет, и ток смещения не является результатом движения заряженных частиц. Его назвали током только потому, что **аналогично обычному току проводимости  $\vec{j}$  ток смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$  создает магнитное поле.**

Для вычисления  $\vec{j}_{\text{см}}$  запишем теорему о циркуляции  $\vec{H}$  в дифференциальной форме с учетом тока смещения:  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}$ . Так как дивергенция ротора от любого вектора тождественно равна нулю,  $\text{div}(\text{rot } \vec{H}) \equiv 0$ , то

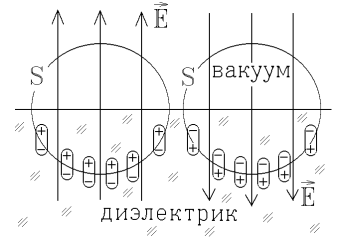
$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{см}} = -\operatorname{div} \vec{j} = -\partial \rho / \partial t$  (это уравнение непрерывности электрического заряда). Если подставить в последнее уравнение теорему о циркуляции  $\vec{D}$  в дифференциальной форме  $\rho = \operatorname{div} \vec{D}$ , то приходим к выводу о том, что плотность тока смещения выражается через производную от вектора электрической индукции по времени:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Ток смещения может появиться в любой среде: в вакууме, в диэлектрике, в проводнике. Так как в диэлектрике  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , то  $\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ . Второе слагаемое связано с реальным перемещением связанных зарядов, не создающих ток проводимости. Действительно, ток смещения, вытекающий из любой замкнутой поверхности  $S$ , определяется формулой  $\oint_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{s} \sim \frac{d}{dt} \oint_S \vec{P} d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV = \frac{d}{dt} \int_V (-\rho'_{\text{связ}}) dV = -\frac{dq'_{\text{связ}}}{dt}$ , где  $q'_{\text{связ}}$  - связанный заряд, вытекающий из поверхности  $S$ .

Из рисунка видно, как под действием переменного электрического поля связанные заряды молекул диэлектрика совместно смещаются то в одну, то в другую сторону. Такое реальное движение связанных зарядов действительно должно создавать магнитное поле. Но магнитное поле создает и вторая компонента тока смещения  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ .

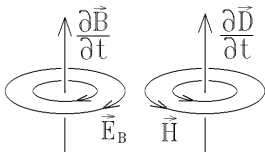
Она существует и в веществе, и в вакууме, и не связана ни с каким движением зарядов. **Магнитное поле создается изменяющимся со временем электрическим полем.**



## 20.2. Система уравнений Максвелла

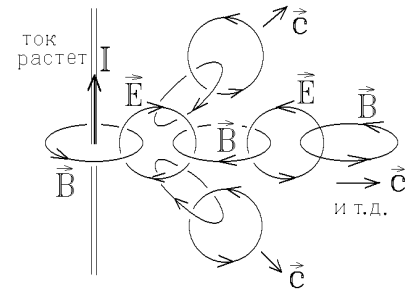
Магнитное и электрическое поля, вообще говоря, нельзя рассматривать порознь. Помимо того факта, что при переходе из одной инерциальной системы в другую электрическое поле превращается в магнитное и наоборот, оказывается, что

в одной и той же системе отсчета переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле  $\operatorname{rot} \vec{E}_B = -\partial \vec{B} / \partial t$ , а переменное электрическое поле порождает ток смещения и, следовательно, переменное магнитное поле:  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{см}} = \partial \vec{D} / \partial t$ .



Линии напряженности этих полей замкнуты, охватывают векторы  $\partial \vec{B} / \partial t$  и  $\partial \vec{D} / \partial t$ , но из-за разного знака направлены в противоположные стороны (см. рисунок). Поля эти неразрывно связаны и образуют единое электромагнитное поле. Пусть в какой-то точке пространства возник возрастающий ток, порождающий возрастающее магнитное поле, которое в свою очередь приводит к появлению возрастающего вихревого электрического поля и т.д.

Возникающее переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью света  $\vec{c}$ . Причем оно продолжает существовать даже в том случае, когда исчезла первоначальная причина его появления. Поэтому, например, при нажатии выключателя лампочка под потолком загорается практически мгновенно, несмотря на то, что дрейфовая скорость электронов, создающих электрический ток, очень мала:  $u \approx 0,1 \div 0,01$  мм/с. Переменное электромагнитное поле пробегает вдоль электрической цепи, и заставляет все свободные электроны во всех участках цепи практически одновременно двигаться со скоростью  $u$ .



В самом общем случае **любое электромагнитное поле описывается системой уравнений Максвелла**. Эта система представляет собой теоремы о циркуляции и о потоке (теоремы Гаусса) для электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \right); \\ (2) \quad & \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \left( \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} \right); \\ (3) \quad & \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV = \sum q_{\text{внутри}}; \\ (4) \quad & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0. \end{aligned}$$

Уравнение (1) – это закон электромагнитной индукции Фарадея. Циркуляция вихревого электрического поля не равна нулю. Она и образует э.д.с. электромагнитной индукции.

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$ , записанная в форме уравнения (2), справедлива всегда. Справа в уравнении (2) стоит алгебраическая сумма токов проводимости и токов смещения, охватываемых замкнутым контуром  $l$ .

В уравнении (3) (теорема Гаусса для электрического поля) справа стоит алгебраическая сумма зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью  $S$  и образующих обычное потенциальное электрическое поле.

Уравнение (4) (теорема Гаусса для магнитного поля) обеспечивает замкнутость линий индукции  $\vec{B}$  любого магнитного поля.

Эта система уравнений Максвелла записана в интегральной форме. С помощью теорем Остроградского и Стокса ее можно записать в дифференциальной форме: В такой дифференциальной форме уравнения Максвелла можно применять для участков среды с непрерывно меняющимися параметрами. На границах различных сред (вакуум – металл, диэлектрик – металл, металл 1 – металл 2 и т.п.) напряженности и индукции полей меняются скачком, и производные теряют смысл.

Уравнения Максвелла записаны здесь в таком виде, чтобы устранить из них неизвестные связанные заряды  $\rho'$  и токи намагничивания  $\vec{j}'$ . Поэтому, кроме двух основных характеристик электромагнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , в них вошли еще  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ . Для решения системы необходимо дополнить её связью между этими векторами:

$$\begin{aligned} (1) \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ (2) \quad \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ (3) \quad \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; \\ (4) \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стоп}})$$

Такие связи называются материальными уравнениями.

Кроме того надо задать граничные условия на любой границе двух сред:

$$\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n}; \quad \vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}; \quad \vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}; \quad \vec{H}_{1\tau} = \vec{H}_{2\tau}$$

Еще одно важное граничное условие: так как все заряды и токи реально располагаются в ограниченной области пространства, то на бесконечном удалении их поля исчезают:  $\vec{E}|_{\infty} = \vec{B}|_{\infty} = 0$ .

Заметим, что уравнения Максвелла релятивистски инвариантны и не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой.

**Вывод:** зная распределение плотности свободных зарядов  $\rho$  и токов проводимости  $\vec{j}$ , и решая систему уравнений Максвелла, можно найти поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в любой точке пространства, И наоборот, зная поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , можно определить распределение создающих их зарядов  $\rho$  и токов  $\vec{j}$ .

Если распределение зарядов и токов не изменяется со временем, то поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  тоже не зависят от времени, и система уравнений Максвелла распадается на две части и описывает независимые постоянные электростатическое и

магнитное поля:

$$\left. \begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0 \\ \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \sum q \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \sum I \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

### 20.3. Поток плотности энергии электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга и теорема Пойнтинга

Рассмотрим теперь закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Возьмем дивергенцию от векторного произведения напряженностей электрического и магнитного полей:  $\operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{\nabla}_E \cdot [\vec{E}, \vec{H}] + \vec{\nabla}_H \cdot [\vec{E}, \vec{H}]$ . Индексы  $E$  и  $H$  у оператора  $\vec{\nabla}$  показывают, что по правилам дифференцирования произведения функций оператор  $\vec{\nabla}$  сначала действует на функцию  $\vec{E}$ , а потом – на  $\vec{H}$ .

Воспользуемся теперь правилом циклической перестановки векторов и уравнениями Максвелла:

$$\vec{\nabla}_E \cdot [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \cdot [\vec{\nabla}_E, \vec{E}] = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{H} \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{2} \right); \quad (\text{в однородной среде } \epsilon, \mu = \text{const})$$

$$\vec{\nabla}_H \cdot [\vec{E}, \vec{H}] = -\vec{\nabla}_H \cdot [\vec{H}, \vec{E}] = -\vec{E} \cdot [\vec{\nabla}_H, \vec{H}] = -\vec{E} \vec{j} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{E} \vec{j} - \vec{E} \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{E} \vec{j} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2}{2} \right).$$

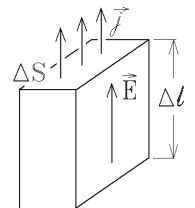
Следовательно,  $\operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{2} \right) - \vec{E} \vec{j}$ . Но  $w_{\text{эм}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{2}$  – это плотность энергии электромагнитного поля (сумма плотностей энергии электрического и магнитного полей).

Чтобы понять физический смысл слагаемого  $\vec{E} \vec{j}$ , выделим элемент тока в малом объеме среды с сечением  $\Delta S$  с длиной  $\Delta l$  и с объемом  $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S$ . Ток  $\vec{j}$  порождается электрическим

полем  $\vec{E}$ :  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  (закон Ома в локальной форме). Тогда  $\vec{E} \vec{j} = (E \Delta l) \cdot \frac{j \Delta S}{\Delta l \Delta S} = \frac{UI}{\Delta V} = \frac{I^2 R}{\Delta V}$ , так как

$E \Delta l$  – это разность потенциалов, или падение напряжения  $U$  на участке длины  $\Delta l$  с сопротивлением  $R$ , а  $j \Delta S$  – ток  $I$  через его сечение.

Полученное выражение – это джоулево тепло, выделяемое током за единицу времени в единице объема среды.



Так как магнитные силы работы по перемещению зарядов не производят, то  $\vec{E}\vec{j}$  – это работа, производимая силами электрического поля в единице объема среды за единицу времени. Эта работа идет на выделение джоулева тепла, т.е. на нагревание среды или на осуществление каких-либо фотохимических реакций.

Проинтегрируем теперь полученное уравнение по любому объему  $V$ , ограниченному замкнутой поверхностью  $S$ :

$$-\int_V \frac{\partial w_{эм}}{\partial t} dV = \int_V \vec{E}\vec{j} dV + \int_V \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] dV.$$
 Последнее слагаемое по теореме Остроградского запишется в виде интеграла по замкнутой поверхности:  $\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S}$ . Полученное равенство выражает **закон сохранения энергии**:

убыль энергии электромагнитного поля за единицу времени внутри объема среды, ограниченного любой замкнутой поверхностью  $S$ , складывается из потока энергии, переносимой через эту поверхность электромагнитным полем, и работы, которую силы электромагнитного поля производят над зарядами в этом объеме среды за единицу

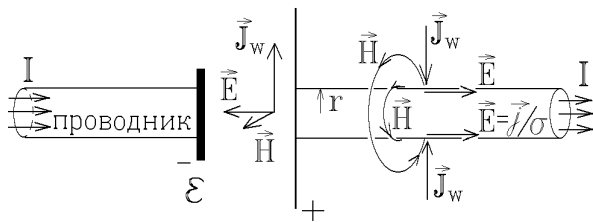
времени:

$$-\frac{dW_{эм}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \vec{H}^2}{2} \right) dV = \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} + \int_V \vec{E}\vec{j} dV.$$

Это уравнение называется **теоремой Пойнтинга**.

Работа над электрическими зарядами может быть как положительной, когда заряды движутся под действием электрических сил, так и отрицательной, когда под действием каких-либо сторонних сил заряды движутся против сил электрического поля (например, внутри источника э.д.с.). В последнем случае энергия электромагнитного поля не убывает, а возрастает

Вектор  $\vec{j}_W = [\vec{E}, \vec{H}]$  называется **вектором Пойнтинга**. Его величина равна энергии, переносимой электромагнитным полем за единицу времени через единичную площадь, перпендикулярную к направлению распространения электромагнитного поля. Если вектор  $\vec{j}_W$  направлен из замкнутой поверхности, то энергия выносится из нее, и наоборот. Вектор Пойнтинга  $\vec{j}_W$  является **вектором плотности потока энергии электромагнитного поля**.



Применим теорему Пойнтинга к частному случаю стационарных полей, например, к цепи постоянного тока. Ток  $I$  вызван некоторой разностью потенциалов

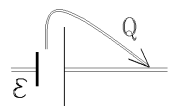
$$U = \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$
 создающей электрическое поле напряженностью  $E = U/l$  на участке проводника длины  $l$ . Этот ток создает вблизи поверхности проводника магнитное поле с напряженностью  $H = I/2\pi r$ . Как видно из рисунка, вектор Пойнтинга

$\vec{j}_W = [\vec{E}, \vec{H}]$  направлен к оси проводника. Следовательно, **внутри участка проводника длины  $l$  из окружающего пространства за единицу времени втекает энергия**  $\left| \int \vec{j}_W \cdot d\vec{S} \right| = E \cdot H \cdot \sin 90^\circ \cdot 2\pi r l = I \cdot U = I^2 R$  (интеграл был взят по боковой поверхности провода  $2\pi r l$ ). Эта энергия равна мощности  $P$  постоянного тока!

В теореме Пойнтинга она окажется с отрицательным знаком, т.к. вектор  $\vec{j}_W$  направлен противоположно вектору площадки  $d\vec{S}$  на боковой поверхности проводника, а потому полностью компенсируется выделяемой джоулевой мощностью  $\int_V \vec{E}\vec{j} dV$ . В результате 
$$-\frac{dW_{эм}}{dt} = \oint_S \vec{j}_W d\vec{S} + \int_V \vec{E}\vec{j} dV = 0$$
 и  $W_{эм} = \text{const}$ , следовательно электромагнитное поле стационарно и его энергия не меняется.

**Джоулево тепло выделяется за счет переноса энергии электромагнитного поля из окружающей среды в проводник.**

Откуда эта энергия берется в окружающем пространстве? Она поступает из источника э.д.с., в котором под действием сторонних сил ток течет против линий  $\vec{E}$ , мощность  $P$  сил электрического поля отрицательна, и вектор  $\vec{j}_W$  направлен в окружающее пространство, наружу.



Следует ли из этого вывод, что энергия в цепях постоянного тока вытекает из источника э.д.с. и переносится к потребителю не по проводам, а по воздуху? Ответ в том, что энергия тока, с одной стороны, равна энергии движущихся заряженных частиц, а с другой стороны, – энергии магнитного поля, создаваемого током. Мы их не разделяем. Это одна и та же энергия: если есть движение заряженных частиц – то имеется магнитное поле, нет тока – нет магнитного поля. Энергия тока в проводнике совпадает с энергией магнитного поля этого тока. Можно рассматривать реальное движение заряженных частиц, переносящих энергию по проводнику. А можно «забыть» об этом движении и учесть магнитное поле, существующее не только в проводнике, но и во всем пространстве. Результат, как видим, один и тот же, но объясняет почти мгновенное зажигание лампочки после включения контакта цепи: электромагнитное поле распространяется вдоль проводов со скоростью света, «втекает» в провода и заставляет электроны в них двигаться со средней дрейфовой скоростью сразу по всей длине проводов.

## 21. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 21.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля в идеальном диэлектрике (вакууме)

Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме или в однородной диэлектрической среде, где нет свободных зарядов и токов проводимости:  $\rho = 0$ ;  $\vec{j} = 0$ . В этом случае система уравнений Максвелла в дифференциальной форме принимает

следующий вид: (1)  $\boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ ; (2)  $\boxed{\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ ; (3)  $\boxed{\text{div } \vec{D} = 0}$ ; (4)  $\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$ .

Поддействуем на обе части уравнения (1) оператором  $\text{rot}$  и воспользуемся уравнением (2); тогда получим

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Двойное векторное произведение в этом равенстве раскрываем по правилу  $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ , т.е.  $[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = -\Delta \vec{E}$ .

$= \text{div } \vec{E} = 0$  из (3)  $\quad = \Delta$

В результате этих преобразований получим волновое уравнение 
$$\Delta \vec{E} = \left( \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right) = \epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Аналогично, поддействовав оператором  $\text{rot}$  на второе уравнение системы Максвелла, получим волновое уравнение

$$\Delta \vec{H} = \left( \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} \right) = \epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Так как общий вид волнового уравнения  $\Delta \vec{u} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$ , где  $v$  – скорость распространения волны, то получаем

**Вывод:** в непроводящей среде (вакуум, диэлектрик) электромагнитное поле существует в виде электромагнитных волн

– это колебания вихревых электрического и магнитного полей, распространяющиеся со скоростью  $v_{\text{эм}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ ,

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость света в вакууме.

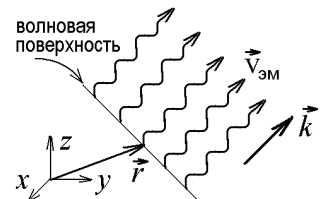
### 21.2. Электромагнитные волны. Волновой вектор. Скорость электромагнитных волн. Связь напряженности электрического и магнитного поля в электромагнитной волне

Частным решением волнового уравнения будет плоская электромагнитная волна, в которой векторы напряженности электрического и магнитного поля изменяются в одной фазе с одной частотой  $\omega$  (такая волна называется монокроматической, т.е. имеющей определенную длину волны  $\lambda = 2\pi v_{\text{эм}} / \omega$ ):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi); \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi).$$

У плоской волны волновые поверхности, т.е. точки, колеблющиеся в одной фазе, будут плоскостями. Здесь вектор  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\vec{v}_{\text{эм}}}{v_{\text{эм}}}$  направлен вдоль скорости  $\vec{v}_{\text{эм}}$  волны и называется

волновым вектором. Он показывает направление распространения плоской волны в пространстве (см. рисунок). Такая волна также называется бегущей.



Если плоская монокроматическая электромагнитная волна распространяется **вдоль оси 0x**, то поля в ней изменяются по закону  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi); \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ , где  $k = 2\pi/\lambda = \omega/v_{\text{эм}}$  – волновое число.

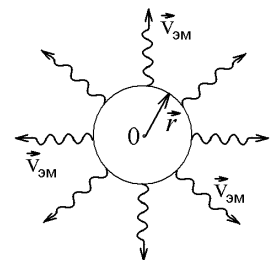
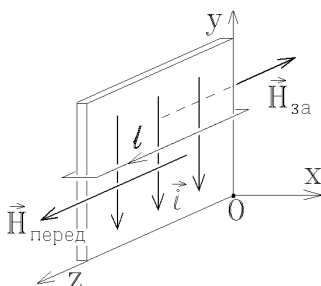
Волна, распространяющаяся **против оси 0x** имеет вид  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + kx + \varphi); \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$ .

Если волна испускается точечным источником, находящимся в точке 0, то её волновые поверхности имеют вид концентрических сфер с центрами в точке 0, волна называется сферической (см. рисунок) и имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kr + \varphi); \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kr + \varphi).$$

Электромагнитную волну с частотой  $\omega$  создает, например, колебание электрических зарядов с той же частотой. Рассмотрим в плоскости  $yz$  бесконечную тонкую пластину, по которой против оси  $y$  протекает поверхностный переменный ток с линейной плотностью  $i = i_y = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ . Охватим

участок пластины шириной  $l$  очень узким прямоугольным контуром. По теореме о циркуляции для вектора  $\vec{H}$ :  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{\text{за}} l + H_{\text{перед}} l = il$ , где  $il$  – охватываемый контуром ток.



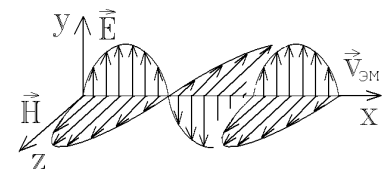
Но  $H_{\text{за}} = H_{\text{перед}} = H$  в силу симметрии, т.е. непосредственно вблизи пластины с током возникают колебания магнитного поля  $H = H_z(x=0, t) = i/2 = (i_0 \cos(\omega t + \varphi))/2$ . Эти колебания распространяются вдоль оси  $x$ , запаздывая по времени:  $H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ , где  $k = 2\pi/\lambda = \omega/v_{\text{эм}}$ ,  $H_0 = i_0/2$  –  **$H_0 = i_0/2$**  – амплитуда колебаний напряженности магнитного поля. Это – **плоская волна**. Одновременно индуцируется вихревое электрическое поле

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x = 0 & H_y = 0 & H_z \end{vmatrix} = -\vec{j} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\vec{j} \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} k H_0 \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

Следовательно, вектор  $\vec{E}$  напряженности электрического поля направлен вдоль оси  $y$ , и его проекция на эту ось определяется, как  $E_y = -\int \frac{H_0 k}{\epsilon_0 \epsilon} \sin(\omega t - kx + \varphi) dt = \frac{H_0 k}{\epsilon_0 \epsilon \omega} \cos(\omega t - kx + \varphi) = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$  (постоянная интегрирования равна нулю, так как постоянное электрическое поле отсутствует). Это – также **плоская волна**. Её амплитуда связана с амплитудой напряженности магнитного поля как  $E_0 = \frac{H_0 k}{\epsilon_0 \epsilon \omega} = \frac{H_0}{\epsilon_0 \epsilon v_{\text{эм}}} = H_0 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}}$ .

Из полученных соотношений следует общий для всех **бегущих** электромагнитных волн результат:

Любая электромагнитная волна – это колебания электрического и магнитного полей, происходящие в одной фазе и с одной частотой, причем векторы напряженностей этих полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  образуют с вектором скорости волны  $\vec{v}_{\text{эм}}$  (или с волновым вектором  $\vec{k}$ ) правую тройку векторов, как показано на рисунке. Амплитуды напряженностей электрического и магнитного поля связаны соотношением или  $\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu \mu_0} H_0$ . Скорость всех электромагнитных волн одинакова и равна  $v_{\text{эм}} = 1/\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = c/\sqrt{\epsilon \mu}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме.

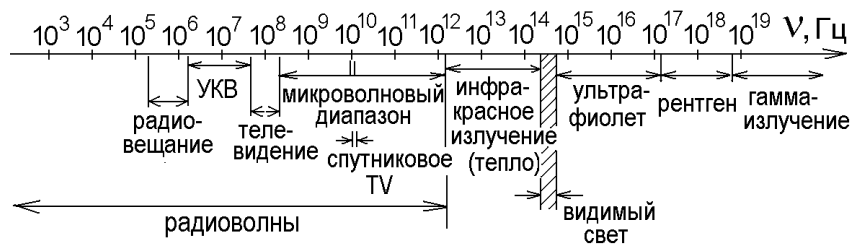


Коэффициент  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  называют **показателем преломления среды**. Для вакуума  $n_{\text{вак}} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1$ . В любой другой среде скорость распространения электромагнитных волн в  $n$  раз меньше скорости света в вакууме  $c$ .

Любые **немонохроматические** электромагнитные волны будут суперпозицией (суммой) монохроматических волн с разными частотами и длинами волн. Поэтому все результаты, полученные для монохроматической волны справедливы для любых немонохроматических волн.

### 21.3. Шкала электромагнитных волн

Все излучения, **в том числе и видимый свет**, являются электромагнитными волнами, т.е. быстропеременными колебаниями электрического и магнитного поля. Приведем диапазоны электромагнитных волн на следующей шкале:



Все эти излучения (электромагнитные волны) имеют одинаковую скорость

$$v_{\text{эм}} = c/\sqrt{\epsilon \mu} = c/n$$

Их поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  и  $\vec{v}_{\text{эм}}$  образуют правую тройку векторов, показанную выше, а их амплитуды связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu \mu_0} H_0$$

Для **видимого света**  $400 \text{ нм} \leq \lambda \leq 750 \text{ нм}$  (или  $3,7 \cdot 10^{14} \text{ Гц} \leq \nu (= \omega/2\pi) \leq 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$ ). Спектр видимого света имеет следующие диапазоны длин волн:

Цвет	красный	оранжевый	желтый	зеленый	голубой	синий	фиолетовый
$\lambda$ , нм	650-780	590-650	530-590	490-530	450-490	420-450	380-420

Заметим, что эти длины волн приведены для света, распространяющегося в вакууме.

Если любое электромагнитное излучение распространяется в прозрачной среде с показателем преломления  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ , то и скорость  $v_{\text{эм}}$ , и длина волны  $\lambda = 2\pi v_{\text{эм}}/\omega$  этого излучения уменьшаются в  $n$  раз по сравнению с вакуумом. Частота  $\omega$  электромагнитной волны одинакова во всех средах.

Все законы и явления, которые будут рассмотрены далее на примере видимого света (интерференция, дифракция, поляризация) справедливы для электромагнитных волн любого диапазона частот.



*Замечание:* каждое из излучений, показанных выше, обладает свойствами волны (непрерывность, сплошной волновой фронт) и частицы (корпускулы) или **фотона**. Чем больше частота излучения, тем заметнее его корпускулярные свойства, и наоборот – чем частота меньше, тем сильнее проявляются волновые свойства. При малых частотах (радиоволны) практически проявляются только волновые свойства, а при больших частотах (**γ**-излучение) его можно представить потоком частиц – фотонов.

## 21.4. Энергия и импульс электромагнитной волны

Электромагнитная волна – это электромагнитное поле в непроводящей среде. Так как векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}_{\text{эм}}$  образуют правую тройку векторов, то вектор плотности потока энергии, или **вектор Пойнтинга** для нее имеет вид

$$\vec{j}_W = [\vec{E}, \vec{H}] = EH \cdot \vec{v}_{\text{эм}} / v_{\text{эм}}.$$

Используя связь  $\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$ , находим  $H = \frac{\epsilon\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}E = \epsilon\epsilon_0 E \cdot v_{\text{эм}}$ ,  $E = \frac{\mu\mu_0}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}H = \mu\mu_0 H \cdot v_{\text{эм}}$ , откуда

$$EH = \left( \frac{1}{2} EH + \frac{1}{2} EH \right) = v_{\text{эм}} \left( \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \right) = v_{\text{эм}} \cdot w_{\text{эм}}, \text{ где } w_{\text{эм}} - \text{плотность энергии, или энергия единицы объема электромагнитного поля.}$$

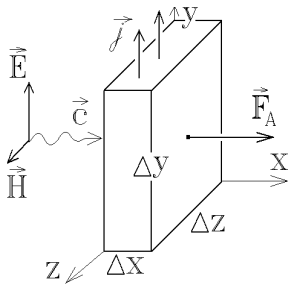
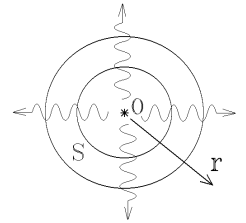
Поэтому плотность потока энергии, переносимой электромагнитной волной, равна произведению плотности энергии электромагнитного поля на скорость распространения волны:  $\vec{j}_W = w_{\text{эм}} \cdot \vec{v}_{\text{эм}}$  – это энергия, переносимая через единичную площадку за единицу времени.

