

# FFM234, Klassisk fysik och vektorfält

## - Föreläsningsanteckningar

István Puztai, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg,  
Sverige

15 september 2021

### 5. Indexnotation

Precis som vi har räkneregler för derivator, så kan vi härleda räkneregler för våra differentialoperatorer. Det är då viktigt att komma ihåg att fälten på de båda sidorna av likhetstecknet skall vara av samma typ, det vill säga om vi har ett skalärt fält till vänster om likhetstecknet skall vi ha ett skalärt fält till höger om likhetstecknet, och om vi har ett vektorfält till vänster om likhetstecknet skall också fältet till höger vara ett vektorfält. På så sätt kan man resonera sig fram till några av räknereglerna.

### Gradient, divergens och rotation av en produkt av fält

För vanliga funktioner  $f$  och  $g$  gäller att

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}. \quad (1)$$

Om vi istället betraktar  $\vec{\nabla}(fg)$ , där  $f$  och  $g$  är skalära fält, ser vi att det resulterande fältet måste vara ett vektorfält, och att vi måste derivera ett av fälten åt gången. Om vi tar gradienten av ett skalärt fält, så får vi ett vektorfält och om vi sedan multiplicerar med ytterligare ett skalärt fält, så har vi fortfarande ett vektorfält, alltså bör räkneregeln vara

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f. \quad (2)$$

På liknande sätt kan vi resonera oss fram till

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{u}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{u} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \quad (3)$$

och

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{u}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{u} + f\vec{\nabla} \times \vec{u}. \quad (4)$$

Mer komplexa samband är dock svårare att resonera sig fram till. Detta gäller även kombinationer av flera vektoroperatorer. Vad blir t.ex.  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ ? I princip kan man visa dem genom att skriva ut ekvationerna komponentvis, men en effektivare metod är att använda indexnotation. Indexnotationen är ett effektivt verktyg i stora delar av den teoretiska fysiken.

## Indexnotation

Vektorn  $\vec{A}$  är densamma i alla koordinatsystem, kartesiska såväl som kroklinjiga. I någon given bas kan dess komponenter skrivas ut:  $\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \vec{e}_i$ .

- Vi kommer nu att betrakta  $A_i$  som komponenterna till  $\vec{A}$  i ett kartesiskt koordinatsystem.
- Detta kan verka som en begränsning, men kommer faktiskt att ge oss en väldigt kraftfull formalism.
- Vi kommer alltså att skriva vektorn  $\vec{A}$  som  $A_i$ , vilket vi kan tolka som en lista över komponenterna,  $\{A_i\}_{i=1}^3$ .
- Indexet  $i$  kallas ett *fritt index*, eftersom det kan ta värdena  $i = 1, 2, 3$

**Produkter av vektorer.** Skalärprodukten av två vektorer  $\vec{A}$  och  $\vec{B}$  är  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$ . För att göra notationen mer kompakt inför vi nu *Einsteins summationskonvention*, som säger att summation är underförstådd så snart samma index förekommer två gånger. Med dessa skrivregler har vi då

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \quad (5)$$

### Kommentar

Att vi skriver lägre index har ingen betydelse (inom detta kurs), om man vill kan man t.ex. skriva  $A_i B^i$ . Först när man sysslar med vektorer/tensorer i icke-kartesiska system behöver man göra åtskillnad på index uppe och nere. Detta gäller t.ex. i speciell relativitetsteori.

Det här uttrycket för skalärprodukten gäller i godtyckligt antal dimensioner. Resultatet av skalärprodukten är förstas en skalär. Indexen  $i$  ovan är *inte* fria index, utan *summationsindex*, eller kontraherade index.

### Exempel: matris-vektor-multiplikation

En matris representeras av sina matriselement (precis som enhetsmatrisen nedan). Det första indexet är rad- och det andra kolumnindex. Matrisvektor-multiplikationen  $\mathbf{M}\vec{v}$  kan skrivas med indexnotation

$$[\mathbf{M}\vec{v}]_i = M_{ij}v_j. \quad (6)$$

Observera att matris-vektor multiplikationens resultat är en vektor som måste ha *ett* index, som är antalet fria index i uttrycket  $M_{ij}v_j$ . Det är sant allmänt: Objektet är en skalär/vektor/matris om det har 0/1/2 fria index. I nästa kapitlet kommer vi lära oss om tensorer, som inkluderar dessa objekt, men är ännu mer generella, och kan ha högre antal index (s.k. *rank*, eller *ordning*). Det förblir sant att om en uttryck har  $n$  fria index, är det en objekt av rank  $n$ .

