FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

12 okt 2021

10. Värmeledning, diffusion

Värmeledningsekvationen (eller diffusionsekvationen) är en partiell differentialekvation som dyker upp i många områden av fysiken. Den styr hur värmeenergi transporteras genom ett material, hur kemiska ämnen diffunderar, osv.

Det är en tidsberoende ekvation, en av de få som vi behandlar i kursen. Även kontinuitetsekvationen, Maxwells ekvationer och Navier-Stokes ekvationer är tidsberoende. Några av dessa kommer vi att se nästkommande föreläsningar.

Vi ska nu resonera oss fram till hur en värmeledningsekvation ser ut. Vi tänker i första hand på värmetransport i ett fast material. Om man har en vätska eller gas, kan materialet självt vara i rörelse, och värme kan transporteras på det sättet. Detta kallas konvektion, och är i många situationer en snabbare process för temperaturutjämning än diffusion. I ett rum som värms av ett värmeelement, t.ex., är konvektion mycket viktigare än diffusion — luften cirkulerar.

Betrakta ett temperaturfält $T(\mathbf{r}, t)$, i ett område V, med randvillkor längs ∂V, i närvaro av eventuella värmekällor och med ett explicit tidsberoende. Vi söker nu en differentialekvation för detta fält.

Vi vet att värme strömmar från varmare till kallare. Det innebär att vi har ett flöde av värmeenergi i en riktning som är motsatt ∇T. Värmeströmmen kan då skrivas

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \tag{1}$$

där λ är värmekonduktiviteten (värmeledningsförmågan) med enheten $\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$, och $\mathbf{q}$ är själva värmeflödet med enheten $\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-2}}$.

Värmetätheten $\mathcal{E}$ är proportionell mot temperaturen

$$\mathcal{E} = c\rho T,$$

där c är värmekapacitiviteten och ρ är densiteten. Enheterna är $[\mathcal{E}] = \mathrm{J/m^3}$, $[c] = \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$, $[\rho] = \mathrm{kgm^{-3}}$.

Betrakta nu en volym V, vilken begränsas av en sluten yta ∂V.

- Värmeenergin i denna volym är

$$H = \int_V c\rho T \mathrm{d}V \tag{2}$$

- Utflödet av värme från denna volym är

$$\oint_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{3}$$

Förutsatt att det inte finns några värmekällor i V måste utflödet motsvara förändringen per tidsenhet av värmen i V

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\oint_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathrm{d}S. \tag{4}$$

Med insättning av ekv. (2) i vänsterledet och användande av Gauss sats i högerledet fås

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (Tc\rho)\, \mathrm{d}V = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{q} \mathrm{d}V. \tag{5}$$

där vi har utnyttjat att V är konstant i tiden. Volymen V är helt godtyckligt vald, så likheten måste gälla för alla volymer V. I så fall kan vi sätta integranderna lika med varandra

$$\frac{\partial}{\partial t} (Tc\rho) = -\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot \lambda \nabla T. \tag{6}$$

Om vi nu antar att c, ρ och λ är konstanter, så kan vi skriva ekvationen som

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T, \tag{7}$$

där

$$k \equiv \frac{\lambda}{c\rho}. \tag{8}$$

Den här ekvationen kallas för värmeledningsekvationen.

Kommentar

Värmeledningsekvationen är en kontinuitetsekvation för värmeenergin. Härledningen liknar det som gjordes för kontinuitetsekvationen i kap. 4 i kurskompendiet.

Stationär lösning. För en tidsoberoende värmefördelning gäller $\partial T/\partial t = 0$ och därmed

$$\Delta T = 0 \tag{9}$$

som vi kallar för Laplace-ekvation.

