FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

3 september 2021

Sammanfattning

- Kroklinjiga koordinater väljs för att utnyttja symmetrier i problem.
- Ortonormerade basvektorer bildas från ortsvektorn

  $$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}, \tag{1}$$

  där skalfaktorerna

  $$h_i = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\right| \tag{2}$$

  är normeringskonstanter som garanterar att $\hat{e}_i = 1$
- Ortsvektorsdifferentialen (som också kallas förskjutningsvektorn) i ett kroklinjigt koordinatsystem skrivs

  $$\mathrm{d}\mathbf{r} = h_1\hat{e}_1\mathrm{d}u_1 + h_2\hat{e}_2\mathrm{d}u_2 + h_3\hat{e}_3\mathrm{d}u_3. \tag{3}$$
- De infinitesimala längdelementen är $dl_i = h_i du_i$, ytelementen

  $$\mathrm{d}\mathbf{S}_1 = \hat{e}_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3, \tag{4}$$

  (pss de övriga) och volymelementen $\mathrm{d}V = h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$.

Målet med föreläsningen är att fördjupa förståelsen av de grundläggande begreppen som vi behandlade under veckan. Vi ska dessutom ge en alternativ definition av basvektorer och beskriva gradient i kroklinjiga koordinater.

Alternativ definition av basvektorer Förra föreläsningen härledde vi basvektorer från normerade tangentvektorer till koordinatkurvorna

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i},$$

Den andra metoden för definition av basvektorer utgår ifrån gradienten. Vi har sett tidigare att gradienten anger riktningen för ökning av skalärfält ϕ. I ett kartesiskt koordinatsystem kan vi använda det enkla skalärfältet $\phi = x$. Därmed motsvarar ∇x riktningen i vilken x-koordinatens värden ökar, alltså x-axeln. Det gäller i ett kartesiskt koordinatsystem att

$$\nabla x = \left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial z}\right) = (1, 0, 0) = \hat{x} = \hat{e}_x$$

Basvektorer kan fås alltså genom att beräkna gradienten av motsvarande variabel

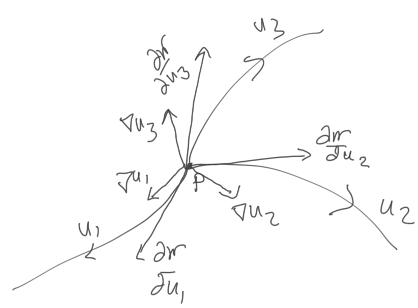
$$\hat{e}_i = \frac{1}{k_i}\nabla u_i,$$

där

$$k_i = |\nabla u_i|.$$

Den här typen av basvektor är vinkelrät mot koordinatytorna $u_i = konstant$.

Allmänt sett gäller det att dessa alternativa basvektorer har olika längd, så de normeras olika: $k_i \neq h_i$.



Det finns samband mellan de alternativa basvektorerna.

$$\nabla u_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} = \delta_{ij}. \tag{5}$$

där δ_{ij} är Kroneckers delta. (Detta är uppgift 2.4.3 i kompendiet.)

Ekvation (5) säger dels att ∇u_1 är vinkelrät mot $\partial \mathbf{r}/\partial u_2$ och $\partial \mathbf{r}/\partial u_3$, och analogt för ∇u_2 och ∇u_3, men också att deras längd är relaterade. Den första utsagon är ingen nyhet, eftersom $\partial \mathbf{r}/\partial u_2$ och $\partial \mathbf{r}/\partial u_3$ är definierade som tangenter till kurvor som ligger i u_1-ytan och ∇u_1 är normal till u_1-ytan. Den andra utsagon är däremot användbar för att bestämma *hur* längderna är relaterade: $k_i = 1/h_i$. Vi kan alltså skriva basvektorerna som:

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = h_i \nabla u_i. \tag{6}$$

Gradient i kroklinjiga koordinater

Betrakta ett skalärt fält ϕ. Målet är att fina värden på f_1, f_2, f_3 i uttrycket

$$\nabla \phi = f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_2 + f_3 \hat{e}_3 \tag{7}$$

Detta kan vi göra genom att skriva differentialen $d\phi$ på skalärfältet ϕ på två olika sätt:

1. utifrån definitionen av differentialen och partialderivatan och

2. med användandet av uttrycket $\mathrm{d}\phi = \nabla \phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ som vi härledde första föreläsningen (om vi förflyttar oss en sträcka $\mathrm{d}\mathbf{r}$ så förändras skalärfältet ϕ med $\mathrm{d}\phi$)

(1) Utifrån definitionen av differentialen och partialderivatan får vi:

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial \phi}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial \phi}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 \tag{8}$$

(2) Om vi förflyttar oss en sträcka $\mathrm{d}\mathbf{r}$ så förändras ϕ

$$\mathrm{d}\phi = \nabla \phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{9}$$

Förflyttningen $\mathrm{d}\mathbf{r}$ (ovan) kan vi i de nya koordinaterna skriva som

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = h_1 \hat{e}_1 \mathrm{d}u_1 + h_2 \hat{e}_2 \mathrm{d}u_2 + h_3 \hat{e}_3 \mathrm{d}u_3. \tag{10}$$

Om vi sätter in ϕ som en funktion av u_1, u_2 och u_3 från ekv (7) får vi

$$\mathrm{d}\phi = \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = (f_1\hat{e}_1 + f_2\hat{e}_2 + f_3\hat{e}_3) \cdot (h_1\hat{e}_1\mathrm{d}u_1 + h_2\hat{e}_2\mathrm{d}u_2 + h_3\hat{e}_3\mathrm{d}u_3)$$

$$\mathrm{d}\phi = f_1h_1du_1 + f_2h_2du_2 + f_3h_3du_3 \tag{11}$$

där vi har utnyttjat att basvektorerna är ortonormerade: $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0$ för $i \neq j$ och $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 1$ för $i = j$.

Båda uttrycken 8 och 11 är korrekta. Eftersom de anger $d\phi$ som en summa av termer, var och en innehållande du_1 måste koefficienterna framför du_i vara identiska. Av detta följer

$$\frac{\partial\phi}{\partial u_i} = f_ih_i$$

så vi får

$$f_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}$$

Gradienten blir då

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\hat{e}_3. \tag{12}$$

Exempel: Gradient i cylindriska koordinater: I cylindriska koordinater blir gradienten

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}. \tag{13}$$

Exempel: skalärfält och dess gradient i olika koordinatsystem Ett skalärfält är givet i kartesiska koordinater

$$\beta = \beta(x, y) = x^2 + y^2. \tag{14}$$

Motsvarande skalärfält i cylindriska (som i xy-planet också kallas planpolära) koordinater blir

$$\beta = \rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = \rho^2. \tag{15}$$

Gradienten i kartesiska koordinater blir

$$\nabla\beta = \hat{x}\partial_x\beta + \hat{y}\partial_y\beta = 2(x\hat{x} + y\hat{y}). \tag{16}$$

Medan i cylindriska (eller planpolära) koordinater blir den

$$\nabla\beta = \hat{e}_\rho\partial_\rho\beta + \hat{e}_\phi\frac{1}{r}\partial_\phi\beta = 2r\hat{e}_\rho. \tag{17}$$

Eftersom $x\hat{x} + y\hat{y} = r\hat{e}_\rho$ är det uppenbart att detta är samma vektor!

Potentialfält

En potential, Φ, är ett skalärt fält. Ur en potential kan vi beräkna ett vektorfält $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$, som vi ofta kallar för en fältstyrka.

Den elektrostatiska potentialen ger det elektriska fältet. Potentialen för gravitationsfältet ger tyngdkraftsfältet.

Minustecknet är en konvention för att kraften som utförs av fältet ska vara i en riktning som minskar potentialen. Mer om detta längre fram i kursen.

Beräkna gradienten av r^n Först beräkna ∇r. Skriv $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ och beräkna

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Från detta får vi

$$\nabla r = \frac{x}{r}\hat{e}_x + \frac{y}{r}\hat{e}_y + \frac{z}{r}\hat{e}_z = \frac{1}{r}(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z) = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Resultatet är enhetsvektor i riktningen $\mathbf{r}$, dvs $\hat{e}_r$ och då får vi

$$\nabla r = \hat{e}_r$$

Om vi går vidare att beräkna ∇r^n utnyttjar vi

$$\frac{\partial r^n}{\partial x} = nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}$$

och motsvarande resultat för y och z-derivatorna. Vi får då

$$\nabla r^n = nr^{n-1}\nabla r = nr^{n-1}\hat{e}_r$$

Exempel: potential som är proportionell mot $1/r$ I elektrostatiken är det känt att en punktladdning ger upphov till en potential som är proportionell mot $1/r$ där r är avståndet till laddningen. Beräkna fältet

$$\mathbf{F} = -\nabla\frac{1}{r}$$

Om vi sätter in $n = -1$ i beräkningen ovan får vi

$$\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\hat{e}_r.$$

Exempel: Fältlinjer i cylindriska och kartesiska koordinater (tentauppgift 2021 januari) Ett magnetfält i xy-planet ges av

$$\mathbf{B}(r,\theta) = \frac{B_0}{a}(-r\sin\theta\hat{x} + r\cos\theta\hat{y})$$

där B_0 och a är positiva konstanter. Bestäm ekvationen för den fältlinje $\mathbf{r}(\tau)$ som startar i punkten $\mathbf{r}(\tau=0) = a\hat{y}$. OBS (r,θ) är planpolära koordinater i xy-planet (dvs θ är vinkeln från x-axeln).