*Замечание:* формула  $\vec{j}_W = w \cdot \vec{v}$  справедлива для **любой волны**, распространяющейся со скоростью  $\vec{v}$  и обладающей плотностью энергии  $w$ . Для акустических волн вектор  $\vec{j}_W$  называют **вектором Умова**.

Направление вектора Умова – Пойнтинга  $\vec{j}_W$  показывает направление переноса энергии волной, а его величина (энергия волны) **всегда пропорциональна квадрату амплитуды колебаний**.

В плоской волне амплитуды колебаний  $E_0$  и  $H_0$  не изменяются с пройденным волной расстоянием. Но если волна сферическая и имеет амплитуду  $E_0$ , то поток энергии, переносимой волной от источника  $O$  через любую сферическую поверхность  $S = 4\pi r^2$  с радиусом  $r$ , должен быть одинаков (энергия не может в вакууме появляться ниоткуда и исчезать никуда):

$\oint \vec{j}_W d\vec{S} \sim E_0^2 \cdot 4\pi r^2 = \text{const}$ . Поэтому амплитуды напряженностей в сферической электромагнитной волне убывают обратно пропорционально расстоянию **r** от источника волн:  $E_0 \sim H_0 \sim 1/r$ .



Пусть плоская электромагнитная волна падает на плоский участок поглощающей среды малой толщины  $\Delta x$ . Электрическое поле  $\vec{E}$  волны заставляет двигаться свободные электроны в этой среде, и создает ток  $I = j \cdot \Delta x \Delta z$ , где  $\Delta x \Delta z$  – поперечное сечение участка, показанного на рисунке (будем считать, что  $\mu = \epsilon = 1$ ). Магнитное поле волны

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = \frac{E}{c} \text{ действует на этот ток с силой Ампера } F_A = I \Delta y B = \frac{jE}{c} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Среда при этом должна поглощать падающую волну. За время  $dt$  в рассматриваемом участке среды поглощается и превращается в джоулево тепло энергия

$$j_W \Delta x \Delta y dt = jE \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \cdot dt = F_A \cdot c dt \quad \text{Здесь } jE - \text{джоулево тепло, выделяющееся в единице}$$

объема среды за единицу времени;  $\Delta x \Delta y \Delta z$  – объем рассматриваемого участка. Но  $\vec{F}_A dt = d\vec{p}$  – это импульс, приобретаемый средой за время  $dt$ . Чтобы выполнялся закон сохранения импульса, остается предположить, что **импульсом обладает падающая электромагнитная волна**, и этот импульс  $d\vec{p} = \vec{F}_A dt = \frac{\vec{j}_W}{c} \Delta y \Delta z dt$  передается среде.

Но за время  $dt$  в ней поглотилась волна, занимавшая объем  $dV = c dt \cdot \Delta y \Delta z$ . Следовательно,  $d\vec{p} = \frac{\vec{j}_W}{c^2} dV$  и **импульс**

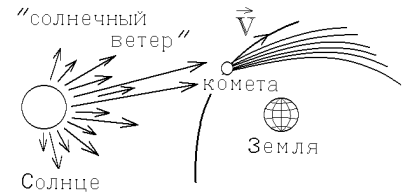
единицы объема электромагнитной волны равен 
$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{j}_W}{c^2} = \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{c^2} = \frac{w_{\text{эм}} \vec{c}}{c^2}$$

(таким же импульсом обладает единица объема любого электромагнитного поля в любой среде.)

Все электромагнитные волны отталкивают поглощающие или отражающие их тела, т.е. создают на них давление

$$p = \frac{F_A}{\Delta y \Delta z} = \frac{j_W}{c} = w_{\text{эм}} \quad (\text{в случае поглощения падающего излучения}).$$

Наблюдаемым примером давления, создаваемого электромагнитным излучением могут служить кометные хвосты: испаряемый с кометы солнечным излучением газ отталкивается этим же излучением от Солнца. Как показано на рисунке справа комета может двигаться со скоростью  $\vec{v}$  “хвостом вперед”.

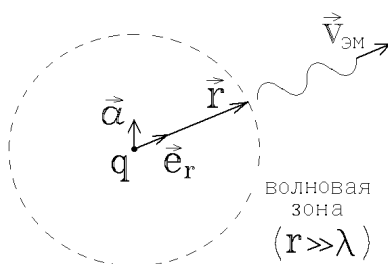


## 21.5. Излучение электромагнитных волн ускоренными зарядами. Волновая зона

Точечный заряд  $q$ , движущийся с постоянной скоростью  $\vec{v}$  в вакууме или воздухе, создает магнитное поле  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$ . В случае зависимости от  $r$  величина  $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$ , и  $\vec{B} = -\frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \vec{v}, \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \right] = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \vec{\nabla}, \frac{\vec{v}}{r} \right] = \text{rot} \left( \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r} \right)$ .

Если заряд начнет двигаться не с постоянной, а с переменной скоростью  $\vec{v}$ , то возникает вихревое электрическое поле  $\vec{E}_v$ , для которого из теоремы о циркуляции в дифференциальной форме  $\text{rot } \vec{E}_v = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r} \right) \right)$ , откуда

$\vec{E}_v = -\frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{v}}{r} \right)$ . Это переменное электрическое поле в свою очередь, порождает переменное магнитное поле и т. д.



Такое электромагнитное поле распространяется от заряда  $q$  со скоростью света  $c$  в виде электромагнитных волн с длинами  $\lambda$ . А так как сам заряд движется с очень малой скоростью  $v \ll c$ , то он практически **не успевает сместиться** за то время, за которое электромагнитные волны проходят большое расстояние  $r \gg \lambda$ . Приближенно можно считать, что  $r = \text{const}$  и  $\vec{E}_v = -\frac{\mu_0}{4\pi r} q \vec{a}(t)$ , где  $\vec{a}(t) = d\vec{v}/dt$  – ускорение заряда.

**Волновой зоной** называется область, удаленная от излучающего заряда большое расстояние  $r \gg \lambda$ . В ней электростатическое поле  $E_{эл} = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ ,

убывающее с расстоянием по закону  $1/r^2$  **пренебрежимо мало** по сравнению с вихревым полем, убывающим по закону  $1/r$ . Поэтому можно считать, что в волновой зоне поле ускоренного заряда проявляется только в виде электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  вдоль радиальных направлений.

Но при больших  $r$  участок сферы (волновая поверхность будет **практически плоским** (в волновой зоне электромагнитные волны можно считать плоскими). Для плоских волн векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}_{эм} = \vec{c}$  должны образовывать правую тройку векторов. Поэтому еще до достижения излученным электромагнитным полем волновой зоны в нем должна исчезнуть, затухнуть радиальная составляющая  $\vec{E}_{||}$  вихревого электрического поля, как показано на рисунке.

Вблизи излучающего заряда электромагнитное поле имеет сложный вид, но в волновой зоне распространяется практически плоская электромагнитная волна с векторами напряженности электрического и магнитного поля, имеющими величину

$$E = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} a \cdot \sin \theta, \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} q}{4\pi r} a \cdot \sin \theta, \text{ и образующими со скоростью волны } \vec{v}_{эм} = \vec{c} \text{ правую тройку векторов.}$$

Здесь  $\theta$  – угол между направлением ускорения  $\vec{a}$  заряда и направлением распространения излученной волны.

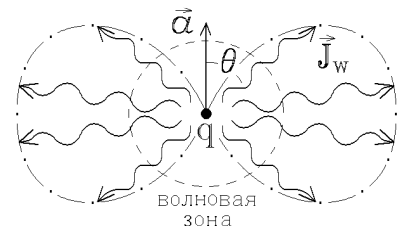
**Электромагнитные волны создаются электрическими зарядами, движущимися с ускорением.**

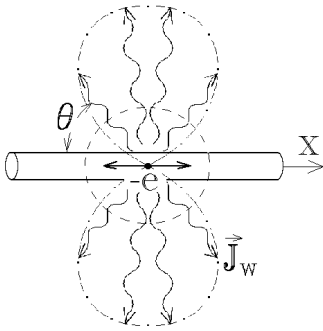
*Следствия:*

1) Любой заряд, движущийся ускоренно, теряет свою энергию, излучая электромагнитные волны. Но электрон, вращающийся вокруг атомного ядра с огромным центростремительным ускорением, как показывает расчет, должен за время  $\sim 5 \cdot 10^{-11}$  с потерять всю свою кинетическую энергию и упасть на ядро.

Следовательно, с точки зрения классической электромагнитной теории атомы неустойчивы. **Классические законы неприменимы внутри атома.**

2) Излученный ускоренным зарядом поток энергии  $|\vec{j}_w| = \left[ \vec{E}, \vec{H} \right] \sim \sin^2 \theta$  различен вдоль разных направлений. Максимум энергии ускоренный заряд излучает в направлении, перпендикулярном к вектору ускорения  $\vec{a}$ , и практически не излучает в направлении, параллельном вектору  $\vec{a}$ .

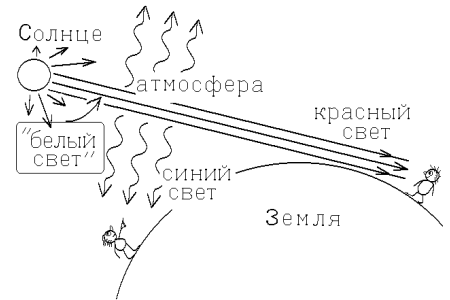




3) Вообще говоря, электромагнитные волны, испущенные ускоренным зарядом, **не являются монохроматическими**. Монохроматические волны будут испускаться только зарядом, колеблющимся по гармоническому закону. Рассмотрим переменный ток с частотой  $\omega$ . Создающие его свободные электроны испытывают смещение  $x = x_0 \cos \omega t$  и имеют ускорение  $a_x = d^2 x / dt^2 = -\omega^2 x_0 \cos \omega t$ . Тогда в создаваемой ими в волновой зоне электромагнитной волне  $E, H \sim a \sim \omega^2$ , а излучаемая в пространство энергия  $j_W \sim \omega^4$ . **Потери на излучение резко растут с ростом частоты переменного тока.**

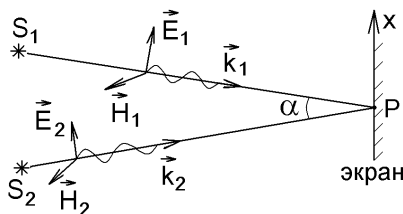
4) Рассеяние света в атмосфере. Свет, как падающая волна электромагнитного излучения, рассеивается на микроскопических неоднородностях атмосферы, микроскопических капельках водяного пара в ней, возбуждая колебания электронов с частотой света. Ускоряемые электрическим полем падающей электромагнитной волны заряды (электроны) испускают вторичные электромагнитные волны по всем направлениям (кроме направления вектора ускорения  $\vec{a}$ ) с той же самой частотой. Но такое вторичное излучение прямо пропорционально четвертой степени частоты и обратно пропорционально четвертой степени длины волны падающего света:  $j_W \sim \omega^4 \sim 1/\lambda^4$ . Это - **закон Рэлея** для рассеяния света.

Из него следует, что наиболее легко рассеиваются синие и голубые лучи с малыми  $\lambda$ , а красные лучи с большими  $\lambda$  проходят атмосферу, рассеиваясь меньше. Это объясняет синий и голубой цвет неба днем (преобладание голубых лучей в рассеянном свете) и красный цвет закатов и восходов (преобладание красных лучей в волнах, прошедших через атмосферу без рассеяния).



## 21.6. Суперпозиция электромагнитных волн. Условие когерентности и возникновение интерференции

**Интерференция волн** - это явление устойчивого увеличения или уменьшения результирующей амплитуды колебаний при суперпозиции (наложении) двух или более когерентных волн. При этом в разных точках пространства результирующая амплитуда различна, но в любой точке она остается постоянной в течение довольно большого промежутка времени (времени наблюдения).



Пусть в некоторую точку пространства (**точку наблюдения** Р) приходят от разных источников две электромагнитные волны с одинаковой частотой  $\omega$  и с **одинаковым** направлением колебаний электрических векторов  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ . Тогда, согласно принципу суперпозиции, результирующее колебание в Р будет иметь вид

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{E}_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

причем начальные фазы колебаний  $\varphi_1(x, y, z)$  и  $\varphi_2(x, y, z)$  будут зависеть от

взаимного расположения источников и точки наблюдения, т.е. от пространственных координат точки Р.

Для сложения колебаний применим метод векторной диаграммы. Как следует из рисунка, квадрат амплитуды результирующего колебания в точке Р согласно теореме косинусов равен

$$E_{\text{рез}}^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)) = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Волны называются **некогерентными**, если их разность фаз

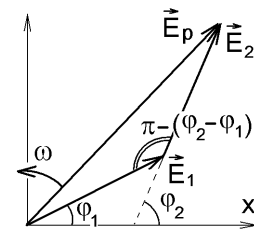
$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = f(t, x, y, z)$  **зависит от времени** и меняется очень быстро. Тогда среднее значение быстропеременной гармонической функции за время наблюдения  $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = 0$  и среднее значение квадрата амплитуды суммарной результирующей напряженности

$$\langle E_{\text{рез}}^2 \rangle = E_1^2 + E_2^2.$$

Интенсивность I (или энергия) волны (а для света – освещенность в точке наблюдения Р экрана) пропорциональна квадрату ее амплитуды, т.е.  $I \sim E^2$ . Поэтому

при сложении (наложении) **некогерентных** волн их интенсивности складываются, и результирующая (усредненная) интенсивность будет одинакова во всех точках пространства:  $\langle I_{\text{рез}} \rangle = I_1 + I_2$ .

**Когерентными** называются волны, для которых разность фаз постоянна во времени  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = f(x, y, z)$  (но зависит от координат пространства). Очевидно, что когерентные волны обязаны иметь одну частоту  $\omega$ .



В тех точках пространства (экрана), где разность фаз когерентных волн равна нечетному числу  $\pi$ , т.е.

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2m+1)\pi$ , где  $m$  – целое число, результирующая амплитуда будет минимальной и равной

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2} = |E_1 - E_2|, \text{ а наименьшая интенсивность света } I_{\text{рез min}} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2.$$

В тех точках, где разность фаз когерентных волн равна четному числу  $\pi$ , т.е.  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2m\pi$ , где  $m$  – целое число,

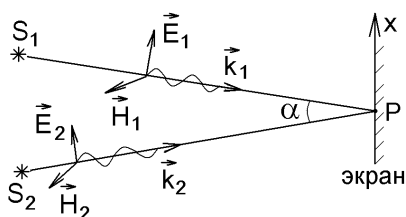
результирующая амплитуда будет максимальной и равной  $E_{\text{рез}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2} = E_1 + E_2$ , а наибольшая интенсив-

ность света  $I_{\text{рез max}} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ .

Таким образом, при сложении когерентных волн наблюдается интерференционная картина – устойчивые чередующиеся полосы или пятна с максимальной и минимальной освещенностью экрана.

Если амплитуды складывающихся и интерферирующих волн одинаковы:  $E_1 = E_2 = E_0$ , то в точках интерференционного минимума освещенность падает до нуля, а в точках максимума возрастает до  $I_{\text{рез max}} = 4I_0 \sim 4E_0^2$ .

### 21.7. Оптическая разность хода. Условия максимума и минимума при интерференции



Условия возникновения интерференционных максимумов и минимумов можно переписать по-другому, если учесть, что первая волна проходит от источника  $S_1$  до точки наблюдения  $P$  путь  $s_1$ , а вторая волна проходит от источника  $S_2$  до точки наблюдения  $P$  путь  $s_2$ . Пусть оба источника испускают волны в одной фазе. Тогда  $\Delta\varphi = (\omega t - ks_2) - (\omega t - ks_1) = n(s_2 - s_1) \cdot (2\pi/\lambda_{\text{вак}}) = k \cdot \Delta$ .

Величина  $\Delta = n(s_2 - s_1)$ , называется оптической разностью хода. Это – произведение геометрической разности путей, пройденных волнами, на показатель преломления среды  $n$ . Вспомним, что длина волны электромагнитного излучения в такой среде уменьшается в  $n$  раз по сравнению с вакуумом:

$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{вак}}} = n \frac{2\pi}{\lambda}$ . Тогда из условий  $\Delta\varphi = \begin{cases} 2m\pi \\ (2m+1)\pi \end{cases}$  формулируем условия максимума и минимума при интерференции:

Минимум освещенности интерференционной картины наблюдается, если оптическая разность хода  $\Delta$  складывающихся когерентных волн равна нечетному числу длин полуволен, а максимум – если  $\Delta$  равно четному числу длин полуволен:

$$\left. \begin{array}{l} \text{условие максимума: } \Delta = 2m \cdot \lambda/2 \quad \text{или} \quad \Delta\varphi = 2m\pi \\ \text{условие минимума: } \Delta = (2m+1) \cdot \lambda/2 \quad \text{или} \quad \Delta\varphi = (2m+1)\pi \end{array} \right\} \text{ где } m \text{ – целое число.}$$

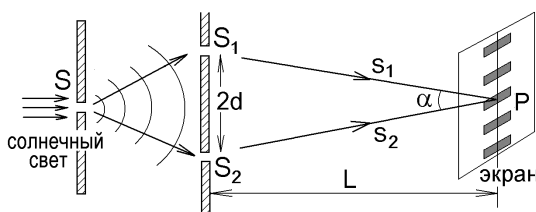
### 21.8. Интерференционная схема Юнга

Получить интерференционную картину чередующихся максимумов и минимумов освещенности не так просто, потому что электромагнитные волны от разных источников некогерентны. Испускают эти волны разные атомы источника света  $S$  не в виде бесконечной плоской монохроматической волны  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ , а в виде отдельных коротких отрезков-цугов волн, показанных на рисунке. Цуги, пришедшие от разных атомов испущены в разные моменты времени с разной начальной фазой и для них разность фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  будет меняться со временем хаотически.



Чтобы получить когерентные волны, надо сначала разделить волны, испущенные одними и теми же атомами одного источника, а затем складывать такие волны на экране.

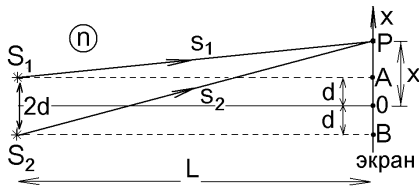
Наиболее просто это сделать в интерференционном опыте Юнга. Интерференционной схемой Юнга называется оптическая система, в которой расстояние  $2d$  между когерентными источниками много меньше расстояния  $L$  от источников до экрана. В этом случае интерферирующие волны сходятся к экрану под малым углом  $\alpha$ , т.е. векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  в них практически параллельны.



Впервые подобную схему осуществил и наблюдал интерференционную картину Томас Юнг в 1802 г. На узкое отверстие или прорезь  $S$  в стене падал яркий солнечный свет, образуя за отверстием расходящуюся световую волну. Эта волна, в свою очередь, падала на два узких отверстия  $S_1$  и  $S_2$  в параллельной перегородке, стоящей за стеной. Эти отверстия  $S_1$  и  $S_2$ , пропускающие свет от одного источника  $S$ , будут двумя

когерентными источниками. На противоположной стене-экране здания, в котором нет других источников света, возникает интерференционная картина.

Для увеличения освещенности вместо отверстий используют узкие прорези-щели, перпендикулярные к плоскости. В этом случае интерференционные максимумы и минимумы на экране имеют вид полос, параллельных щелям  $S_1$  и  $S_2$ .



Определим ширину полос и распределение освещенности интерференционной картины на экране, полученных при сложении двух когерентных волн в интерференционной схеме Юнга. Разность квадратов гипотенуз прямоугольных тре-

$$\begin{aligned} s_2^2 &= L^2 + (x+d)^2 \\ s_1^2 &= L^2 + (x-d)^2 \\ (s_2 - s_1)(s_2 + s_1) &= 4xd. \end{aligned}$$

В случае  $d, x \ll L$  можно считать, что сумма путей, пройденных лучами,  $(s_2 + s_1) = 2L$ . Тогда оптическая разность хода лучей, пройденная в среде с показателем преломления  $n$  от когерентных источников  $S_1$  и  $S_2$  до точки наблюдения  $P$  с координатой  $x$  на экране

$$\Delta = n(s_2 - s_1) = 2xnd/L.$$

Максимумы освещенности на экране видны в точках с координатами  $x_m$ , для которых  $\Delta = 2m \cdot \lambda/2 = 2nx_md/L$ , т.е.

$$x_m = \frac{L\lambda}{2nd} m, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Это – **координаты интерференционных максимумов** освещенности.

Координаты минимумов освещенности находятся посередине между ними, в тех точках экрана, в которых оптическая разность хода лучей  $\Delta = (2m+1)\lambda/2$ . Расстояние между соседними полосами или ширина интерференционной

полосы в схеме Юнга

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{L\lambda}{2nd}.$$

Квадрат результирующей амплитуды светового вектора, пропорциональный освещенности экрана в точке с координатой  $x$ , получили ранее при сложении волн на векторной диаграмме. В случае одинаковой интенсивности когерентных источников света,  $E_1 = E_2 = E_0$ , находим  $E_{\text{рез}}^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(k\Delta) = 2E_0^2\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n\frac{2xd}{L}\right)\right)$ ,

откуда

$$I_{\text{рез}}(x) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi nxd}{L\lambda}\right)\right] = 4I_0\cos^2\left(\frac{2\pi nxd}{L\lambda}\right).$$

Здесь  $I_0$  – освещенность, создаваемая на экране одним точечным источником  $S_1$  (или  $S_2$ ).

Освещенность экрана периодически меняется от нуля до максимальной величины  $4I_0$ , образуя полосы интерференционной картины ширины  $\Delta x$ , как показано на рисунке.

$$\text{Но если усреднить полученный результат, } \langle I_{\text{рез}} \rangle = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} I_{\text{рез}} dx = \frac{2I_0}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left(1 + \cos\frac{4\pi nxd}{L\lambda}\right) dx = 2I_0,$$

то усредненная интенсивность света окажется такой же, как и при освещении экрана двумя некогерентными источниками. При интерференции происходит перераспределение освещенности, а полный световой поток, падающий на экран, остается неизменным.

Заметим, что если на пути одного из световых лучей в схеме Юнга поместить прозрачную пластинку толщины  $h$  из материала с другим показателем преломления  $n'$ , то оптическая длина пути, проходимая светом в пластинке, изменится на величину  $h(n' - n)$ , что приведет к изменению оптической разности хода интерферирующих волн на  $\delta\Delta = h(n' - n) = \Delta m \cdot \lambda$ . Интерференционная картина на экране сдвинется на  $\Delta m = h(n' - n)/\lambda$  полос (ширина полос не изменится). Т.е. на месте полосы с прежним номером  $m$  окажется полоса с номером  $m + \Delta m$ .

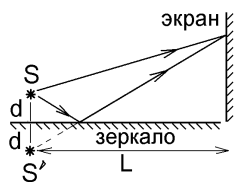
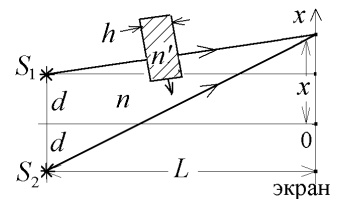
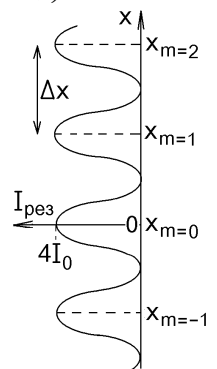


Схема Юнга может быть также получена в установке, названной зеркалом Ллойда – вторым когерентным источником света будет изображение  $S'$  в источнике света  $S$  в близко расположенном зеркале. Необходимо, чтобы расстояние  $d$  от источника до зеркала было много меньше, чем расстояние  $L$  до экрана, на котором наблюдается интерференция. Такая интерференционная схема часто осуществляется на практике, потому что вместо зеркала изображение  $S'$  может создаваться любой отражающей свет поверхностью: водой, стеклом и т.п. Но надо учесть, что

**при отражении** электромагнитных волн от оптически более плотных сред (это среды с бóльшим показателем преломления  $n$ ) фаза волны скачком меняется на  $\pi$ , а оптическая разность хода – на  $k \cdot \pi = \lambda/2$ . Говорят, что при отражении от оптически более плотной среды теряется полволны, к оптической разности хода  $\Delta$  надо добавить или вычитать  $\lambda/2$ .



При отражении от оптически менее плотной среды (с меньшим показателем преломления  $n$ ) или при преломлении света (прохождения волны из одной среды в другую) разность хода  $\Delta$  не меняется.

При отражении от зеркала происходит потеря  $\lambda/2$ . Это слагаемое надо добавить к разности хода, и в схеме Ллойда координаты максимумов и минимумов интерференционной картины меняются местами (ширина полосы не изменится).

## 21.9. Интерференция в тонких пленках

Пусть пленка с показателем преломления  $n$ , находящаяся в воздухе, имеет всюду одинаковую толщину  $d$ . Пучок света 1, падая на пленку под углом  $\alpha$ , частично отражается в точке О от оптически более плотной среды со сдвигом фазы на  $\pi$  (т.е. с изменением разности хода на  $\lambda/2$ ), образуя пучок 1'. Но, частично преломляясь, он отражается в точке D от нижней поверхности пленки (в данном случае - без потери полуволны, поскольку отражается от менее плотной среды - воздуха) и выходит из нее в точке С в виде пучка 1'' параллельно пучку 1'.

