FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

31 augusti 2021

Ett **fält** är en fysikalisk storhet som har olika värden i olika punkter i ett visst område. T.ex. temperaturen som en funktion av x, y, z, är ett fält. Den kan också variera i tiden, då skriver man $T(x, y, z, t)$. En fysikalisk storhet kan också ha riktning, t.ex hastighetsfältet av något som flödar $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, det är olika vid olika punkter i rummet och i tiden både till storlek och riktning. Det kallas ett **vektorfält**.

Matematikerna har redan ett standardnamn för en storhet som har ett värde vid alla punkter, de kallar det funktion. Det är egentligen samma sak. Med andra ord, ett fält är en storhet som kan beskrivas som en funktion av positionen i rummet $\mathbf{r}$ och tiden t.

Världen är fullt av vektorfält. Storheter som elektriska och magnetiska fält, vindhastighet, flöde av partiklar finns överallt, de varierar i olika riktningar och i tiden. **Vektorer** är ett bra sätt att beskriva dem.

Vektoranalys är en matematisk modell som kan beskriva variationer i tid och rum på ett effektivt och koncist sätt. Den generaliserar vektoralgebran genom att koppla till matematisk analys i en och flera variabler. Den tillåter komplicerade samband som innehåller vektorer att skrivas på ett vackert sätt. När ni sedan läser vidare, och vill förstå elektromagnetism och strömningsmekanik, relativitetsteori eller plasmafysik är vektoranalys helt nödvändigt.

Klassisk fysik är samlingsnamnet på de fysikaliska teorierna som inte påverkas av kvantmekanik. Exempel på områden är mekanik, termodynamik, elektromagnetism och relativitetsteori. Det mesta av klassiska fysiken har många år på nacken (ibland många århundraden). Newtons Principia publicerades 1687, och där beskrevs att från några få grundläggande principer kan man förutsäga, ibland med otroligt bra noggrannhet, hur fysikaliska objekt rör sig. En del av Principia var också beskrivning av matematiska tekniker. Newtons arbete (som han själv erkände) baserades på tidigare tänkare, bland annat Galilei, Descartes och Kepler.

Det andra viktiga fysikområdet där vektorfält har stor betydelse är elektrodynamik, som utvecklades i mitten av artonhundratalet, med Maxwell i spetsen. Det behandlar elektriska och magnetiska fält och även ljus. Ett typiskt exempel på vektorfält är elektriskt fältstyrka $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, som beskriver storlek och riktning av elektriska kraften på en enhetsladdning som placeras vid punkten (x, y, z) vid tiden t.

Elektromagnetiska fält skapas av laddningar och hur fälten skapas kan vara ganska komplicerat, men det är förhållandevis enkla regler som beskriver hur fälten varierar från en punkt till en annan (de kallas Maxwells ekvationer), det är bara 4 ekvationer som beskriver fälten helt och hållet och som är det enklaste sätten att skriva elektrodynamikens lagar i.

Vi ska prata om tillämpningar 7:e läsveckan, men min ambition är att få in klassisk fysik under hela kursens gång, i lite större utsträckning än vad det varit fallet under kursens tidigare omgångar.

Sammanfattningsvis, varför ska man läsa Vektorfält och klassisk fysik? I grund och botten är det för att förstå världen som vi lever i.

Kursens syfte är att dels ge en förtrogenhet med de matematiska metoder som används för att undersöka fysikaliska fenomen i det tredimensionella rummet, dels fördjupa kunskaperna i grundläggande klassisk fysik. (Saxat ur studieportalen.)

Efter fullgjord kurs kan studenten utföra konstruktiv analys av problem inom fysik och tekniktillämpningar som berör fysikaliska storheters variation i rummet. Studenten har särskilt tillägnat sig matematiska färdigheter för derivering och integrering av skalära fält och vektorfält, analys och syntes av fält, inklusive singulariteter.

