Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Måndagen den 16 augusti 2021 klockan 14.00-18:00, på distans via zoom.
Hjälpmedel:	Alla hjälpmedel tillåtna. Men kom ihåg att samarbete aldrig är tillåtet. Vi kommer att vara extra uppmärksamma på plagiarism i inlämnade lösningar.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (via zoom).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. Beräkna följande integraler:

   (a) Beräkna $\int_2^6 (3x^2 - 2x - 1)\delta(x-3)dx$.

   (b) Beräkna $\int_{-2}^2 (2x+3)\delta(3x)dx$.

   (c) Visa att $x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x)$. (Tips: använd partiell integration).

   (d) Beräkna volymsintegralen $\int_{\mathcal{V}} (r^2+2)\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) dV$, där $\mathcal{V}$ är en sfär med centrum i origo och radien R.

   (10 poäng totalt fördelat på 2 poäng vardera för deluppgift a och b samt 3 poäng vardera för deluppgift c och d.)

2. Betrakta vektorfältet $\vec{v} = \frac{v_0}{a^2}\left(x^2\hat{x} + \frac{3xz^2}{a}\hat{y} - 2xz\hat{z}\right)$. v_0 och a är positiva konstanter.

   (a) Beräkna flödesintegralen $\oint_{\mathcal{S}} \vec{v}\cdot d\vec{S}$, där $\mathcal{S}$ är ytan till en sfär med centrum i origo och radien R och normalriktningen $\hat{r}$.

   (b) Beräkna Laplacianen $\Delta\vec{v}$

   (10 poäng fördelat på 5 poäng vardera för deluppgift a och b)

3. Finn den elektrostatiska potentialen $\phi(x,y,z)$ till det stationära elektriska fältet $\vec{E} = \frac{E_0}{a}(-x\hat{x} - y\hat{y})$. Potentialen uppfyller randvillkoret $\phi = aE_0$ längs z-axeln. E_0 och a är positiva konstanter. *(10 poäng)*

4. Beräkna kurvintegralen $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ där kurvan Γ ges av $x^2 + y^2/4 = a^2$ och $z = 0$. Den genomlöps moturs sedd från positiva z-axeln. Fältet $\vec{F}$ ges av

   $$\vec{F} = F_0\left[\frac{\rho}{a}\hat{z} + \left(\frac{\rho - z}{a} + \frac{2a}{\rho}\right)\hat{\varphi}\right],$$

   i cylindriska koordinater. F_0 och a är positiva konstanter. *(10 poäng)*

5. Ytan till en oändligt lång cylindrisk kavitet med radien a hålls vid temperaturen $T_0\cos(2\varphi)$. Finn ett uttryck för temperaturfältet inuti kaviteten (där det inte finns några värmekällor). Skissa också isotermerna $T = 0$ och $T = T_0/2$. *(10 poäng)*

6. Man vill ta reda på hur värme läcker ut genom en husvägg. Väggen har tjockleken L och värmeledningsförmågan λ. Inomhustemperaturen är T_1 och utomhustemperaturen T_0. Väggens insida håller samma temperatur som råder inomhus, $T(x=0) = T_1$. Vid väggens utsida visar det istället sig att värmeströmmen $\vec{q}$ ut ur väggen (normalriktning $\hat{x}$)

är proportionell mot skillnaden mellan väggens utsidas temperatur och utomhustemperaturen, så att $\hat{x} \cdot \vec{q} = \alpha\,(T(x = L) - T_0)$. Bestäm temperaturfördelningen i väggen och teckna specifikt ett uttryck för temperaturen vid väggens utsida? Under vilken förutsättning råder approximativt ett homogent Neumann randvillkor vid ytterväggen, och vad blir temperaturen vid väggens utsida i det fallet? *(10 poäng)*