FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

Istvan Pusztai, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

22 september 2021

Superposition: beräkning av fält från allmänna källfördelningar

Totalt fält från en ändlig uppsättning med punktkällor. Vi kan beräkna fältet i punkten $\vec{r}$ från en ändlig uppsättning med N st punktkällor med laddningar $q_1, q_2, \ldots, q_N$ belägna i punkterna $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ som en superposition

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i\,(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \tag{1}$$

Alternativt kan vi räkna ut potentialen i punkten $\vec{r}$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \tag{2}$$

från vilken vi förstås får $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$.

För en kontinuerlig fördelning av laddningar så övergår summorna i ovanstående uttryck förstås till integraler. Sådana situationer betraktar vi härnäst.

Allmän (kontinuerlig) linjekälla. Betrakta en linjekälla längs kurvan C, vilken ges av $\vec{r} = \vec{r}(\tau)$. Linjekällan har linjekälltätheten $k(\tau)$, som alltså inte nödvändigtvis är konstant.

Vi kan dela upp linjen i infinitesimala linjeelement $\mathrm{d}s$, vardera med laddningen $\mathrm{d}q = k\left(\vec{r}(\tau)\right)\mathrm{d}s$ (som alltså blir en funktion av τ). Vi kan betrakta dessa linjeelement som punktkällor. Bidraget från en sådan källa till potentialen i en (godtycklig) punkt $\vec{r}$ är

$$\mathrm{d}\phi(\vec{r}) = \frac{k\left(\vec{r}\,'(\tau)\right)\mathrm{d}s'}{4\pi\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} \tag{3}$$

Genom att summera alla dessa bidrag, dvs integrera längs linjen C, får vi den totala potentialen i punkten $\vec{r}$

$$\phi(\vec{r}) = \int_C \frac{k\left(\vec{r}\,'\right)\mathrm{d}s'}{4\pi\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}. \tag{4}$$

Notera att $\vec{r}\,' = \vec{r}\,'(\tau)$ och att $\mathrm{d}s' = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}\tau}\right|\mathrm{d}\tau$

Allmän (kontinuerlig) ytkälla. Betrakta en ytkälla längs ytan S, vilken ges av $\vec{r} = \vec{r}(s,t)$. Ytkällan har ytkälltätheten $\sigma\left(\vec{r}(s,t)\right)$.

Genom att summera alla bidrag från infinitesimala ytelement, $\sigma(\vec{r})dS$, får vi den totala potentialen i punkten $\vec{r}$

$$\phi(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma\left(\vec{r}\,'\right)\mathrm{d}S'}{4\pi\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}. \tag{5}$$

Allmän (kontinuerlig) rymdkälla. En allmän rymdkälla har rymdkälltätheten som ges av $\rho\left(\vec{r}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\left(\vec{r}\right)$. Återigen kan vi använda superposition för att få den totala potentialen i punkten $\vec{r}$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,'\right)\mathrm{d}V'}{4\pi\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}. \tag{6}$$

Greensfunktion

Funktionen

$$G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right) = \frac{1}{4\pi\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}, \tag{7}$$

kallas *Greensfunktionen* och kan sägas motsvara bidraget till potentialen i punkten $\vec{r}$ från en punktkälla med styrkan 1 belägen i punkten $\vec{r}'$. Det är faktiskt Greensfunktionen för Poissons ekvation i ett oändligt rum, men begreppet *Greensfunktion* är mer generellt, och kommer att betraktas senare i mer detalj. Dessa funktioner dyker upp igen i kapitel 9. Vi kan alltså skriva fältet från en allmän rymdkälla

$$\phi(\vec{r}) = \int_V \rho\left(\vec{r}'\right) G\left(\vec{r}, \vec{r}'\right) \mathrm{d}V'. \tag{8}$$