Studenten kan redogöra för fältbegreppet i klassisk fysik, och tillämpa detta på enklare problem inom teorierna för klassisk elektrodynamik (Maxwells ekvationer) och termodynamik (diffusions- och värmeledningsekvationerna).

Upplägg Kursens upplägg följer i stort sett förra årets med totalt 19 föreläsningar. Vi har två föreläsare, jag tar 14 av föreläsningarna och Istvan Pusztai tar 5.

Vi har också två räkneövningsledare, Måns Wallner och Andréas Sundström. De ska hålla 8 demonstrationsövningar.

Vi ska ha två datorlab-inlämningar, en i slutet av läsvecka 3 och en i slutet av läsvecka 8. Räkneövningsledarna ansvarar för var sin datorlab, Andréas för lab 1 och Måns för lab 2. Andréas och István ska också hålla ett handledningstillfälle för lab 1. Datorlabbar ska göras två och två, ni förväntas anmäla er själva. Den första labben släpps idag, den andra lite senare, efter att den första är inlämnad.

För att ha större förutsättningar att hänga med i kursen behöver man starta i god tid, läsa kursmaterialet och räkna de rekommenderade uppgifterna. De rekommenderade uppgifterna finns angivna på canvas under Veckoplanering.

Det finns många fördelar med att förbereda sig inför föreläsningar: man hänger med bättre på vad som gås igenom på föreläsningen, och har lättare att ställa frågor, man kommer igång i tid etc. Ett bra sätt att göra det är att INNAN föreläsningen ta reda på vad vi ska gå igenom (se veckoplanering på canvas), läsa motsvarande materialet i boken och svara på de instuderingsfrågor som tillhör materialet.

Kursmaterialet är ett kompendium som finns på Store men kan också laddas ner elektroniskt. Man kan komplettera genom att läsa i andra böcker, men det absolut viktigaste är att ni börjar räkna så fort som möjligt. Jag kan inte betona detta starkt nog.

Vi planerar ha i stort sett samma upplägg som förra året. Förra årets föreläsningsanteckningar finns att ladda ner från fliken Kursmaterial om ni vill få en inblick i vad ni har att vänta er. Men det är viktigt att påpeka att årets föreläsningar inte blir identiskt samma. Examinationen kommer dock att vara snarlik (skriftlig tenta med räkneuppgifter).

Ordinarie tentatillfälle är 23 oktober 2021, omtentorna är 3 januari 2022 och 15 augusti 2022.

Lärandemål Kursens lärandemål är beskrivna på studieportalen och även i kurs-PM på canvas. Jag har även tagit med dem i dessa föreläsningsanteckningar, men jag ska inte läsa upp det i sin helhet nu.

Första läsveckan ska vi ägna åt kapitel 1 och 2 i kompendiet. Det mesta i kap. 1 är repetition från flervariabelanalysen, så kursen börjar med en viss nerförsbacke. Bedöm själva hur mycket ni behöver öva på det, det är jätteviktigt att kunskapen är aktuell.

Första läsveckan motsvarar de två första punkterna i lärandemålen: fältbegreppet, derivering av fält och kroklinjiga koordinater.

Behärska fältbegreppet. Skalära fält, vektorfält, tensorfält. Beräkna och skissa ekvipotentialytor och fältlinjer. Räkna ut och förstå gradient, riktningsderivata, divergens, rotation och Laplaceoperatorn i kartesiska koordinater.

Förstå och kunna använda kroklinjiga koordinater med ortogonala basvektorer. Givet relationen mellan de kroklinjiga och kartesiska koordinaterna, kunna räkna ut och tolka skalfaktorer. Kunna beräkna gradient, divergens och rotation och Laplaceoperatorn i givna kroklinjiga koordinater (speciellt sfäriska och cylindriska).

Andra läsveckan Integraler och integralsatser. Kapitel 3 och 4 i kompendiet. Istvan tar föreläsningen på onsdag, den om integralsatser och kontinuitetsekvationen.