Notera att tentamakaren väljer att använda r istället för ρ och θ istället för ϕ men låt det inte förvirra er! Planpolär är bara ett annat ord för cylindriska, i xy-planet.

Repetition: fältlinjer Fältlinjerna till ett vektorfält $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ är de kurvor som överallt har $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ som tangentvektor.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\tau)\right), \tag{18}$$

där C är en godtycklig konstant (dvs du kan välja den som du själv vill, så länge som du inte sätter den till noll), och τ är en parameter för att beskriva punkterna längs fältlinjen.

- Skriv ut $\mathbf{r}$ i komponentform. Derivera med avseende på τ.
- Skriv $\mathbf{F}$ också i komponentform.
- Identifiera komponenterna. (Kan också ses som att ta skalärprodukt med basvektorerna, en i taget.) Det ger ett antal differentialekvationer.
- Välj C så att differentialekvationerna blir så enkla som möjligt.
- Lös differentialekvationerna.

Lösning Vi kan antingen arbeta med kartesiska koordinater eller cylindriska koordinater. Uttrycket för $\mathbf{B}$ är givet som en blandning mellan kartesiska och cylindriska koordinater. Vi börjar med att skriva upp det i båda koordinatsystemen först.

Eftersom $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$, vi ser att

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{a}(-y\hat{x} + x\hat{y})$$

I cylindriska (planpolära) koordinater blir $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{a} r \hat{e}_\theta$$

där vi har använt att $\hat{e}_\theta = \hat{y}\cos\theta - \hat{x}\sin\theta$

Alternativ 1: cylindriska Förskjutningsvektorn i planpolära koordinater $\mathbf{d}r = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta$ (glöm inte skalfaktorn i θ-riktningen).

Skriv upp ekvationen för fältlinjer

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\tau)\right).$$

och sätt in ortsvektorns derivata i vänsterledet och magnetfältet i högerledet.

$$\frac{dr}{d\tau}\hat{e}_r + r\frac{d\theta}{d\tau}\hat{e}_\theta = C\frac{B_0}{a} r\hat{e}_\theta$$

Sätt nu $C = a/B_0$ för att få $C\frac{B_0}{a} = 1$.

Identifiering av komponenterna ger (med $C = a/B_0$)

$$\frac{dr}{d\tau} = 0$$

$$r\frac{d\theta}{d\tau} = r$$

Lösningen är $r(\tau) = c_1$ och $\theta(\tau) = \tau + c_2$ där c_1 och c_2 är konstanter.

Vi använder $\mathbf{r}(\tau = 0) = a\hat{y}$ för att bestämma konstanterna. Ortsvektorn i planpolära koordinater är $r\hat{e}_r$. Vi har alltså $c_1\hat{e}_r = a\hat{y}$. Eftersom både $\hat{e}_r$ och $\hat{y}$ är enhetsvektorer, från $|c_1\hat{e}_r|$=$|a\hat{y}|$ får vi $c_1 = a$.

För att bestämma andra konstanten c_2 använder vi $\hat{e}_r = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$. Från $\hat{e_r} = \hat{y}$ får vi att $\sin\theta = 1$, vilket ger $\theta = \pi/2$.

Den sökta fältlinjen ges alltså av $r(\tau) = a$ och $\theta(\tau) = \tau + \pi/2$ med kurvparametern $\tau \leq 0$ och startpunkt då $\tau = 0$.

Notera att det finns ett typografiskt fel i den lösningen som är publicerad på canvas.

Alternativ 2: kartesiska I kartesiska koordinater ortsvektorn:

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

Derivera med avseende på τ

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{dx}{d\tau}\hat{x} + \frac{dy}{d\tau}\hat{y}$$

Identifiering av komponenterna ger ekvationerna

$$\frac{dx}{d\tau} = -y$$

$$\frac{dy}{d\tau} = x$$

med lösningar $x(\tau) = c_1 \cos(\tau + c_2)$ och $y(\tau) = c_1 \sin(\tau + c_2)$. Även här använder vi $\mathbf{r}(\tau = 0) = a\hat{y}$ för att bestämma konstanterna. Den sökta fältlinjen fås med $c_1 = a$ och $c_2 = \pi/2$

Plotta kan man göra på https://www.geogebra.org/m/QPE4PaDZ

Exempel: Tentauppgift 2010-08-26: 1b

För vilka värden på α, β, γ har det tvådimensionella koordinatsystemet med koordinater ξ och η, givna av

$$\xi = x^2 - y^2 \tag{19}$$
$$\eta = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \tag{20}$$

ortogonala basvektorer?