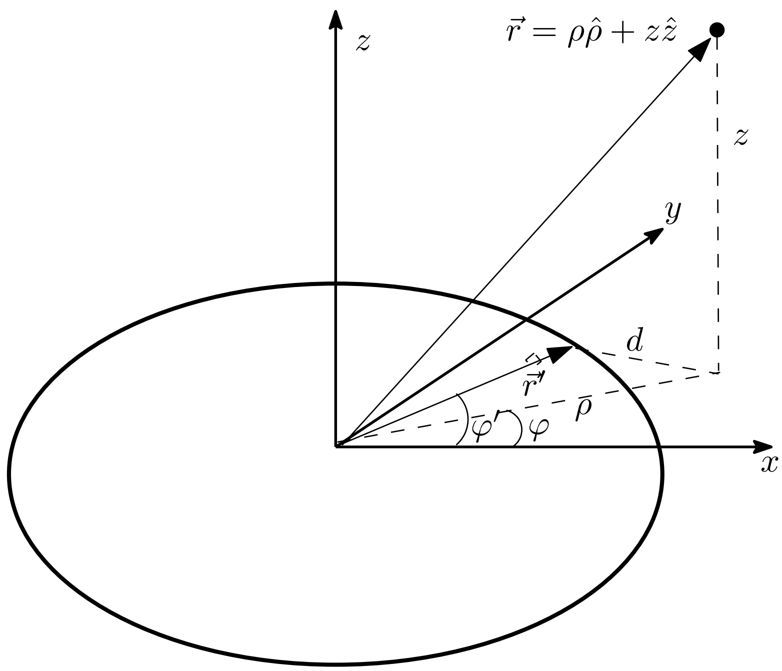
Exempel: Cirkekälla

Vad är potentialen från en linjekälla med konstant täthet k (laddning per längdenhet), på cirkeln med radie a i (x, y)-planet med z-axeln som symmetriaxel? Speciellt, vad är potentialen på z-axeln?

Lösning: Beteckna ortsvektorn för en punkt på källan med $\vec{r}'$ och ortsvektorn för punkten vi vill veta potentialen i med $\vec{r}$.

Problemets symmetri gör det lämpligt att använda cylindriska koordinater. Vi får lägesvektorn $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$. Punkter på källan kan beskrivas med lägesvektorn $\vec{r}' = a\hat{\rho}' = a\cos(\varphi')\hat{x} + a\sin(\varphi')\hat{y}$ (notera att $z' = 0$ eftersom linjekällan ligger i xy-planet).

Ett litet element på linjekällan har laddningen $dq' = kds' = kad\varphi'$. Vi vill först beräkna bidraget från laddningen på det lilla elementet till potentialen i punkten $\vec{r}$ för att sedan summera upp (integrera) den totala potentialen.



Vi får avståndet mellan de två punkterna som

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{d^2 + z^2} = \sqrt{\varrho^2 + a^2 - 2\varrho a \cos(\varphi - \varphi') + z^2} \tag{9}$$

med hjälp av cosinussatsen.

Med superposition kan vi teckna ett explicit uttryck för potentialen:

$$\phi(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi'\, a \frac{k}{4\pi\sqrt{\varrho^2 + a^2 - 2\varrho a \cos(\varphi - \varphi') + z^2}} \tag{10}$$

Vi kan konstatera att potentialen är symmetrisk runt $z = 0$.

Om $\vec{r}$ ligger på z-axeln ($\rho = 0$) förenklas uttrycket till

$$\phi(0, 0, z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi'\, a \frac{k}{4\pi\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{ak}{2\left(\sqrt{z^2 + a^2}\right)}. \tag{11}$$

Vi kan kontrollera vad som händer för stora värden på $|z|$, dvs då $|z| \gg a$. Då är

$$\frac{1}{|z|\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}}} \approx \frac{1}{|z|} + \mathcal{O}\left(\frac{a^2}{z^3}\right), \tag{12}$$

så $\phi(0,0,z) \approx \frac{ak}{2|z|} = \frac{2\pi ak}{4\pi|z|}$, vilket är fältet från en punktkälla med styrka $2\pi ak$. Befinner vi oss långt bort från linjekällan (dvs $z \gg a$) så ser fältet ut som fältet från en punktkälla med laddning lika med den totala laddningen på cirkeln. Det verkar rimligt!