Lärmålen:

Kunna beräkna linje-, yt-, och volymintegraler genom parametrisering och i kroklinjiga koordinater. Tillämpa linjeintegral på mekaniskt arbete. Tillämpa ytintegral på flöde genom yta. Tillämpa volymintegral för att integrera en täthet.

Kunna använda Gauss och Stokes satser i konkreta beräkningar och för teoretiska överlägganden.

Förstå och kunna härleda kontinuitetsekvationen utgående från en storhets bevarande.

Tredje läsveckan bara två föreläsningar: Vi ska prata om indexnotation (som också kallas tensornotation) och tensorer.

Anledningen man behöver känna till tensorer är att fysikaliska lagar ofta formuleras som en likhet mellan tensorer. Materialet motsvarar kapitel 5 och 12 i kompendiet. Istvan tar den första (indexnotation, kap 5) och jag den andra (tensorer, kap 12). Det som skiljer från förra året är att vi har tagit bort kapitel "5.4 Identiteter för derivator" från lärmålen (men det är förstås fortfarande nyttigt att läsa det som "överkurs" om intresse finns).

Lärandemålen är: Kunna hantera indexnotation (tensornotation), inklusive Einsteins summationskonvention, för vektorer, matriser och mer allmänna *tensorer. Kroneckers delta och Levi-Civita-tensorn (också kallas permutationstensorn). Kryssprodukt, skalär trippelprodukt och determinant i termer av Levi-Civita-tensorn.*

Läsvecka 4: Singulära fält. Kapitel 6 i kompendiet. Istvan tar föreläsningen på onsdag, jag tar tisdags- och fredagsföreläsningarna.

Lärandemål: Förstå och känna igen enkla typer av singulära fält: punktkälla, linjekälla, virveltråd i termer av deltafunktioner. Kunna utföra integraler med singulära fält. Kunna använda Gauss och Stokes satser i närvaro av singulära källor och virvlar.

Läsvecka 5: Deltafunktioner, integraler av singulära fält: Kapitel 7. Den här veckan blir det två föreläsningar (jag tar båda) och två räkneövningar.

Lärandemål: Kunna hantera Diracs deltafunktion i en och flera dimensioner. Approximationer genom "smala och höga" funktioner. Kunna utföra integraler med deltafunktioner i integranden.

Läsvecka 6: Det är två föreläsningar, och Istvan Pusztai tar båda. Potentialteori, Laplaces och Poissons ekvationer + lösningsmetoder för bland annat Poissons ekvation. Det som skiljer från förra året är att vi har tagit bort speglingsmetoden för det går man igenom i Elfältskursen.

Lärmålen: Kunna och kunna tillämpa kriterierna för existens av skalär potential och vektorpotential till vektorfält. Tolkning och tillämpning av rotationsfrihet i termer av konservativt kraftfält och i termer av elektrostatiskt fält. Tolkning och tillämpning av divergensfrihet i termer av magnetostatiskt fält.

Laplaces och Poissons ekvationer. Känna till entydigheten av lösningar för vissa randvillkor: Dirichlets och Neumanns. Kunna lösa genom vettiga ansatser i enkla geometrier med enkla randvärden (separation).

Greensfunktioner. Definition av Greensfunktion till Poissons ekvation som lösning till ekvationen med punktkälla. Kunna tillämpa principen för att lösa Poissons ekvation på R2 och R3 med givna källfördelningar.

Läsvecka 7: Tillämpningar: diffusion, värmeledning, elektromagnetisk (kapitel 10 och delar av 11), jag tar alla tre föreläsningar. Det finns en viss överlapp med Elfältkursen även här, så den delen kommer att vara till väldigt stor nytta framöver.

Lärmålen:

Kunna härleda och förstå värmeledningsekvationen och dess relation till Poissons ekvation. Kunna tillämpa Greensfunktionsmetod (man behöver inte kunna Greensfunktionen utantill) för begynnelsevärdesproblem vid värmeledning. Kunna lösa stationära värmeledningsproblem med och utan värmekällor.