Пучки света 1' и 1'' когерентны, так как образуются из одного пучка 1, и поэтому могут интерферировать на экране, если их собрать с помощью линзы (роль линзы может выполнять и глаз наблюдателя). Оптическая разность хода этих световых пучков

$$\Delta = (OD + DC) \cdot n - OB \cdot n_{\text{возд}} \pm \lambda/2.$$

Из прямоугольных треугольников, показанных на рисунке, следует, что

$OB = OC \cdot \sin \alpha$ ;  $OC = 2 \cdot OA = 2d \cdot \tan \beta$ ;  $OD = DC = d / \cos \beta$ . Поэтому

$\Delta = 2nd / \cos \beta - 2d \sin \alpha \tan \beta \pm \lambda/2$ . Но, согласно закону преломления,

$$\sin \alpha = \frac{n}{n_{\text{возд}}} \sin \beta = n \sin \beta. \text{ Тогда } \Delta = 2nd \left( 1 - \sin^2 \beta \right) / \cos \beta \pm \lambda/2 = 2nd \cos \beta \pm \lambda/2. \text{ Заме-}$$

няя  $\cos \beta$  выражением  $\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - (\sin^2 \alpha) / n^2}$ , окончательно находим оптиче-

скую разность хода волн, интерферирующих в тонкой пленке:

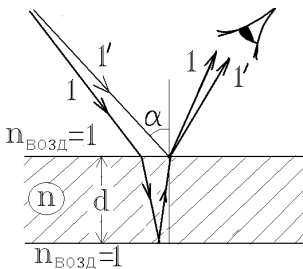
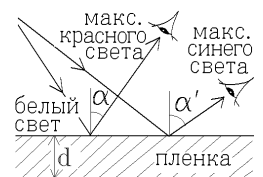
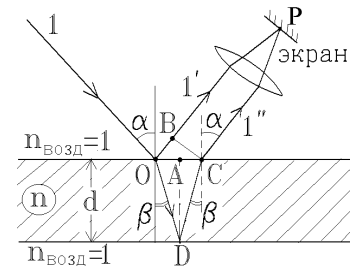
$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \lambda/2.$$

Максимумы освещенности для данной длины волны  $\lambda$  будут наблюдаться при отражении света под определенными уг-

лами  $\alpha_m$ , получаемыми из условия

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_m} \pm \lambda/2 = 2m\lambda/2.$$

Получаемая таким образом интерференционная картина называется интерференционной картиной полос равного наклона. Если пленка всюду имеет одинаковую толщину  $d$  и освещается белым светом (это свет со всеми возможными длинами волн  $\lambda$ ), то, рассматривая её под разными углами  $\alpha$ , наблюдатель видит, что она окрашивается в цвет, длина волны которого соответствует условию интерференционного максимума.



Чаще интерференция света на тонкой пленке осуществляется другим путем. Испущенные источником света волны имеют протяженные волновые поверхности и подходят к пленке под разными углами  $\alpha$ . В таком случае складываются и интерферируют луч света 1, преломившийся и отразившийся от нижней поверхности пленки, и луч света 1', падавший на пленку под немного другим углом  $\alpha$  и отразившийся от её верхней поверхности с потерей  $\lambda/2$ . Эти лучи когерентны, так как происходит деление одной волновой поверхности световой волны, все точки которой имеют одинаковую фазу. Возникает интерференционная картина полос равной толщины, видимая на поверхности пленки, где складываются лучи 1 и 1'. Оказывается, что оптическая разность хода этих лучей по-

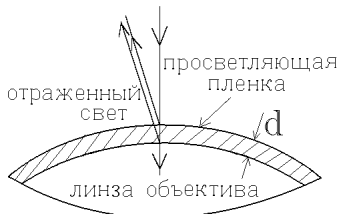
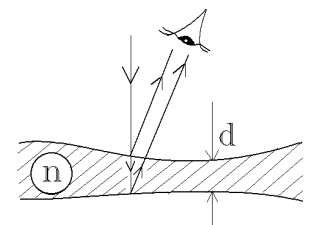
прежнему определяется формулой  $\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \lambda/2$ . Наиболее хорошо картина

интерференционных полос видна при малом угле падения  $\alpha \approx 0$ . Условием интерференционного максимума будет

$$\Delta = 2dn - \lambda/2 = 2m\lambda/2, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

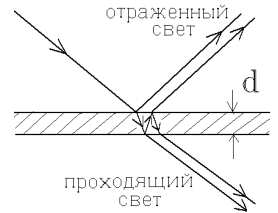
т.е. максимумы наблюдаются в местах, где пленка имеет определенную толщину  $d$ , удовлетворяющую записанному условию. Если на пленку падает белый свет, то на пленке видны полосы разных цветов спектра, длины волн  $\lambda$  которых соответствуют условию максимума.

Примерами таких полос равной толщины являются радужные цвета бензиновых пленок на поверхности воды или пленок окислов на поверхности металлов; разноцветные переливы бижутерии изготовленных из стекла, покрытого тонкой прозрачной пленкой.

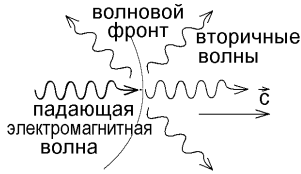


Используют это явление и для просветления оптических линз, которые покрывают тонкой прозрачной пленкой, толщина которой  $d$  подбирается так, чтобы выполнялось условие ослабления отраженного света:  $2dn \pm \lambda/2 = (2m+1)\lambda/2$ . Такие линзы будут меньше отражать свет (не дают блики) для центра видимого спектра (желто-зеленого диапазона), поэтому большая часть такого света будет проходить в оптическую систему (фотоаппарат). Но для  $\lambda$  на краях спектра такое условие не выполнено и объективы дают фиолетово-красный отблеск.

*Замечание:* интерференцию в тонких пленках в принципе можно наблюдать не только в отраженном, но и в проходящем свете, однако, видимость интерференционной картины при этом несравненно хуже. Есть и еще одно отличие – так как не происходит отражения от оптически более плотной среды и нет потери  $\lambda/2$ , то полученные выше условия для максимумов и минимумов интерференции меняются местами.

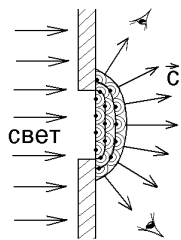
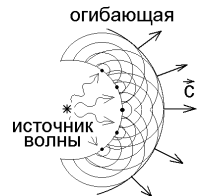


## 21.10. Принцип Гюйгенса-Френеля



Каждый участок волнового фронта или волновой поверхности электромагнитной волны создан переменным электромагнитным полем, которое, согласно уравнениям Максвелла, снова порождает электромагнитную волну. В этом заключается принцип, предложенный Гюйгенсом:

Каждая точка волнового фронта является источником сферических вторичных электромагнитных волн, имеющих ту же частоту и распространяющихся во всех направлениях. Вторичные волны, испускаемые всеми участками волнового фронта распространяющейся волны, складываются и их огибающая спустя любое малое время  $\Delta t$  представляет собой новое положение волнового фронта, сдвинутое на расстояние  $\Delta r = c\Delta t$ . При этом в направлении, обратном направлению распространения падающей волны, вторичные волны колеблются в противофазе с падающей волной и компенсируют её поле, свет распространяется в одном направлении.



Принцип Гюйгенса позволяет качественно объяснить явление огибания светом препятствий. Направим на отверстие параллельный пучок света с плоскими волновыми поверхностями. Изображая положение огибающей вторичных волн за отверстием, видим, что часть световых лучей расходится в стороны. Это позволяет видеть освещенную щель в приоткрытой двери из любой точки темной комнаты, а не только из точек, в которых непосредственно виден источник света в соседней комнате.

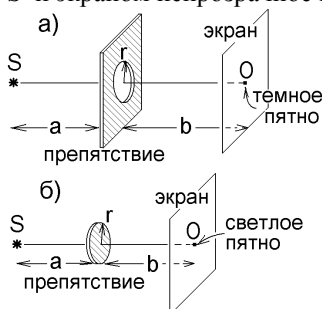
Позже Френель дополнил принцип Гюйгенса, предположив, что все складывающиеся вторичные волны должны интерферировать и создавать картину устойчивых максимумов и минимумов освещенности на установленном экране. Это явление назвали дифракцией электромагнитных волн.

Как видно, явления интерференции и дифракции имеют одинаковую физическую природу. Только при интерференции складывается **конечное** число когерентных волн, приходящих от когерентных источников света, а при дифракции – **бесконечное** число вторичных волн, приходящих от всех точек волнового фронта (а точнее – от всех точек волновой поверхности, положение которой совпадает с положением препятствия, находящегося на пути световой волны).

В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля при сложении вторичных электромагнитных волн, приходящих от каждой точки такой волновой поверхности, наблюдается дифракционная картина чередующихся максимумов и минимумов освещенности, похожая на интерференционную картину.

## 21.11. Дифракция света на узкой щели и круглом препятствии. Условие дифракционного минимума

В 1818 г. Френель представил трактат, в котором утверждалось, что установив между точечным источником света S и экраном непрозрачное препятствие с небольшим круглым отверстием (рисунок а), мы получим в центре экрана O

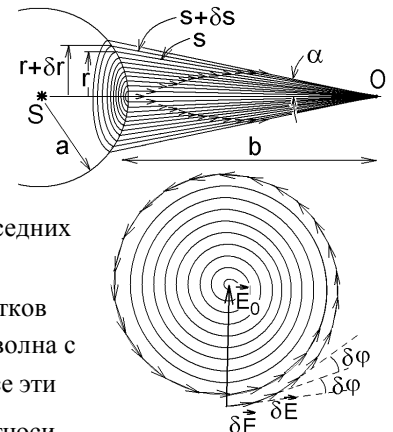


при определенном соотношении между радиусом отверстия  $r$  и расстоянием до экрана  $b$  не светлое, как следует из геометрической оптики, а темное пятно! И наоборот, установив на пути света не отверстие, а круглое непрозрачное препятствие радиуса  $r$  (рисунок б) в центре экрана O будем наблюдать не темное, а светлое пятно. Опыты Френеля доказали не корпускулярную (свет – это движение каких-то частиц), а волновую природу света.

Объясним полученный результат методом, предложенным Френелем. Волновая поверхность света, испускаемого точечным источником S и совпадающая с местоположением препятствия, является сферой радиуса  $a$ , где  $a$  – расстояние от источника до препятствия. Разобьём эту поверхность на очень узкие участки-кольца радиуса  $r$  и ширины  $\delta r$  такие, что их площадь

$\delta S = 2\pi r \cdot \delta r$  одинакова. От каждого такого участка в центральную точку экрана O приходит волна с вектором напряженности электрического поля  $\delta \vec{E}$ , сдвинутым по фазе на величину  $k \cdot s$  относительно вектора напряженности  $\vec{E}_0$  на поверхности сферы. Так как расстояние  $s$  от каждого последующего участка до точки O чуть больше, чем от предыдущего на величину  $\delta s$ , то сдвиг фаз между волнами, приходящими от соседних участков  $\delta \phi = k \cdot \delta s = 2\pi \delta s / \lambda$ .

Величины векторов  $\delta \vec{E} \sim 1/s$  **сферических** волн, приходящих от соседних участков мало отличаются друг от друга, но всё же от каждого последующего участка приходит волна с чуть меньшим световым вектором  $\delta \vec{E} \sim 1/(s + \delta s)$ , чем от предыдущего. Если сложить все эти векторы методом векторной диаграммы, то каждый последующий вектор  $\delta \vec{E}$  повернут относи-



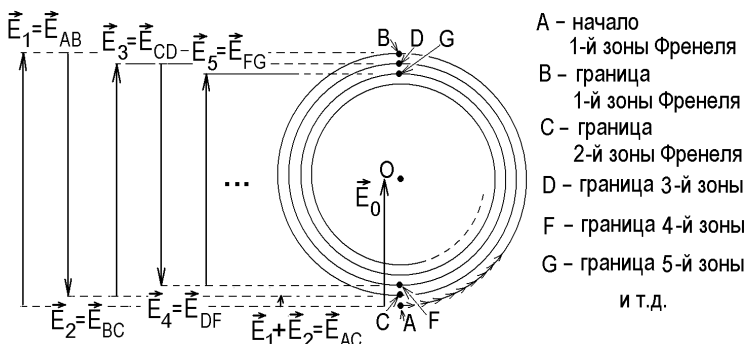
тельно предыдущего на малый угол  $\delta\varphi$  и имеет чуть меньший размер. В результате получается спираль Френеля, показанная на рисунке.

Чтобы найти суммарный вклад всех участков волновой поверхности на рисунке, надо соединить начало первого из векторов  $\delta\vec{E}$  на спирали Френеля с концом последнего вектора  $\delta\vec{E}$ . Вообще говоря, если открыта **вся** волновая поверхность большого размера, то вклады  $\delta\vec{E}$  от её удаленных участков должны стремиться к нулю, и спираль Френеля сходится в точку. Поэтому вектор  $\vec{E}_0$  является суммарным световым вектором, который точечный источник света  $S$  на создает в центре экрана  $O$  в том случае, когда между точкой  $S$  и экраном нет никакого препятствия.

Разобьём теперь волновую поверхность точечного источника света не на бесконечно малые участки площади  $\delta S$ , а на конечные участки, называемые зонами Френеля. Зона Френеля – это участок волновой поверхности, расстояния от противоположных границ которого до точки наблюдения дифракционной картины отличаются на  $\lambda/2$ , где  $\lambda$  – длина волны света.

В случае точечного источника света зонами Френеля будут кольца на сферической волновой поверхности радиуса  $a$ , как показано на рисунке. Волны, приходящие от соседних зон Френеля в точку наблюдения  $O$  сдвинуты по фазе на  $\Delta\varphi = k \cdot \lambda/2 = 2\pi/\lambda \cdot \lambda/2 = \pi$ .

Поэтому создаваемые ими векторы  $\vec{E}$  направлены в противоположные стороны и компенсируют друг друга. Это видно на спирали Френеля (рисунок ниже), где



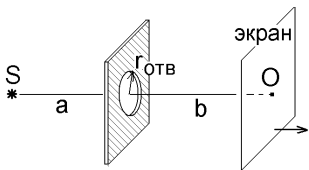
указаны точки, соответствующие границам зон Френеля. Складывая все векторы  $\delta\vec{E}$  в пределах 1-й зоны Френеля, получаем вектор  $\vec{E}_1$  – суммарный вклад всех участков 1-й зоны Френеля. Вектор  $\vec{E}_2$  будет суммарным вкладом всех участков 2-й зоны Френеля. Как видно из рисунка, он направлен противоположно вектору  $\vec{E}_1$ . **Вклады соседних зон Френеля всегда компенсируют друг друга.**  $\vec{E}_3$  – суммарный вклад участков 3-й зоны Френеля и т.п.

Получаем простой метод расчета дифракции

– метод зон Френеля.

Для любой точки экрана, в которой наблюдается дифракционная картина надо разбить волновую поверхность световой волны в месте нахождения препятствия на зоны Френеля. Так как границы зон зависят от расстояний до выбранной точки наблюдения, то разбиение волновой поверхности на зоны Френеля будет различным для разных точек экрана. Далее надо соединить на диаграмме Френеля точки, соответствующие началу и концу зон Френеля, которые открывает препятствие. Получим результирующий вектор  $\vec{E}$  волны, прошедшей сквозь препятствие, в выбранной точке экрана.

Если препятствие открывает четное число зон Френеля, то их вклады компенсируются, и в точке наблюдения образуется минимум дифракционной картины (темное пятно). Если открыто нечетное число зон Френеля, то результирующий вектор  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_{2n+1}$  не скомпенсирован, и в точке наблюдения видно светлое пятно.



Наиболее просто с помощью метода Френеля рассчитать освещенность дифракционной картины, созданной препятствием в виде круглого отверстия радиуса  $r_{\text{отв}}$  в непрозрачной заслонке, установленной между точечным монохроматическим источником света с длиной волны  $\lambda$  и экраном. Пусть  $a$  – расстояние от источника до препятствия,  $b$  – расстояние от препятствия до экрана. Вычислим освещенность света в центре экрана на оси отверстия, соединяющего источник света  $S$  и точку наблюдения  $O$ .

В этом случае радиус  $m$ -й зоны Френеля  $r_m$  на сферической волновой поверхности радиуса  $a$  легко найти с помощью рисунка справа, где из двух прямоугольных треугольников  $\triangle SBC$  и  $\triangle OBC$  следуют соотношения

$$CB^2 = SC^2 - SB^2 \quad \text{или} \quad r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2,$$

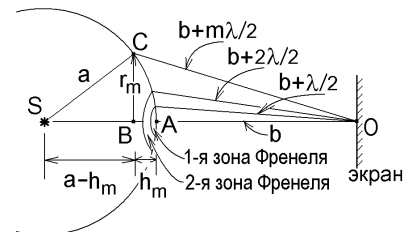
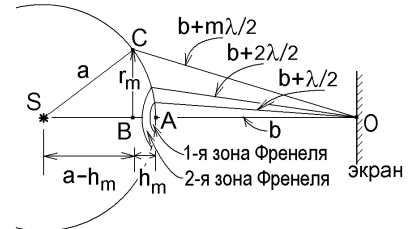
$$SC^2 - SB^2 = CB^2 = CO^2 - BO^2 \quad \text{или} \quad a^2 - (a - h_m)^2 = (b + m\lambda/2)^2 - (b + h_m)^2.$$

Раскрывая скобки во втором соотношении и пренебрегая величиной  $(m\lambda/2)^2$  второго

порядка малости ( $a, b \gg \lambda$ ), находим малую величину  $BA = h_m = bm\lambda/2(a+b)$ . Подставляя эту величину в первое соотношение, и опять пренебрегая малым слагаемым  $h_m^2 \sim \lambda^2$ , находим радиус зон Френеля в случае дифракции света от

точечного источника:

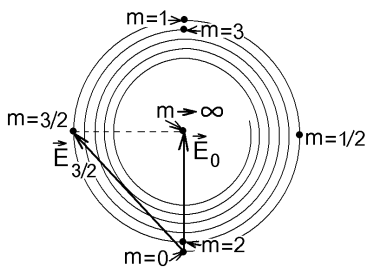
$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}, \quad \text{где } m = 1, 2, 3, \dots$$





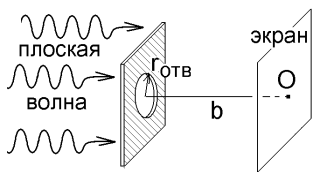
Заметим, что радиус зон Френеля зависит от расстояния  $b$  между препятствием (отверстием) и экраном. Отодвигая экран, т.е. увеличивая расстояние  $b$ , мы будем увеличивать радиус зон  $r_m$ . Поэтому отверстие будет открывать разное число  $m_{\text{откр}}$  открытых зон Френеля при разном положении экрана:  $r_m = r_{\text{отв}}$ , откуда  $m_{\text{откр}} = (a+b)r_{\text{отв}}^2 / ab\lambda$ . Результирующий световой вектор в точке наблюдения О получаем, соединяя начало и конец открытых зон Френеля на диаграмме спирали Френеля. Если препятствие убрать, то освещенность в точке О равна  $I_0 \sim E_0^2$ . Если отверстие открывает нечетное число зон Френеля ( $m_{\text{откр}} = 1, 3, 5, \dots$ ), то освещенность в точке О возрастает в 4 раза:  $I_O \sim E_1^2 = (2E_0)^2 = 4I_0$  (витки спирали Френеля расположены очень плотно и  $E_1 \approx E_3 \approx E_5 \approx \dots \approx 2E_0$ ).

Если отверстие открывает четное число зон Френеля ( $m_{\text{откр}} = 2, 4, 6, \dots$ ), то их вклад компенсируется и освещенность в центре экрана О практически равна нулю (темное пятно).

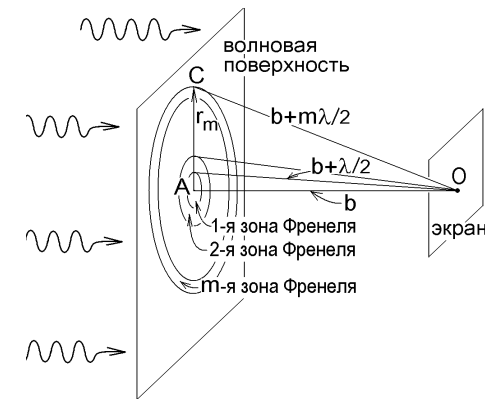
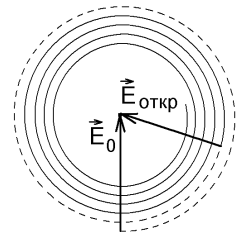
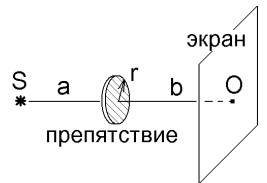


Если отверстие открывает нецелое число зон Френеля, например  $m_{\text{откр}} = 3/2$ , то, как видно из диаграммы слева, величина вектора  $\vec{E}$  в центре экрана равна  $E_{3/2} = \sqrt{2}E_0$ , и освещенность этой точки в два раза превышает освещенность экрана при отсутствии препятствия:  $I_O \sim E_{3/2}^2 = 2E_0^2 = 2I_0$ .

В случае, когда препятствием является маленький непрозрачный диск с радиусом  $r$ , закрывающий часть первых зон Френеля, вклад этих зон, отмеченных штриховой линией на следующей диаграмме спирали Френеля, учитывать не надо, а вклад всех остальных открытых зон Френеля в сумме создает световой вектор величиной  $E_{\text{откр}} \approx E_0$ . Поэтому в центре экрана О наблюдается светлое пятно, названное пятном Пуассона. Это пятно исчезает, когда радиус диска велик и наблюдается геометрическое изображение тени от диска.



Если на препятствие падает плоская световая волна с плоской волновой поверхностью (рисунку слева), то зонами Френеля будут кольца на этой поверхности с радиусами  $r_m$ , которые просто вычислить для прямоугольного  $\triangle OAC$ :  $CA^2 = CO^2 - AO^2$  или

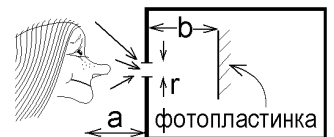


$r_m^2 = (b + m\lambda/2)^2 - b^2$ . Пренебрегая слагаемым  $(m\lambda/2)^2$ , находим радиус зон Френеля в случае падения на препятствие плоской световой волны:

$$r_m = \sqrt{bm\lambda}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Эта формула получается как частный случай дифракции света от точечного источника при  $a \rightarrow \infty$ . Меняя расстояние  $b$  между экраном и препятствием, мы будем изменять число зон Френеля, открытых препятствием, т.е. принципиально дифракционная картина ничем не будет отличаться от картины, получаемой для точечного источника света.

Пример: благодаря явлению дифракции маленькое отверстие радиуса  $r$  в непрозрачном ящике обладает свойствами линзы. Такая система, называемая камерой-обскуры, может быть использована в

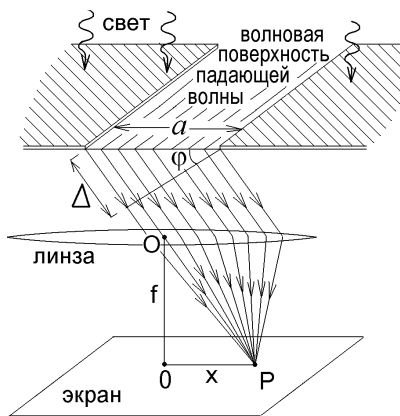


качестве простейшего фотоаппарата.

Действительно, пусть расстояние до фотографируемого предмета равно  $a$ . Для того, чтобы свет, прошедший сквозь отверстие, создавал максимальную освещенность, т.е. создавал изображение на помещенной внутрь камеры фотопластинке, её надо установить на таком расстоянии  $b$ , чтобы отверстие открывало одну зону Френеля. При этом, согласно  $r = r_1 = \sqrt{ab\lambda/(a+b)}$ . Если предмет удалить на очень большое расстояние, то свет от него подходит к отверстию в виде плоской волны. Максимальная освещенность (изображение) на фотопластинке получится, если, согласно, разместить её на расстоянии  $b'$ , для которого  $r = r_1 = \sqrt{b'\lambda}$ . Это расстояние аналогично фокусному расстоянию тонкой линзы, которая собирает параллельные лучи света в точке фокуса. Приравнявая записанные выражения, получим формулу тонкой линзы  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b'} = \frac{1}{f}$ .

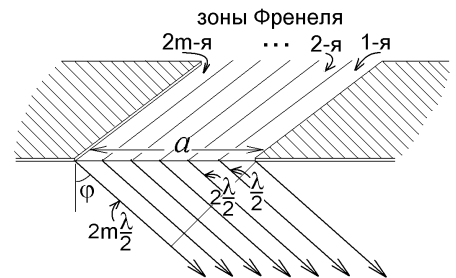
Маленькое отверстие открывающее одну зону Френеля, обладает свойствами линзы и создает изображение предмета на фотопластинке, хотя показали мы это только для точечного предмета. В действительности камера-обскуры фотографирует предметы любого размера, даже если её установить на малом расстоянии  $a$ . Достоинством камеры-обскуры служит то, что радиус отверстия рассчитывается для определенной длины волны  $\lambda$ . Настроив камеру-обскуру

на длину волны  $\lambda \sim 580 - 600$  нм (цвет человеческого лица), мы получим на фотографии все контрастные детали, а изображения всех морщинок, теней, синяков и т.п. будут автоматически ослаблены, отретушированы. Обычно такие “омоложенные” фотографии кинозвезд делает специальный художник-ретушер.

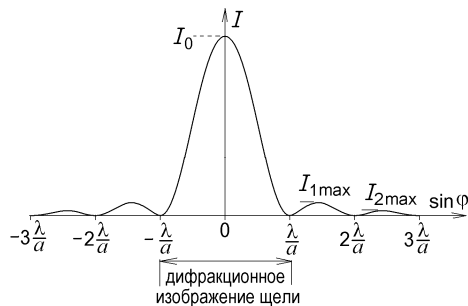


Метод зон Френеля удобно применить и в том случае, когда плоская световая волна проходит через узкую щель ширины  $a$ , а дифракционная картина наблюдается на очень большом удалении  $b$  или же в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной за препятствием. Каждая точка щели испускает вторичные волны по всем направлениям. Рассмотрим те из них, которые уходят под углом  $\varphi$  к направлению распространения падающего света. Линза с фокусным расстоянием  $f$  соберет эти параллельные лучи в точке Р экрана, расположенного в её фокальной плоскости. Луч, проходящий через центр линзы О не преломляется, поэтому координата точки Р относительно центра экрана  $x = f \cdot \tan \varphi$ .

Условие дифракционных минимумов можно получить, если разбить волновую поверхность падающей волны (поверхность щели) на зоны Френеля – полосы, расстояние от границ которых до новой волновой поверхности волны, уходящей под углом  $\varphi$ , отличается на  $\lambda/2$ . Число зон Френеля, на которое разбивается поверхность щели, зависит от угла наблюдения  $\varphi$ . Если щель разбита на четное число  $2m$  зон Френеля,



вклады которых компенсируют друг друга, то в точке наблюдения виден дифракционный минимум. Как видно из прямоугольного треугольника на рисунке, условием дифракционного минимума при дифракции света на узкой щели ширины  $a$  будет  $a \sin \varphi = 2m \cdot \lambda/2$ , где  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ .



Зависимость освещенности  $I$  дифракционной картины от угла дифракции  $\varphi$  показана на рисунке слева. Она имеет вид центральной яркой полосы, параллельной щели (дифракционное изображение щели), окаймленной слабыми боковыми полосами. Ширина центральной полосы,

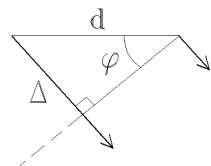
как видно из этого рисунка, в два раза шире ширины всех боковых полос в том случае, когда  $\lambda/a \ll 1$ . Центр этого изображения соответствует  $m = 0$  или  $\varphi = 0$ . Боковые максимумы намного меньше центрального:

$$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0,0472 : 0,0165 : 0,0083,$$

т.е. большая часть прошедшего через щель света попадает в пределы центрального дифракционного максимума – дифракционного изображения щели.

## 21.12. Многолучевая интерференция. Дифракционная решетка и принцип спектрометрии. Критерий Рэлея. Разрешающая способность дифракционной решетки

Практический интерес представляет интерференция не двух, а большего числа когерентных световых лучей. Например – интерференция в дифракционной решетке. Это система из  $N$  одинаковых щелей, расположенных на равном расстоянии  $d$  друг от друга, которое называется постоянной решетки. При нормальном падении на решетку плоской световой волны с длиной волны  $\lambda$  каждая щель будет когерентным источником, излучающим свет **во всех направлениях**. Линза (роль которой может выполнять глаз) соберет **параллельные** пучки света в одну точку Р экрана (параллельные пучки, распространяющиеся в других направлениях, будут собраны в других точках экрана).

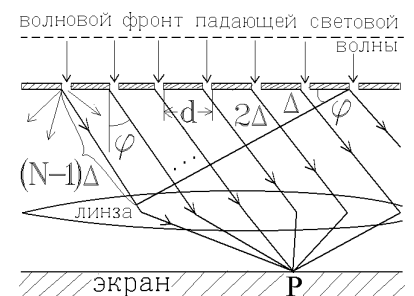


Как видно из рисунка, оптическая разность хода волн, приходящих от соседних щелей, равна  $\Delta = d \sin \varphi \cdot n_{\text{воздуха}} = d \sin \varphi$ , т.е. колебания вектора  $\vec{E}$  от каждой последующей щели сдвинуты по

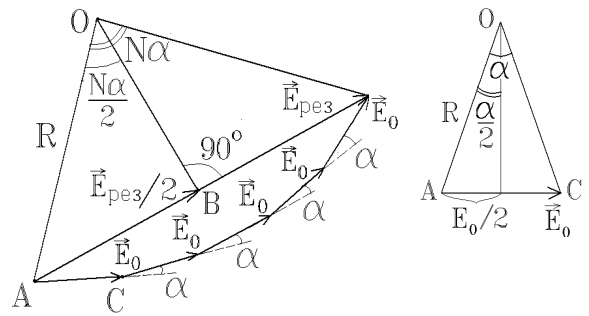
фазе на  $\alpha = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi$  по сравнению с колебаниями  $\vec{E}$  от предыдущей щели. Следовательно-

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \underbrace{\vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0)}_{\text{от 1-ой щели}} + \underbrace{\vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0 + \alpha)}_{\text{от 2-ой щели}} + \underbrace{\vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0 + 2\alpha)}_{\text{от 3-ой щели}} + \dots + \underbrace{\vec{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0 + (N-1)\alpha)}_{\text{от N-ой щели}}$$

(амплитуды колебаний  $\vec{E}_0$  в световой волне, приходящей от каждой щели, одинаковы).



Сложим эти колебания, пользуясь методом векторной диаграммы. Концы векторов  $\vec{E}_0$  лежат на некоторой окружности радиуса  $R$ , а результирующий вектор  $\vec{E}_{\text{рез}}$  образует хорду этой окружности с углом  $N\alpha$ . Из прямоугольного треугольника АОВ находим  $\frac{\vec{E}_{\text{рез}}}{2} = R \sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)$ , а из сегмента этой диаграммы следует  $\frac{\vec{E}_0}{2} = R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Исключая из этих двух равенств неизвестный радиус  $R$ , получим  $\frac{E_{\text{рез}}}{E_0} = \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$ , т.е. результирующая



$$\frac{I_{\text{рез}}}{I_0} = \frac{\sin^2(N\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)},$$

освещенность в точке наблюдения Р экрана определяется формулой

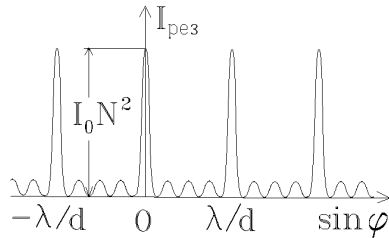
где  $I_0$  – освещенность, созданная одной щелью. При  $\alpha/2 = \pi m$ , где  $m$  – целое число, и числитель, и знаменатель этого выражения стремятся к нулю. Поэтому, используя правило Лопиталя, находим  $\left. \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \right|_{\alpha \rightarrow 2\pi m} \rightarrow N$ .

Это – условие главных интерференционных максимумов интенсивности света, прошедшего через дифракционную решетку. Они получаются из условия  $\alpha = 2\pi m = (2\pi/\lambda) \cdot d \sin \varphi$  или  $d \sin \varphi = m\lambda$  где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

При выполнении этого условия, т.е. в точках экрана, соответствующих условиям главных максимумов, освещенность  $I_{\text{рез}}$  возрастает по сравнению с освещенностью  $I_0$ , созданной одной щелью, в  $N^2$  раз:  $I_{\text{рез}} = N^2 I_0$ .

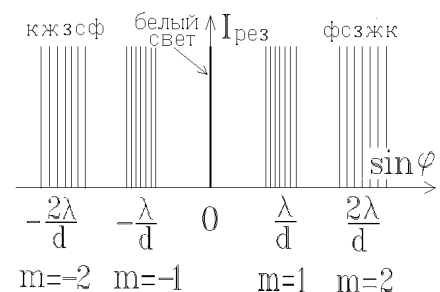
Но между соседними главными максимумами расположены  $N-1$  минимумов освещенности, соответствующих нулям числителя:  $N\alpha/2 = \pi m$ , где  $m$  – целое число, не равное  $0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$ , т.е.  $\alpha = 2\pi m/N = (2\pi/\lambda) \cdot d \sin \varphi$  или  $d \sin \varphi = m\lambda/N$  где  $m \neq 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$  – это условие интерференционных минимумов на дифракционной решетке.

Получаемая при этом интерференционная картина такова: **очень яркие и узкие** линии, соответствующие главным интерференционным максимумам для света с длиной волны  $\lambda$ , разделенные участками, где освещенность (интенсивность) света очень мала из-за наличия дополнительных минимумов.

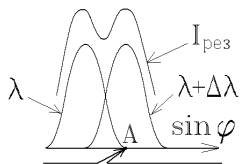


Если на решетку направить белый свет с разными длинами волн  $\lambda$ , то она разделит его на все цвета радуги, образуя спектры порядка m.

Дифракционную решетку используют в спектрографах и спектрометрах для разделения спектральных линий с разными  $\lambda$ .



По критерию Рэлея два пика интенсивности, соответствующих линиям  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$  еще можно увидеть раздельно, если минимум первого пика совпадает с максимумом второго, как показано на рисунке снизу, где точка А



соответствует главному интерференционному максимуму порядка  $m$  для линии  $\lambda + \Delta\lambda$  и первому интерференционному минимуму сбоку от максимума порядка  $m$  для линии  $\lambda$ , т.е.

$$d \sin \varphi = m(\lambda + \Delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda \quad \text{или} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}.$$

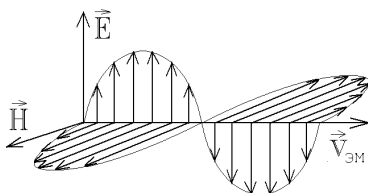
Таким образом, решетка может разделить на отдельные видимые линии свет с длинами волн, различающимися на величину  $\Delta\lambda \geq \lambda/mN$  (в спектре  $m$ -го порядка). Отношение  $\lambda/\Delta\lambda = mN$

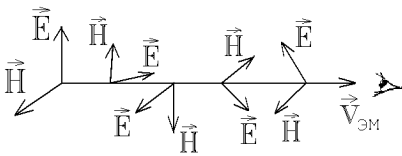
называется разрешающей способностью дифракционной решетки.

Из этой формулы следует, что разрешающая способность пропорциональна числу щелей  $N$ . Чем больше  $N$ , тем более узкие и яркие линии получаются в интерференционной картине.

### 21.13. Поляризация электромагнитных волн. Поляризаторы и закон Малюса

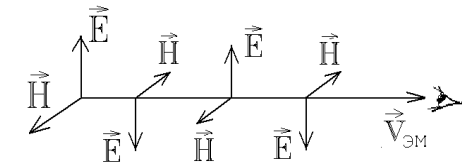
В электромагнитной (световой) волне колебания электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей происходят перпендикулярно направлению движения волны (они всегда образуют правую тройку векторов), отчего такие волны называют поперечными.





Естественным называется свет, в котором колебания вектора  $\vec{E}$  (или  $\vec{H}$ ) происходят беспорядочно, в любом направлении, перпендикулярном к скорости распространения волны.

Если же колебания светового вектора  $\vec{E}$  (или  $\vec{H}$ ) как-либо упорядочены, то свет называется поляризованным.



В плоскополяризованной электромагнитной волне колебания вектора  $\vec{E}$  (или  $\vec{H}$ ) происходят все время в одной плоскости (рисунок слева).

Можно также получить электромагнитную волну, в которой вектор  $\vec{E}$  (или  $\vec{H}$ ) будет вращаться с угловой скоростью  $\omega$  вокруг направления

распространения скорости волны - это волна с круговой поляризацией.

В приведенных выше примерах свет полностью поляризован. Если же световой луч складывается из естественного и поляризованного света, то он называется частично поляризованным.

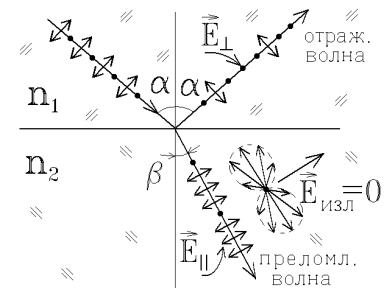
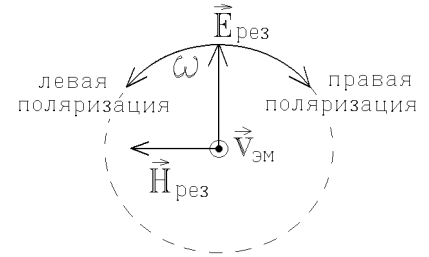
Проще всего частично или полностью поляризованный свет получается при отражении естественного света от плоской граница диэлектрика.

Плоскость падения светового луча всегда образована падающим лучом и нормалью к отражающей поверхности. Пусть естественный свет падает под углом  $\alpha$  на границу раздела двух диэлектрических сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Вектор  $\vec{E}$  в ней колеблется и в плоскости падения света (эти колебания  $\vec{E}_{\parallel}$  обозначены на рисунке стрелочками), и перпендикулярно к плоскости падения (эти колебания  $\vec{E}_{\perp}$  обозначены на рисунке точками).

Проходящая через среду с показателем преломления  $n_2$  преломленная волна заставляет электроны среды двигаться с ускорением и испускать вторичные электромагнитные волны, которые и образуют отраженную волну.

Но ускоренные заряды не излучают волн вдоль направления своего колебания, т.е. вдоль направления  $\vec{E}_{\text{прел}\parallel}$ . Поэтому в отраженном луче нет колебаний

$\vec{E}_{\text{отр}\parallel}$  в этом направлении, указанном на рисунке стрелкой. Для такого направления  $\alpha + \beta = \pi/2$  и из закона преломления



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\pi/2 - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad \text{получаем закон Брюстера:}$$

при падении естественного света на границу раздела двух непроводящих сред под углом Брюстера

$\alpha_B = \arctg(n_2/n_1)$  отраженный свет будет **полностью поляризован**: колебания  $\vec{E}$  в нем происходят только перпендикулярно плоскости падения света.

Так, солнечный свет становится плоскополяризованным для угла скольжения  $\gamma = 90^\circ - \alpha_B = 90^\circ - \arctg 1,33 \approx 37^\circ$  к поверхности воды с показателем преломления  $n = 1,33$ . Глаз при этом никаких различий не заметит: физиологическое действие поляризованного света аналогично действию естественного света.

Если падение света происходит под другим углом  $\alpha \neq \alpha_B$ , то отраженный свет будет частично поляризован. Преломленный луч всегда частично поляризован в плоскости падения света.

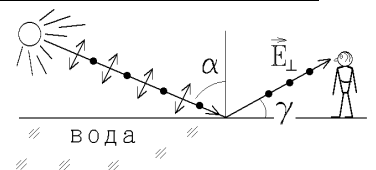
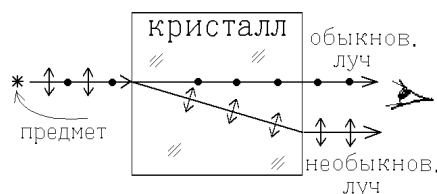
На практике для получения плоскополяризованных электромагнитных волн используют среды, обладающие свойством дихроизма: они пропускают электромагнитные волны с одной поляризацией и поглощают волны с другой поляризацией. Этим свойством обладают некоторые кристаллические материалы, проявляющие двойное лучепреломление: при падении на кристалл луча естественного неполяризованного света преломленный луч света в кристалле разделяется

на два плоскополяризованных луча со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации (плоскостями, в которых колеблются векторы  $\vec{E}$ ). Один луч называется обыкновенным, для него выполняется обычный закон преломления. Для второго, необыкновенного луча закон преломления нарушен (см. рисунок).

В кристалле турмалина (разновидность кварца), например, обыкновенный луч поглощается на расстоянии 1 мм и вышедший из пластинки турмалина свет (необыкновенный луч) будет плоскополяризован. Такую пластинку называют

поляризатором. Падающий естественный свет поляризаторы превращают в прошедший плоскополяризованный свет.

Плоскость, в которой колеблется вектор  $\vec{E}$  прошедшего плоскополяризованного света, совпадает с осью пропускания поляризатора. Промышленные поляризаторы – это гибкие целлулоидные пленки, в которые внедрены кристаллики герпатита, обладающие свойством дихроизма.



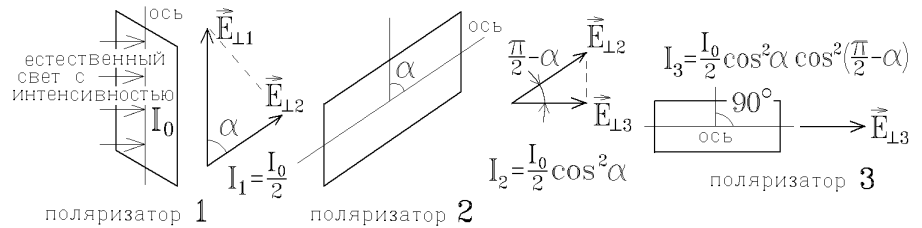
Пусть вектор  $\vec{E}$  падающей на поляризатор электромагнитной волны составляет угол  $\alpha$  с осью пропускания поляризатора. Разложим этот вектор на две составляющие:  $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E} \sin \alpha$ , которая будет поглощена поляризатором, и  $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} \cos \alpha$ , которая пройдет через поляризатор. Так как интенсивность света, падающего на поляризатор, равна  $I_{\text{пад}} = \vec{E}^2$ , а интенсивность света, прошедшего через поляризатор,  $I_{\text{прош}} = \vec{E}_{\perp}^2$  то получаем закон Малюса:

интенсивность прошедшего через поляризатор света равна интенсивности падающего на поляризатор плоскополяризованного света, умноженной на квадрат косинуса угла между плоскостью поляризации падающего света и осью пропускания поляризатора

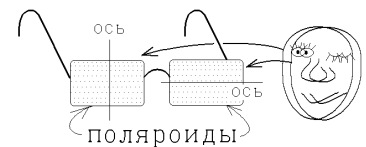
$$I_{\text{прош}} = I_{\text{пад}} \cos^2 \alpha$$

Если на поляризатор падает естественный свет, в котором векторы  $\vec{E}$  все время меняют ориентацию и угол  $\alpha$  с осью пропускания поляризатора меняется со временем хаотически, через поляризатор пройдет свет с интенсивностью  $I_{\text{прош}} = I_{\text{пад ест}} \langle \cos^2 \alpha \rangle = I_{\text{пад ест}} / 2$ , так как среднее значение  $\langle \cos^2 \alpha \rangle = 1/2$ .

**Пример:** естественный свет с интенсивностью  $I_0$  проходит через систему из трех последовательных поляризаторов, причем оси пропускания второго и третьего поляризаторов составляют углы  $\alpha$  и  $90^\circ$  с осью первого поляризатора (см. рисунок). Величины интенсивностей света, прошедшего через каждый из поляризаторов в соответствии с законом Малюса показаны на этом рисунке. Если второй поляризатор убрать, то система перестанет пропускать свет.



Еще один пример применения поляризаторов – демонстрация стереоскопических фильмов. Два сдвинутых друг относительно друга изображения записаны в свете, поляризованном во взаимно перпендикулярных направлениях. Очки с поляризаторами вместо стекол пропускают одно изображение в левый глаз, а второе – в правый. Мозг воспринимает смещение изображений, видимое разными глазами как объемную картину.



## 22. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

### 22.1. Характеристики теплового излучения. Энергетическая светимость, излучательная и поглощательная способность

Любое нагретое тело или участок среды испускает электромагнитные волны. Излучают эти волны движущиеся молекулы и атомы среды за счет своей внутренней (тепловой) энергии. Результатом будет передача энергии в виде электромагнитного излучения от более нагретых к менее нагретым участкам среды и установление **теплового равновесия**, выравнивание температур во всех точках среды. Подобное излучение называют тепловым. Его спектр содержит все возможные длины электромагнитных волн  $0 < \lambda < \infty$ .



**Пример:** лампа накаливания, в которой между спиралью накаливания 1 и стеклянной оболочкой 2 находится вакуум. Единственным способом передачи тепла от спирали 1 к оболочке 2 будет тепловое излучение. Это излучение будет поглощаться атомами оболочки 2, которая нагревается и, в свою очередь, испускает тепловое излучение. Нагретая спираль 1 не только излучает, но и поглощает тепловое излучение, приходящее извне от оболочки 2, т.е. тепловое излучение испускается при любой температуре нагретого тела, даже если она меньше температуры окружающей среды (у оболочки на рисунке температура  $T_2$

меньше, чем температура  $T_1$  раскаленной спирали). Если испущенное участком среды тепловое излучение больше, чем поглощенное, то энергия этого участка и его температура будут уменьшаться. После выключения лампочки на рис. 1.1 обмен тепловым излучением приводит к выравниванию температур спирали и окружающей замкнутой оболочки:  $T_1 = T_2$ . При установившемся равновесии температур излучаемая энергия равна поглощаемой, и нагретое тело окружено равновесным тепловым излучением в виде непрерывно излучаемых и поглощаемых электромагнитных волн. Из всех видов излучения только тепловое может быть равновесным.

Хотя тепловое излучение имеет все длины волн  $\lambda$ , но испускание и поглощение волн с разными  $\lambda$  происходит с разной интенсивностью.

Пусть на единичную поверхность нагретого тела падает извне тепловое излучение, в котором электромагнитные волны с длинами от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$  несут энергию  $dE_{\lambda \text{ пад}}$ . Часть этих волн с энергией  $dE_{\lambda \text{ погл}}$  поглощается телом, а часть с энергией  $dE_{\lambda \text{ отр}} = dE_{\lambda \text{ пад}} - dE_{\lambda \text{ погл}}$  – отражается. Отношение поглощенной энергии к падающей для теплового излучения с длинами волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$  называется поглощательной способностью нагретого тела

$$a_{\lambda}(\lambda, T) = dE_{\lambda \text{ погл}} / dE_{\lambda \text{ пад}} \leq 1.$$

Эта величина зависит от длины волны  $\lambda$  и от температуры  $T$  равновесного теплового излучения.

В свою очередь, нагретое тело излучает, и с единицы его поверхности по всем направлениям за единицу времени электромагнитные волны с длиной от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$  уносят энергию  $d\dot{E}_{\lambda\text{изл}}$ . Величина  $r_{\lambda}(\lambda, T) = d\dot{E}_{\lambda\text{изл}}/d\lambda$  называется излучательной способностью нагретого тела. Эта величина также является функцией  $\lambda$  и  $T$ .

Проинтегрировав излучательную способность по всем длинам волн, получим энергетическую светимость нагретого тела

$$R(T) = \int_0^{\infty} r_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda,$$

т.е. энергию, уносимую тепловым излучением с единицы поверхности тела за единицу времени.

Можно определить излучательную способность как функцию частоты  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , где  $c$  – скорость света:

$r_{\omega}(\omega, T) = d\dot{E}_{\omega\text{изл}}/d\omega$ , где  $d\dot{E}_{\omega\text{изл}}$  – энергия, уносимая с единицы поверхности за единицу времени волнами с частотой

от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , тогда энергетическая светимость

$$R(T) = \int_0^{\infty} r_{\omega}(\omega, T) d\omega.$$

## 22.2. Закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина для теплового излучения абсолютно черного тела. Коэффициент поглощения

Когда система тел и тепловое излучение приходят в тепловое равновесие, т.е. температура  $T$  всех излучающих и поглощающих тел одинакова, то отношение излучательной и поглощательной способности не зависит от формы и строения нагретого тела, а является универсальной функцией температуры и длины волны (или частоты), одинаковой для всех

тел: 
$$\frac{r_{\lambda}(\lambda, T)}{a_{\lambda}(\lambda, T)} \Big|_{\text{тело 1}} = \frac{r_{\lambda}(\lambda, T)}{a_{\lambda}(\lambda, T)} \Big|_{\text{тело 2}} = \frac{r_{\lambda}(\lambda, T)}{a_{\lambda}(\lambda, T)} \Big|_{\text{тело 3}} = \dots = f(\lambda, T).$$

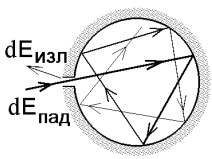
Это – закон излучения Кирхгофа, основной закон теплового излучения.

Действительно, если в системе из двух нагретых тел  $(r_{\lambda}/a_{\lambda})_1 > (r_{\lambda}/a_{\lambda})_2$ , то по отношению ко второму телу первое будет излучать больше энергии, чем поглощать. В этом случае в замкнутой системе тело 1 начнет постепенно охлаждаться, а тело 2 – нагреваться, что противоречит условию теплового равновесия. Поэтому должно быть  $(r_{\lambda}/a_{\lambda})_1 = (r_{\lambda}/a_{\lambda})_2$ . Этот же аргумент можно использовать, добавляя к системе новые тела.

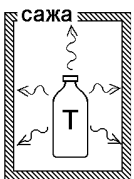
Для того, чтобы определить универсальную функцию  $f(\lambda, T)$  в этом законе, Кирхгоф ввел понятие абсолютно черного тела – эталонной идеальной непрозрачной среды, которая при любой температуре полностью поглощает все падающее на него электромагнитное излучение с любой длиной волны, т.е. имеет поглощательную способность

$a_{\lambda\text{ч}}(\lambda, T) = 1$  (индексом "ч" будем обозначать величины, относящиеся к абсолютно черному телу).

Тогда, согласно универсальной функцией в законе Кирхгофа будет излучательная способность эталонного абсолютно черного тела:  $f(\lambda, T) = r_{\lambda\text{ч}}(\lambda, T)$ . В природе абсолютно черных тел не существует, но некоторые реальные среды по своим свойствам практически совпадают с ними. Например – излучающая внешняя поверхность звезд (Солнца); сажа (для которой  $a_{\lambda}(\lambda, T) = 0,94 \div 0,96$  при температурах 370 – 470 К).

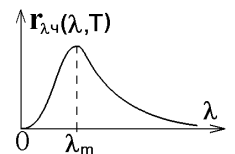


Хорошей моделью абсолютно черного тела является замкнутая полость, в которой проделано **небольшое** отверстие. Попавшее в отверстие излучение испытывает множественные отражения на стенках полости. Поглощательная способность стенок отлична от нуля (хотя и не равна 1). Поэтому вошедший луч постепенно поглощается **практически полностью**, так как размер входного отверстия мал, и вероятность попасть в него при отражении также мала. Стенки, нагреваясь, излучают, и в полости устанавливается равновесное тепловое излучение, равномерно заполняющее полость. Только очень небольшая часть этого равновесного теплового излучения, имеющего температуру полости, попадает в пределы отверстия и выходит наружу. Спектр вышедшего равновесного излучения отличен от спектра излучения, входящего в систему, и определяется температурой стенок полости. Обратите внимание на открытые окна зданий. Днем они кажутся черными, хотя внутри комнат достаточно светло. Дело в том, что максимум излучения, выходящего из окон-отверстий, приходится уже на инфракрасную область спектра, не видимую глазом. По той же причине ткань с порами и складками имеет более насыщенный цвет, чем окрашенная тем же красителем гладкая шелковая ткань, лучше отражающая солнечный свет.



*Пример:* поместим предмет внутрь ящика, стенки которого покрыты слоем сажи. Сажа, как и абсолютно черное тело, поглощает практически все тепловое излучение, постоянно испускаемое предметом. Однако холодильником такой ящик не будет. Абсолютно черное тело не только поглощает, но и излучает. При определенной температуре  $T$  установится равновесие. Слой сажи, как и предмет, будут излучать столько же энергии в виде теплового излучения, сколько поглощать.

Заметим, что **видимый** цвет абсолютно черного тела может не быть черным (сажу можно раскалить докрасна). Это связано с тем, что излучательная способность такого тела зависит от  $\lambda$ , и при некоторой длине волны имеет максимум. Такую длину волны  $\lambda = \lambda_m$  можно назвать наиболее вероятной длиной волны теплового излучения. На эту длину волны прихо-



дится максимум в спектре равновесного излучения абсолютно черного тела.

Оказывается, что величина  $\lambda_m$  связана с температурой нагретого тела соотношением

$$\lambda_m \cdot T = b = \text{const},$$

которое носит название закона смещения Вина. Здесь  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – постоянная Вина.

При комнатных температурах величина  $\lambda_m$  попадает в инфракрасную область, и глаз не видит равновесного теплового излучения. Но при увеличении температуры  $T$  максимум излучения должен смещаться в область более коротких длин волн, и глаз видит, что поверхность раскаленного тела приобретает сначала темно-вишневую, а потом красную и желтую окраску. При  $\sim 6000 \text{ К}$  абсолютно черное тело имеет цвет солнечной поверхности.

