Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Lördagen den 23 oktober 2020 klockan 08.30-12:30.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, Olle Branders formelsamling.
Lösningsskiss: Tünde Fülöp

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater och med sfäriska basvektorer genom

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{a\cos\theta}{r^3}\hat{e}_r + \frac{b\sin\theta}{r^3}\hat{e}_\theta$$

där a och b är konstanter.

(a) Bestäm förhållandet mellan konstanterna a och b som gör att vektorfältet blir virvelfritt (konservativt). *(2 poäng)*

(b) Bestäm sedan en skalär potential till detta vektorfält! *(6 poäng)*

(c) Vad är den fysikaliska tolkningen av vektorfältet? *(2 poäng)*

Lösning:

(a) Rotationen av vektorfältet är

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{(a-2b)\sin\theta}{r^4}\hat{e}_\phi.$$

$\mathbf{F}$ är virvelfritt om $a = 2b$.

(b) Den skalära potentialen bestäms via sambandet $\mathbf{F} = -\nabla\phi$. Vi får ekvationssystemet:

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{2b\cos\theta}{r^3} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{b\sin\theta}{r^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0 \tag{3}$$

Integration av första ekvationen ger

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{b\cos\theta}{r^2} + f(\theta,\varphi)$$

och insättning i andra ekvationen ger

$$-\frac{b\sin\theta}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial\theta} = -\frac{b\sin\theta}{r^2}$$

vilket leder till att $\partial f/\partial\theta = 0$, som innebär att $f(\theta,\varphi) = g(\varphi)$. Insättning i tredje ekvationen ger $\partial g/\partial\varphi = 0$, vilket betyder att $g(\varphi)$ är konstant. Potentialen blir

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{b\cos\theta}{r^2} + \text{konst}$$

(c) Fältet från en dipol.

2. Två ledande plattor, båda parallella med xz-planet, befinner sig vid $y = 0$ och $y = d$. Plattan vid $y = 0$ har potentialen 0 och den vid $y = d$ har potentialen V_0. Området mellan plattorna är fyllt med laddningar, med volymladdningstätheten $\rho = -\rho_0 y/d$. Antag att kanteffekter kan försummas (alltså att plattorna kan antas ha oändlig utbredning i x och z). Bestäm potentialen och elektriska fältet mellan plattorna! Tips: lös Poissons ekvation med lämpliga randvillkor.

Lösning:

Vi behöver lösa Poissons ekvation i en dimension

$$\frac{d^2V(y)}{dy^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 d}y.$$

Integrera två gånger:

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d}y^3 + C_1 y + C_2$$

Randvillkor vid de två ledande plattorna

$$y = 0: \qquad V = 0 = C_2 \tag{4}$$

$$y = d: \qquad V = V_0 = \frac{\rho_0 d^2}{6\epsilon_0} + C_1 d \tag{5}$$

Från andra ekvationen får vi

$$C_1 = \frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}$$

Sätt in integrationskonstanterna i uttrycket för potentialen:

$$V(y) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 d}y^3 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}\right)y.$$

Elektriska fältet kan räknas från $\mathbf{E} = -\nabla V$ och blir

$$\mathbf{E} = -\hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} = -\hat{y}\left[\frac{\rho_0}{2\epsilon_0 d}y^2 + \left(\frac{V_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}\right)\right].$$

3. Genom sambanden

$$x = (R + \xi \cos u) \sin w \tag{6}$$
$$y = (R + \xi \cos u) \cos w \tag{7}$$
$$z = \xi \sin u \tag{8}$$

där $u, w \in [0, 2\pi]$ och $\xi \in [0, R)$ definieras ett toroidalt koordinatsystem med den konstanta storradien R. En toroidal yta S med storradien $R = 4a$ och lillradien $a = 1$ m (se figur) kan beskrivas med koordinaterna $x = a(4 + \cos u) \sin w$, $y = a(4 + \cos u) \cos w$ och $z = a \sin u$.

Bestäm normalytintegralen $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ på ytan S, om vektorfältet är givet av

$$\mathbf{F} = -x\hat{x} + y\hat{y} + 6z\hat{z}.$$

Lösning:

Gauss sats ger $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{F} dV$. Divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F} = 6$ är oberoende av positionen, vilket gör att volymintegralen $\int \nabla \cdot F dV = 6V_{torus}$. Problemet reduceras alltså till att beräkna volymen av torusen.