Visa kännedom om Maxwells ekvationer i vakuum, med källor och strömmar. Kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning och ström, och dess relation till Maxwells ekvationer. Tillämpningar på elektrostatiska och magnetostatiska problem: potentialer och vektorpotentialer från laddnings- och strömfördelningar.

Målet med dagens föreläsning

Vi ska ge en översikt av begrepp som är nödvändiga, t.ex. vad är skalär- och vektorfält, hur man räknar nivåytor, gradienter och fältlinjer, vad är riktningsderivata, och hur man deriverar vektorfält.

Vid nästkommande föreläsningar ska vi överge kartesiska koordinatsystem och diskutera cylindriska och sfäriska koordinatsystem.

1. Fält och derivator

I den här kursen kommer vi huvudsakligen behandla skalära fält och vektorfält, som båda är specialfall av tensorfält som vi ska titta på läsvecka 3. En viktig egenskap hos skalärer och vektorer är att de är **oberoende** av koordinatsystem. De bevarar sina egenskaper vid koordinat-transformationer. Och som ni kan ana, är det väldigt bra att arbeta med sådana storheter, eftersom fysikens lagar är invarianta om man roterar eller förskjuter koordinataxlarna.

Skalärfält. Ett skalärt fält representeras av ett tal i varje punkt. Exempel på sådana fält är temperatur, tryck, elektrisk laddningstäthet.

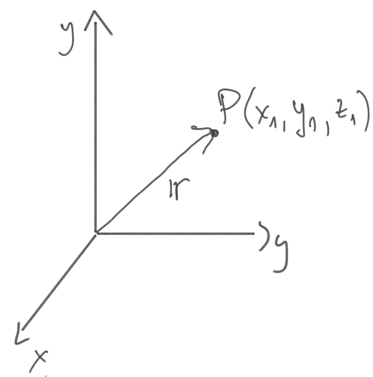
$$\Phi = \Phi(x, y, z, t), \tag{1}$$

där (x, y, z) är koordinaterna där vi beräknar fältet. Skalär betyder att värdet är oberoende av vilket koordinatsystem storheten observeras från.

Vektorfält. Storheter som har en riktning också, som t.ex. hastighetsfältet hos något som flödar kallar vi vektorer. Andra exempel är rörelsemängdsvektorn, kraft, accelerationsvektorn, elektriska och magnetiska fält, alla dessa har en storlek och riktning.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z, t), \tag{2}$$

Ett exempel på en vektor är steget som pekar från origo till en viss punkt P, som befinner sig vid koordinaterna (x_1, y_1, z_1).



Vi betecknar det med det matematiska symbolen $\mathbf{r}$. Det kännetecknas inte av ett enda tal, utan tre x_1, y_1, z_1. Men om vi skulle använda en annan koordinatsystem, som är t.ex. roterat eller förskjutet, skulle vi få helt andra tal x', y', z'. Men stegets längd och riktnigen skulle vara samma. Så vi kan alltså behålla $\mathbf{r}$ oavsett koordinatsystem, det spelar ingen roll hur vi vrider axlarna.

De tre talen som beskriver storheten i ett givet koordinatsystem kallas vektorens komponenter i riktningen av koordinataxlarna. En allmän vektor $\mathbf{A}$ kan skrivas i komponentform, och i ett kartesiskt koordinatsystem på $\mathbf{R}^3$ gäller att

$$\mathbf{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \tag{3}$$

där $\hat{x}$, $\hat{y}$ och $\hat{z}$ är ortonormerade **basvektorer**.

Vektoralgebra

Repetera detta om ni känner er osäkra! Exemplen nedan i kartesiska koordinater.

Addition.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z} \tag{4}$$

och motsvarande för subtraktion. Resultatet är en vektor.

Skalärprodukt. På komponentform

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \tag{5}$$

Resultatet är en skalär.

Vektornorm.

$$A = |\mathbf{A}| = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2} = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}. \tag{6}$$

Kryssprodukt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} && (7) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z}. && (8) \end{aligned}$$

Gradient.