Multipoler

Vi betraktar en laddningsfördelning som är lokaliserad, dvs. den sträcker sig över en längdskala som är mycket mindre än avståndet mellan laddningsfördelningen och observationspunkten. Om det finns en nettoladdning i laddningsfördelningen, $\int \rho dV = Q$, förväntar vi oss att om vi observerar från tillräckligt långt bort, så blir potentialen ungefär samma som den från en punktladdning med samma laddning, alltså $\propto 1/r$. Om vi går närmare med observationspunkten, så börjar detaljerna i laddningsfördelningen spela roll. Det är möjligt att finna en serieutveckling av potentialen, i termer som avtar med avstånd med ökande takt (monopolfält $\propto 1/r$, dipolfält $\propto 1/r^2$, kvadrupolfält $\propto 1/r^3$). Denna serieutvecklingen kallas för multipolexpansion. Namnet *multipol* syftar på att sådana fält kan skapas med hjälp av en antal punktladdningar (poler).

Fältet

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{e}_r \tag{13}$$

kallas för ett monopolfält. Det kan finnas fält vars styrka avtar snabbare med r, men sådana fält innehåller praktiskt taget alltid ett vinkelberoende. Ett exempel på ett sådant fält är dipolfältet, dvs. fältet från två motsatta laddningar nära varandra.

Lägg en laddning $q = \frac{\mu}{\varepsilon}$ på $(x,y,z) = (0,0,\varepsilon)$ och en laddning $-q = -\frac{\mu}{\varepsilon}$ i origo. Potentialen från de båda laddningarna tillsammans blir

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi|\vec{r}-\varepsilon\hat{z}|} - \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi r} \tag{14}$$

Vi kan skriva $|\vec{r} - \varepsilon\hat{z}| = \sqrt{\varrho^2 + (z-\varepsilon)^2}$, och om ε är litet jämfört med r (alltså $\varepsilon/\varrho, \varepsilon/z \ll 1$) blir detta $\sqrt{\varrho^2 + z^2 - 2\varepsilon z} = \sqrt{r^2 - 2\varepsilon z} \approx r(1 - \frac{\varepsilon z}{r^2})$. Så $\frac{1}{|\vec{r}-\varepsilon\hat{z}|} \approx \frac{1}{r}(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2})$.

Kommentar

Här har vi använt Taylorutvecklingarna $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ samt $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$.

Potentialen blir

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2}\right) - \frac{1}{r}\right] = \frac{\mu z}{4\pi r^3} = \frac{\mu\cos\theta}{4\pi r^2} \tag{15}$$

Mer generellt kan man skriva $\phi = \frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3}$, där $\vec{\mu}$ kallas för dipolmomentet. I vårt fall var alltså $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ (som alltså ges av produkten av laddningen $q = \frac{\mu}{\varepsilon}$ och separationsvektorn $\varepsilon\hat{z}$).

Fältet blir

$$\vec{F} = \frac{\mu}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta\right). \tag{16}$$

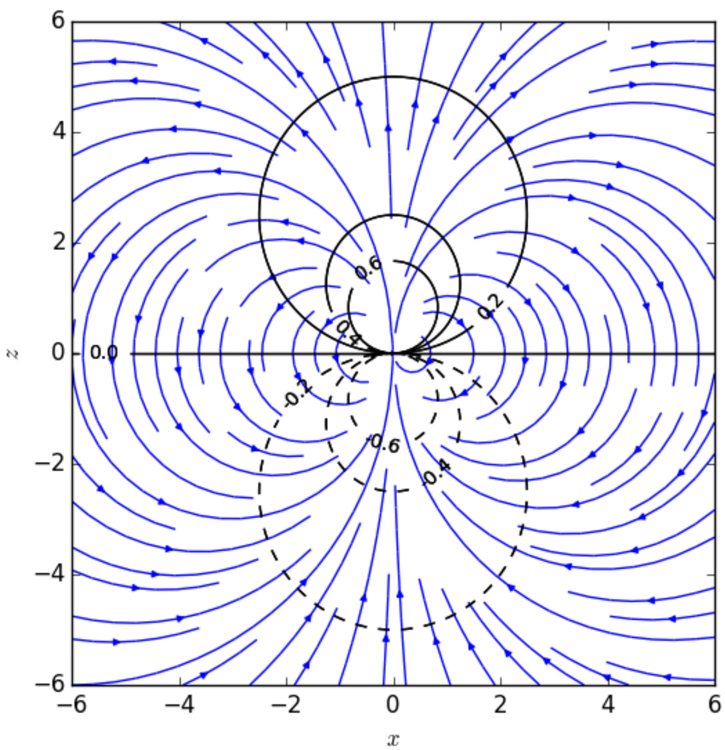
Observera att fältlinjerna är vinkelräta mot ϕ:s nivåkurvor (eftersom $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$). I detta fall kommer de alltså att vara cirklar med centrum längs x-axeln. [OBS: Ekvationer (6.32) och (6.33) i boken, som beskriver dipolfältet, är felaktiga. Jämför dessa med de korrekta uttrycken ovan.]