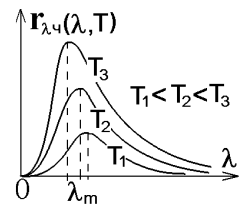
Площадь под кривой на рисунке зависимости  $r_{\lambda\text{ч}}(\lambda, T)$  от  $\lambda$  является энергетической светимостью, зависящей от температуры. Эта зависимость носит название закона Стефана-Больцмана:

Энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его температуры:

$$R_{\text{ч}}(T) = \int_0^{\infty} r_{\lambda\text{ч}}(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4,$$

где постоянная  $\sigma = 5,67032 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  называется постоянной Стефана-Больцмана.

На рисунке справа показано, что происходит при увеличении температуры с излучательной способностью находящегося в тепловом равновесии абсолютно черного тела. Заметим также, что для аналогичного графика зависимости излучательной способности  $r_{\omega\text{ч}}(\omega, T)$  от частоты  $\omega$  закон смещения Вина примет вид  $\omega_m/T = \text{const}$ , т.е. с ростом  $T$  наиболее вероятная частота излучения  $\omega_m$  увеличивается.



Энергетическая светимость (и излучательная способность) реальных сред меньше, чем у абсолютно черного тела

при той же температуре. Она определяется выражением

$$R(T) = \int_0^{\infty} a_{\lambda}(\lambda, T) r_{\lambda\text{ч}}(\lambda, T) d\lambda < \sigma T^4.$$

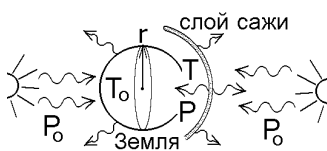
Поглощательная способность  $a_{\lambda}(\lambda, T) < 1$  – это функция переменных  $\lambda$  и  $T$ , различная для разных сред. У неоднородных сред в определенных интервалах  $T$  и  $\lambda$  поглощательная способность практически постоянна. Такие среды называются серыми телами (например, каменный уголь, для которого  $a_{\lambda} = 0,8$  при  $400 < T < 900 \text{ К}$ , и т.п.).

В любом случае энергетическая светимость реальной среды может быть записана в виде  $R(T) = A(T) \sigma T^4$ , где  $A(T) < 1$  – коэффициент поглощения среды, зависящий от температуры сложным образом и различный для разных сред. Для серого тела его можно считать постоянным.

*Примеры:* 1) вольфрамовый волосок (коэффициент поглощения  $A = 0,3$ ) включенной лампочки мощностью  $P = 100 \text{ Вт}$  имеет радиус  $r = 0,05 \text{ мм}$  и длину  $l = 0,5 \text{ м}$  (в развернутом состоянии). В стационарном состоянии вся выделяющаяся при протекании тока джоулева мощность должна излучаться с боковой поверхности волоска  $S = 2\pi r l$ . Поэтому с единицы поверхности за единицу времени испускается, согласно закону Стефана-Больцмана для серого тела, энергия  $P/S = R = A\sigma T^4$ , откуда температура волоска  $T = \sqrt[4]{P/(2\pi r l A\sigma)} = 2470 \text{ К}$ .



2) Будем считать Землю серым телом с коэффициентом поглощения  $A$ , со средней температурой  $T_0 \approx 300 \text{ К}$  и с



площадью поверхности  $S = 4\pi r^2$ . Солнечная энергия, поглощаемая Землей ежесекундно, должна быть равна энергии (мощности), испускаемой Землей в виде теплового излучения:

$$P_0 = R_0 \cdot S = A\sigma T_0^4 S.$$

Такая планетарная катастрофа, как попадание в Землю крупного астероида или массовый взрыв ядерных боеголовок в разных городах, вызовет выделение большой тепловой энергии и нагрев до высоких температур, при которых начинают гореть (окисляться) бетон, почва и т.п. Все это сопровождается появлением мощных потоков ("гриб" атомного взрыва), выносящих микронные частички сажи на очень большую высоту, в тропосферу, где падение температуры по мере удаления от поверхности Земли сменяется ее ростом. Конденсации влаги в тропосфере нет и облака сажи способны "висеть" в ней годами.

Как абсолютно черное тело, сажа поглощает солнечное излучение, нагревается и испускает тепловое излучение **во обе стороны** (правая часть рисунка. В результате на Землю попадает только половина излучения, приходящего от Солнца, и устанавливается новая средняя температура Земли:  $P = P_0/2 = A\sigma T^4 S$ . Сравнивая два последних равенства, видим, что средняя температура Земли уменьшится на  $\Delta T = T_0 - T_0/\sqrt[4]{2} \approx 50 \text{ К}$ ! Такую катастрофу называют ядерной зимой и длится она до тех пор, пока не рассеются облака сажи в атмосфере.

В приведенном примере не учтено много факторов. Так, детальный расчет показывает, что в центре континента (в районе Тулы) температура упадет на  $\Delta T \approx 45 \text{ К}$ , а падение температуры океанов не превысит  $1 \text{ К}$  (вода имеет высо-

кую теплоемкость и является хорошим аккумулятором тепла). Большой перепад температур вызовет постоянные ураганы в океане и выпадение километровых сугробов на побережье.

Заметим еще один фактор – сажа не является абсолютно черным телом в длинноволновой части спектра. Она хорошо поглощает коротковолновое излучение, приходящее от Солнца, но пропускает инфракрасное излучение Земли, что позволяет использовать формулу закона Стефана-Больцмана. С другой стороны, углекислый газ наоборот хорошо пропускает коротковолновое, но поглощает инфракрасное излучение. Поэтому повышение концентрации  $\text{CO}_2$  в атмосфере приведет к задержке и возвращению на Землю все большей доли испущенного ею теплового излучения и постепенному разогреванию Земли, т.е. возникновению противоположного парникового эффекта.

### 22.3. Неприменимость законов классической физики. Гипотеза Планка

Уравнения электромагнетизма позволяют вычислить излучательную способность абсолютно черного (или серого) тела. Зависимость излучательной способности от частоты  $\omega$  согласно

классической теории Максвелла имеет вид  $(r_{\omega\text{ч}})_{\text{класс}} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} k_B T$ . Это формула Рэлея-Джинса.

Она хорошо соответствует реальному излучению в области малых частот  $\omega$  (или больших длин волн  $\lambda$ ). Но согласно этой формуле практически вся энергия нагретого тела должна быть немедленно испущена в виде излучения с очень большой частотой и малой длиной волны. Этот результат назвали ультрафиолетовой катастрофой Рэлея-Джинса.

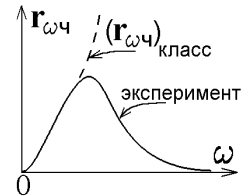
**Вывод:** законы классической физики неприменимы к описанию теплового излучения.

Использовавшиеся классические законы не являются истинными. Они являются только **приближением** истинных квантовых законов природы, справедливыми лишь при определенных условиях для описания макроскопических тел.

Устранил указанное противоречие Макс Планк. Классическая теория предполагает испускание и поглощение электромагнитных волн с **любой** энергией и частотой  $\omega$ . Планк предположил, что

электромагнитное излучение может испускаться нагретыми телами только отдельными порциями – квантами.

Эта гипотеза Планка приводит к правильной зависимости излучательной способности абсолютно черного тела от частоты  $\omega$ :  $r_{\omega\text{ч}}(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \frac{h\omega}{\exp(h\omega/k_B T) - 1}$ . Это – формула Планка, описывающая истинное распределение энергии в спектре равновесного излучения абсолютно черного тела ( $k_B$  – постоянная Больцмана).



## 23. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МИКРОЧАСТИЦ

### 23.1. Фотон. Энергия и импульс фотона

Квант электромагнитного излучения позже назвали фотоном (в латыни слово “quanta” означает “порция”). Энергия испущенного фотона или квант энергии имеет величину  $E_\phi = h\omega$ , где  $h = 1,0546 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка.

Часто энергию фотона записывают через обычную частоту  $\nu = \omega/2\pi$ . Тогда  $E_\phi = h\nu$ , где

$h = 2\pi\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – также постоянная Планка.

Фотон не может быть испущен частями, а только целиком, как частица с определенной энергией. Электромагнитное излучение обладает не только волновыми свойствами, но и свойствами частиц. Испускание энергии нагретыми телами происходит не непрерывно, а отдельными порциями – квантами.

Так как масса покоя электромагнитного поля равна нулю, то из связи энергии и импульса релятивистской части-

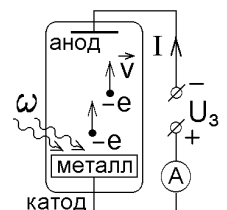
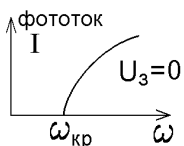
цы  $(E/c)^2 - p^2 = m^2 c^2$  находим величину импульса фотона:  $p_\phi = \frac{E_\phi}{c} = \frac{h\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$ .

Фотоны, как и любые частицы с нулевой массой покоя, могут двигаться только со скоростью света.

### 23.2. Внешний и внутренний фотоэффект. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Работа выхода электрона из металла и красная граница фотоэффекта

Явление фотоэффекта также показывает несоответствие результатов эксперимента и классических законов электромагнетизма. Суть фотоэффекта (опыт Столетова) приведена на рисунке: монохроматическое электромагнитное излучение с частотой  $\omega$  падает на металл и выбивает из него электроны, летящие к аноду и создающие в цепи ток, называемый фототоком.

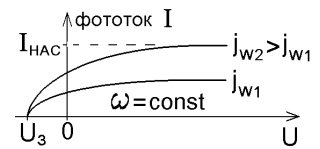
Выбивание электронов из металла падающим светом или другим электромагнитным излучением называется внешним фотоэффектом. Оказывается, что **фотоэффект прекращается при некоторой частоте падающей волны  $\omega_{\text{кр}}$ , называемой красной границей фотоэффекта**. По классическим представлениям это не должно происходить: волна с любой частотой  $\omega < \omega_{\text{кр}}$ , поглощаясь металлом, будет передавать ему энергию. Постепенно эта накапливае-





мая энергия становится значительной, сообщается электронам, и последние должны покидать металл, что не наблюдается.

Кроме того, при возрастании прямого напряжения  $U$  между катодом и анодом в цепи величина фототока стремится к постоянному значению, называемому током насыщения  $I_{\text{нас}}$ . Величина тока насыщения, т.е. количество выбиваемых электронов, пропорциональна интенсивности падающего излучения или вектору Пойнтинга:  $I_{\text{нас}} \sim j_w$ . В классической физике вектор Пойнтинга зависит от амплитуды электромагнитного поля и не зависит от его частоты, хотя из приведенного графика видна экспериментальная зависимость фототока от частоты  $\omega$ . При некотором значении поданного на анод задерживающего напряжения  $U_3$  обратного знака фототок прекращается. Так как кинетическая энергия вылетающих из катода электронов идет на преодоление задерживающей разности потенциалов, то эта энергия **ограничена величиной**  $[mv^2/2 = e|U_3|]$ , где  $m$ ,  $e$  – величина массы и заряда электрона. Но если бы падающая волна передавала энергию непрерывно, то энергия могла бы достигать большой величины, и можно было ожидать вылета электронов с любой, какой угодно большой энергией.



Все эти противоречия устранил А.Эйнштейн, предположив, что

**электромагнитное излучение не только испускается, но и поглощается отдельными квантами – фотонами.**

Электрон проводимости, свободно движущийся в металле, поглощает фотон с энергией  $\hbar\omega$ . Часть этой энергии идет на преодоление задерживающей разности потенциалов на границе металла. Минимальная энергия, которую надо сообщить электрону, чтобы он покинул металл, называется работой выхода электрона из металла  $A_{\text{вых}}$  (величина работы выхода различна для разных металлов). Остаток энергии будет кинетической энергией электрона, вылетевшего из металла. Таким образом, закон сохранения энергии запишется в виде уравнения Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\hbar\omega = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2},$$

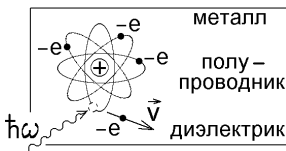
которое правильно описывает все приведенные особенности фотоэффекта:

1) При уменьшении частоты или увеличении длины волны падающего излучения уменьшается скорость  $v$  вылетевшего электрона. Когда энергия падающего фотона сравняется с работой выхода, то  $v = 0$  и

$$\omega = \omega_{\text{кр}} = A_{\text{вых}}/\hbar; \quad \lambda = \lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{кр}}} = \frac{2\pi c\hbar}{A_{\text{вых}}}.$$

Когда энергия фотона с большей длиной волны (смещенного в “красную” сторону спектра) меньше работы выхода, ее недостаточно для того, чтобы электрон покинул металл, и фотоэффект не происходит.

Поэтому записанное условие называется красной границей фотоэффекта. У большинства металлов  $A_{\text{вых}} = 2 \div 6$  эВ,  $\lambda_{\text{кр}} = 600 \div 200$  нм, и красная граница фотоэффекта может лежать за пределами видимого спектра. Фотоэффект хорошо вызывается ультрафиолетовым и рентгеновским излучением. Измеряя величину задерживающего потенциала  $U_3$  и зная частоту  $\omega$  падающего излучения, можно определить работу выхода электрона из данного проводника:  $A_{\text{вых}} = \hbar\omega - eU_3$ .



Уравнение Эйнштейна можно применять и к внутреннему фотоэффекту, когда падающий фотон выбивает электрон из атома решетки (но этот электрон остается внутри освещаемого тела). В этом случае вместо работы выхода в уравнении Эйнштейна

$$\hbar\omega = E_{\text{и}} + mv^2/2$$

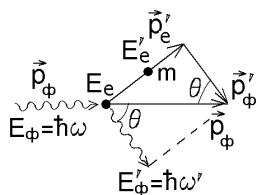
должна стоять энергия ионизации  $E_{\text{и}}$  – наименьшая энергия, которую надо сообщить электрону

для его вырывания из атома или иона решетки.

**Вывод:** фотоэффект показывает, что электромагнитное излучение способно вести себя как частица – фотон. При поглощении, испускании или взаимодействии фотона с любыми частицами можно использовать те же законы сохранения энергии и импульса, что и при взаимодействии частиц.

### 23.3. Эффект Комптона

Еще одно явление, доказывающее корпускулярную природу электромагнитного излучения – эффект Комптона, т.е. эффект изменения частоты излучения при рассеянии, который не может быть объяснен в рамках классической физики. Фотон с энергией  $E_{\text{ф}} = \hbar\omega$  и с импульсом  $\vec{p}_{\text{ф}}$  рассеивается на покоящейся частице (например, на электроне) с массой  $m$ , т.е. улетает под углом  $\theta$  к направлению первоначального движения. При этом энергия рассеянного фотона меняется и будет равна  $E'_{\text{ф}} = \hbar\omega'$ . Меняется и энергия  $E_e = mc^2$  первоначально покоившегося электрона, улетающего с импульсом  $\vec{p}_e'$ .



Новые энергии и импульсы частиц можно найти из законов сохранения энергии и импульса:

$$E_e + E_{\text{ф}} = E'_e + E'_{\text{ф}}; \quad \vec{p}_{\text{ф}} = \vec{p}_e' + \vec{p}'_{\text{ф}}$$

Решая систему этих уравнений и учитывая связь частоты и длины волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$ ,  $\lambda' = 2\pi c/\omega'$ , приходим к формуле

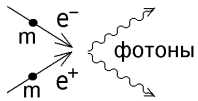
Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \Lambda (1 - \cos \theta),$$

где величина  $\Lambda = 2\pi\hbar/mc = h/mc$  называется комптоновской длиной волны частицы с массой  $m$ .

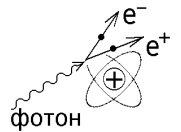
Эта формула выражает суть эффекта Комптона: при рассеянии на угол  $\theta$  длина волны фотона возрастает на величину  $\Delta\lambda$ . Соответственно скачком (в момент столкновения) уменьшается энергия рассеянного фотона.

Эффект Комптона происходит на любых частицах, как заряженных, так и незаряженных. Наиболее заметен этот эффект при рассеянии на самых легких частицах – электронах, имеющих наибольшую комптоновскую длину волны  $\Lambda_e = 2,43 \cdot 10^{-12}$  м. Но даже в этом случае изменение  $\Delta\lambda$  настолько мало, что не может быть заметно невооруженным глазом как изменение цвета рассеянного излучения. Эффект Комптона экспериментально подтверждает квантовую природу электромагнитного излучения. К другим наблюдениям, указывающим на квантовую природу, кроме фотоэффекта и эффекта Комптона, можно отнести процесс рождения электрон – позитронных пар.



При столкновении частицы и античастицы (например, электрона  $e^-$  и позитрона  $e^+$  с одинаковыми массами и равными по величине зарядами), происходит процесс аннигиляции – превращение всей

энергии частиц, включая энергию покоя  $2mc^2$ , в энергию электромагнитного излучения, т.е. превращение частиц в фотоны. Один фотон при этом образоваться не может согласно уравнениям законов сохранения энергии и импульса. Обратный процесс превращения частицы-фотона в пару  $e^-e^+$  называется процессом рождения электрон-позитронной пары. Однако для одиночного фотона такое превращение запрещено теми же самыми законами сохранения. Как и фотоэффект, процесс рождения пары идет только при одновременном взаимодействии образующихся частиц с другим объектом, например, с полем атома.



Опыт показывает, что если направить жесткое электромагнитное излучение (гамма-излучение) с высокой частотой  $\omega \geq 2mc^2/\hbar = 1,55 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-1}$  на любую среду, состоящую из атомов, то в ней начинают возникать электрон – позитронные пары.

### 23.4. Гипотеза де Бройля. Волна де Бройля

В 1924 г. Луи де Бройль опубликовал парадоксальную гипотезу: если электромагнитное излучение с длиной волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$  должно проявлять свойства частицы-фотона с энергией  $E = \hbar\omega = 2\pi\hbar/\lambda$  и импульсом  $p = E/c = 2\pi\hbar/\lambda$ , то и материальные частицы с энергией  $E$  и импульсом  $\vec{p}$  должны обладать свойствами волны с частотой  $\omega_B$  и длиной волны  $\lambda_B$ , где

$$\omega_B = E/\hbar; \quad \lambda_B = 2\pi\hbar/p.$$

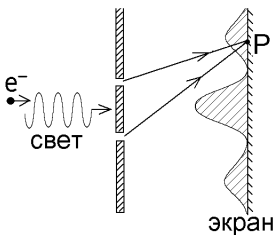
Такая волна называется волной де Бройля.

В системе СИ энергия даже быстролетящей микрочастицы очень мала, поэтому такую энергию принято для удобства вычислять в электрон-вольтах.  $1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}; \quad 1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}.$

Тогда кинетическая энергия самой легкой микрочастицы (электрона) с длиной волны де Бройля

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv} \geq 10^{-10} \text{ м}$$

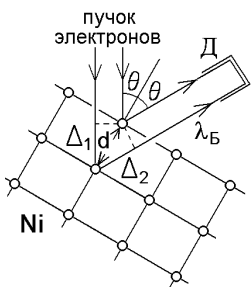
будет равна  $mv^2/2 = 2\pi^2\hbar^2/m\lambda_B^2 \leq 150 \text{ эВ}.$



Парадоксальность предположения де Бройля заключается в том, что волна, падая на две щели-отверстия, проходит через обе щели одновременно и создает на экране интерференционную или дифракционную картины полос или пятен различной освещенности. Электрон не может разделиться, пройти одновременно через обе щели и тем самым создать в точке Р экрана две сходящиеся когерентные волны. Это противоречит классическим представлениям.

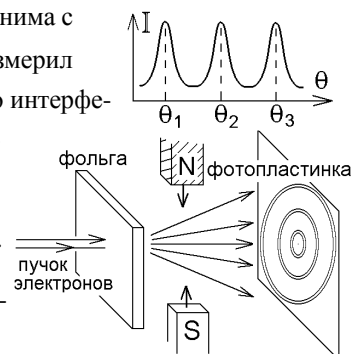
Тем не менее, эксперименты с пучками микрочастиц подтвердили гипотезу де Бройля.

### 23.5. опыты по дифракции микрочастиц



В опытах Дэвиссона и Джёрмера (1927 г.) узкий пучок электронов с кинетической энергией  $E \sim 100 \text{ эВ}$  падал на монокристалл никеля и рассеивался на атомах поверхностного слоя под разными углами  $\theta$ . Длина волны де Бройля таких электронов была сравнима с межатомным расстоянием  $d \sim 10^{-10} \text{ м}$ . Детектор Д (гальванометр) измерил четкие максимумы тока под углами  $\theta_k$ , удовлетворяющими условию интерференционного максимума  $\Delta = d \sin \theta_k = k\lambda_B$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  для вычисленной длины волны де Бройля (рисунок справа).

В том же 1927 г. Дж.Томсон и независимо П.Тартаковский наблюдали дифракцию электронов при прохождении через тонкую металлическую фольгу. Такая фольга является поликристаллом, и на фотопластинке при попадании электронов оказываются засвеченными узкие кольца, аналогичные дифракционной картине для рентгеновских лучей. Чтобы убедиться в этом, за фольгой создавалось магнитное поле. Оно не



действует на рентгеновские лучи, но отклоняет заряженные электроны. Картина колец на фотопластинке смещалась при включении поля, т.е. действительно была образована рассеянными электронами.

Электроны в тысячи раз сильнее взаимодействуют с атомами вещества и рассеиваются, чем фотоны рентгеновского излучения. Это позволяет получать дифракционную картину в рассмотренном опыте на при очень слабых электронных пучках. Чтобы убедиться, что дифракция не вызвана взаимодействием электронов между собой, Биберман, Сушкин и Фабрикант (1949 г.) использовали настолько слабый источник электронов, что **электроны падали и проходили через фольгу по одному. Наблюдаемая дифракционная картина при этом не изменилась**, откуда следует вывод:

**волновыми свойствами обладает каждая микрочастица, а не только их совокупность.**

Дифракционные картины были получены при рассеянии нейтронных, атомных, молекулярных пучков, т.е. волновые свойства, в соответствии с гипотезой де Бройля, присущи всем микрочастицам.

## 23.6. Корпускулярно-волновой дуализм

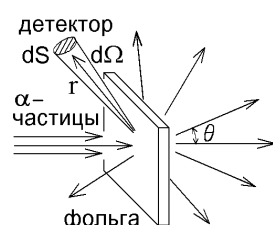
Наличие у микрочастицы (или у электромагнитного излучения) сразу двух свойств – частицы (фотона) и волны называется **корпускулярно – волновым дуализмом**. С точки зрения классической физики **эти свойства несовместимы**. Невозможно одной частице – электрону разделиться на два когерентных электрона, взаимодействовать одновременно с соседними атомами и создать интерференционную картину при сложении. Тем не менее, опыт показывает наличие волновых и корпускулярных свойств одновременно. Поэтому следует отказаться от представлений классической физики и предложить совсем новый способ описания микрочастиц и фотонов, допускающий корпускулярно – волновой дуализм. Такой способ называется **квантовой физикой**.

Нельзя говорить, что в одних условиях (опытах) электрон является частицей, а в других – волной. Он одновременно обладает и теми и другими свойствами (и частица, и волна). Но в одних условиях оказываются более заметными волновые свойства, а в других – корпускулярные.

Например, проявление корпускулярных свойств электромагнитного излучения усиливается при возрастании частоты  $\omega$ . Жесткое  $\gamma$ -излучение ( $\omega \geq 10^{20} \text{ с}^{-1}$ ) ведет себя практически как поток частиц-фотонов. Радиоволны ( $\omega \leq 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ) корпускулярные свойства практически не проявляются. Свет или рентгеновское излучение ( $10^{15} \leq \omega \leq 10^{19} \text{ с}^{-1}$ ) в одних условиях проявляют волновые свойства (интерференция, дифракция), а в других – корпускулярные (фотоэффект, эффект Комптона).

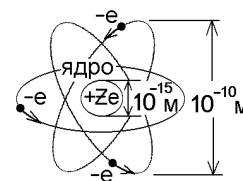
## 24. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ АТОМА

24.1. Планетарная модель атома. Постулат Бора. Боровские электронные орбиты в одноэлектронном атоме. Спектр энергии одноэлектронного атома



В опытах Резерфорда (1911 г.) узкий пучок  $\alpha$ -частиц (ядер гелия) с положительным зарядом, равным удвоенному заряду электрона  $q = +2e$ , направлялся на металлическую пластинку (фольгу). Оказалось, что рассеяние происходит на очень малых объектах размером  $\sim 10^{-15} \text{ м}$ , размеры которых много меньше размеров атомов  $\sim 10^{-10} \text{ м}$ . Кроме того, эти объекты обладают положительным электрическим зарядом  $Q = +Ze$ , пропорциональным порядковому номеру  $Z$  в таблице Менделеева химического элемента, из которого изготавливалась фольга.

Это позволило Резерфорду предложить **планетарную модель атома**: его центр занимает очень маленькое атомное ядро с положительным зарядом  $+Ze$  и размером  $\sim 10^{-15} \text{ м}$ , вокруг которого вращаются по орбитам отрицательно заряженные электроны, занимающие практически весь объем электронейтрального атома с поперечным размером  $\sim 10^{-10} \text{ м}$ . Рассеяние  $\alpha$ -частиц происходило на массивных ядрах атомов.



Планетарная модель атома противоречит классической теории электромагнетизма: вращающийся вокруг ядра электрон движется с ускорением и, следовательно, должен излучать электромагнитные волны. Расчет показывает, что электрон потеряет энергию на излучение и упадет на ядро за ничтожное время  $\leq 10^{-11} \text{ с}$ !

**По законам классической физики атомы существовать не могут.**

Чтобы объяснить устойчивость атомов и наблюдаемый на опыте спектр их излучения, Н.Бору пришлось в 1913 г. ввести предположения, не совместимые с представлениями классической физики. Они известны как **постулаты Бора**.

**1-й постулат Бора:** атомы могут находиться только в отдельных стационарных состояниях с разрешенными энергиями  $E_1, E_2, E_3, \dots$ , не излучая при этом.

**2-й постулат Бора:** излучение происходит только при переходе атома из одного стационарного состояния с энергией  $E_m$  в другое стационарное состояние с меньшей энергией  $E_n$ . Такой переход происходит скачком и сопровождается испусканием фотона с энергией

$$\hbar\omega = E_m - E_n$$

Разрешенным значениям энергии соответствуют отдельные разрешенные орбиты электронов в планетарной модели атома. Их существование можно объяснить с помощью волновых свойств электрона. В замкнутом пространстве (резонаторе) электромагнитное излучение находится в устойчивом состоянии в виде стоячих волн. Поэтому можно ожидать устойчивого состояния “стоячей” волны де Бройля электрона в атоме, когда вдоль орбиты укладывается целое число длин волн де Бройля:

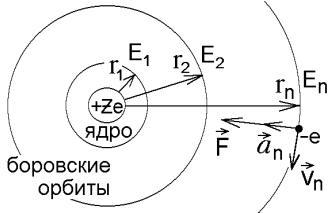
$$2\pi r_n = n\lambda_B, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда следует правило квантования Бора, определяющее радиусы разрешенных электронных орбит:

$$L_n = m v_n r_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь  $m$  масса электрона,  $v_n$  – его скорость на орбите с радиусом  $r_n$ . Момент импульса электрона  $L_n$  может быть равен только целому числу постоянных Планка  $\hbar$  (т.е.  $\hbar$  это квант момента импульса).