Ett viktigt begrepp när vi arbetar med skalära fält är **gradienten**. Betrakta två punkter (x, y, z) och $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$. Skillnaden i skalären Φ mellan dessa båda punkter är

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Phi &= \Phi\left(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z\right) - \Phi\left(x, y, z\right) \\ &\approx \Phi\left(x, y, z\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathrm{d}z - \Phi\left(x, y, z\right) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{9}$$

Den här skillnaden kan vi tolka som skalärprodukten mellan vektorn

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\right), \tag{10}$$

som beskriver separationen mellan de båda punkterna och vektorn

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right), \tag{11}$$

som vi kallar för gradienten av Φ. Notera att $\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla\Phi$.

Vi använder ibland kortnotationen $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$.

Gradientoperatorn uttalas *grad*, *nabla* eller *del*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{12}$$

är i sig själv inte en vektor, utan den är en vektoroperator, som tar ett skalärfält och producerar ett vektorfält. Eftersom den har med derivering att göra kallas den också differentialoperator, den är hungrig för något att differentiera. $\nabla\Phi$ däremot är inte hungrig, den har redan fått Φ att äta, så den är en vanlig vektor.

Eftersom en differentialoperator bara verkar på det som är till höger, man måste vara försiktig med ordningen i uttryck som innehåller ∇, så ibland är det bäst att använda parenteser för att undvika missförstånd.

T.ex. trots att vektorer har egenskapen att kryssprodukten med sig själva är noll: $\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$ betyder det inte att $\nabla n \times \nabla T$ också är noll (om inte $\nabla n = \nabla T$).

Riktningsderivata Vi vill ofta veta hur snabbt ett visst skalärfält varierar i en viss riktning. T.ex. hur snabbt ökar temperaturen längs en viss kurva. Då använder man begreppet riktningsderivata.

Riktningsderivatan för Φ i riktningen $\hat{n}$ är $\hat{n}\cdot\nabla\Phi$ där $\hat{n}$ är en vektor med längden 1.

Enheten på riktningsderivata är $[\Phi]$/längd. Notera att $[\hat{n}] = 1$.

Nivåyta. Geometriskt brukar vi beskriva ett skalärt fält $\Phi(x, y, z, t)$ genom att rita de ytor på vilka fältet är konstant. Vi kallar sådana ytor i tre dimensioner för **nivåytor**. Man kan konstruera nivåytorna genom att ställa upp ekvationen $\Phi(x, y, z, t) = C$, och lösa den för olika C.

Ofta är det enklare att rita i två dimensioner, då tar man projektionen av nivåytorna med ett visst plan, och man får **nivåkurvor**. Vissa typer av nivåkurvor har fått speciella namn, till exempel isotermer för kurvor längs vilka temperaturen är konstant och isobarer längs vilka trycket är konstant.

Ofta definierar man utgående från Φ ett vektorfält $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$. För att få bild av fältet kan man rita fältlinjer, som är de kurvor som har $\nabla\Phi$ som tangent i varje punkt.

Man kan visa att $\nabla\Phi$ är ortogonal mot nivåytorna för Φ. Låt $\hat{e}_t$ vara en tangentvektor till en nivåyta genom en punkt $\mathbf{r}_0$. Eftersom $\Phi = \Phi_0$ (konstant) längs nivåytan gäller att riktningsderivatan

$$\hat{e}_t \cdot \nabla\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_t \perp \nabla\Phi.$$

