

## Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

**Tid och plats:** Lördagen den 23 oktober 2021 klockan 08.30-12.30.

**Hjälpmedel:** Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, Olle Branders formelsamling.

**Lösningsskiss:** Tünde Fülöp

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Ett vektorfält  $\mathbf{F}$  är givet i sfäriska koordinater och med sfäriska basvektorer genom

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{a \cos \theta}{r^3} \hat{e}_r + \frac{b \sin \theta}{r^3} \hat{e}_\theta$$

där  $a$  och  $b$  är konstanter.

- (a) Bestäm förhållandet mellan konstanterna  $a$  och  $b$  som gör att vektorfältet blir virvelfritt (konservativt). (2 poäng)
- (b) Bestäm sedan en skalär potential till detta vektorfält! (6 poäng)
- (c) Vad är den fysikaliska tolkningen av vektorfältet? (2 poäng)

Lösning: \_\_\_\_\_

- (a) Rotationen av vektorfältet är

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{(a - 2b) \sin \theta}{r^4} \hat{e}_\phi.$$

$\mathbf{F}$  är virvelfritt om  $a = 2b$ .

- (b) Den skalära potentialen bestäms via sambandet  $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ . Vi får ekvationssystemet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{2b \cos \theta}{r^3} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{b \sin \theta}{r^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0 \tag{3}$$

Integration av första ekvationen ger

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{b \cos \theta}{r^2} + f(\theta, \varphi)$$

och insättning i andra ekvationen ger

$$-\frac{b \sin \theta}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{b \sin \theta}{r^2}$$

vilket leder till att  $\partial f / \partial \theta = 0$ , som innebär att  $f(\theta, \varphi) = g(\varphi)$ . Insättning i tredje ekvationen ger  $\partial g / \partial \varphi = 0$ , vilket betyder att  $g(\varphi)$  är konstant. Potentialen blir

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{b \cos \theta}{r^2} + \text{konst}$$

(c) Fältet från en dipol.

2. Två ledande plattor, båda parallella med  $xz$ -planet, befinner sig vid  $y = 0$  och  $y = d$ . Plattan vid  $y = 0$  har potentialen 0 och den vid  $y = d$  har potentialen  $V_0$ . Området mellan plattorna är fyllt med laddningar, med volym-laddningstätheten  $\rho = -\rho_0 y / d$ . Antag att kanteffekter kan försummas (alltså att plattorna kan antas ha oändlig utbredning i  $x$  och  $z$ ). Bestäm potentialen och elektriska fältet mellan plattorna! Tips: lös Poissons ekvation med lämpliga randvillkor.

*Lösning:* \_\_\_\_\_

Vi behöver lösa Poissons ekvation i en dimension

$$\frac{d^2 V(y)}{dy^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 d} y.$$

Integrera två gånger:

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d} y^3 + C_1 y + C_2$$

Randvillkor vid de två ledande plattorna

$$y = 0 : \quad V = 0 = C_2 \quad (4)$$

$$y = d : \quad V = V_0 = \frac{\rho_0 d^2}{6\epsilon_0} + C_1 d \quad (5)$$

Från andra ekvationen får vi

$$C_1 = \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}$$

Sätt in integrationskonstanterna i uttrycket för potentialen:

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d} y^3 + \left( \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0} \right) y.$$

Elektriska fältet kan räknas från  $\mathbf{E} = -\nabla V$  och blir

$$\mathbf{E} = -\hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} = -\hat{y} \left[ \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 d} y^2 + \left( \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0} \right) \right].$$

## 3. Genom sambanden

$$x = (R + \xi \cos u) \sin w \quad (6)$$

$$y = (R + \xi \cos u) \cos w \quad (7)$$

$$z = \xi \sin u \quad (8)$$

där  $u, w \in [0, 2\pi]$  och  $\xi \in [0, R]$  definieras ett toroidalt koordinatsystem med den konstanta storradien  $R$ . En toroidal yta  $S$  med storradien  $R = 4a$  och lillradien  $a = 1$  m (se figur) kan beskrivas med koordinaterna  $x = a(4 + \cos u) \sin w$ ,  $y = a(4 + \cos u) \cos w$  och  $z = a \sin u$ .

Bestäm normalytintegralen  $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  på ytan  $S$ , om vektorfältet är givet av

$$\mathbf{F} = -x\hat{x} + y\hat{y} + 6z\hat{z}.$$

*Lösning:*\_\_\_\_\_

Gauss sats ger  $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{F} dV$ . Divergensen  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 6$  är oberoende av positionen, vilket gör att volymintegralen  $\int \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 6V_{torus}$ . Problemet reduceras alltså till att beräkna volymen av torusen.