Värmekälla. Vad händer nu om vi har en värmekälla i volymen V? Antag att värme produceras av en källa med tätheten $s = s(\mathbf{r}, t)$ med enheten $\mathrm{W\,m^{-3}}$. Då måste vi komplettera ekv. (5) med en term för denna uppvärmning

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(Tc\rho)\,\mathrm{d}V = \int_V \lambda \Delta T \mathrm{d}V + \int_V s \mathrm{d}V. \tag{10}$$

Värmeledningsekvationen (med konstant c, ρ) blir då

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T + \frac{s}{c\rho}. \tag{11}$$

Kommentar 1: Vi använder ibland beteckningen $u = s/(c\rho)$, som också kallas för *värmekälltäthet.*

Om temperaturfördelningen är tidsoberoende kan vi skriva ekvationen som

$$\Delta T = -\frac{s}{\lambda} \tag{12}$$

som är ett exempel på Poissons ekvation. Högerledet kallar vi då för en källterm.

Exempel: Endimensionell värmeledning Betrakta ett område $x \in [0, L]$ i en dimension med följande villkor på temperaturfördelningen $T = T(x,t)$

- Begynnelsevillkor: $T(x, 0) = T_0 \sin \dfrac{\pi x}{L}$.
- Randvillkor: $T(0,t) = T(L,t) = 0$ (dvs Dirichlets homogena RV).

Finn temperaturfördelningen för $t > 0$ i avsaknad av någon värmekälla.

Lösning: Värmeledningsekvationen är

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Notera att

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\frac{\pi x}{L} = -\frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L},$$

vilket gör det naturligt att ansätta lösningen $T(x,t) = f(t)\sin\frac{\pi x}{L}$.

Denna ansats uppfyller randvillkoren och begynnelsevillkoret om $f(0) = T_0$. Insättning i värmeledningsekvationen ger

$$f'(t)\sin\frac{\pi x}{L} + kf(t)\frac{\pi^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L} = 0,$$

vilket har lösningen

$$f(t) = Ae^{-\pi^2 kt/L^2},$$

där $A = T_0$ bestäms av begynnelsevillkoret. Lösningen

$$T(x,t) = T_0 e^{-\pi^2 kt/L^2}\sin\frac{\pi x}{L}$$

innebär att temperaturen minskar kontinuerligt (flödar ut genom ändarna) och att en stationär lösning, $T = 0$, erhålls för stora t.

Exempel: Värmeledning med källterm Granitberggrunden i Sverige innehåller en viss mängd radium, vars radioaktiva sönderfall ger en uppvärming som av en rymdkälla för värme med konstant källtäthet ρ_{T}. Granitens värmeledningsförmåga är λ (i $\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$). Låt oss göra det orealistiska antagandet att Jorden alltigenom bestod av granit med dessa egenskaper. Hur skulle i så fall den stationära temperaturfördelningen i Jordens inre se ut? Vad blir temperaturen i centrum?

Lösning: Vi kan ställa upp differentialekvationen

$$\Delta T = -\frac{\rho_{\mathrm{T}}}{\lambda} \tag{13}$$

I sfäriska koordinater under antagande om sfärisk symmetri blir ekvationen

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -Q, \tag{14}$$

där $Q = \rho_\mathrm{T}/\lambda$. Vi kan skriva detta som

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -Qr^2, \tag{15}$$

och sedan integrera en gång.

$$r^2\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{3}Qr^3 + A, \tag{16}$$

där A är en integrationsvariabel. Om vi dividerar med r^2 får vi

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{3}Qr + \frac{A}{r^2}. \tag{17}$$

Integrerar vi än en gång får vi

$$T\left(r\right) = -\frac{1}{6}Qr^2 - \frac{A}{r} + B, \tag{18}$$

där B är ännu en integrationsvariabel. Vi måste nu bestämma värden på de båda integrationsvariablerna. Först kan vi notera att det inte finns någon värmepunktkälla, så temperaturen inte bör bli oändlig i Jordens inre, dvs $A = 0$.

För det andra noterar vi att temperaturen vid jordytan, $r = R$, är praktiskt taget 0 jämfört med temperaturen i Jordens centrum, så vi får ekvationen

$$0 = -\frac{1}{6}QR^2 + B. \tag{19}$$

vilket ger $B = QR^2/6$. Fysikaliskt så är B temperaturen i Jordens centrum. Om vi sätter in realistiska värden på $\rho_\mathrm{T} = 5\times10^{-8}$ W m^{-3}, $\lambda = 3.5$ W m^{-1} K^{-1} och $R = 6.4 \times 10^6$ m, så får vi $B = 6 \times 10^5$ K, vilket är en grov överskattning av den verkliga temperaturen (100 gånger högre än den verkliga).