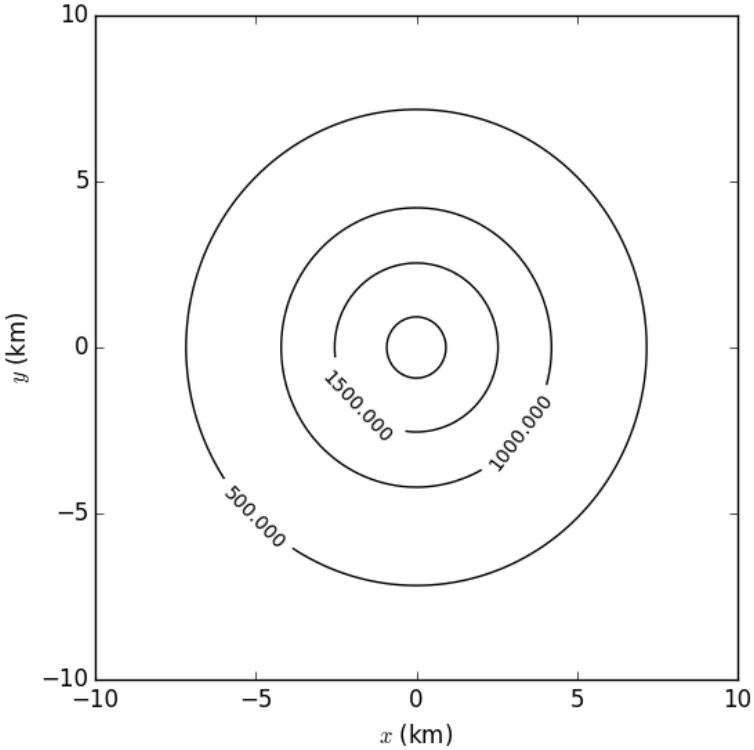
Fältlinjerna skär alltså nivåytorna vinkelrätt.

Exempel: Höjdkurvor och riktningsderivata Betrakta en bergstopp med en höjdyta som ges av

$$h(\mathbf{r}) = \frac{h_0}{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2}}, \tag{13}$$

där h ger höjden över havet, h_0 är höjden på toppen av berget, och R är ett mått på bergets utbredning.

Vi kan göra en höjdkarta genom att rita upp kurvor som motsvarar konstanta värden på h. Vi ser enkelt att kurvan $x^2 + y^2 = C^2$ (konstant) ger $h_C = \frac{h_0}{1+\frac{C^2}{R^2}}$ (konstant) och att höjdkurvorna därför motsvarar cirklar med centrum i origo ($x = y = 0$).



Gradienten av detta fält kommer att motsvara höjdändringen per längdenhet i horisontalplanet. Gradienten är $\nabla h = \hat{x}\partial_x h + \hat{y}\partial_y h$. Enklast att beräkna det är genom att skriva $x^2 + y^2 = r^2$ så att $h = h(r)$. Vi får då

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} = -\frac{h_0}{(1 + r^2/R^2)^2}\frac{2r}{R^2} \tag{14}$$