Om man integrerar dipolfältet över en sfär ser man att integralen blir 0. Detta beror på att man kan se fältet som sammansatt av en positiv och en negativ laddning på ett litet avstånd från varandra. (Vi förväntar oss att fältet från en antal laddningar med nettoladdning $Q = 0$ integrerat över en yta som innesluter dessa laddningar är noll, konsekvent med Gauss lagen för elektrostatik: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q/\epsilon_0$.)

Normalytintegral av ett dipolfält

Vi integrerar fältet (16) över ytan S som är en sfär med radie a

$$\int_S \frac{\mu}{4\pi a^3}\left(\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta\right)\cdot\hat{e}_r a^2\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\mu}{4\pi a}2\pi\int_0^\pi \frac{2\cos\theta\sin\theta}{2}d\theta$$
$$= \frac{\mu}{2a}\left[\frac{-\cos 2\theta}{4}\right]_0^\pi = 0$$



Mer generellt kan man visa att för en laddning som ligger på z-axeln, så kan potentialen (bortsett från en konstant) skrivas som

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta), \tag{17}$$

där P_n betecknar Legendrepolynom med argument $\cos\theta$. T.ex. de först tre sådana polynom är 1, $\cos\theta$, $(3(\cos\theta)^2-1)/2$. Laddningsfördelningar som uppvisar rotationssymmetri ger upphov till en potential som kan skrivas nästan som (17), med en viss koefficient för varje term n.

Exempel: 6.7.34

En ytkälla med konstant täthet σ_0 befinner sig på kalottytan $r = a$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Beräkna potentialen på z-axeln, och visa att den då $\theta_0 = \pi$ är konstant i sfären.

Avståndet mellan en punkt på ytan och en punkt på z-axeln, är enligt cosinussatsen $r = \sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\theta}$, oberoende av ϕ. Det är praktiskt att använda sfäriska koordinater där det infinitesimala ytelementet är $r'^2 \sin\theta d\theta d\phi$, där vi nu har $r' = a$. Vi kan integrera bidragen från alla infinitesimala ytelement direkt

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi}\int dS \frac{\sigma_0}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{a^2\sigma_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} d\theta \sin\theta \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\theta}}.$$

ϕ-integralen ger 2π, och θ-integralen kan beräknas utan problem

$$\frac{a^2\sigma_0}{2}\left[\frac{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\theta}}{az}\right]_{\theta=0}^{\theta_0} = \frac{a\sigma_0}{2z}\left[\sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\theta_0} - |a - z|\right].$$

Låt oss först betrakta $\theta_0 \ll 1$ gränsen, där ytan blir som en punktladdning. Vi kan skriva $\cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2$, och använda $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$ för $\epsilon \ll 1$, för att finna

$$\phi(z) \approx \frac{a\sigma_0}{2z}\frac{az\theta_0^2}{2|a - z|} = \frac{a^2\sigma_0\theta^2}{4|a - z|}.$$

Den totala laddningen i det här fallet är $Q = S\sigma_0 \approx \pi\rho^2\sigma_0 = \pi(a\sin\theta)^2\sigma_0 \approx \pi a^2\theta_0^2$, och avståndet från punkten längs y-axeln är $r = |a - z|$, så resultaten överensstämmer med potentialen från en punktladdning $Q/(4\pi r)$.

