FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

27 september 2021

Mål Vi ska avsluta våra studier av källor, introducera begreppet vektorpotential, lära oss om virveltråd och avslutningsvis träna på att räkna fält och potential från givna källfördelningar.

Källtäthet. Vi har sett hur olika singulariteter kan vara källor till ett fält $\mathbf{F}$. Analogt med detta kan vi tolka $\nabla \cdot \mathbf{F}$ som en utbredd källa till $\mathbf{F}$. Därför kallar man ibland $\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho$ för källtäthet.

Om $\rho = \nabla \cdot \mathbf{F}$ existerar och inte är överallt noll i ett område V, så har vi en rymdkälla i V med rymdkälltätheten ρ.

Vektorpotentialen Om man har divergensfria fält, t.ex magnetfältet, som enligt Maxwells ekvationer är divergensfritt $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, så ser man att divergensfriheten uppfylls om fältet kan skrivas $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Vektorfältet $\mathbf{A}$ kallas vektorpotentialen.

Som vi har nämnt i samband med skalärpotentialen i elektrostatiken, i många problemställningar är det enklare att beräkna vektorpotentialen, och sedan ta rotationen för att få fram $\mathbf{B}$, istället för direkt försöka beräkna fältstyrkan.

En komplikation är att vektorpotentialen $\mathbf{A}$ är inte entydigt bestämd av $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Om man till $\mathbf{A}$ lägger gradienten av ett godtyckligt, i hela rymden två gånger kontinuerligt deriverbart skalärt fält f, så är även summan vektorpotential till $\mathbf{B}$, eftersom

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \mathbf{A}.$$

En sådan ändring av vektorpotentialen

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f,$$

kallas inom fysiken en gaugetransformation. En sådan transformation förändrar inte fältet $\mathbf{B}$. Vektorpotentialen till ett vektorfält är alltså endast bestämd på gradienten av en godtycklig funktion när.

Liknande gäller även för den skalära potentialen, även den är bestämd på en konstant när. Det är lätt att inse att addition av en konstant C till den skalära potentialen ϕ inte ändrar $\nabla\phi$, så $\phi + C$ är potential till samma vektorfält som ϕ.

Exempel: vektorpotential och magnetfält Magnetiska flödet genom en yta S vars rand är C är

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Om man använder Stokes sats får man

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

Så vektorpotentialen har en fysikalisk tolkning, genom att dess linjeintegral runt en sluten kurva är lika med det totala magnetiska flödet genom arean som omsluts av kurvan.

6.3 Virveltråd

Fältlinjerna till det singulära fältet

$$\mathbf{F} = \frac{J}{2\pi\rho}\hat{e}_\varphi \tag{1}$$

bildar koncentriska cirklar kring z-axeln. Därför säger vi att det finns en virveltråd med styrkan J på z-axeln. Fältet är divergensfritt: $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

Rotationen av fältet blir:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\varrho & \varrho\hat{e}_\varphi & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial\varrho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \varrho\dfrac{J}{2\pi\varrho} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{för } \varrho > 0. \tag{2}$$

Stokes sats skulle ge

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0, \tag{3}$$

men vad skulle ske om ytan S gick genom singulariteten?

Rita en cirkel med radien a runt z-axeln, $\mathrm{d}\mathbf{r} = a\hat{e}_\varphi \mathrm{d}\varphi$. Linjeintegralen blir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{J}{2\pi a} a \mathrm{d}\varphi = J. \tag{4}$$

Generellt gäller detta resultat för en kurva C som omsluter z-axeln ett varv i positiv led, medan integralen blir noll för kurvor som inte omsluter z-axeln.

Det vanligaste exemplet är det statiska magnetiska fältet från en ström, där fältet är $\mathbf{B}$ och J motsvarar den elektriska strömmen.

Exempel: Virveltråd, kompendium sid 80 Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}, \tag{5}$$

där kurvan C ges av

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = a^2, \text{ och } z = 0, \tag{6}$$

som genomlöps i positiv riktning, och fältet ges av

$$\mathbf{F} = F_0 \left[\frac{\rho \sin 2\varphi}{2a} \hat{e}_\rho + \left(\frac{a}{\rho} - \frac{\rho \sin^2 \varphi}{a} \right) \hat{e}_\varphi \right]. \tag{7}$$

F_0 och a är konstanter.