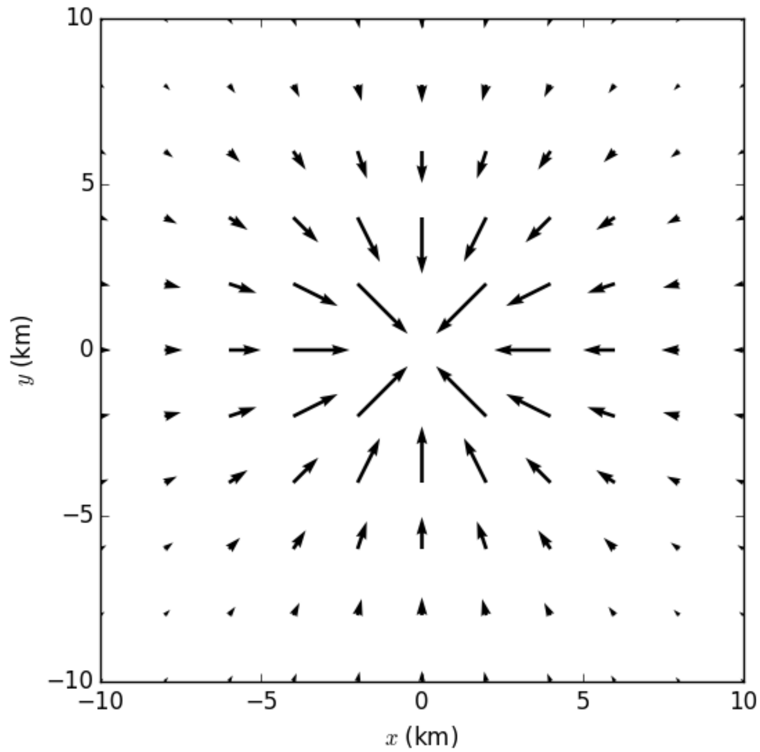
Vidare är

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} 2x = \frac{x}{r}, \tag{15}$$

och pss $\partial_y r = y/r$. Därför blir

$$\begin{aligned} \nabla h = \hat{x}\partial_x h + \hat{y}\partial_y h &= \hat{x}\frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} && (16) \\ &= -\frac{2h_0}{R^2(1 + r^2/R^2)^2}\left(x\hat{x} + y\hat{y}\right). && (17) \end{aligned}$$

Riktningen på denna vektor ser vi är $-(x\hat{x} + y\hat{y}) = -r\hat{r}$, dvs den horisontella höjdgradienten är riktad radiellt inåt - mot större värden av h.



Vektorfält, fältlinjer

Ett vektorfält beskriver en fysikalisk kvantitet som i varje punkt i rummet är en vektor. Exempel på sådana kvantiteter är hastigheten i en strömmande vätska, den magnetiska fältstyrkan, och den elektriska strömtätheten.

Fältlinjer. Som vi redan sett, geometriskt kan vi representera ett vektorfält genom att konstruera fältlinjer. Fältlinjerna till ett vektorfält $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ är de kurvor som överallt har $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ som tangentvektor.

För att bättre förstå begreppet fältlinjer kan vi börja med att tänka oss ett vektorfält $\mathbf{V}(x, y, z)$ som representerar en hastighet i en vätska. En testpartikel i vätskan följer då en bana $\mathbf{r}(t)$ som ges av

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V}(\mathbf{r}). \tag{18}$$

Analogt med detta definierar vi en fältlinje som den bana vi får genom att följa med ett godtyckligt vektorfält $\mathbf{F}$ som om det var ett hastighetsfält. Ekvationen för ett sådant vektorfält är

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(\tau)\right), \tag{19}$$

där C är en godtycklig konstant (dvs du kan välja den som du själv vill, så länge som du inte sätter den till noll), och τ är en parameter för att beskriva punkterna längs fältlinjen.

Exempel: fältlinjer

Vi vill konstruera fältlinjerna till

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\right) = F_0\left(\frac{x}{a}\hat{x} + \hat{y}\right). \tag{20}$$

Detta ger oss differentialekvationerna

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = CF_0\frac{x}{a}, \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = CF_0. \tag{22}$$

Vi väljer nu $C = a/F_0$, så att ekvationerna blir

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = x, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = a \tag{24}$$

Dessa har lösningen

$$x = x_0\mathrm{e}^{\tau}, \tag{25}$$

$$y = a\tau + y_0 \tag{26}$$

där x_0 och y_0 är den punkt på fältlinjen där $\tau = 0$.

Divergens och rotation. Vi kan derivera ett vektorfält på två huvudsakliga sätt. Dels kan vi bilda en skalär genom **divergensen** $\nabla \cdot \mathbf{F}$ (eller div$\mathbf{F}$), eller en vektor genom rotationen $\nabla \times \mathbf{F}$ (eller rot$\mathbf{F}$).

I kartesiska koordinater blir de explicita uttrycken

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z, \tag{27}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (\partial_y F_z - \partial_z F_y)\hat{x} + (\partial_z F_x - \partial_x F_z)\hat{y} + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\hat{z}. \tag{28}$$

Divergensen ger ett mått på hur mycket fältet *"går isär"* (divergerar), medan rotationen mäter hur mycket det *"snurrar runt"*.