Man kan beräkna volymintegralen genom att först beräkna volymelementet $dV = \xi(4 + \xi \cos u) dw d\xi du$ och sedan beräkna integralen

$$\int_V \nabla \cdot V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} 6\xi(4 + \xi \cos u) dw d\xi du = 48\pi^2 \text{ m}^3$$

Om man råkar veta att volymen av en torus är $V_{torus} = 2\pi R \pi a^2$ kan man skriva upp direkt $V_{torus} = 8\pi^2$ m^3 och svaret $48\pi^2$ m^3.

4. På en cirkelyta med radien a finns en ytkälla med ytkälltätheten

$$\sigma(\rho) = \frac{\rho^2}{a^2} \sigma_0$$

där σ_0 är konstant. Bestäm potentialen från ytkällan på cirkelskivans mittpunktsnormal.

Lösning:

Problemets symmetri gör det lämpligt att använda cylindriska koordinater. Beteckna ortsvektorn för en punkt på källan med $\mathbf{r} = \rho \hat{e}_\rho$ och ortsvektorn för punkten vi vill veta potentialen i med $\mathbf{r}_p = z_p \hat{z}$ Ta ett ytelement på cirkelytan $dS = \rho d\rho d\varphi$. Laddningen på den är

$dq = \sigma dS = \sigma \rho d\rho d\varphi = \frac{\sigma_0}{a^2}\rho^3 d\rho d\varphi$. Avståndet $\mathbf{r}_p - \mathbf{r} = z_p\hat{z} - \rho\hat{e}_\rho$ och absolutbeloppet blir $|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}| = \sqrt{z_p^2 + \rho^2}$.

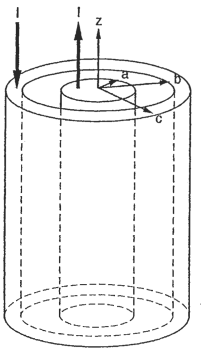
Vi tecknar potentialen för en punktkälla

$$d\phi(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}) = \frac{dq}{4\pi|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|} = \frac{\sigma_0\rho^3 d\rho d\varphi}{4\pi a^2\sqrt{\rho^2 + z_p^2}}$$

och potentialen från hela cirkelskivan blir

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}_p) &= \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\sigma_0\rho^3 d\rho d\varphi}{4\pi a^2\sqrt{\rho^2 + z_p^2}} = \frac{\sigma_0}{2a^2}\int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z_p^2}} = [\text{sätt } t = \rho^2] \\ &= \frac{\sigma_0}{2a^2}\int_0^{a^2} \frac{t dt}{2\sqrt{t + z_p^2}} = \ldots = \frac{\sigma_0}{6a^2}\left[(a^2 - 2z_p^2)\sqrt{a^2 + z_p^2} + 2z_p^2|z_p|\right].\end{aligned} \tag{9}$$

5. En oändligt lång koaxialkabels innerledare har radien a och dess ytterledare har innerradien b och ytterradien c (se figur). Strömmen I i innerledaren är i $\hat{z}$-riktningen och i ytterledaren flyter samma ström i motsatt riktning. Området mellan ledarna och utanför kabeln är vakuum.



Bestäm magnetfältet mellan ledarna $a < \rho < b$ och utanför ledaren $\rho > c$! (Tips: använd integralformen av Amperes lag (stationärtillstånd).) *(10 poäng)*

Lösning:

(a) För $a \leq \rho < b$, är den inneslutna strömmen I så Amperes lag i integralform ger att

$$B_\phi = \mu_0\frac{I}{2\pi\rho}$$

(b) Utanför koaxialkabeln ($\rho > c$) är den inneslutna strömmen noll och $B_\phi = 0$.

6. Visa identiteten

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}$$

med hjälp av indexnotation! *(10 poäng)*

Lösning:

$$\begin{aligned}
(\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}))_i &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\epsilon_{klm}A_l B_m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}A_l B_m \\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}A_l B_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial}{\partial x_j}A_l B_m \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}A_i B_j - \frac{\partial}{\partial x_j}A_j B_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_j}B_j + \frac{\partial B_j}{\partial x_j}A_i - \frac{\partial A_j}{\partial x_j}B_i - \frac{\partial B_i}{\partial x_j}A_j \\
&= B_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_j}B_i - A_j\frac{\partial B_i}{\partial x_j} + \frac{\partial B_j}{\partial x_j}A_i \\
&= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}
\end{aligned}$$