Nu betraktar vi fallet $\theta_0 = \pi$, alltså där sfären är hel. Då finner vi

$$\phi(z) = \frac{a\sigma_0}{2z}\left[|a + z| - |a - z|\right].$$

Inne i sfären, $|z| < a$, är båda termerna inom absolutbeloppen är positiva, så vi kan skriva $|a+z| - |a-z| = a + z - (a - z) = 2z$, som leder till

$$\phi(z) = a\sigma_0,$$

oberoende av z. Medan när $|z| > a$ finner vi att $|a+z|-|a-z| = 2a\,\mathrm{sign}(z)$, alltså

$$\phi(z) = \frac{a^2\sigma_0}{|z|},$$

Med den totala laddningen $Q = 4\pi a^2\sigma_0$, finner vi igen att potentialen blir $Q/(4\pi r)$ utanför sfären, som om den laddade sfären var en punktladdning, medan potentialen är konstant inuti sfären. Notera att den sfäriska symmetrin (där $\theta_0 = \pi$) innebär att vi kunde ha valt z-axeln i en godtycklig riktning. Dessa resultat kan man också få genom att beräkna $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_S$ (där Q_S är den totala omslutna laddningen) för sfärer runt origo. Om radien $R < a$, så är $Q_S = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \phi$ är konstant, från problemets symmetri, däremot när $R > a$, så är Q_S sfärens totala laddning, och $\vec{E}$ är samma som fältet från en punktladdning, som innebär att ϕ måste motsvara potentialen från en punktladdning. Faktiskt, ϕ ser likadan ut utifrån för alla laddningsfördelningar som uppvisar sfärisk symmetri.

Normalytintegral av ett dipolfält II

OBS: Vi gör ett medvetet fel i vår beräkning i ett visst steg, och finner då ett inkonsekvent resultat.

Vi integrerar fältet (16) över ytan S som är en kvadrant av en sfär med radie a, alltså med $r = a$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq \phi \leq \pi$.

Ytans normal är $\hat{e}_r$, så vi kan integrera rättfram

$$\int_S \frac{\mu}{4\pi a^3}\left(2\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta\right) \cdot d\hat{S} = \frac{\mu}{2\pi a^3}\int_0^\pi d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta a^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\mu}{2a}\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta\cos\theta = \frac{\mu}{2a}\int_0^1 dy y = \frac{\mu}{2a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^1 = \frac{\mu}{4a}.$$

Nu vi gör om beräkningen men med hjälp av Gauss stats. Först beräknar vi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta F_\theta)$$

Bortsett från en faktor $\mu/(4\pi)$, finner vi

$$\frac{2\cos\theta}{r^2}\partial_r\left(\frac{r^2}{r^3}\right) + \frac{1}{r^4\sin\theta}\partial_\theta(\sin^2\theta) = \frac{2}{r^4}[-\cos\theta + \cos\theta] = 0$$

eftersom de två termer tar ut varandra. Det betyder att om vi gör ytan sluten, till exempel $\int_S \vec{F}\cdot d\hat{S} + \int_{S_2} \vec{F}\cdot d\hat{S} + \int_{S_3} \vec{F}\cdot d\hat{S}$, där S_2 och S_3 är platta ytor i xy- och i xz-planet, får vi att $\int_{S_2} \vec{F}\cdot d\hat{S} + \int_{S_3} \vec{F}\cdot d\hat{S} = -\int_S \vec{F}\cdot d\hat{S}$, däför att den totala integralen måste vara noll. Låt oss se hur det går.

Normalen till ytan som befinner sig i xz-planet är ortogonal mot både $\hat{e}_r$ och $\hat{e}_\theta$ där, så den ytan ger inget bidrag. Däremot, ytan som befinner sig i xy-planet har en normal som är lika med $\hat{e}_\theta$ där (riktad nedåt). Vi kan då beräkna integralen enligt

$$\int_{S_2} \vec{F}\cdot d\hat{S} = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^\pi d\phi \int_0^a drr\frac{\sin(\pi/2)}{r^3} = \frac{\mu}{4}\int_0^a dr\frac{1}{r^2} = \frac{\mu}{4}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r=0}^a = \infty$$

Vi får $-\mu/(4a)$ på övre gränsen (som vi kanske väntat från vår tidigare resultat), men integralen divergerar vid nedre gränsen $r \to 0$. Var har vi gått fel? Både $\vec{F}$ och $\nabla \cdot \vec{F}$ är singulära i $r = 0$! Så vi borde inte ha använt Gauss sats för ett område som innehåller $r = 0$, även om det är på randen av detta område.