Exempel: divergens

Vektorfältet $\mathbf{F} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ har divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$ och rotationen $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ (fältet är rotationsfritt). Notera att negativa värden på divergensen skulle betyda att fältet *"går ihop"* (konvergerar).

Exempel: rotation

Hastighetsfältet för en roterande fluid $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Med $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$ fås $\mathbf{v} = -\omega y\hat{x} + \omega x\hat{y}$ och rotationen blir $\nabla \times \mathbf{v} = 2\omega\hat{z}$ medan divergensen $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Detta specifika hastighetsfält är alltså **divergensfritt**.

Divergens är väldigt användbart om vi ska beräkna styrkan på fältet utifrån det vi vet om källorna. Det finns fält i naturen som har tydliga källor, exempelvis ett vattenfall vid änden av en sjö, flödet från en slang i en pool och elektriskt fält från en punktladdning.

Laplaceoperatorn. Vi kommer också att stöta på den viktiga **Laplaceoperatorn**: $\Delta = \nabla \cdot \nabla$. Verkande på ett skalärt fält i kartesiska koordinater blir detta

$$\Delta\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\Phi. \tag{29}$$

Likaså kan denna verka på ett vektorfält $\mathbf{\Delta F} = \nabla \cdot \nabla\mathbf{F} = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\mathbf{F}$.

Laplaceoperatorn har många tillämpningar inom fysik, den ingår i problem rörande värmeledning, diffusion, elektrostatik, gravitation och vågutbredning. Vi kommer att se längre fram hur elektromagnetiska vågor (som ljus) kan beskrivas med hjälp av Laplaceoperatorn.

Maxwells ekvationer Ett bra exempel på vektoroperatorer inom klassisk fysik är Maxwells ekvationer som beskriver samband mellan elektriska fält och magnetiska fält. I SI enheter skrivs dessa

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{J}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

där $\mathbf{E}$ är elektriskt fält, $\mathbf{B}$ är magnetfält, ρ är laddningsdensitet, $\mathbf{J}$ är strömdensitet, ϵ_0 är elektriskt permittivitet, μ_0 är magnetiskt permeabilitet.

Maxwell sammanställde runt 1860 ett tjugotal ekvationer för elektriska och magnetiska fält, som byggde i huvudsak på tidigare kända samband, men Maxwell bidrog själv med nyheten “förkjutningsströmmen”. Heaviside sammanställde senare några av dessa ekvationer till fyra ekvationer för elektromagnetism som idag benämns Maxwells ekvationer (de var i komponentform tidigare). Det var också Heaviside som införde den vektoranalytiska notationen och de symboler för fälten som används idag och introducerade ett stort antal termer inom elektromagnetik: t.ex. konduktans, impedans, induktans, admittans, permeabilitet, permittivitet. Hans namn är bekant för många för han introducerade “Heavisides stegfunktion”, som han använde för att beräkna strömmen som skapas när ett elektrisk krets slås på.

Låt oss ta en titt på ekvationerna: Den första ekvationen säger att divergensen för magnetfält alltid är noll, vilket betyder att magnetiska monopoler inte existerar (magnetfält är alltid associerade med både källa och sänka (nordpol och sydpol).

Andra ekvationen säger att elektriska fält skapas av laddningar.

Särskilt intressanta är de sista två ekvationerna. Faradays lag säger att ett tidsvarierande magnetfält producerar ett elektriskt fält och omvänt att ett elektriskt fält vars rotation är skild från noll alstrar ett magnetiskt fält. Amperes lag säger att ett tidsvarierande elektriskt fält producerar ett magnetiskt fält och omvänt att ett magnetiskt fält vars rotation är skild från noll alstrar ett elektriskt fält. Detta ömsesidiga beroende är orsaken till att vi talar om elektromagnetiska fält. Med hjälp av dessa ekvationer kan man visa att elektromagnetiska fält utbreder sig som vågor i vakuum. Vi återkommer till dessa senare i kursen.