**Enhetsmatrisen.** Vi har redan sett Kroneckers delta,  $\delta_{ij}$ , som definieras av

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

(notera att detta helt enkelt är matriselementen av enhetsmatrisen).

Betrakta uttrycket  $\delta_{ij}A_j$ . Här är indexet  $j$  repeterat och därför ett summationsindex, och uttrycket skall utläsas  $\sum_{j=1}^3 \delta_{ij}A_j = A_i$ , dvs. helt enkelt multiplikation av vektorn  $\vec{A}$  med enhetsmatrisen.

### Kommentar

Notera att Kroneckers delta leder till att ett summationsindex "elimineras"; den plockar ut en term ur summan.

### Exempel: matris-matris-multiplikation och spår av en matris

Matrismultiplikation  $\mathbf{M}\mathbf{N} = \mathbf{P}$  skrivs som  $M_{ik}N_{kj} = P_{ij}$ . Spåret av en matris, dvs. summan av diagonalelementen är  $\text{tr } \mathbf{M} = M_{ii}$ .

**Kryssprodukt.** Låt  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ . Komponentvis gäller  $C_1 = A_2B_3 - A_3B_2$ , och de andra komponenterna ges av cykliska permutationer av indexen. Vi inför nu objektet  $\varepsilon_{ijk}$ , som definieras av

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk \text{ jämn permutation av } 123, \\ -1, & ijk \text{ udda permutation av } 123, \\ 0, & \text{annars, dvs. om minst två index tar samma värde.} \end{cases} \quad (8)$$

$\varepsilon_{ijk}$  kallas *Levi-Civita-tensorn* eller *permutationssymbolen*.

### Kommentar

Vi har inte riktigt definierat vad en tensor är ännu. Det kommer senare, och är inte speciellt dramatiskt. För tillfället kan vi bara tänka på det som ett objekt som har ett antal index, alltså en naturlig generalisering av vektor- och matrisbegreppen.

Definitionen gör att  $\varepsilon_{ijk}$  har egenskapen att den byter tecken om man byter plats på två index, vilka som helst. Man säger att den är fullständigt antisymmetrisk. Alltså, t.ex.  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ , medan  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}$ .

Eftersom  $\varepsilon_{ijk}$  har tre index, kan vi kontrahera två av dem med index på vektorer, och alltså bilda  $C_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k$ . Med hjälp av definitionen kan vi räkna ut t.ex.  $C_1$  (vi sätter  $i = 1$  och summerar över  $j, k$ ):

$i$	$j$	$k$	$\varepsilon_{ijk}$	term
1	2	3	+1	$A_2B_3$
1	3	2	-1	$-A_3B_2$
1	alla andra		0	0

(9)

och vi får resultatet  $C_1 = A_2B_3 - A_3B_2$ , dvs. samma som första komponenten av  $\vec{A} \times \vec{B}$ . Detsamma gäller de andra komponenterna. Kryssprodukten skrivs alltså

$$[\vec{A} \times \vec{B}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k. \quad (10)$$

### Kommentar

Notera att därför  $\varepsilon_{ijk}$  är fullständigt antisymmetrisk, så blir resultatet nollvektorn när man kontraherar  $\varepsilon_{ijk}$  med en symmetrisk matris  $\vec{A}$ .

$$\varepsilon_{ijk} A_{jk} = \vec{0},$$

eftersom summan kommer att inkludera termer som  $\varepsilon_{ijk} A_{jk}$  och  $\varepsilon_{ikj} A_{kj} = -\varepsilon_{ijk} A_{jk}$  som tar ut varandra parvis. I synnerhet har vi

$$\varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = \vec{0},$$

Kryssprodukten är specifik för tre dimensioner, just för att  $\varepsilon$ -tensor har tre index i tre dimensioner. Motsvarande objekt i  $D$  dimensioner har  $D$  index:  $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_D}$ .