Värmeledning (konvektion)

Ovan har vi enbart behandlat värmeledning via diffusion. Konvektion erbjuder betydligt effektivare värmetransport för vätskor och gaser, genom att varm materia strömmar. Vi beskriver detta med en värmeström:

$$\mathbf{q}_\mathrm{konv} = \rho c T \mathbf{v}$$

som skall adderas till diffusionsströmmen från tidigare

$$\mathbf{q}_{\text{diff}} = -\lambda \nabla T.$$

Kontinuitetsekvationen för värmeenergin säger att

$$\frac{\partial}{\partial t}(Tc\rho) = -\nabla \cdot \mathbf{q} = -\nabla \cdot (\mathbf{q}_{\text{diff}} + \mathbf{q}_{\text{konv}}).$$

Antar vi återigen att λ är konstant får vi

$$\frac{\partial}{\partial t}(Tc\rho) + \nabla \cdot (\mathbf{q}_{\text{konv}}) = \lambda \Delta T,$$

och om vi dessutom antar att c och ρ är konstanter, sätter in uttrycket för den konvektiva strömmen och inför $k = \lambda/\rho c$ har vi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T\mathbf{v}) = k\Delta T.$$

Om vi antar att $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ och inkluderar möjligheten av värmekällor har vi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = k\Delta T + \frac{u}{c\rho}. \tag{20}$$

Greensfunktioner för värmeledningsekvationen Kan vi använda Greensfunktioner för att teckna lösningar till allmänna källfördelningar? Notera att fälten (temperatur, värmekälla) är både rums- och tidsberoende.

Ja, det kan man - Greensfunktionen är då lösningen (med givna randvillkor) till värmeledningsekvationen för en punktkälla i både tid och rum.

Kommentar 3: En punktlik energikälla som bara existerar under ett ögonblick, men är precis så stark att den tillförda energimängden är ändlig.

Vi söker alltså lösningen till Greensfunktionsekvationen svarande mot värmeledningsekvationen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \delta^D(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \tag{21}$$

på hela D-dimensionella rummet $\mathbb{R}^D$. Finner vi lösningen till denna ekvation, kan lösningen till värmeledningsekvationen för godtycklig källfördelning u skrivas

$$T(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^D x'\, G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') u(\mathbf{r}', t')$$

vilket ses genom direkt insättning

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) T(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^D x' \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') u(\mathbf{r}', t')$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^D x'\, \delta^D(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')u(\mathbf{r}', t') = u(\mathbf{r}, t). \tag{22}$$

som alltså visar att värmeledningsekvationen uppfylls för detta T.

För det första kan vi inse att på grund av translationsinvarians i rum och tid får vi skriva $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$.

Man kan visa att följande lösning

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma(t)}{(4\pi kt)^{D/2}} e^{-\frac{r^2}{4kt}}$$

uppfyller ekvationen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) \tilde{G}(\mathbf{r}, t) = \delta^D(\mathbf{r})\delta(t)$$

där $\sigma(t)$ är stegfunktionen som tar värdet 0 för $t < 0$ och 1 för $t > 0$.

Vi kan se att denna funktion uppfyller Greensfunktionsekvationen (ekv 21) genom direkt insättning. För enkelhets skull arbetar vi med $\tilde{G}(\mathbf{r}, t)$ och när vi gjort beräkningen sätter vi in $(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ i $\tilde{G}$, dvs $\tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$.