Такая **полуклассическая** модель, когда электроны рассматриваются как классические точечные частицы, летающие вокруг атомного ядра по отдельным разрешенным боровским орбитам, называется боровской моделью атома.



Рассмотрим модель водородоподобного или одноэлектронного атома, когда вокруг ядра с зарядом  $+Ze$  вращается по орбите с радиусом  $r_n$  единственный электрон. Это

атом водорода  $H_{Z=1}$ , ион гелия  $He_{Z=2}^+$ , двукратно ионизированный ион лития  $Li_{Z=3}^{++}$  и т.п.

Записав для электрона классическое уравнение движения  $m\vec{a}_n = \vec{F}$  и подставив центростремительное ускорение  $a_n = v_n^2 / r_n$  и кулоновскую силу притяжения к ядру  $F = kZe^2 / r_n^2$ ,

где  $k = 1 / (4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ , получим  $m v_n^2 = kZe^2 / r_n$ . Решая это уравнение совместно с

уравнением постулата Бора, легко найти разрешенные скорости электрона и радиусы орбит:

$$v_n = \frac{kZe^2}{n\hbar}, \quad r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m kZe^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Последнюю формулу записывают в виде

$$r_n = n^2 r_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где  $r_1$  – боровский радиус или радиус первой боровской орбиты (для атома водорода ( $Z=1$ ) он равен  $5,291 \cdot 10^{-11}$  м).

Энергия электрона складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии кулоновского взаимодействия с ядром:

$$E_n = \frac{m v_n^2}{2} - \frac{kZe^2}{r_n}.$$

Подставляя найденные выражения для  $v_n$  и  $r_n$ , находим величину разрешенной энергии электрона в водородоподобном

атоме:  $E_n = -\frac{k^2 Z^2 m e^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{|E_1|}{n^2}$ , где целое число  $n = 1, 2, 3, \dots$  называется главным квантовым числом.

*Замечание:* Зоммерфельд рассчитал энергии электронов, вращающихся вокруг ядра по эллиптическим орбитам, и получил тот же результат. Боровские орбиты могут быть не только круговыми, но и эллиптическими.

## 24.2. Излучение одноэлектронного атома. Спектральные серии

Фотоны с отдельными разрешенными частотами испускаются при переходах на низшие разрешенные уровни энергии (более близкие к ядру боровские орбиты). Используя формулу для разрешенных значений энергии  $E_n$ , находим

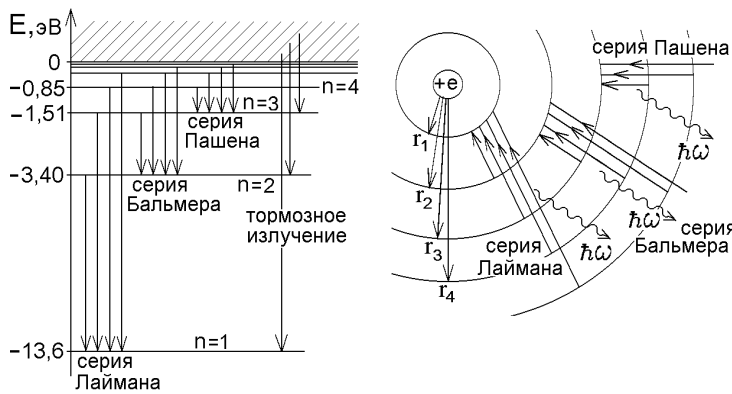
эти частоты:  $\omega_{n' \rightarrow n} = \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar} = \frac{k^2 m e^4}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) = 2\pi c R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$ ,

где  $n$  и  $n'$  – целые числа,  $c$  – скорость света,  $m$  – масса электрона,  $R = (k^2 m e^4) / (4\pi c \hbar^3) = 1,096 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$  – постоянная Ридберга. Эти формулы говорят о том, что спектр излучения атома дискретен. Длины волн излучаемых спектральных

линий определяются выражением

$$\lambda_{n' \rightarrow n} = \frac{2\pi c}{\omega_{n' \rightarrow n}} = \frac{2\pi c \hbar}{E_{n'} - E_n} = R^{-1} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)^{-1}.$$

Спектр атома водорода или водородоподобных атомов может быть разделен на наблюдающиеся на опыте спектральные серии, соответствующие переходам электрона на определенный уровень энергии со всех лежащих выше возбужденных энергетических уровней. Соответствующие переходы между боровскими орбитами показаны на рисунке, где значения разрешенных энергий приведены для атома водорода ( $Z=1$ ):



серия Лаймана – переходы на основной уровень энергии  $n' \rightarrow n = 1$ ;  
серия Бальмера – переходы в первое возбужденное состояние  $n' \rightarrow n = 2$ ;  
серия Пашена – переходы  $n' \rightarrow n = 3$ ;  
серия Брэкета – переходы  $n' \rightarrow n = 4$ ;  
серия Пфунда – переходы  $n' \rightarrow n = 5$ ;  
серия Хэмфри – переходы  $n' \rightarrow n = 6$  и т.д.

Вычисленные длины волн спектральных серий водорода изображены на рисунке справа. Так как разрешенные уровни энергии расположены все более плотно с ростом главного квантового числа  $n$ , то и линии спектральной серии располагаются все

более часто с уменьшением длины волны и оканчиваются областью сплошного спектра тормозного излучения (заштрихованные участки)

Как видно из рисунков, из-за большого промежутка между уровнями  $E_1$  и  $E_2$  серия Лаймана попадает в ультрафиолетовую область. Серия Пашена и перекрывающаяся с ней серия Брэкета и т.п. оказывается в инфракрасной области. Глаз увидит только три первые линии серии Бальмера с  $\lambda_{3 \rightarrow 2} = 656$  нм, (красный свет),  $\lambda_{4 \rightarrow 2} = 486$  нм (бирюзовый свет) и  $\lambda_{5 \rightarrow 2} = 434$  нм (темно-фиолетовый цвет).

Максимальную и минимальную длину волны  $\lambda$  (частоту  $\omega$ ) в каждой спектральной серии можно вычислить используя записанные выше формулы и находя максимальную и минимальную разность энергий  $E_{n'} - E_n = \frac{k^2 m e^4}{2 \hbar^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$ . Так

максимальная частота излучения в серии Лаймана соответствует переходу  $n' = \infty \rightarrow n = 1$ , а минимальная частота – переходу  $n' = 2 \rightarrow n = 1$ :  $\omega_{\text{Лайм max}} = \frac{|E_1|}{\hbar} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)$ ;  $\omega_{\text{Лайм min}} = \frac{|E_1|}{\hbar} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$ . Максимальная длина волны спектральной линии в серии Бальмера соответствует переходу  $n' = 3 \rightarrow n = 2$ , а минимальная – переходу  $n' = \infty \rightarrow n = 2$ :

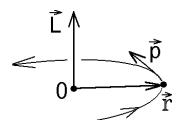
$$\lambda_{\text{Бал max}} = \frac{2\pi c \hbar}{|E_1|} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)^{-1}, \quad \lambda_{\text{Бал min}} = \frac{2\pi c \hbar}{|E_1|} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)^{-1}, \quad \text{где } E_1 = -\frac{k^2 m e^4}{2 \hbar^2} - \text{энергия основного состояния атома}$$

водорода, равная  $-13,5$  эВ.

Боровская планетарная модель правильно объясняет некоторые свойства атома – например, особенности спектров водородоподобных атомов, существование возбужденных состояний. Но попытки применить ее к объяснению спектров многоэлектронных атомов кончились неудачей. Кроме того, теория Бора не объяснила ряд особенностей спектра водорода, о которых мы еще не говорили. Наконец, второй постулат Бора запрещает существование электрона между двумя разрешенными боровскими орбитами. Попытка Бора представить электрон как частицу, исчезающую в одной точке пространства (на одной боровской орбите) и мгновенно возникающую в другой точке при скачкообразном излучении фотона (телепортация) недопустима. Поэтому боровская полуклассическая модель атома противоречива в принципе.

### 24.3. Орбитальный момент импульса и орбитальный магнитный момент электрона в атоме. Орбитальное и магнитное квантовые числа

В частности, неверно классическое выражение  $\vec{L}_n = [\vec{r}_n, m \vec{v}_n]$  для орбитального момента импульса, созданного движением электрона по атомной орбите и записанное с помощью квантового постулата Бора. **Квантовая теория** приводит к выводу о том, что можно определить только величину вектора  $\vec{L}$  и его проекцию на одну из осей координат, например,  $L_z$ . Тогда проекции  $\vec{L}$  на другие оси  $x$  и  $y$  принципиально определить нельзя.

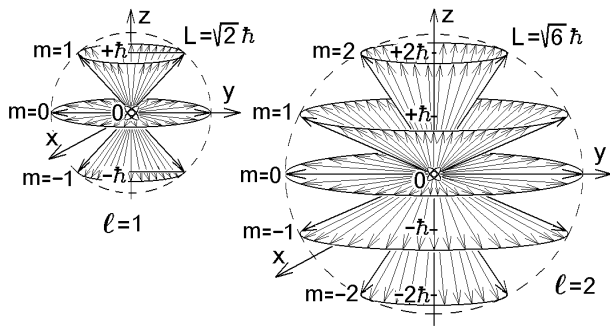


При этом величины  $L$ ,  $L_z$ , как и энергия электрона  $E_n$  могут принимать только дискретные значения:

$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ , где целое число  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  называется орбитальным квантовым числом. Его возможные значения ограничены значением главного квантового числа  $n$ .

$L_z = \hbar m$ , где целое число  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$  называется магнитным квантовым числом. Его возможные значения ограничены значением орбитального квантового числа  $l$ .

Постоянная Планка  $\hbar$  – это квант момента импульса микрочастицы.



Для примера на рисунке показана возможная ориентация вектора момента импульса электрона в состояниях с квантовыми числами  $l=1$  и  $l=2$ . Так как проекции  $L_x$  и  $L_y$  определить невозможно, то вектор  $\vec{L}$  изображен на этом рисунке "размазанным" в конус вокруг оси  $z$ . Величины  $L_z$  и  $L$  при этом определены. Но представить траекторию электрона в виде плоской орбиты, перпендикулярной фиксированному направлению  $\vec{L}$ , нельзя! Боровская модель неправильно описывает вращение электрона в атоме.

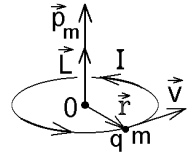
Напомним, что двигаясь по круговой орбите радиуса  $r$  со скоростью  $v$ , частица с зарядом  $q$  совершает один оборот за

время  $\Delta t = 2\pi r/v$ , и создает эффективный круговой ток  $I = \Delta q / \Delta t = qv / 2\pi$ . Площадь такого тока  $S = \pi r^2$ , а создаваемый им магнитный момент  $p_m = IS = qvr/2$ . С учетом направления векторов, указанных на рисунке справа, движущаяся

заряженная частица обладает магнитным моментом  $\vec{p}_m = \frac{q}{2} [\vec{r}, \vec{v}]$ . Если учесть, что момент импульса

частицы  $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}]$ , то оказывается, что магнитный момент и момент импульса движущейся заряженной частицы связаны гиромагнитным отношением  $\vec{p}_m = (q/2m)\vec{L}$ . Для электрона с зарядом  $-e$

и с массой  $m_e$  это отношение примет вид  $\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$ . Поэтому вектор орбитального магнитного мо-



мента, созданного движением электрона вокруг атомного ядра, изменяется так же, как и вектор орбитального момента импульса: можно определить только его величину, которая может принимать только отдельные дискретные значения

$p_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$ , где  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , где постоянная  $\mu_B = e\hbar/2m_e = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$  называется магнетон Бора, и

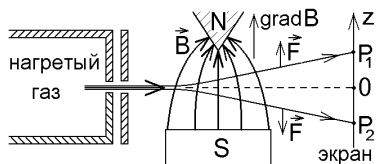
можно определить проекцию  $\vec{p}_m$  на одну выделенную ось  $z$  (тогда проекции  $p_{mx}$  и  $p_{my}$  принципиально не определены)

$p_{mz} = -\mu_B m$ , где  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ . Магнетон Бора – это квант магнитного момента. Классическая картинка движения

электрона по плоской орбите, приведенная выше **неверна**.

## 24.4. Опыты Штерна-Герлаха

Попытка измерить магнитный момент  $\vec{p}_m$  впервые была сделана в опытах Штерна-Герлаха (1921г.), схема которых приведена на следующем рисунке.



Узкий пучок атомов, например, водорода проходил через область неоднородного магнитного поля, градиент которого был направлен вдоль оси  $z$ . Каждый атом будет крошечным магнитным диполем, энергия которого во внешнем магнитном поле  $W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$ . Градиент этой энергии определяет силу, действующую на атом:  $F_z = -\text{grad}_z W = p_{mz} \frac{\partial B_z}{\partial z}$ . Отклонение атома вдоль оси  $z$  должно быть пропорционально проекции  $p_{mz}$  его магнитного момента.

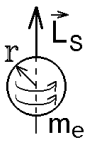
Результат опыта Штерна-Герлаха оказался странным: атомы пучка водорода, находившегося в основном состоянии с минимальной энергией  $E_1 = -13,5 \text{ эВ}$ , могли иметь только нулевую проекцию  $p_{mz} = -\mu_B \cdot m = 0$  ( $n=1, l=0, m=0$ ), и не должны были отклоняться, попадая в центральную точку 0. Однако они попадали в две симметрично расположенные точки  $P_1$  и  $P_2$  экрана, как показано на рисунке, т.е. имели два разрешенных значения проекции  $p_{mz}$ .

Формула для  $p_{mz}$  предсказывала расщепление пучка атомов на **нечетное** число  $2l+1$  пучков (это число разных значений магнитного квантового числа  $m$ ). Но пучок даже возбужденных атомов разделялся на четное число пучков.

## 24.5. Собственный момент импульса и собственный магнитный момент электрона. Спиновое квантовое число

Для объяснения опыта Штерна-Герлаха и ряда особенностей спектров излучения атомов была предложена гипотеза о существовании у микрочастиц момента импульса, **не связанного с движением частицы в пространстве**. Такой момент называется собственным моментом импульса, или спином  $\vec{L}_s$  (от английского слова "spin" – кружение, верчение). Величина спина  $L_s$  строго фиксирована для каждой частицы и не может меняться.

Нельзя связать такой момент импульса с реальным вращением частицы вокруг своей оси. Так величина спина электрона, следующая из эксперимента,  $L_s = 9,14 \cdot 10^{-35} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ . Если считать электрон шариком радиуса  $r$  с моментом



инерции  $I = 2m_e r^2/5$ , вращающимся вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega = L_s/I$ , то скорость движения точки на поверхности шарика  $v = \omega r = 5L_s/(2m_e r)$ . До сих пор размер электрона не измерен, по крайней мере, он много меньше размера атомного ядра ( $r \ll 10^{-15}$  м). Это дает  $v \gg 2,5 \cdot 10^{11}$  м/с, что значительно превышает скорость света в вакууме.

Спин микрочастиц не связан с действительным вращением в пространстве. Это – квантовое свойство. Даже если размер частицы равен нулю, она ведет себя так, как если бы вращалась с моментом импульса  $\vec{L}_s$ .

Тем не менее, собственный момент импульса определяется так же, как орбитальный момент импульса. Определена его величина и проекция на выделенную ось  $z$ :

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}; \quad L_{sz} = \hbar \sigma, \quad \text{где } \sigma = \dots \pm(s-1), \pm s.$$

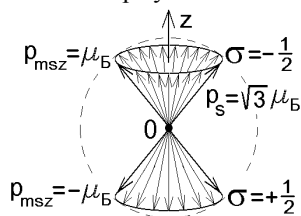
И число  $s$ , и число  $\sigma$  называют спиновым квантовым числом. Эти числа изменяться не могут и фиксированы для каждой микрочастицы.

Но отсутствием реального вращения связаны две особенности спина.

1) В отличие от целых квантовых чисел  $l$  и  $m$ , спиновое число  $s$  может быть как целым, так и полуцелым. Для фотона  $s = 1$ ; для электрона, протона, нейтрона  $s = 1/2$ .

2) С собственным моментом импульса связан собственный магнитный момент  $\vec{p}_{ms}$ . Но гиромагнитное отношение для него аномально, оно в два раза больше отношения орбитальных моментов. Для электрона  $\vec{p}_{ms} = -(e/m_e) \vec{L}_s$ .

Формулы квантования собственного магнитного момента электрона имеют вид:



$$p_{ms} = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)}, \quad \text{где } s = 1/2; \quad p_{msz} = -2\mu_B \sigma, \quad \text{где } \sigma = \pm 1/2.$$

И спин  $L_s$ , и собственный магнитный момент  $p_{ms}$  электрона могут иметь только две проекции на любую выделенную ось:  $L_{sz} = \pm \hbar/2$ ;  $p_{msz} = \pm \mu_B$ . Это объясняет результат опыта Штерна-Герлаха (рис.6.9): расщепление пучка одноэлектронных атомов водорода на два пучка происходит из-за того, что магнитное поле действует на собственный магнитный момент электрона:  $F_z = p_{msz} \partial B / \partial z$

## 24.6. Система четырех квантовых чисел и принцип Паули

Рассмотрим теперь многоэлектронные атомы, свойства которых определяются двумя фундаментальными принципами, которые являются постулатами квантовой теории и выполняются во всех случаях.

Принцип тождественности (неразличимости) микрочастиц: Две совершенно одинаковые микрочастицы в одной квантовой системе абсолютно неразличимы. Если их поменять местами, то свойства системы не изменятся. Нельзя рассматривать состояние движения **одного определенного** электрона в системе из многих электронов и считать, что этот электрон не меняется местами с другими. Нельзя перенумеровать все электроны и проследить за движением каждого из них независимо от движения других электронов.

Из этого принципа выводится принцип запрета Паули: в одной квантовой системе в один момент времени не могут находиться две тождественные микрочастицы с полуцелым спином в одинаковом состоянии.

Так как состояние электрона в атоме описывается системой из четырех квантовых чисел (главного, орбитального, магнитного и спинового):

$$n = 1, 2, 3, \dots; \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l; \quad \sigma = \pm 1/2,$$

то принцип Паули для атома можно сформулировать так:

в многоэлектронном атоме находятся электроны, отличающиеся значением хотя бы одного квантового числа.

## 24.7. Заполнение электронами оболочек и подоболочек в атоме

Естественно, что электроны будут находиться в основном состоянии с наименьшей возможной энергией, а так как собраться на низшем энергетическом уровне  $1s$  они не могут по принципу Паули, то последовательно начнут заполнять все свободные уровни (состояния), начиная с низших.

Совокупность состояний электронов с одинаковым главным квантовым числом называется электронной оболочкой атома. Каждая оболочка делится на электронные подоболочки, т.е. набор состояний с одинаковыми числами  $n$  и  $l$ . Оболочки и подоболочки атомов принято обозначать буквами:

$N$	1	2	3	4	5	$l$	0	1	2	3	4
оболочки	K	L	M	N	O	подоболочки	s	p	d	f	g

Полностью заполненная подоболочка содержит  $2 \cdot (2l+1)$  электронов, различающихся значениями квантовых

чисел  $m$  и  $\sigma$ . В полностью заполненной оболочке будет  $\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$  электронов.

Электронную конфигурацию атома, т.е. распределение его электронов по оболочкам описывают перечислением заполняемых подоболочек (число слева указывает на номер оболочки, а индекс справа сверху показывает число электронов в данной подоболочке). Как видно из следующей таблицы, идеальная схема заполнения оболочек с ростом числа электронов  $Z$  действует до атома аргона ( $Z = 18$ ). Начиная со следующего атома калия ( $Z = 19$ ), заполняется  $s$ -подоболочка следующей  $n = 4$ -оболочки, а подоболочка  $3d$  остается незаполненной.

Таблица. Электронные конфигурации атомов в основном состоянии

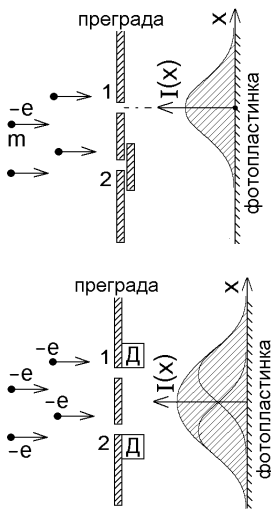
Z	элемент	конфигурация	Z	элемент	конфигурация	Z	элемент	конфигурация
1	H	$1s^1$	17	Cl	$KL 3s^2 3p^5$	...	...	....
2	He	$1s^2$	18	Ar	$KL 3s^2 3p^6$	43	Tc	$KLM 4s^2 4p^6 4d^5 5s^2$
3	Li	$1s^2 2s^1$	19	K	$KL 3s^2 3p^6 4s^1$	44	Ru	$KLM 4s^2 4p^6 4d^7 5s^1$
4	Be	$1s^2 2s^2$	20	Ca	$KL 3s^2 3p^6 4s^2$	45	Rh	$KLM 4s^2 4p^6 4d^8 5s^1$
5	B	$1s^2 2s^2 2p^1$	21	Sc	$KL 3s^2 3p^6 3d^1 4s^2$	46	Pd	$KLM 4s^2 4p^6 4d^{10}$
6	C	$1s^2 2s^2 2p^2$	...	...	...	47	Ag	$KLM 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^1$
7	N	$1s^2 2s^2 2p^3$	28	Ni	$KL 3s^2 3p^6 3d^8 4s^2$	...	...	....
8	O	$1s^2 2s^2 2p^4$	29	Cu	$KL 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1$	54	Xe	$KLM 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6$
9	F	$1s^2 2s^2 2p^5$	30	Zn	$KLM 4s^2$	55	Cs	$KLM 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s^1$
10	Ne	$1s^2 2s^2 2p^6$	31	Ga	$KLM 4s^2 4p^1$	56	Ba	$KLM 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 6s^2$
11	Na	$KL 3s^1$	...	...	.....	57	La	$KLM 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 5d^1 6s^2$
12	Mg	$KL 3s^2$	36	Kr	$KLM 4s^2 4p^6$	58	Ce	$KLM 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^2 5s^2 5p^6 6s^2$
13	Al	$KL 3s^2 3p^1$	37	Rb	$KLM 4s^2 4p^6 5s^1$	...	...	...
...	...	....	38	Sr	$KLM 4s^2 4p^6 5s^2$	64	Gd	$KLM 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^7 5s^2 5p^6 5d^1 6s^2$
...	...	....	39	Y	$KLM 4s^2 4p^6 4d^1 5s^2$	...	...	...

В этой таблице полностью заполненные оболочки обозначены буквами  $K \equiv 1s^2$ ;  $L \equiv 2s^2 2p^6$ ;  $M \equiv 3s^2 3p^6 3d^{10}$ .

Причина в том, что полученные ранее формулы для  $E_n$ ,  $L$ ,  $p_m$  и т.п. были записаны для одноэлектронного атома, а в многоэлектронных атомах надо учесть энергию взаимодействия электронов не только с ядром, но и друг с другом. По этой причине энергии, соответствующие  $4s$ -подоболочке, оказываются ниже уровней энергии  $3d$ -подоболочки и т.п. Именно из-за этого взаимодействия уровни энергии разных подоболочек значительно расходятся и перекрываются. Говорят, что перекрываются электронные оболочки. Следующая оболочка начинает заполняться при незаполненной предыдущей.

## 25. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МИКРОСИСТЕМ

### 25.1. Опыт с прохождением микрочастицы через двухщелевую диафрагму. Волновая функция



Рассмотрим причины, по которым законы физики молекул, атомов, ядер и элементарных частиц так сильно отличаются от законов классической физики. Для этого представим себе электроны, которые **по одному** подлетают к непрозрачной преграде с двумя узкими щелями-прорезями, и одна из щелей закрыта (мысленный опыт Фейнмана или опыт по дифракции микрочастиц). Точно известно, что электроны летят через единственную открытую щель, и интенсивность почернения  $I(x)$  расположенной сзади фотопластинки имеет вид единственного пика с центром напротив щели.

Такой же пик получится и напротив второй щели, если мы будем уверены, что электроны пролетают сквозь нее. Поэтому если установить детекторы Д, **точно определяющие щель, через которую летит каждый электрон**, то почернение фотопластинки должно быть суммой двух пиков (рисунок ниже).

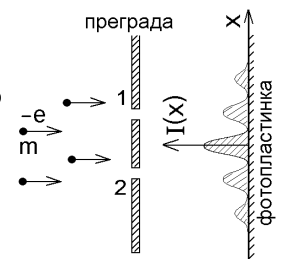
Но **электроны** обладают волновыми свойствами (волна де Бройля), а волны, проходящие через две щели, должны интерферировать. Т.е. **если за электронами не следить** и не определять, через какую именно щель пролетает каждый электрон, то на фотопластинке окажется интерференционная картина полос почернения (рисунок справа).

То есть поведение микрочастицы и конечный результат зависит от того, следим мы за частицей или нет!

Дело в том, что любой **измерительный** прибор регистрирует информацию о каком-либо объекте, только **взаимодействуя с ним**. Например, детектор Д – это заряженный листочек электроскопа, и по отклонению этого листочка регистрируется пролетающий электрон. Но одновременно отклоняется и пролетающая частица!

Микрочастицы – настолько малые объекты, что любые физические изменения их положения или скорости любыми приборами или методами будут изменять движение частиц. Информация о положении и о скорости микрочастицы, т.е. о ее траектории принципиально не подлежит измерению. Любая попытка получить эту информацию изменит траекторию микрочастицы.

Так, определяя детекторами Д щель, через которую пролетает каждый электрон, мы изменяем состояние его движения и конечное распределение интенсивности на фотопластинке. В отличие от классической физики, в квантовой





теории теряют смысл динамические переменные: координаты  $\vec{r}$ , скорость  $\vec{v}$ , импульс  $\vec{p}$ , энергия  $E$  и т.п. Они принципиально неопределимы. Если они известны для микрочастицы, то тем самым известна и ее классическая траектория, а тогда известна щель, через которую она пролетит в рассмотренном опыте Фейнмана. Интерференционной картины, наблюдаемой на опыте, мы при этом не получим.

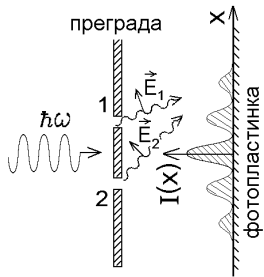
Динамические переменные  $\vec{r}, \vec{p}, E$  нельзя не только измерить, но даже мысленно определить для микрочастицы, не изменяя ее движения.