## Produkter av flera vektorer

Notera att följande identiteter inte behöver memoreras, dessa beräkningar bara demonstrerar hur man använder indexnotation för att förenkla uttryck som inkluderar vektorer (och nablaoperatorn). En identitet som däremot kan vara av nytta på nästa lektionen är  $\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ .

Låt oss studera följande vektorprodukt

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \quad (11)$$

vilket blir en vektor. Denna skrivs med indexnotation

$$[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_i = \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{klm} B_l C_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} A_j B_l C_m. \quad (12)$$

Låt oss först poängtera att vi kan byta plats på faktorerna som vi gjorde ovan. Eftersom dessa är reella tal gäller t.ex. att  $A_j B_l = B_l A_j$  och motsvarande för  $\varepsilon$ -tensorerna.

Här dyker en produkt av två Levi-Cevita-tensorer upp. Låt oss se om sådana produkter kan förenklas

### Produkter av två $\varepsilon_{ijk}$

Först, produkten med enbart två fria index

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}. \quad (13)$$

Detta inses ganska enkelt eftersom

- Produkten måste bli noll då  $i \neq j$ . T.ex.  $i = 1$  innebär att  $kl$  måste vara 23 eller 32, och då måste även  $j = 1$  för att den andra tensorn skall vara nollskild.
- Med  $i = j$  måste summan över  $kl$  bli 2. Studera t.ex.  $i = j = 1$ ; de nollskilda termerna i summan blir  $ikl = jkl \in [123, 132]$ , dvs

$$\sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{1kl}\varepsilon_{1kl} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{123} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{132} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2 \quad (14)$$

Nu till produkten med enbart ett kontraherat index. Vi kommer att visa att

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \quad (15)$$

Först, genom cyklisk permutation,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}. \quad (16)$$

Det inses lätt att  $i \neq j$  och  $l \neq m$  (annars blir termerna lika med noll). Vidare inses att paret  $ij$  måste vara lika med  $lm$  eller  $ml$ . Betrakta ett sådant par, t.ex.  $i, j \in [1, 2]$  (alla andra möjligheter visas helt analogt). Då kommer enbart termen  $k = 3$  från summan att bidra och vi har

följande möjligheter

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \sum_k : \text{bara } k = 3. & & & \\
 ij & lm & ijk & lmk & \text{Resultat} & \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\
 12 & 12 & 123 & 123 & = 1 & = 1 - 0 \\
 12 & 21 & 123 & 213 & = -1 & = 0 - 1 \\
 21 & 12 & 213 & 123 & = -1 & = 0 - 1 \\
 21 & 21 & 213 & 213 & = 1 & = 1 - 0,
 \end{array} \tag{17}$$

dvs, resultaten motsvarar exakt kombinationen av deltafunktioner i Ekv (15) ovan. Kanske är det enklare att memorera identiteten i följande form

$$\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

Eftersom  $\varepsilon_{ijk}$  har 6 nollskild element (1 eller  $-1$ ), så gäller för inget fritt index:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6. \tag{18}$$

Ekv (15) motsvarar precis den produkt som dök upp i Ekv (12) ovan. Vi fortsätter

$$\begin{aligned}
 \left[ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_i &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \\
 &= B_i A_m C_m - A_j B_j C_i = B_i \vec{A} \cdot \vec{C} - \vec{A} \cdot \vec{B} C_i
 \end{aligned} \tag{19}$$

Här har vi bytt plats på  $A_m B_i = B_i A_m$ . Notera vidare att vi lika gärna kunde ha bytt t.ex.  $m \rightarrow j$  i den första termen. Dessa blir ändå ett summationsindex och det spelar ingen roll om det heter  $m$  eller  $j$ .

Till slut finner vi alltså likheten

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \tag{20}$$

som ofta kallas *the BAC-CAB rule*.

### Exempel: Skalär trippelprodukt

När vi beräknar en volymintegral i kroklinjiga koordinater behöver vi Jakobianen

$$J = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right|,$$

som är ett skalär trippelprodukt. Integralen då ges av  $\int dx dy dz f(x, y, z) = \int du dv dw J(u, v, w) f(u, v, w)$ .