Lösning. Vi kan konstruera basvektorer på två sätt:

- $\hat{e}_i \propto \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}$
- $\hat{e}_i \propto \nabla u_i$

Det första sättet innebär att vi behöver räkna ut storheterna $\frac{\partial x}{\partial u_i}$ och $\frac{\partial y}{\partial u_i}$, dvs vi behöver veta $x = x(\xi, \eta),\ y = y(\xi, \eta)$. Vi skulle behöva invertera det givna koordinatsambandet.

Det andra sättet kräver istället $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ och $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ (samt motsvarande för η) och detta blir enkelt med de givna koordinattransformationerna. Vi får

$$\nabla \xi = 2x\hat{x} - 2y\hat{y} \tag{21}$$

$$\nabla \eta = (2\alpha x + \beta y)\hat{x} + (\beta x + 2\gamma y)\hat{y} \tag{22}$$

För att koordinatsystemet skall vara ortogonalt behöver vi

$$\hat{e}_\xi \cdot \hat{e}_\eta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \xi \cdot \nabla \eta = 0. \tag{23}$$

Från uttrycken för dessa gradienter ovan får vi

$$\nabla \xi \cdot \nabla \eta = 2x(2\alpha x + \beta y) - 2y(\beta x + 2\gamma y) = 4\alpha x^2 - 4\gamma y^2. \tag{24}$$

För att få $\nabla \xi \cdot \nabla \eta = 0$ måste vi ha $\alpha = \gamma = 0$, medan β är godtyckligt.

Exempel En metallcylinder upphettas ojämnt så att dess temperatur varierar i varje punkt. Givet är att temperaturfördelningen beskrivs av $T(\rho, \phi, z) = \rho^2 \sin\phi$, om cylindern är centrerad i origo och har axeln orienterad längs z-axeln. Nu söker vi, i punkten P definierad av koordinaterna $\rho = 1$, $\phi = \pi/4$, och $z = 0$, den riktning i vilken temperaturen ökar mest. Dessutom vill vi veta temperaturökningen per längdenhet från punkten P i riktningen $\mathbf{v} = \hat{e}_\rho + \hat{e}_z$.

Riktningen i vilken ett skalärfält ökar mest ges av gradienten. Förändringen av ett skalärfält i en given riktning ges av riktningsderivatan.

Eftersom temperaturfältet är angivet i cylindriska koordinater är det lämpligt att använda cylindriskt koordinatsystem.

Först beräknar vi gradienten

$$\begin{aligned}
\nabla T &= \frac{\partial T}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{e}_\phi + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{e}_z \\
&= \frac{\partial \rho^2 \sin\phi}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho^2 \sin\phi}{\partial \phi}\hat{e}_\phi + \frac{\partial \rho^2 \sin\phi}{\partial z}\hat{e}_z \\
&= 2\rho \sin\phi \hat{e}_\rho + \rho\cos\phi\hat{e}_\phi.
\end{aligned} \tag{25}$$

Riktningen i vilken temperaturen ökar mest i punkten P är alltså

$$2\sin\frac{\pi}{4}\hat{e}_\rho + \cos\frac{\pi}{4}\hat{e}_\phi = \sqrt{2}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_\phi$$

Temperaturökningen per längdenhet i riktningen $\mathbf{v}$ är

$$\begin{aligned}\nabla T \cdot \mathbf{v} &= \left(\sqrt{2}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_\phi\right) \cdot \frac{\hat{e}_\rho + \hat{e}_z}{\sqrt{2}} \\ &= \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho + \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z + \frac{\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_z}{2} + \frac{\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_z}{2} = 1 \qquad (26)\end{aligned}$$

Det är viktigt att använda den normerade riktningen $\hat{v} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

Lösningen blev relativt enkelt i ett cylindriskt koordinatsystem. Hade vi i stället transformerat till kartesiska koordinater hade det blivit mer komplicerat. Detta inses genom att $y = \rho \sin\phi$ och $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, vilket ger $T = \rho^2 \sin\phi = \rho\rho\sin\phi = y\sqrt{x^2 + y^2}$. Gradienten av detta uttryck i ett kartesiskt koordinatsystem blir relativt komplicerad vilket leder till mer besvärliga beräkningar.