Lösning. Kurvan C är en ellips med centrum i origo och halvaxlarna a och $2a$. Enligt högerhandsregeln så väljer vi $\hat{e}_z$ som normalen till ellipsskivan.

Fältet $\mathbf{F}$ är singulärt på z-axeln. Singulariteten sitter helt i

$$\mathbf{F}_1 = F_0 \frac{a}{\varrho} \hat{\varphi},$$

som vi känner igen som en virveltråd på z-axeln med styrkan $2\pi F_0 a$. Eftersom C omsluter z-axeln en gång i positiv led, ger $\mathbf{F}_1$ bidraget $2\pi F_0 a$.

Vi kallar resten av fältet $\mathbf{F}_2$. Dess rotation är

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F}_2 &= \frac{F_0}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \varrho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\varrho \sin 2\varphi}{2a} & -\frac{\varrho^2 \sin^2 \varphi}{a} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{F_0}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho}(-\frac{\varrho^2 \sin^2 \varphi}{a}) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{\varrho \sin 2\varphi}{2a}) \right] \hat{z} \\
&= \frac{F_0}{\rho} \left[-\frac{2\varrho \sin^2 \varphi}{a} - \frac{2\varrho \cos 2\varphi}{2a} \right] \hat{z} && (8) \\
&= -\frac{F_0}{a} \hat{z}. && (9)
\end{aligned}$$

Bidraget från $\mathbf{F}_2$ fås med hjälp av Stokes sats:

$$\oint_C \mathbf{F}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}_2) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{10}$$

som $-F_0/a$ gånger arean av ellipsen, som är $2\pi a^2$.

Värdet på den totala integralen är

$$\oint_C (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 2\pi F_0 a - \frac{F_0}{a} \cdot 2\pi a^2 = 0 \tag{11}$$

Virveltäthet. Det kan också uppstå virvlar i fält som saknar singulariteter, och för att få ett mått på omfattningen av sådana virvlar inför man virveltätheten $\nabla \times \mathbf{F}$.

Om $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{F}$ existerar och inte är överallt noll i ett område V så har vi en rymdvirvel i V med rymdvirveltätheten $\mathbf{j}$.

Repetition: potential från källfördelningar

Greensfunktionen

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|} \tag{12}$$

är potentialen i punkten $\mathbf{r}$ från en punktkälla som ligger i $\mathbf{r}_p$ och har styrkan 1.

Potentialen från en källfördelning ρ kan då bestämmas från

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p)\rho(\mathbf{r}_p) dV_p. \tag{13}$$

Potentialen från en ytfördelning är

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\sigma dS_p}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|}. \tag{14}$$

Exempel: Potential från ytkälla, kompendium sid 84 Vad är potentialen från en ytkälla med konstant täthet σ_0, belägen på cirkelskivan med radie a i (x, y)-planet med z-axeln som symmetriaxel? Speciellt, vad är potentialen på z-axeln?

Beteckna, som ovan, ortvektorn för en punkt på källan med $\mathbf{r}_p$ och ortvektorn för punkten vi vill veta potentialen i med $\mathbf{r}$. Låt oss kalla cirkelskivans area S_p.

Problemets symmetri gör det lämpligt att använda cylindriska koordinater. Avståndet från origo till ett litet ytelement i cirken blir då ϱ_p (notera att vi är i xy-planet). Avståndet mellan det lilla ytelementet och projektionen av observationspunkten i xy-planet blir enligt cosinusteoremet $\sqrt{\varrho^2+\varrho_p^2-2\varrho\varrho_p\cos(\varphi-\varphi_p)}$. Slutligen, det totala avståndet mellan källan och observationspunkten blir

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p| = \sqrt{\varrho^2+\varrho_p^2-2\varrho\varrho_p\cos(\varphi-\varphi_p)+z^2}.$$

Vi använder uttrycket (14)