Det är inte uppenbart att denna definition för  $J$  är symmetrisk i bytet av de kroklinjiga koordinaterna  $\{u, v, w\}$ , men intuitivt vi förväntar oss att det måste vara så. Vi ska nu enkelt visa med indexnotation att följande identitet gäller för skalära trippelprodukter

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}),$$

som kan komma i nytta när Jakobianen beräknas.

Låt oss först ta vänsterledet

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k = B_j \epsilon_{ijk} C_k A_i = B_j \epsilon_{jki} C_k A_i$$

Vi ser att resultatet är samma som  $\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$ . Med den tredje jämna permutationen av indexerna visar man att det är också samma som  $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ . Eftersom Jakobianen definieras som absolutbeloppet av en trippelprodukt, så ger inte bara den jämna men också den udda cykliska permutationen av termerna (som annars skulle gett ett minustecken) samma värde, som vi förväntade oss.

### Exempel: 5.5.5 i boken

Ge en alternativ uttryck, utan kryssprodukter, av

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}).$$

Först skriv när den med definitionen av kryssprodukten och kontraktionen

$$\epsilon_{ijk} A_j B_k \epsilon_{ilm} C_l D_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} A_j B_k C_l D_m.$$

Eftersom alla index är kontraherade, vet vi att resultatet blir en skalär. Vi kan använda identiteten med två Levi-Civita tensorer med en kontraherade index för att skriva

$$(\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m = A_j C_j B_k D_k - A_j D_j B_k C_k$$



så vi finner att

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

### Exempel: 5.5.13 i boken

Om  $\vec{r}$  är ortvektorn och  $\vec{A}$  och  $\vec{B}$  är konstant vektorer, förenkla så långt som möjligt uttrycket

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times (\vec{r} \times \vec{B})].$$

Det kan skrivas som

$$\partial_m \epsilon_{mni} A_n \epsilon_{ijk} r_j B_k = \partial_m \epsilon_{imn} \epsilon_{ijk} A_n r_j B_k.$$

Vi skriver om det med Kroneckers deltan:

$$\partial_m [(\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}) A_n r_j B_k] = \partial_m [r_m A_n B_n - B_m A_n r_n]$$

Matriselementen av  $\vec{A}$  och  $\vec{B}$  är konstanta, så de kommuterar med den partiella derivatan, så vi finner

$$A_n B_n \partial_m r_m - A_n B_m \partial_m r_n.$$

$\partial_m r_m = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3$ , och  $\partial_m r_n = \delta_{mn}$ , som ger

$$3A_n B_n - A_n B_n = 2\vec{A} \cdot \vec{B}$$

## Kombinationer med två vektoroperatorer

Två viktiga samband, vilka dessutom är enkla att härleda, är

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0 \tag{21}$$

och

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \tag{22}$$

Dessa kommer att vara nyttiga när vi diskuterar potentialteorin.

### Bevis av Ekv (21)

$$\left[ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \right]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f \quad (23)$$

Till exempel för  $i = 1$

$ijk$	$\partial_j$	$\partial_k$	faktor	
123	2	3	+1	
132	3	2	-1	

(24)

vilket betyder att  $\left[ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \right]_1 = (\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2) f = 0$ .

### Bevis av Ekv (22)

$$\left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \right] = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k \quad (25)$$

- En viktig poäng är att de sista två faktorerna *inte* får byta plats eftersom  $\partial_j F_k \neq F_k \partial_j$ .
- Däremot har vi att  $\partial_i \partial_j F_k = \partial_j \partial_i F_k$ , vilket betyder att dessa två faktorer kan byta plats.

Summan ovan har 27 termer, men enbart sex nollskilda

$ijk$	term
123	$\partial_1 \partial_2 F_3$
231	$\partial_2 \partial_3 F_1$
312	$\partial_3 \partial_1 F_2$
132	$-\partial_1 \partial_3 F_2$
213	$-\partial_2 \partial_1 F_3$
321	$-\partial_3 \partial_2 F_1$

och eftersom dessa tar ut varandra parvis blir summan noll.