Можно определить только **состояние движения микрочастицы**, описываемое с помощью некоторой функции состояния  $\Psi$ .

Пусть состояние движения электрона, при котором он заведомо пролетает через щель 1 (или через щель 2) на рисунке, описывается функцией  $\Psi_1$  (или  $\Psi_2$ ). Чтобы произошла интерференция, волна должна одновременно пройти через обе щели. Поэтому состояние движения электрона, прошедшего через преграду и создающего на фотопластинке интерференционные полосы, должно быть суммой (смесью, суперпозицией) двух состояний электрона, соответствующих прохождению через щель 1 и щель 2:  $\Psi \sim \Psi_1 + \Psi_2$ . Только так можно объяснить интерференцию и наблюдаемые волновые свойства частиц. Поэтому функцию состояния  $\Psi$  называют также волновой функцией.

*Замечание:* нельзя говорить, что падающие электроны с вероятностью 50% проходят через щель 1 и с вероятностью 50% – через щель 2. Это утверждение означает, что нам известно, что частица проходит через определенную щель, хотя и не известно, какая именно частица. В результате получим картину на рисунке слева.

Формула  $\Psi \sim \Psi_1 + \Psi_2$  означает, что каждый электрон, оказавшийся за преградой, является смесью двух электронов: прошедшего через щель 1 и прошедшего через щель 2. Вообразите себе дом с двумя открытыми дверями, в котором находилась кошка. За кошкой не следили, и когда она выбежала из дома, то оказалась смесью двух кошек, выбежавших через разные двери. Это сравнение показывает, насколько различаются свойства и способы описания микрообъектов и классических объектов. Классическая кошка не проявляет волновых свойств, и, независимо от того следят за ней или нет, окажется кошкой, пробежавшей через единственную дверь.



Те же рассуждения справедливы для **неделимых** квантов электромагнитного излучения – фотонов. Если источник излучения очень слаб, то фотоны подлетают к преграде со щелями по одному и не могут разделиться и одновременно пройти через обе щели. Тем не менее, за преградой они оказываются суммой двух волн, характеризующихся напряженностями  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ , которые складываясь создают интерференционную картину на фотопластинке.

## 25.2. Вероятностный смысл волновой функции. Квантовый принцип суперпозиции

Наблюдаемой на опыте величиной должна быть не волновая функция  $\Psi$ , а квадрат ее модуля  $|\Psi|^2$ , пропорциональный освещенности или почернению фотопластинки, т.е. числу попавших в данную точку микрочастиц. Если электроны или фотоны подлетают по одному, то приходится ждать достаточно долго, чтобы преграду преодолело большое число частиц  $N$ , и интерференционные полосы оказались четкими.

Разделив число микрочастиц  $dN$ , попавших на участок фотопластинки с координатами от  $x$  до  $x + dx$ , на число частиц  $N$ , падавших на преграду, получим вероятность попадания частиц в пределы данного участка:  $dP = dN/N$ . Число  $dN$  пропорционально ширине  $dx$  участка и его освещенности (почернению). Поэтому можно придать волновой функции определенный физический смысл, связывая ее с вероятностью обнаружения частиц:  $dP = |\Psi|^2 dx$ . То же самое справедливо для микрочастицы, еще не попавшей на фотопластинку.

Если состояние движения частицы описывается волновой функцией  $\Psi(\vec{r}, t)$ , то вероятность ее обнаружения в пределах малого объема  $dV$  в момент времени  $t$  определяется формулой

$$dP = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV.$$

Здесь  $\vec{r}$  – не координаты частицы, которые остаются принципиально неопределенными, а координаты участка пространства с объемом  $dV$ .

**Вывод:** чтобы объяснить корпускулярно-волновой дуализм, приходится считать единый микрообъект волна-частица «размазанным» в пространстве с плотностью вероятности  $|\Psi|^2$ . Волны де Бройля – это волны вероятности обнаружения микрочастицы.

Это не означает, что в пространстве размазывается сама частица. При попытке обнаружить ее частица будет найдена в какой-то точке, но в какой – неизвестно заранее. "Размазанной" в пространстве оказывается область, в которой частица с вероятностью  $P$  может быть обнаружена.

Вероятность того, что в данный момент времени  $t$  частица присутствует "где-то" равна 1. Поэтому, проинтегрировав выражение для плотности вероятности по всему объему нашего мира, мы получим условие нормировки волновой функции:

$$\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1.$$

Состояние движения микрочастицы задается только ее волновой функцией  $\Psi(\vec{r}, t)$ . Все остальные физические переменные  $f = \vec{r}, \vec{p}, E, \dots$  для частицы **принципиально не определены**. Но всегда можно произвести опыт и измерить значение любой переменной  $f$ . Это значение будет конкретным числом (если не учитывать погрешность измерения прибора). Все значения переменной  $f$ , которые может иметь частица и которые могут быть измерены на опыте, называются **разрешенными**. Мы видели, что такими разрешенными значениями могут быть отдельные величины энергии электрона  $E_n$  в атоме, его момента импульса  $L$ , магнитного момента  $p_m$  и т.п.

Если переменная  $f$  принимает одно из разрешенных значений  $f_n, n = 1, 2, 3, \dots$ , то частица заведомо находится в состоянии с таким значением  $f = f_n$ , которое описывается конкретной волновой функцией  $\Psi = \Psi_n$ . Но до процесса измерения не известно, какое конкретное значение величины  $f$  будет измерено. Известно лишь то, что оно может оказаться любым из разрешенных значений  $f_n, n = 1, 2, 3, \dots$ . Это позволяет сформулировать основной постулат квантовой теории – **принцип квантовой суперпозиции**:

любое состояние микрочастицы является суперпозицией (суммой) состояний, соответствующих всем разрешенным значениям любой из физических переменных  $f$ :  $\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n c_n \Psi_n(\vec{r}, t)$ ,

где  $c_n$  – постоянные коэффициенты, квадрат модуля которых  $P_n = |c_n|^2$  – это вероятность того, что при измерении переменной  $f$ , будет получено разрешенное значение  $f = f_n$ .

Естественно, что сумма вероятностей всех возможных результатов  $\sum_n P_n = \sum_n |c_n|^2 = 1$ .

### 25.3. Принцип неопределенности Гейзенберга. Соотношения неопределенностей и их смысл

Но если электрон не должен двигаться как точечная частица, а с плотностью вероятности  $|\Psi|^2$  одновременно обнаруживается в разных точках пространства, то как связать это с тем, что для него точно известна, например, траектория в кинескопах, позволяющих электрону попасть в нужное место экрана? Покажем далее, как это затруднение объясняется квантовой теорией.

Рассмотрим электрон с длиной волны де Бройля  $\lambda_B$  и импульсом  $p$ , падающий на щель ширины  $a$ . Чтобы электрон прошел за щель, он должен попасть в любую ее точку, т.е. неопределенность координаты  $x$  электрона  $\Delta x = a$ .

Обладая свойствами волны, электрон испытывает дифракцию на щели. Будем считать, что он рассеивается в пределах центрального дифракционного максимума и приобретает неопределенность проекции импульса на поперечную ось  $x$ :  $\Delta p_x \sim p \sin \phi_1$ , где  $\phi_1$  – угол, соответствующий первому дифракционному минимуму, определяемому условием

$$a \cdot \sin \phi_1 = 1 \cdot \lambda_B.$$

Тогда, подставляя выражение длины волны де Бройля  $\lambda_B = 2\pi\hbar/p$ , получаем  $\Delta p_x \sim p \cdot \frac{\lambda_B}{a} = \frac{2\pi\hbar}{a}$  или  $\Delta p_x \cdot \Delta x \sim 2\pi\hbar$ .

Это – качественный расчет, но он приводит к важному результату. Чтобы точнее определить координату рассеиваемого электрона, начнем уменьшать ширину щели. При этом неопределенность соответствующей проекции импульса начнет возрастать (электрон может попасть в любую точку центрального дифракционного максимума, который будет расширяться).

**Вывод:** координату  $x$  и проекцию импульса  $p_x$  электрона нельзя определить одновременно. Попытка уменьшить неопределенность одной переменной приведет к увеличению неопределенности другой переменной. Это – следствие корпускулярно-волнового дуализма.

Физические переменные, которые нельзя определить или измерить одновременно называются **сопряженными**. К ним относятся:  $x$  и  $p_x$ ;  $y$  и  $p_y$ ;  $z$  и  $p_z$ ;  $t$  (время) и  $E$  (энергия микрочастицы);  $\phi$  (угол поворота вокруг оси  $z$ ) и  $L_z$ .

Гейзенберг вывел **соотношения неопределенностей** для любой пары сопряженных физических переменных:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}; \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}; \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}; \Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}; \dots$$

Эти соотношения и составляют суть **принципа неопределенности** Гейзенберга:

Ни в одном эксперименте, никакими идеальными измерительными приборами нельзя **одновременно** измерить точные значения двух сопряженных переменных для одного и того же микрообъекта. Нельзя даже предположить, что одновременно известны величины двух сопряженных переменных – это приведет к противоречию.

Неопределенности сопряженных величин  $\Delta x, \Delta p_x, \dots$  не связаны с погрешностями приборов или методов измерения. Можно предложить опыт, в котором одна из сопряженных переменных измеряется точно. Неопределенность второй переменной при этом возрастет до бесконечности, и о ее величине нельзя будет сказать ничего. Например, координату электрона можно найти с идеальной точностью ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) в некоторой точке. Тогда совершенно неизвестно, с каким импульсом электрон пролетел через эту точку ( $\Delta p_x \rightarrow \infty$ ). Если же точно определить импульс, то неизвестно, в какой точке пространства пролетает электрон с этим импульсом.

Вывод, следующий из этого примера, известен как **принцип дополнительности**, сформулированный Н.Бором:

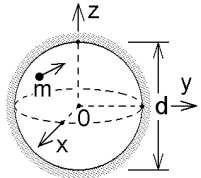
получение информации об одних свойствах микрочастицы, об одних ее физических величинах приводит к потере информации о других ее свойствах, о других сопряженных (или дополнительных) величинах.

Оценим неопределенности координат и импульсов частиц, используемых в технических устройствах. Пусть электрон, ускоренный разностью потенциалов  $U = 100$  В и обязанный по классическим представлениям обладать импульсом  $p = \sqrt{2meU} = 5,4 \cdot 10^{-24}$  кг·м/с, имеет совсем незаметную неопределенность импульса  $\Delta p \sim 10^{-6} \cdot p$ . Тогда неопределенность его координаты  $\Delta x \sim \frac{\hbar}{2\Delta p} \sim 0,01$  мм. Это – поперечный размер траектории электрона.

С точки зрения технических приложений такая "неопределенная траектория" выглядит чрезвычайно тонкой линией, и ее конечную ширину можно не учитывать, считая электрон классической частицей. Другое дело – изделия микроэлектроники или нанотехнологий, где размер устройства сравним с  $\Delta x$ , и электрон надо рассматривать только как квантовый, "размазанный" в пространстве объект.



Соотношения неопределенностей они позволяют сделать некоторые важные заключения.



1) Пусть движение микрочастицы с массой  $m$  ограничено участком пространства с непрозрачными стенками (такой участок, изображенный на рисунке, называется потенциальным ящиком). Так как частица заведомо находится внутри данной области, то неопределенности ее координат не превышают поперечного размера потенциального ящика:  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \leq d$ . Поэтому

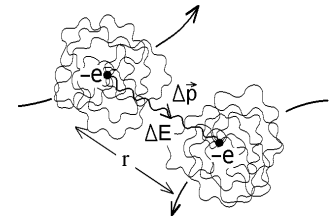
$$(\Delta p_x)_{\min} = (\Delta p_y)_{\min} = (\Delta p_z)_{\min} \approx \frac{\hbar}{2(\Delta z)_{\max}} = \frac{\hbar}{2d}, \text{ а кинетическая энергия частицы не может быть}$$

меньше величины  $K_{\min} = \frac{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2}{2m} \approx \frac{3\hbar^2}{8md^2}$ . При уменьшении размеров потенциального ящика наименьшая разрешенная энергия находящейся в нем частицы должна возрастать!

По этой причине **электрон не может упасть на ядро атома или находиться внутри ядра**. Его кинетическая энергия будет возрастать быстрее потенциальной. Суммарная энергия  $E = K + U \geq \frac{3\hbar^2}{8md^2} - \frac{kZe^2}{d}$  окажется положительной, и электрон обязан покинуть ядро.

2) Соотношение  $\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar/2$  говорит о том, что энергия микрочастицы может без всяких на то причин меняться на величину  $\Delta E$ . Энергия  $\Delta E$  уносится виртуальными частицами или квантами, которые спустя время  $\Delta t \sim \hbar/(2\Delta E)$  обязаны исчезнуть, быть поглощенными либо первоначальной частицей, либо другими частицами системы.

Любая микрочастица окружена "облаком" непрерывно испускаемых и поглощаемых виртуальных частиц, которое мы называем полем. Электроны и другие частицы с электрическим зарядом окружены "облаком" виртуальных фотонов, образующих электромагнитное поле, изображенное на рисунке справа. Взаимодействие на расстоянии посредством поля происходит при обмене виртуальным фотоном, переносящим энергию  $\Delta E$  и импульс  $\Delta \vec{p}$  от одной заряженной частицы к другой (электрический заряд фотоны не переносят).



Все физические поля имеют квантовую природу. Если устремить  $\hbar \rightarrow 0$ , то  $\lambda_B \rightarrow 0$ , и частицы потеряют волновые свойства, станут классическими с определенными траекториями и определенными динамическими переменными  $\vec{r}, \vec{p}, E$ . Но при этом исчезнут все поля, и мы получим мир классических, взаимодействующих только при непосредственных столкновениях частиц. Мир превратится в идеальный газ.

## 25.4. Стационарное уравнение Шредингера

Корпускулярные и волновые свойства фотона и микрочастицы аналогичны, и если фотону с энергией  $\hbar\omega$ , летящему вдоль оси  $x$  можно сопоставить волновую функцию плоской монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ :  $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ , где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число, а величина  $\vec{E}$  является напряженностью электрического поля волны, то заменив частоту и длину волны фотона на частоту и длину волны де Бройля, получим волновую функцию микрочастицы  $\Psi(x, t) = A \cos(\omega_B t - 2\pi x/\lambda_B)$ , которую обычно записывают в виде экспоненты от комплексной переменной:

$\Psi(x, t) = A e^{-i(\omega_B t - 2\pi x/\lambda_B)} = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$  – это волновая функция свободной микрочастицы с энергией  $E$  и импульсом  $p$ , летящей вдоль оси  $x$ , где  $A$  – некоторая постоянная

$$\text{Вычислим производные от функции этой функции: } E = \frac{i\hbar}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad p = -\frac{i\hbar}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad p^2 = -\frac{\hbar^2}{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}.$$

Но уравнение квантовой теории, позволяющее найти волновую функцию, должно иметь одинаковую форму для любых состояний, в том числе и для свободной частицы. Если полная энергия  $E$  **нерелятивистской** частицы определена, то она будет суммой потенциальной энергии  $U(x, t)$  и кинетической энергии  $K = mv^2/2 = p^2/(2m)$ :  $E = \frac{p^2}{2m} + U(x, t)$ .

Подставляя в эту формулу величины  $E$  и  $p^2$ , выраженные выше через производные от волновой функции  $\Psi$ , приходим к дифференциальному уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi.$$

Оно называется нестационарным уравнением Шредингера и было предложено Шредингером в 1927 г. для описания волновых свойств микрочастиц. **Нестационарным** уравнение оно называется потому, что входящая в него потенциальная энергия взаимодействия микрочастицы с внешними телами **зависит от времени  $t$** .

Чаще встречаются задачи, когда частица движется в **стационарном** внешнем поле, и **ее потенциальная энергия не зависит явно от времени**.

В этом случае зависящая от времени волновая функция может быть записана в виде  $\Psi(x, t) = e^{\frac{-i}{\hbar} E t} \psi(x)$ , где новая волновая функция  $\psi(x)$ , зависящая только от координат, является решением одномерного стационарного уравнения

Шредингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x)) \psi(x) = 0.$$

Реальная частица движется в 3-мерном пространстве, и для неё  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = -\hbar^2 \Delta \Psi / \Psi$ , где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – дифференциальный оператор Лапласа. Для неё стационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$\Delta \psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(\vec{r})) \psi(\vec{r}) = 0.$$

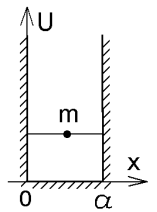
## 25.5. Микрочастица в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы

Уравнение Шредингера позволяет одновременно найти волновую функцию  $\psi(\vec{r})$  и разрешенные значения энергии  $E_n$  для микрочастицы, находящейся в поле с любой потенциальной энергией  $U(\vec{r})$ . Но для этого го при решении уравнения Шредингера **обязательно надо задать граничные условия** для функции  $\psi$  или для плотности вероятности обнаружения частицы  $|\psi|^2$ .

Наиболее просто уравнение Шредингера решается в том случае, когда частица находится в прямоугольной потенциальной яме ширины  $a$  с бесконечными стенками. Так как внутри ямы  $U = 0$ , то в одномерном случае уравнение Шредингера принимает вид  $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0$ , где  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$  и имеет решение

$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha)$ . Вылететь из ямы частица не может, и плотность вероятности ее обнаружения  $|\psi|^2$  вне ямы и на стенках ямы равна нулю. Это дает граничные условия для функции  $\psi$ :

$$\begin{cases} \psi|_{x=0} = A \sin \alpha = 0, \text{ откуда } \alpha = 0; \\ \psi|_{x=a} = A \sin ka = 0, \text{ откуда } ka = \pi n \text{ или } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\pi n}{a}, \quad 1, 2, 3... \end{cases}$$



Энергия микрочастицы с массой  $m$ , находящейся в потенциальной яме ширины  $a$ , может принимать только отдельные разрешенные значения

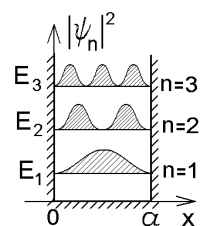
$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Каждому значению энергии  $E_n$  соответствует своя

волновая функция, описывающая состояние частицы:  $\psi_n(x) = A \sin(\pi n x / a)$ . Неизвестную постоянную  $A$  можно найти

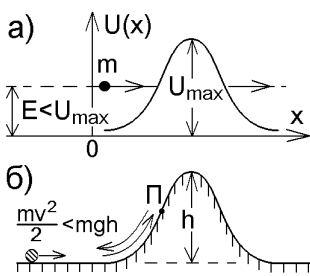
из условия нормировки:  $\int_0^a |\psi_n|^2 dx = A^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi n x}{a}\right) dx = \frac{A^2 a}{2} = 1$ . Эта постоянная  $A = \sqrt{2/a}$  будет одинаковой для всех

функций  $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right)$ .

Плотность вероятности обнаружения частицы в разных точках потенциальной ямы в состояниях с разной энергией изображена на рисунке справа. Если классическая частица в подобной яме движется с постоянной скоростью, и вероятность ее обнаружения во всех точках одинакова, то для микрочастицы это не так. В некоторых точках вероятность обнаружить микрочастицу максимальна, а в некоторых (например, вблизи стенок потенциальной ямы) – равна нулю.



## 25.6. Туннельный эффект

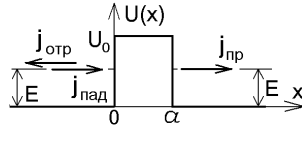
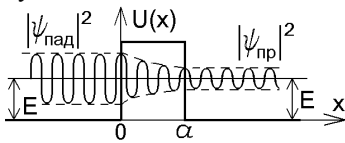


Туннельным эффектом называется прохождение микрочастицы через потенциальный барьер в том случае, когда полная энергия  $E$  частицы меньше высоты барьера (рисунок а).

В классической теории это невозможно. Если классическая частица с энергией  $E = mv^2/2$ , скользя без трения, повстречает горку высоты  $h > v^2/2g$  (рисунок б), то, поднявшись до точки поворота П, в которой вся ее кинетическая энергия перейдет в потенциальную, частица повернет обратно. Кинетическая энергия  $E - U$  не может быть отрицательной, и потенциальный барьер  $U = mgh > E$  не будет преодолен.

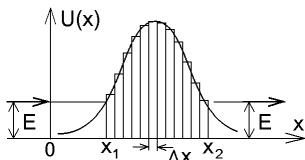
Тем не менее, на практике квантовый туннельный эффект встречается так часто, что о его природе обычно не задумываются.

*Пример:* металл, находясь в воздухе, покрывается окисной пленкой, которая является хорошим диэлектриком. Такая пленка образует потенциальный барьер, так как энергия, которую должны приобрести свободные электроны для преодоления слоя диэлектрика, намного больше энергии электронов в металле. Поэтому по классическим законам при включении окисленной вилки в розетку ток в ней возникнуть не может. Но он возникает благодаря туннельному переходу электронов сквозь окисную пленку.



Решая уравнение Шредингера можно вычислить коэффициент прохождения (или вероятность преодоления) потенциального барьера  $D$  (это отношение потока частиц, прошедших через барьер, к потоку падающих на барьер частиц). Для по-

тenciального барьера прямоугольной формы  $D = j_{\text{пр}} / j_{\text{пад}} = \text{const} \cdot \exp\left(-2\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar\right)$ .

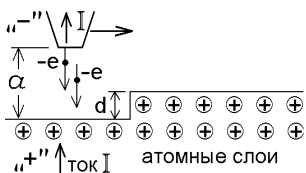


Если потенциальный барьер имеет произвольную форму, то разобьем его на  $n$  бесконечно узких прямоугольных барьеров шириной  $\Delta x$  и высотой  $U(x)$  каждый (рисунок слева). Вероятности независимых событий – преодоления каждого из узких барьеров – перемножаются:  $D = D_1 D_2 \dots D_n$ . Показатели экспонент в сомножителях при этом складываются и при

$\Delta x \rightarrow dx$  дают интеграл:

$$D = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx\right) \quad \text{-- это вероят-}$$

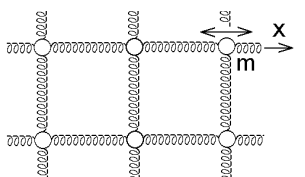
ность туннельного преодоления падающей микрочастицей с массой  $m$  и энергией  $E$  барьера произвольной формы.



*Пример:* туннельный микроскоп. Перемещая источник электронов на очень малом удалении  $a \sim 10^{-9}$  м над поверхностью вещества, измеряют ток  $I$ , текущий через источник за счет туннельного перехода электронов. Вероятность перехода, т.е. величина тока  $I$  очень сильно (экспоненциально) зависит от расстояния  $a$ . По изменению тока можно найти изменение  $\Delta a \leq 10^{-10}$  м и определить расположение атомных слоев. Таким образом измерены размеры и расположение атомов в отдельных молекулах.

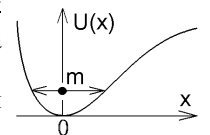
## 25.7. Квантовый гармонический осциллятор

Примером такой системы будет ион кристаллической решетки твердого тела, совершающий тепловые колебания. Но свойствами гармонического осциллятора обладает также любая микрочастица, совершающая **малые колебания** возле положения равновесия в потенциальной яме произвольной формы, где зависимость потенциальной энергии от смещения  $x$  из положения равновесия можно считать параболической функцией  $U(x) = Kx^2/2$ . Если  $m$  – масса частицы



(иона), то циклическая частота его колебания в таком поле  $\omega = \sqrt{K/m}$ . Такая система называется одномерным квантовым гармоническим осциллятором и описывается стационарным уравнением Шредингера

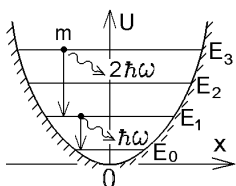
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi = 0. \quad \text{Решение уравнение Шредингера дает спектр разрешенных значений}$$



энергии квантового гармонического осциллятора:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{Эти энергетические}$$

уровни находятся на одинаковом расстоянии  $\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$  друг от друга. Поэтому при переходе из одного разрешенного состояния в другое осциллятор может испускать энергию только отдельными квантами-фотонами с энергией  $E_{\text{фотона}} = E_{n'} - E_n = (n' - n)\hbar\omega$ . Наименьшая энергия испускаемых фотонов равна  $\hbar\omega$ , где  $\omega$  – собственная частота колебаний осциллятора



Тем самым мы объяснили гипотезу Планка – фотоны теплового излучения испускаются с кратными частотами колеблющимися атомами кристаллической решетки. Но приведенный результат позволяет сделать еще один вывод:

Частицы классического газа при температуре  $T = 0$  К должны находиться в покое. Квантовая теория это запрещает – нельзя одновременно получить и координату покоящейся частицы и ее определенный (нулевой) импульс. Поэтому все процессы при низких температурах описываются не классической, а квантовой теорией. Если охладить металл до  $T = 0$  К, колебания атомов в нем не прекратятся. Одномерный осциллятор будет при этом иметь минимальную энергию  $E_0 = \hbar\omega/2$  и уменьшить эту энергию не может.

**Замечание:** самый нижний разрешенный уровень энергии называется основным. И осциллятор, и электрон в атоме водорода, и частица в потенциальной яме стремятся занять этот самый низший свободный (с учетом принципа Паули) энергетический уровень. Уровни, расположенные выше и соответствующие большим значениям энергии называются возбужденными. Частица остается в возбужденном состоянии очень недолго,  $< 10^{-8}$  с, и переходит в основное состояние с минимальной энергией, испуская фотон. На приведенном здесь рисунке  $E_0$  – энергия основного состояния (основной уровень энергии);  $E_1$  – энергия первого возбужденного состояния (первый возбужденный уровень энергии);  $E_2$  – энергия второго возбужденного состояния (второй возбужденный уровень энергии) и т.п.

## 26. ОСНОВЫ ТЕОРИИ АТОМНОГО ЯДРА

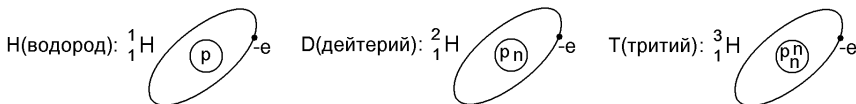
### 26.1. Состав атомного ядра. Нуклоны. Массовое и зарядовое число. Изотопы

Ядро любого атома состоит из протонов и нейтронов, которые называют нуклонами – составными частицами ядра (лат. – *nucleus*). Масса протона  $m_p \approx 1836m_e = 1,6726 \cdot 10^{-27}$  кг, а положительный заряд  $+e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл по величине равен заряду электрона. Масса нейтрона чуть больше;  $m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27}$  кг, а заряд нейтрона равен нулю. Как и электроны, протоны и нейтроны имеют спиновое число  $s = 1/2$ .