Förstaderivatan med avseende på en koordinat x_i är

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{G} = -\frac{2x_i}{4kt}\tilde{G} = -\frac{x_i}{2kt}\tilde{G}$$

och andraderivatan blir

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\tilde{G} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{x_i}{2kt}\tilde{G}\right) = \left(-\frac{1}{2kt} + \frac{x_i^2}{4k^2t^2}\right)\tilde{G}$$

så att Laplacianen blir

$$\Delta\tilde{G} = \sum_{i=1}^{D} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\tilde{G} = \left(-\frac{D}{2kt} + \frac{r^2}{4k^2t^2}\right)\tilde{G}$$

så att

$$k\Delta\tilde{G} = \left(-\frac{D}{2t} + \frac{r^2}{4kt^2}\right)\frac{\sigma(t)}{(4\pi kt)^{D/2}} e^{-\frac{r^2}{4kt}}.$$

Tidsderivatan av $\tilde{G}(\mathbf{r},t) = f(t)e^{-\frac{r^2}{4kt}}$ blir

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{G} = f'(t)e^{-\frac{r^2}{4kt}} + f(t)\frac{r^2}{4kt^2}e^{-\frac{r^2}{4kt}}$$

och om vi sätter in $f(t) = \dfrac{\sigma(t)}{(4\pi kt)^{D/2}}$ får vi

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{G} = \frac{\delta(t)}{(4\pi kt)^{D/2}}e^{-\frac{r^2}{4kt}} - \frac{D}{2}\frac{\sigma(t)}{(4\pi kt)^{D/2+1}}(4\pi k)e^{-\frac{r^2}{4kt}} + \frac{\sigma(t)}{(4\pi kt)^{D/2}}\frac{r^2}{4kt^2}e^{-\frac{r^2}{4kt}}$$

eftersom derivatan av $\sigma(t)$ är $\delta(t)$. Om vi samlar ihop alla termer så kan vi inse att endast termen med deltafunktionen $\delta(t)$ överlever. Från kapitel 7 vet vi att $(4\pi kt)^{-D/2}e^{-\frac{r^2}{4kt}}$ blir en D-dimensionell deltafunktion då $t \to 0^+$ (detta är en av de approximationer som leder till deltafunktionen som gavs i kapitel 7).

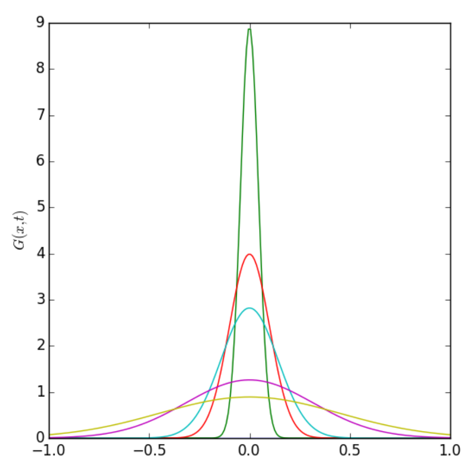
Därmed kan vi inse att ekv 21

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \delta^D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \tag{23}$$

satisfieras av

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \frac{\sigma(t-t')}{(4\pi k(t-t'))^{D/2}}e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4k(t-t')}}$$

Figuren visar Greensfunktionens utseende för olika t: den börjar som en deltafunktion vid $t - t' = 0^+$, för att när tiden går bli bredare och lägre, hela tiden med Gaussisk form.



Värmeledningsekvationen heter på engelska “the heat equation”. Dess Greensfunktion kallas “heat kernel”, på svenska ibland “värmekärna”.

Lösningen till värmeledningsekvationen med källa $u(\mathbf{r}, t)$ kan då skrivas

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \, G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') u(\mathbf{r}', t') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \, \frac{\sigma(t-t')}{(4\pi k(t-t'))^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4k(t-t')}} u(\mathbf{r}', t') \\
&= \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \, \frac{1}{(4\pi k(t-t'))^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4k(t-t')}} u(\mathbf{r}', t'). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Faktorn $\sigma(t-t')$ gör att en källa vid tidpunkten t' bara kan påverka vad som händer vid senare tidpunkter $t \geq t'$, så vi har kausalitet.

Det är värt att betona att den explicita Greensfunktion vi har skrivit ned här gäller då man har värmeledning/diffusion i ett (tänkt) oändligt medium. Om man har ett begränsat område med randvillkor för temperaturen (eller motsvarande fysikaliska storhet) skall också Greensfunktionen uppfylla dessa randvillkor, och kommer att se annorlunda ut.