Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Tisdagen den 3 januari 2023, Johanneberg.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, Olle Branders formelsamling.
Lösningsskiss: Tünde Fülöp

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. (a) Beräkna tangentlinjeintegralen $\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, där

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a}(-y\hat{x} + x\hat{y})$$

och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = (b\cos t, c\sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$. *(6p)*

(b) Beräkna $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(2x)\mathrm{d}x$, där $\delta(x)$ är en endimensionell deltafunktion. *(4p)*

Lösning:

(a) Kurvan är en ellips i xy-planet som genomlöps moturs. Skriv

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = -b\sin t\hat{x}\mathrm{d}t + c\cos t\hat{y}\mathrm{d}t$$

och integrera över parametern t. Svaret blir $2\pi\frac{bc}{a}F_0$.

(b) Kom ihåg skalningsegenskapen hos deltafunktioner (kan visas genom variabelsubstitution i integralen $x' = 2x$). Detta ger

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{1}{2}.$$

2. Bestäm riktningsderivatan av det skalära fältet

$$\phi(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 7z^2$$

i normalriktningen till ytan $x^3 + y^4 + z^5 = 1$, taget i punkten $(1, 1, -1)$. *(10p)*

Lösning:

Riktningsderivatan av en skalär funktion ϕ i en given riktning $\hat{n}$ ges av

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \hat{n}\cdot\nabla\phi.$$

Punkten $P:(1,1,-1)$ ligger på ytan

$$\psi(x,y,z) = x^3 + y^4 + z^5 = 1$$

Enhetsnormalen $\hat{n}$ till en yta $\psi(x,y,z) = konst$ ges av

$$\hat{n} = \pm \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}.$$

Med ψ enligt ovan erhålles

$$\nabla\psi = (3x^2, 4y^3, 5z^4)$$

och speciellt i punkten $P:(1,1,-1)$ vi har

$$(\nabla\psi)_P = (3,4,5).$$

Enhetsnormalen blir alltså

$$\hat{n} = \pm \frac{1}{5\sqrt{2}}(3,4,5).$$

Ur sambandet

$$\phi(x,y,z) = 3x^2 + 5y^2 + 7z^2$$

erhålles

$$(\nabla\phi)_P = (6x, 10y, 14z)_P = (6, 10, -14).$$

Insättning i riktingsderivatans definition enligt ovan ger

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_P = \pm\frac{1}{5\sqrt{2}}(3,4,5)\cdot(6,10,-14) = \pm\frac{6\sqrt{2}}{5}$$

3. Beräkna normalytintegralen av

$$\mathbf{F} = F_0 \frac{a^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left[x\hat{x} + y\hat{y} + \left(z + \frac{z}{a}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{a^2}\right)\hat{z}\right]$$

över ytan $S:\ x^2+y^2 = (z-3a)^2$, $0 \le z \le 3a$. F_0 och a är konstanter. *(10 p)*

Lösning:

Fältet kan skrivas

$$\mathbf{F} = F_0 a^2 \frac{\hat{r}}{r^2} + \frac{F_0 z}{a}\hat{z}.$$

Den första termen

$$F_0 a^2 \frac{\hat{r}}{r^2}$$

motsvarar en punktkälla i origo med styrka $4\pi F_0 a^2$.

Den andra termen,

$$\mathbf{F}_1 \equiv \frac{F_0 z}{a}\hat{z},$$

är inte singulär och har divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = F_0/a$.

Ytan är en kon med spetsen i $z = 3a$ som är öppen i planet $z = 0$. Bidraget från punktkällan blir därför lika med halva dess styrka: $2\pi F_0 a^2$ (eftersom ytan upptar rymdvinkeln 2π).

Vi använder Gauss sats för att räkna ut bidraget från den icke-singulära delen. Slut ytan med en bottenplatta vid $z = 0$, på vilken $\mathbf{F}_1(z = 0) = 0$. Detta ger bidraget $\pi 9 a^2 F_0$.

Totalt får vi $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 11\pi a^2 F_0$.

4. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater som

$$\mathbf{F} = \frac{a\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}.$$

Bestäm a så att fältet blir virvelfritt (ignorera singulariteten i $r \to 0$). Bestäm potentialen ϕ. *(10 poäng)*

Lösning:

Rotationen blir

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ \frac{a\cos\theta}{r^3} & r\frac{\sin\theta}{r^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sin\theta}{r^4}(a-2)\hat{\varphi}.$$

Fältet är alltså virvelfritt (konservativt) då $a = 2$.

Skalärpotentialen får vi ur sambandet $\mathbf{F} = -\nabla\phi$. Generella lösningar till respektive differentialekvation kan tecknas direkt:

$$\begin{aligned} \partial_r \phi = -\frac{a\cos\theta}{r^3} \quad &\Rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{a\cos\theta}{2r^2} + f_1(\theta,\varphi), \\ \frac{1}{r}\partial_\theta \phi = -\frac{\sin\theta}{r^3} \quad &\Rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{\cos\theta}{r^2} + f_2(r,\varphi), \\ \partial_\varphi \phi = 0 \quad &\Rightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = f_3(r,\theta). \end{aligned}$$

Med $a = 2$ ser vi att de första två ekvationerna bara blir konsistenta då $f_1(\theta, \varphi) = f_2(r, \varphi) \equiv g(\varphi)$, och att den tredje ekvationen i sin tur ger att lösningen måste vara oberoende av φ så att $g(\varphi) = C$.

Svar:

$$\phi = \frac{\cos\theta}{r^2} + C.$$

---

5. Lös Laplaces ekvation inuti en (oändligt lång) cylinder med radien a. Vid ytan gäller ett Dirichlet randvillkor

$$\phi(\mathbf{r})\big|_{\rho=a} = \phi_0 + \phi_1 \cos p\varphi,$$

där p är ett heltal och (ρ, φ, z) är cylindriska koordinater. *(10p)*

Lösning:

Randvillkoret antyder två sorters vinkelberoende: $\cos(p\varphi)$ och 1. Vi ansätter därför en variabelseparerad lösning (utan z-beroende)

$$\phi(\rho, \varphi) = f(\rho) + g(\rho)\cos(p\varphi).$$

Laplaces ekvation i cylindriska koordinater ger lösningarna

$$f(\rho) = A\log(\rho) + B, \quad g(\rho) = C\rho^{-p} + D\rho^{p},$$

men vi stryker de singulära termerna då vi varken har någon linjekälla ($\log\rho$-termen skulle motsvarat en sådan), eller någon annan singulär källa.

Randvillkoren säger att $f(a) = \phi_0$ och $g(a) = \phi_1$. Detta ger att $B = \phi_0$ och $Da^p = \phi_1$.

Svaret blir alltså

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 \left(\frac{\rho}{a}\right)^p \cos(p\varphi).$$

6. Använd indexnotation för att visa

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$$

(10p)

Lösning:

Låt $\mathbf{B} = \nabla \times (f\mathbf{A})$ och skriv komponenterna som

$$\begin{aligned} B_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}(f A_k) \\ &= \epsilon_{ijk} \left[A_k \frac{\partial f}{\partial x_j} + f \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \right] \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial f}{\partial x_j} A_k + f \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \end{aligned}$$

vilket är det sökta uttrycket i vektorform.