Число  $Z$  протонов в ядре называют его зарядовым числом. Число  $A$  нуклонов в ядре называют его массовым числом. Число нейтронов в ядре  $N = A - Z$ .

Число  $Z$  протонов в ядрах одного химического элемента одинаково и определяет число электронов в атоме, структуру электронных оболочек и место этого элемента в таблице Менделеева. Число нейтронов в ядрах такого элемента может быть разным и не оказывает существенного влияния на структуру электронных оболочек и химические свойства атома.

Ядра (атомы) с одинаковым зарядовым числом  $Z$  и разным массовым числом  $A$  (разным числом нейтронов) называют изотопами. Их принято обозначать  ${}_Z^A X$ , где  $X$  – символ химического элемента. Известно, например, три изотопа водорода:

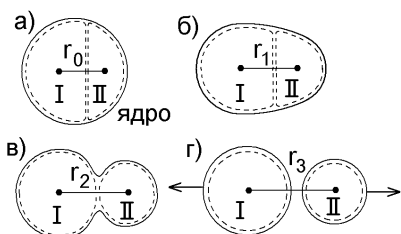


Число изотопов у элементов с большими зарядовыми числами  $Z$  велико. У платины, например, наблюдается 34 изотопа  ${}_{78}^A\text{Pt}$ , где  $168 \leq A \leq 201$ ; у цезия – 35 изотопов  ${}_{55}^A\text{Cs}$ , где  $114 \leq A \leq 148$ .

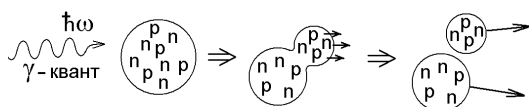
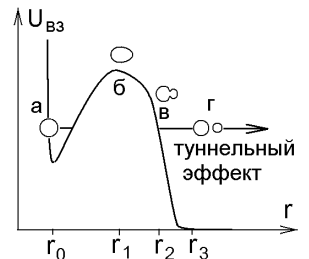
Радиус ядра можно вычислить по приближенной формуле  $r_{\text{я}} \approx 1,1 \cdot \sqrt[3]{A} \cdot 10^{-15}$  м.

### 26.2. Деление ядер

Некоторые ядра-изотопы устойчивы, некоторые – очень быстро распадаются на ядра-осколки или испускают какие-либо частицы, превращаясь в другие ядра. Объяснить деление ядер проще всего рассматривая ядро как сферическую каплю, в которой нуклоны ведут себя как несжимаемая сверхтекучая "нуклонная жидкость" с постоянной плотностью. Это – модель Бора и Вайцзеккера.



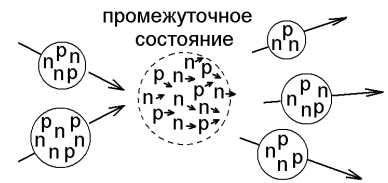
Рассмотрим исходное ядро, внутри которого могут случайно образоваться совокупности нуклонов I и II – зародыши новых ядер. На рисунке а) они обозначены штриховой линией. Если капля-ядро деформируется, расстояние  $r$  между центрами таких зародышей возрастает (рисунок б). Но сильное взаимодействие между нуклонами препятствует их раздвиганию, и потенциальная энергия взаимодействия  $U_{\text{вз}}$  между зародышами также растет и достигает максимума, когда ядро принимает форму вытянутого сфероида (см. рисунок б и рисунок справа). При дальнейшей деформации капля-ядро принимает "гантелеобразную" форму (рисунок в), а энергия взаимодействия между зародышами I и II начинает уменьшаться и падает до нуля, когда капля разрывается на две капли-осколка (рисунок г), между которыми силы притяжения нуклонов уже не действуют.



Подобная деформация ядра с распадом на осколки происходит, когда ядро поглощает какую-либо частицу, например –  $\gamma$  – квант, передающую энергию и импульс нуклонам ядра. Но тот же механизм приводит и к спонтанному самопроизвольному делению

ядер. Зародыши новых ядер I и II не проходят все стадии деформации ядра, а случайным образом, начав деформацию, преодолевают потенциальный барьер за счет туннельного эффекта.

Естественная радиоактивность или спонтанный распад ядер объясняется наличием туннельного эффекта.

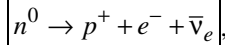


### 26.3. $\alpha$ -, $\beta$ - и $\gamma$ -излучение. $\alpha$ - и $\beta$ -распад ядер

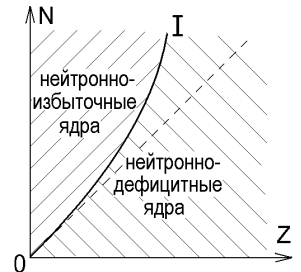
Ядерные превращения, как правило, сопровождаются испусканием небольших частиц – ядер водорода (протонов), ядер гелия, электронов и т.п., масса которых мала, а вероятность вылета из ядра за счет туннельного эффекта достаточно велика.

Какие именно частицы вылетят из нестабильного ядра и какой тип распада оно испытает – зависит от соотношения числа  $N$  нейтронов и числа  $Z$  протонов в ядре. На рисунке сплошная линия стабильности ядер OI соответствует максимальному значению энергии связи ядра (такие ядра устойчивы).

К области выше этой линии относятся нейтронно-избыточные ядра, энергия связи которых уменьшена из-за того, что в ядре присутствуют лишние, избыточные нейтроны. Чтобы энергия связи ядра возросла, часть таких нейтронов должна превратиться в протоны в реакции  $\beta^-$ -распада нейтрона



при которой образуется протон  $p^+$  и электрон  $e^-$ . Вылетающие из ядра электроны были названы  $\beta$ -частицами. Их кинетическая энергия  $E_{ке}$  меньше той, что соответствует закону сохранения энергии. Поэтому наряду с протоном и электроном испускается безмассовая частица  $\bar{\nu}_e$ , которую позже назвали электронным антинейтрино, и которая уносит недостающую энергию.



$\beta^-$ -распад нейтронно-избыточных ядер  $X$  в ядра  $Y$  происходит по схеме  $\left[ \begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X \rightarrow \begin{matrix} A \\ Z+1 \end{matrix} Y + e^- + \bar{\nu}_e \right]$ .

Пример:  ${}_{83}^{210}\text{Bi} \rightarrow {}_{84}^{210}\text{Po} + e^- + \bar{\nu}_e$ .

Ядра, лежащие ниже линии OI также имеют уменьшенную энергию связи из-за того, что число нейтронов в них мало. Такие ядра называют нейтронно-дефицитными. Увеличение числа нейтронов может происходить двумя способами:

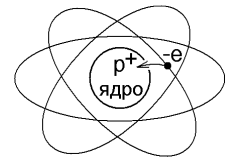
1) реакция  $\beta^+$ -распада, обратная процессу  $\beta^-$ -распада. При этом избыточный протон ядра распадается в нейтрон  $n^0$ , позитрон  $e^+$  и электронное нейтрино  $\nu_e$ :  $\left[ p^+ \rightarrow n^0 + e^+ + \nu_e \right]$ .

Наряду с электронами  $e^-$ , позитроны  $e^+$  также называют  $\beta$ -частицами.

$\beta^+$ -распад нейтронно-дефицитных ядер  $X$  в ядра  $Y$  идет по схеме  $\left[ \begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X \rightarrow \begin{matrix} A \\ Z-1 \end{matrix} Y + e^+ + \nu_e \right]$ .

Пример:  ${}_{83}^{202}\text{Bi} \rightarrow {}_{82}^{202}\text{Pb} + e^+ + \nu_e$ ;

2) реакция электронного захвата. Избыточный протон ядра захватывает электрон из электронной оболочки, окружающей ядро в атоме. Как правило, это электрон из ближайшей К-оболочки атома. Поэтому реакцию электронного захвата часто называют К-захватом. Она сопровождается испусканием электронного нейтрино:  $\left[ p^+ + e^- \rightarrow n^0 + \nu_e \right]$ .



Ядерная реакция при электронном захвате идет по схеме  $\left[ \begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X + e^- \rightarrow \begin{matrix} A \\ Z-1 \end{matrix} Y + \nu_e \right]$ .

Пример:  ${}_{83}^{204}\text{Bi} + e^- \rightarrow {}_{82}^{204}\text{Pb} + \nu_e$ .

Реакции  $\beta^+$ -распада и электронного захвата уменьшают число или избыточных нейтронов, или избыточных протонов в ядре, увеличивают энергию связи ядра, делают его более устойчивым, возвращают отношение  $N/Z$  к оптимальной величине.

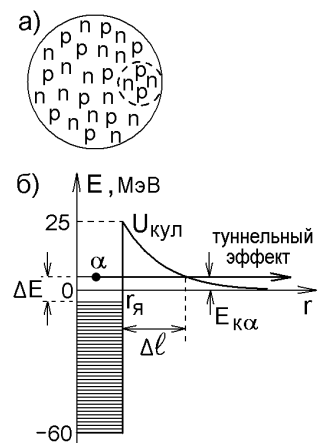
Имеется еще одна возможность спонтанного распада с выделением энергии –  $\alpha$ -распад

ядра. При  $\alpha$ -распаде ядро испускает  $\alpha$ -частицу – ядро  ${}^4_2\text{He}$ , имеющее очень большую удельную энергию связи  $\varepsilon_{св\text{He}} = 7,03$  МэВ/нуклон и массу  $m_\alpha = 6,644 \cdot 10^{-27}$  кг.

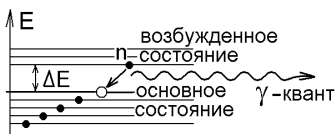
$\alpha$ -распад ядра  $X$  в ядро  $Y$  происходит по схеме  $\left[ \begin{matrix} A \\ Z \end{matrix} X \rightarrow \begin{matrix} A-4 \\ Z-2 \end{matrix} Y + \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \text{He} \right]$ .

Пример:  ${}_{83}^{212}\text{Bi} \rightarrow {}_{81}^{208}\text{Tl} + \alpha$ .

Механизм  $\alpha$ -распада ядра таков: вблизи поверхности ядра нуклоны самопроизвольно образуют зародыши  $\alpha$ -частицы из двух протонов и двух нейтронов с увеличенной энергией связи. Такие зародыши непрерывно образуются и распадаются. В соответствии с соотношением неопределенности Гейзенберга они на очень короткое время  $\Delta t$  могут изменить свою энергию на величину  $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$  и оказаться на энергетическом уровне,



лежащем выше уровня  $E = 0$ . С некоторой вероятностью зародыш  $\alpha$ -частицы может преодолеть потенциальный барьер, образованный сильным ядерным притяжением нуклонов и кулоновским отталкиванием и вырваться из ядра за счет туннельного эффекта.



Нуклон в ядре, как и электрон в атоме, может оказаться на разрешенном энергетическом уровне, лежащем выше основного энергетического уровня. Такое ядро называют возбужденным. Как правило, время жизни возбужденного ядра  $\tau \sim 10^{-12}$  с много меньше времени жизни возбужденного атома  $\tau \sim 10^{-8}$  с. Нуклон возвращается на оказавшийся незаполненным нижележащий уровень энергии (в основное состояние), испуская фотон. Так как расстояния между разрешенными уровнями энергии в ядре  $\Delta E \sim 10 \div 0,01$  МэВ имеют много большую величину, чем расстояния между уровнями энергии электрона в атоме, то фотоны, испускаемые возбужденными ядрами, имеют очень большую частоту  $\omega = \Delta E/\hbar \geq 10^{19} \text{ с}^{-1}$  и малую длину волны  $\lambda = 2\pi c/\omega \leq 10^{-10}$  м. Электромагнитное излучение с такими частотами обладает сильно выраженными корпускулярными свойствами. Оно ведет себя как поток частиц – γ-квантов – с энергией и импульсом  $E_\gamma = \hbar\omega$ ,  $p_\gamma = \hbar\omega/c$ . Это излучение, которое в отличие от потоков  $\alpha$ - и  $\beta$ -частиц не отклоняется магнитным полем, сейчас называют γ-излучением.

Такие переходы из возбужденного состояния в основное  $\boxed{\frac{A}{Z} X' \rightarrow \frac{A}{Z} X + \gamma}$  часто называют γ-распадом ядра. Ядра  $X'$  и  $X$  называют изомерами. Число протонов и нейтронов в изомерах  $X'$  и  $X$  одинаково, но конфигурации их нуклонных оболочек различны. Поэтому изомеры имеют разную энергию связи, разный период  $\alpha$ - или  $\beta$ -распада, могут испытывать разный тип распада, т.е. ведут себя, как разные ядра.

Потоки  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -частиц, а также нейтронов вылетающих при распадах ядер, обладают большой энергией и выбивают электроны из атомов среды (ионизация), изменяя энергию связи соседних атомов и разрушая межатомные связи. Поэтому их называют ионизирующими излучениями. В первую очередь ионизирующие излучения повреждают длинные цепочки молекул в полимерных или биологических структурах.

Наиболее хорошо взаимодействуют с атомами среды и теряют свою энергию тяжелые  $\alpha$ -частицы. Поэтому достаточно слоя воздуха толщиной  $\sim 10$  см или даже листа бумаги, чтобы практически полностью задержать  $\alpha$ -излучение от внешних источников, используемых в технических устройствах.  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучения теряют энергию хуже, и для защиты от них необходимо ставить достаточно толстый слой свинцовой защиты. Наиболее хорошо поглощает  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучения свинец.

Однако наибольшую опасность представляют не внешние источники ионизирующих излучений, от которых можно защититься слоем задерживающего материала, а радионуклиды, накапливающиеся в самом организме в процессе облучения, дыхания или поступившие с пищей. К числу наиболее опасных нуклидов относятся изотопы йода  $^{131}_{53}\text{I}$  (источник  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучения, скапливается в щитовидной железе, легких), стронция  $^{90}_{38}\text{Sr}$  (источник  $\beta$ -излучения, накапливается в костях, легких), цезия  $^{137}_{55}\text{Cs}$  (источник  $\beta$ -излучения, накапливается во всех тканях тела, в печени). Периоды полураспада этих нуклидов достаточно велики:  $T_{\text{Sr}} = 28,5$  лет,  $T_{\text{Cs}} = 30,2$  лет, и все это время они будут облучать костный мозг. Даже изотоп йода  $^{131}\text{I}$  с  $T_I = 8,02$  суток за несколько недель существования в щитовидной железе успевает нанести огромный вред расположенным поблизости областям мозговой ткани.

## 26.4. Естественная радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Период полураспада

Спонтанные распады ядер (деление ядер, их  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -распад) происходит самопроизвольно и называется – естественной радиоактивностью. Она наблюдается практически у всех изотопов но с разной скоростью.

Момент распада каждого отдельного ядра определить невозможно. Законы квантовой физики позволяют найти только вероятность этого распада. Если число  $N$  ядер велико, то число ядер, распавшихся за время  $dt$ , будет пропорционально числу имевшихся ядер и интервалу времени  $dt$ :  $-dN = \lambda N dt$ . Знак "–" означает, что число ядер, не успевших распасться, убывает со временем, т.е.  $dN < 0$ . Постоянная  $\lambda$  различна для разных изотопов и типов распада. Ее называют постоянной распада.

Интегрируя обе части этого выражения, получаем экспоненциальный закон убывания числа нераспавшихся ядер со временем:

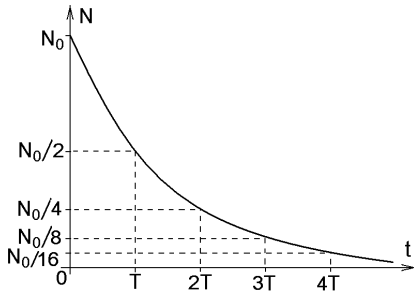
$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt \quad \text{или} \quad \boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}} \quad \text{— закон радиоактивного распада.}$$

Здесь  $N_0$  – число ядер в начальный момент времени  $t = 0$ , а  $N$  – число ядер, сохранившихся к моменту времени  $t$ .

Обычно радиоактивный распад характеризуют не постоянной распада  $\lambda$ , а периодом полураспада  $T$  – временем, за которое распадается половина ядер. Тогда из закона распада следует, что  $N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$  или  $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{T}$ .

Закон радиоактивного распада можно также записать в виде  $\boxed{N = N_0 e^{-t \ln 2 / T} = N_0 \cdot 2^{-t/T}}$ .





На рисунке видно, что через каждый промежуток времени, равный периоду полураспада число сохранившихся ядер уменьшается в два раза.

Закон радиоактивного распада можно применять только для очень большого числа ядер  $N \gg 1$ , когда отношение  $dP = -dN/N$  является вероятностью распада за интервал времени  $dt$ . Одно нестабильное ядро характеризуют

средним временем жизни  $\tau = \frac{\int t dN}{\int dN} = \frac{\int_0^{\infty} t d(e^{-\lambda t})}{\int_0^{\infty} d(e^{-\lambda t})} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}$ .

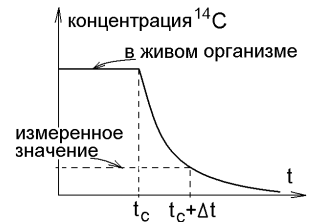
Число ядер, **распавшихся** за интервал времени  $t_1 \leq t \leq t_2$ , вычисляется по формуле

$$N_{\text{расп}} = N(t_1) - N(t_2) = N_0 \left( e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2} \right).$$

Полученные зависимости позволяют по измеренным в настоящий момент времени концентрациям радиоактивных изотопов определить их концентрацию в любой предшествующий момент времени. На этом основании основан метод радиоизотопной хронологии. Например, возраст всех органических останков в пределах  $\leq 60$  тыс. лет, определяется радиоуглеродным методом.

Под действием нейтронов космических лучей в атмосфере все время идет реакция превращения  ${}^7_1\text{N} + n \rightarrow {}^6_1\text{C} + p$ , и имеется постоянная концентрация радионуклида  ${}^{14}_6\text{C}$ . В клетках живых организмов (животных, растений) происходит обмен с атмосферой, при котором изотоп  ${}^{14}_6\text{C}$  с постоянной скоростью поступает в организм.

Хотя этот изотоп нестабилен, распадается по схеме  ${}^{14}_6\text{C} \xrightarrow{\beta^- \text{-распад}} {}^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$  и имеет период полураспада  $T = 5730$  лет, его содержание в функционирующем организме практически постоянно. В момент смерти  $t_c$  обмен клеток организма с атмосферой прекращается, и концентрация изотопа  ${}^{14}_6\text{C}$  уменьшается в соответствии с законом радиоактивного распада. Измерив концентрацию  ${}^{14}_6\text{C}$  в органических останках можно точно определить возраст  $\Delta t$  этих останков.



Радиоуглеродный метод хорошо работает в пределах  $\Delta t \leq 60$  тыс. лет и используется в криминалистике, археологии и т.п. Чтобы определить возраст геологических пород, аналогичным образом определяют содержание в них радионуклидов со много большим периодом полураспада или содержание продуктов их распада:  ${}^{206}_{82}\text{Pb}$ ,  ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ ,  ${}^{86}_{38}\text{Sr}$ .

## 26.5. Энергия выхода ядерной реакции распада. Дефект масс

Спонтанный естественный распад ядер с выделением энергии происходит за счет уменьшения суммарной энергии покоя участвующих в реакции частиц. Разность суммарных масс частиц (ядер) до реакции и после реакции называют дефектом масс:

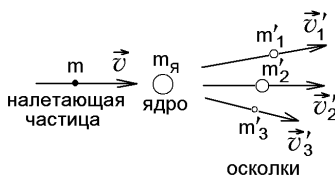
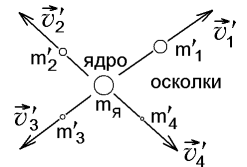
$$\Delta m = \sum_{\text{до реакции}} m_i \text{ нач} - \sum_{\text{после реакции}} m'_j \text{ кон}.$$

Видно, что в результате такой реакции суммарная масса частиц после распада будет меньше суммарной массы частиц до распада на величину  $\Delta m$ . Разность энергий покоя начальных и конечных частиц (ядер) называют энергетическим выходом реакции

$$Q_1 = \Delta mc^2 = \left( \sum_i m_i \text{ нач} - \sum_j m'_j \text{ кон} \right) c^2.$$

Эта энергия выделяется в виде дополнительной кинетической энергии ядер-осколков или энергии фотонов электромагнитного излучения ( $\gamma$ -квантов), излученных в процессе ядерной реакции. Вспоминая, что кинетическая энергия хаотического движения частиц является тепловой энергией, можно вычислить тепло, выделяемое в реакциях распада ядер как произведение энергетического выхода (энергия распада одного ядра) на число распавшихся за время  $\Delta t$  ядер:

$$Q = Q_1 \cdot N_{\text{расп}} = Q_1 \cdot N_0 \left( 1 - e^{-\lambda \Delta t} \right).$$



Ядерная реакция может происходить и с поглощением энергии:  $Q_1 < 0$ . Для этого первоначальное ядро с массой  $m_я$  должно поглотить какую-либо частицу с массой  $m$ , имеющую достаточно большую кинетическую энергию. В этом случае суммарная масса частиц в процессе реакции возрастает:  $m + m_я < \sum m'_i$ .

Из законов сохранения релятивистских энергии – импульса можно найти **минимальную** кинетическую энергию налетающей частицы, необходимую для протека-

ния такой реакции. Она называется энергетическим порогом реакции и равна

$$E_{\text{пор}} = \frac{(\sum m'_i)^2 - (m_я + m)^2}{2m_я} c^2.$$

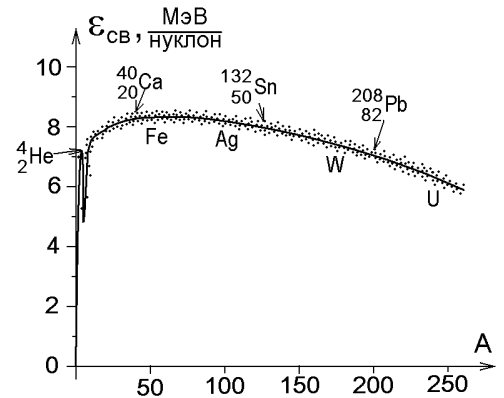
## 26.6. Удельная энергия связи нуклонов в ядре. Устойчивость и неустойчивость ядер. Возможность термоядерного синтеза

Рассмотренная капельная модель ядра позволяет ответить на вопрос: сколько нейтронов и протонов может войти в состав ядер-осколков и почему, например, одни ядра очень устойчивы, а другие – мгновенно распадаются.

Для этого определяют энергию связи ядра  $E_{\text{св}}$ , как минимальную энергию, которую надо сообщить покоящемуся ядру, чтобы разделить его на отдельные нуклоны. Чем больше величина  $E_{\text{св}}$ , тем устойчивее ядро. Ядра с малой энергии связи будут распадаться (или сливаться) в более энергетически выгодные ядра с большой энергией связи.

На рисунке справа показан усредненный график зависимости удельной энергии связи  $\epsilon_{\text{св}}$  (это энергия связи, приходящаяся на один нуклон ядра,  $\epsilon_{\text{св}} = E_{\text{св}} / A$ ) от числа  $A$  нуклонов в ядре. Отдельные точки выше или ниже этого графика соответствуют отдельным устойчивым изотопам, или неустойчивым, быстро распадающимся изотопам.

Наиболее устойчивы ядра с массовым числом  $A = 40 \div 70$  (хотя и среди них имеются неустойчивые изотопы с избыточным или недостаточным числом нейтронов). Эти ядра имеют наибольшую удельную энергию связи  $\epsilon_{\text{св}}$ . С ростом числа нуклонов  $A$  наблюдается тенденция к уменьшению  $\epsilon_{\text{св}}$  (рис.10.18). Это означает, что тяжелые ядра менее устойчивы и для них энергетически выгоден самопроизвольный распад в более легкие ядра с большей энергией связи, что обычно и происходит.



Энергетический выход ядерной реакции распада также можно записать в виде разности энергий связи конечных и начальных ядер:

$$Q_1 = \sum_j E'_{\text{св}j \text{ кон}} - \sum_i E_{\text{св}i \text{ нач}} = \sum_j A'_j \epsilon'_{\text{св}j \text{ кон}} - \sum_i A_i \epsilon_{\text{св}i \text{ нач}},$$

где  $A_i$  и  $A'_j$  – число нуклонов в начальных и конечных ядрах (конечные ядра более устойчивы и обладают большей удельной энергией связи  $\epsilon_{\text{св}}$ ).

Но график зависимости  $\epsilon_{\text{св}}$  показывает, что легкие ядра с числом нуклонов  $A < 30 \div 40$  имеют не очень большую энергию связи, и для них энергетически выгодно соединение в более устойчивые ядра с  $A = 40 \div 70$ . Такая реакция, происходящая с выделением тепловой энергии, называется термоядерным синтезом.

Осуществить реакцию термоядерного синтеза не так просто. Для слияния центры ядер должны сблизиться на расстояние  $2r_{\text{я}}$ , где  $r_{\text{я}}$  – радиус ядра (10.6). Но при этом положительно заряженным ядрам надо преодолеть кулоновские силы отталкивания, кулоновский потенциальный барьер. Это возможно, если ядра движутся навстречу друг другу с кинетической энергией, превышающей кулоновскую потенциальную энергию отталкивания. Такие ядра имеются в газе, на-

гретом до температуры  $T$ , при которой средняя кинетическая энергия  $2\langle E_{\text{к}} \rangle = 2 \cdot \frac{3}{2} kT \geq \frac{k(Ze)^2}{2r_{\text{я}}}$  или  $T \geq \frac{k(Ze)^2}{6kr_{\text{я}}}$  ( $k$  – по-

стоянная Больцмана,  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ ). Это – огромная температура. Для слияния двух ядер водорода с  $r_{\text{я}} \sim 10^{-15}$  м газ из таких ядер (протонов) надо нагреть до температуры  $T \geq ke^2/6kr_{\text{я}} \approx 3 \cdot 10^9$  К, недостижимой пока в лабораторных условиях.

К счастью, ядра могут преодолеть кулоновский потенциальный барьер за счет туннельного эффекта. Это снижает температуру, при которой возможны реакции термоядерного синтеза до  $T_{\text{тс}} \approx 10^7 \div 10^8$  К (температура ядерного взрыва). Условия возникновения термоядерного синтеза выполняются в недрах звезд. Источник энергии солнечного излучения и горения всех звезд – термоядерные реакции. Каждая звезда по сути является взрывающейся термоядерной бомбой, в которой плазма из ядер удерживается от разлета огромными силами гравитационного притяжения.