Man kan beräkna volymintegralen genom att först beräkna volymelementet  $dV = \xi(4 + \xi \cos u) dw d\xi du$  och sedan beräkna integralen

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} 6\xi(4 + \xi \cos u) dw d\xi du = 48\pi^2 \text{ m}^3$$

Om man råkar veta att volymen av en torus är  $V_{torus} = 2\pi R\pi a^2$  kan man skriva upp direkt  $V_{torus} = 8\pi^2 \text{ m}^3$  och svaret  $48\pi^2 \text{ m}^3$ .

4. På en cirkelyta med radien  $a$  finns en ytkälla med ytkälltätheten

$$\sigma(\rho) = \frac{\rho^2}{a^2} \sigma_0$$

där  $\sigma_0$  är konstant. Bestäm potentialen från ytkällan på cirkelskivans mittpunktsnormal.

*Lösning:*\_\_\_\_\_

Problemet symmetri gör det lämpligt att använda cylindriska koordinater. Beteckna Ortsvektorn för en punkt på källan med  $\mathbf{r} = \rho\hat{e}_\rho$  och Ortsvektorn för punkten vi vill veta potentialen i med  $\mathbf{r}_p = z_p\hat{z}$ . Ta ett ytelement på cirkelytan  $dS = \rho d\rho d\varphi$ . Laddningen på den är

$dq = \sigma dS = \sigma \rho d\rho d\varphi = \frac{\sigma_0}{a^2} \rho^3 d\rho d\varphi$ . Avståndet  $\mathbf{r}_p - \mathbf{r} = z_p \hat{z} - \rho \hat{e}_\rho$  och absolutbeloppet blir  $|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}| = \sqrt{z_p^2 + \rho^2}$ .

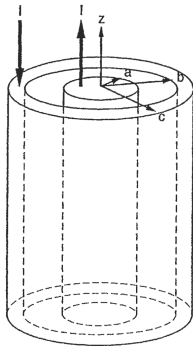
Vi tecknar potentialen för en punktkälla

$$d\phi(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}) = \frac{dq}{4\pi|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} = \frac{\sigma_0 \rho^3 d\rho d\varphi}{4\pi a^2 \sqrt{\rho^2 + z_p^2}}$$

och potentialen från hela cirkelskivan blir

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}_p) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma_0 \rho^3 d\rho d\varphi}{4\pi a^2 \sqrt{\rho^2 + z_p^2}} = \frac{\sigma_0}{2a^2} \int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z_p^2}} = [\text{sätt } t = \rho^2] \\ &= \frac{\sigma_0}{2a^2} \int_0^{a^2} \frac{t dt}{2\sqrt{t + z_p^2}} = \dots = \frac{\sigma_0}{6a^2} \left[ (a^2 - 2z_p^2) \sqrt{a^2 + z_p^2} + 2z_p^2 |z_p| \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

5. En oändligt lång koaxialkabels innerledare har radien  $a$  och dess ytterledare har innerradien  $b$  och ytterradien  $c$  (se figur). Strömmen  $I$  i innerledaren är i  $\hat{z}$ -riktningen och i ytterledaren flyter samma ström i motsatt riktning. Området mellan ledarna och utanför kabeln är vakuum.



Bestäm magnetfältet mellan ledarna  $a < \rho < b$  och utanför ledaren  $\rho > c$ ! (Tips: använd integralformen av Amperes lag (stationärtillstånd).) (10 poäng)

Lösning: \_\_\_\_\_

- (a) För  $a \leq \rho < b$ , är den inneslutna strömmen  $I$  så Amperes lag i integralform ger att

$$B_\phi = \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho}$$

- (b) Utanför koaxialkabeln ( $\rho > c$ ) är den inneslutna strömmen noll och  $B_\phi = 0$ .

6. Visa identiteten

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}$$

med hjälp av indexnotation! (10 poäng)

Lösning:\_\_\_\_\_

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}))_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{klm} A_l B_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_j} A_l B_m \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_j} A_l B_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial}{\partial x_j} A_l B_m \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} A_i B_j - \frac{\partial}{\partial x_j} A_j B_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} B_j + \frac{\partial B_j}{\partial x_j} A_i - \frac{\partial A_j}{\partial x_j} B_i - \frac{\partial B_i}{\partial x_j} A_j \\ &= B_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_j} B_i - A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} + \frac{\partial B_j}{\partial x_j} A_i \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} \end{aligned}$$