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{S_p} \frac{\sigma dS_p}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|}. \tag{15}$$

för att skriva ett explicit uttryck för potentialen (ytelementet är $dS_p = \varrho_p d\varrho_p d\varphi_p$):

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_0^a d\varrho_p \int_0^{2\pi} d\varphi_p\, \varrho_p \frac{\sigma_0}{4\pi\sqrt{\varrho^2+\varrho_p^2-2\varrho\varrho_p\cos(\varphi-\varphi_p)+z^2}}.$$

Om $\mathbf{r}$ ligger på z-axeln ($\rho = 0$) förenklas uttrycket till

$$\begin{aligned}\phi(0,0,z) &= \int_0^a d\varrho_p \int_0^{2\pi} d\varphi_p\, \varrho_p \frac{\sigma_0}{4\pi\sqrt{\varrho_p^2+z^2}} = \frac{\sigma_0}{2}\left[\sqrt{\varrho_p^2+z^2}\right]_{\varrho_p=0}^a \\ &= \frac{\sigma_0}{2}\left(\sqrt{z^2+a^2}-|z|\right).\end{aligned}$$

Låt oss göra rimlighetskontroll. Vi kan kontrollera vad som händer då $|z| \to +\infty$. Då är

$$\sqrt{z^2 + a^2} - |z| = |z|(\sqrt{1 + a^2/z^2} - 1) \approx |z|(1 + \frac{a^2}{2z^2} - 1) = \frac{a^2}{2|z|},$$

så

$$\phi(0,0,z) \approx \frac{a^2\sigma_0}{4|z|},$$

vilket vi kan känna igen som potentialen från en punktkälla med styrka $\pi a^2 \sigma_0$. Det är det som vi förväntar oss när vi är långt ifrån cirkelskivan, så det är rimligt.

Vi kan också kontrollera hur fältet ser ut nära planet, då $|z| \ll a$. Då är

$$\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \approx a - |z|,$$

och

$$\phi(0,0,z) \approx \frac{1}{2}\sigma_0(a - |z|).$$

Detta är fältet från en oändlig ytladdning, dvs det som vi kan förvänta oss väldigt nära planet. (Om man tar minus gradienten får man samma fält som vi härledde under förra föreläsningen.)

Exempel: fält från en sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning Bestäm fältet från en sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$. Vi kan använda en Greensfunktion enligt ekvation (13)

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{V_p} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p)\rho(\mathbf{r}_p) dV_p. \tag{16}$$

med

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|} \tag{17}$$

och V_p är volymen som vi integrerar över (där laddningsfördelningen finns).

På grund av den sfäriska symmetrin kommer potentialen endast att bero på r, och det räcker att beräkna den för $\theta = 0$.

Då har vi $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|^2 = r^2 + r_p^2 - 2rr_p\cos\theta_p$, och

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \frac{1}{4\pi}2\pi\int_0^\infty dr_p\int_0^\pi d\theta_p r_p^2\sin\theta_p\rho(r_p)\frac{1}{\sqrt{r^2+r_p^2-2rr_p\cos\theta_p}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty dr_p r_p^2\rho(r_p)\left[\frac{1}{rr_p}\sqrt{r^2+r_p^2-2rr_p\cos\theta_p}\right]_{\theta_p=0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2r}\int_0^\infty dr_p r_p\rho(r_p)\left(r+r_p-|r-r_p|\right) \\
&= \frac{1}{r}\int_0^r dr_p r_p^2\rho(r_p) + \int_r^\infty dr_p r_p\rho(r_p). \qquad (18)
\end{aligned}$$

Längre än så kommer vi inte utan att veta något mer om funktionen $\rho(r)$. Genom inspektion av uttrycket ser vi att om $\rho(r)=0$ för $r>a$, så är

$$\phi(r) = \frac{1}{r}\int_0^a dr_p r_p^2\rho(r_p)\,, \quad r>a.$$

Detta är fältet från en punktkälla med styrkan $q = 4\pi\int_0^a drr^2\rho(r) = \int_{r<a}\rho(r)dV$, dvs. den totala källan.

Om å andra sidan $\rho(r)=0$ för $r<a$, blir ϕ konstant (och fältstyrkan noll) för $r<a$.