Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Måndagen den 4 januari 2021 klockan 08.30-12:30, på distans via zoom.
Hjälpmedel:	Alla hjälpmedel tillåtna. Men kom ihåg att samarbete aldrig är tillåtet. Vi kommer att vara extra uppmärksamma på plagiarism i inlämnade lösningar.
Examinator:	Christian Forssén (031–772 3261).
Jourhavande lärare:	Christian Forssén (via zoom).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Vid tentamensrättning gäller följande allmänna principer:

- För full (10) poäng krävs fullständigt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1–3 poängs avdrag. Gäller även mindre brister i presentationen.
- Allvarliga fel (t.ex. dimensionsfel eller andra fel som leder till orimliga resultat) kan ge lägre poängavdrag om orimligheten pekas ut.
- Lösningar som inte går att följa (t.ex. avsaknad av figur, ej definierade variabler, svårläst, etc) renderar poängavdrag även om svaret verkar vara korrekt.
- Allvarliga principiella fel ger fullt poängavdrag.
- Även skisserade lösningar kan ge delpoäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

1. Beräkna följande integraler:

   (a) $\int_0^\infty \delta(x+\pi/2)\sin(x)dx$

   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-2x)\cos(x)dx$

   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(2x+\pi)\cos(x)dx$, där δ' betecknar derivatan av deltafunktionen.

   (d) $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, där S är begränsningsytan till en sfär med radien a och mittpunkt i origo samt med normalriktning $\hat{\mathbf{e}}_r$, och vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F} = \frac{\vec{r}-\frac{a}{2}\hat{x}+\frac{3a}{4}\hat{y}-\frac{a}{4}\hat{z}}{|\vec{r}-\frac{a}{2}\hat{x}+\frac{3a}{4}\hat{y}-\frac{a}{4}\hat{z}|^3}$?

   (10 poäng totalt fördelat på 2 poäng vardera för deluppgift a och b samt 3 poäng vardera för deluppgift c och d.)

2. Tröghetsmatrisen $\mathbf{I}$ och rotationsvektorn $\vec{\omega}$ för en stel kropp ger dess kinetiska rotationsenergi

   $$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T\mathbf{I}\vec{\omega}.$$

   Visa att denna kinetiska energi är en skalär givet att tröghetsmatrisen är en tensor av rank 2 och rotationsvektorn en tensor av rank 1 (dvs en vektor). *(10 poäng)*

3. Ett magnetfält i xy-planet ges av

   $$\vec{B}(r,\theta) = \frac{B_0}{a}(-r\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + r\cos\theta\hat{\mathbf{y}}),$$

   där B_0 och a är positiva konstanter. Bestäm ekvationen för den fältlinje $\vec{r}(\tau)$ som startar i punkten $\vec{r}(\tau=0) = a\hat{\mathbf{y}}$.
   OBS: (r,θ) är planpolära koordinater i xy-planet (dvs θ är vinkeln från x-axeln). *(10 poäng)*

4. Paraboliska koordinater $uv\alpha$ definieras genom

   $$\begin{aligned} x &= uv\cos\alpha, \\ y &= uv\sin\alpha, \\ z &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \end{aligned}$$

   där $u \geq 0$, $v \geq 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$. Beräkna basvektorerna till detta koordinatsystem. *(10 poäng)*

5. En planet med radien R uppvärms av ett radioaktivt material i planetskorpan vars sönderfall avger effekten ρ_0 per volymsenhet. Det radioaktiva materialet förekommer enbart för $r > R/2$ vilket betyder att det inte finns någon värmekälla i planetens inre. Vidare gäller att värmeledningsförmågan är λ_0 för $r > R/2$ och $3\lambda_0$ för $r \leq R/2$ samt att planetens yta håller temperaturen 0 K. Beräkna den stationära temperaturfördelningen i planeten.
Ledning: Både temperatur och värmeström är kontinuerliga vid $r = R/2$. *(10 poäng)*

6. Betrakta fyra olika potentialer som uppfyller Laplaces ekvation inuti en sfär V med radie a och med centrum i origo. I samtliga fall gäller ett Dirichlet-randvillkor: $\phi(r = a) = \phi_0 g(\theta, \varphi)$. Skillnaden är dock den explicita formen på vinkelberoendet på randen:

   (a) $g(\theta, \varphi) = \cos\theta$,

   (b) $g(\theta, \varphi) = \sin\theta$,

   (c) $g(\theta, \varphi) = \cos\theta\cos\varphi$,

   (d) $g(\theta, \varphi) = 3\cos^2\theta - 1$.

   Visa för vilken eller vilka av dessa fall som variabelseparation med ansatsen $\phi = f(r)g(\theta, \varphi)$ fungerar bra som lösningsmetod (där $g(\theta, \varphi)$ alltså motsvarar det aktuella randvillkoret) och finn lösningarna för dessa. Notera att du alltså inte behöver försöka finna lösningarna för de fall där variabelseparation inte är en passande lösningsmetod.
   (10 poäng)