Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Måndagen den 16 augusti 2021 klockan 14.00-18:00, på distans via zoom.
Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Beräkna följande integraler:

   (a) Beräkna $\int_2^6 (3x^2 - 2x - 1)\delta(x-3)dx$.

   (b) Beräkna $\int_{-2}^2 (2x+3)\delta(3x)dx$.

   (c) Visa att $x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x)$. (Tips: använd partiell integration).

   (d) Beräkna volymsintegralen $\int_\mathcal{V} (r^2+2)\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) dV$, där $\mathcal{V}$ är en sfär med centrum i origo och radien R.

   (10 poäng totalt fördelat på 2 poäng vardera för deluppgift a och b samt 3 poäng vardera för deluppgift c och d.)

   Lösning:

   (a) $\int_2^6 (3x^2 - 2x - 1)\delta(x-3)dx = 3\cdot 3^2 - 2\cdot 3 - 1 = 20$

   (b) $\int_{-2}^2 (2x+3)\delta(3x)dx = \frac{1}{3}(2\cdot 0 + 3) = 1$

   (c) Betrakta följande integral över en funktion $f(x)$:

   $$\begin{aligned}\int_a^b f(x)x\frac{d}{dx}\delta(x)dx &= [f(x)x\delta(x)]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\Big(f(x)x\Big)\delta(x)dx \\ &= -\int_a^b f'(x)x\delta(x)dx - \int_a^b f(x)\delta(x)dx \\ &= -\int_a^b f(x)\delta(x)dx,\end{aligned}$$

   där vi har gjort partiell integration på produkten av $xf(x)$ och $\frac{d}{dx}\delta(x)$. Detta bevisar sambandet.

   (d) $\int_\mathcal{V} (r^2+2)\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) dV = \int_\mathcal{V} (r^2+2)4\pi\delta(\vec{r})dV = 4\pi(0^2+2) = 8\pi$

---

2. Betrakta vektorfältet $\vec{v} = \frac{v_0}{a^2}\left(x^2\hat{x} + \frac{3xz^2}{a}\hat{y} - 2xz\hat{z}\right)$. v_0 och a är positiva konstanter.

   (a) Beräkna flödesintegralen $\oint_\mathcal{S} \vec{v}\cdot d\vec{S}$, där $\mathcal{S}$ är ytan till en sfär med centrum i origo och radien R och normalriktningen $\hat{r}$.

(b) Beräkna Laplacianen $\Delta\vec{v}$

(10 poäng fördelat på 5 poäng vardera för deluppgift a och b)

Lösning:

(a) Vektorfältet innehåller inga singulariteter så vi kan använda Gauss sats. Divergensen blir $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{v_0}{a^2}(2x - 2x) = 0$. Det sökta flödet är alltså noll.

(b) Vi skall beräkna Laplacianen av ett vektorfält. Antingen kan vi använda sambandet $\Delta\vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{v}$, eller så kan vi direkt använda uttrycket $\Delta\vec{v} = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\vec{v}$ i cartesiska korrdinater. Detta ger $\Delta\vec{v} = \frac{2v_0}{a^2}\hat{x} + \frac{6v_0 x}{a^3}\hat{y}$.

---

3. Finn den elektrostatiska potentialen $\phi(x, y, z)$ till det stationära elektriska fältet $\vec{E} = \frac{E_0}{a}(-x\hat{x} - y\hat{y})$. Potentialen uppfyller randvillkoret $\phi = aE_0$ längs z-axeln. E_0 och a är positiva konstanter. *(10 poäng)*

Lösning:

- Potentialen ges av $-\vec{\nabla}\phi = \vec{E}$ vilket ger tre differentialekvationer.
- $-\partial_x\phi = -\frac{E_0}{a}x$ ger lösningen $\phi = \frac{E_0}{a}\frac{x^2}{2} + f(y, z)$, där vi noterar det fortsatt obekanta beroendet på y och z.
- $-\partial_y\phi = -\partial_y f(y, z) = -\frac{E_0}{a}y$ ger lösningen $f(y, z) = \frac{E_0}{a}\frac{y^2}{2} + g(z)$
- $-\partial_z\phi = -\partial_z g(z) = 0$ ger lösningen $g(z) = $ konstant
- Randvillkoret $\phi(x = 0, y = 0, z) = aE_0$ bestämmer konstanten och vi finner slutligen

$$\phi = \frac{E_0}{2a}\left(x^2 + y^2 + 2a^2\right).$$

---

4. Beräkna kurvintegralen $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ där kurvan Γ ges av $x^2 + y^2/4 = a^2$ och $z = 0$. Den genomlöps moturs sedd från positiva z-axeln. Fältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F} = F_0\left[\frac{\rho}{a}\hat{z} + \left(\frac{\rho - z}{a} + \frac{2a}{\rho}\right)\hat{\varphi}\right],$$

i cylindriska koordinater. F_0 och a är positiva konstanter. *(10 poäng)*

Lösning:

- Kurvan Γ är en ellips med centrum i origo och halvaxlarna a och $2a$. Enligt högerhandsregeln väljer vi $\hat{z}$ som normal till ellipsskivan.
- Fältet $\vec{F}$ är singulärt på z-axeln. Singulariteten sitter helt i $\vec{F}_1 = \frac{2F_0 a}{\varrho}\hat{\varphi}$, som vi känner igen som en virveltråd på z-axeln med styrkan $4\pi F_0 a$.
- Vi kallar resten av fältet $\vec{F}_2$. Dess rotation är

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_2 = \frac{F_0}{a} \begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \varrho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho - z & \rho \end{vmatrix} = \frac{F_0}{a}\left(-\hat{\rho} - \rho\hat{\varphi} + \hat{z}\right).$$

- Eftersom C omsluter z-axeln en gång i positiv led, ger $\vec{F}_1$ bidraget $4\pi F_0 a$. Bidraget från $\vec{F}_2$ fås med hjälp av Stokes sats som F_0/a gånger arean av ellipsen, som är $2\pi a^2$.
- Värdet på den totala integralen är summan av de två bidragen: $6\pi F_0 a$.

---

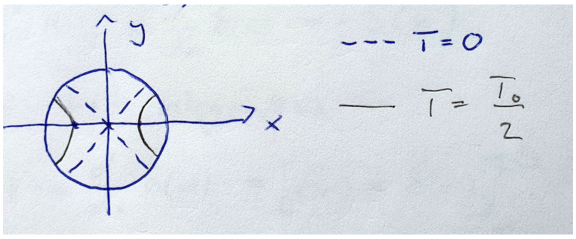
5. Ytan till en oändligt lång cylindrisk kavitet med radien a hålls vid temperaturen $T_0 \cos(2\varphi)$. Finn ett uttryck för temperaturfältet inuti kaviteten (där det inte finns några värmekällor). Skissa också isotermerna $T = 0$ och $T = T_0/2$. *(10 poäng)*

Lösning:

- Vi skall lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ inuti den cylindriska kaviteten. Inget i problemet beror på z-koordinaten. Randvillkoret passar med ansatsen $T = f(\rho)\cos(2\varphi)$.
- Insättning i Laplaces ekvation ger en differentialekvation för $f(\rho)$ som vi kan lösa med ansatsen $f(\rho) = A\rho^p$. VI finner den karakteristiska ekvationen $p^2 - 4 = 0$.
- Vi har ingen värmekälla i kaviteten så kan inte ha en singulär lösning. Dvs $p = 2$. randvillkoret ger $A = T_0/a^2$.
- Lösningen är

$$T = T_0\frac{\rho^2}{a^2}\cos(2\varphi) = T_0\frac{x^2 - y^2}{a^2}.$$

- Isotermen $T = 0$ motsvarar $x = y$ och $x = -y$.
- Isotermen $T = T_0/2$ motsvarar hyperblerna $x^2 - y^2 = a^2/2$



---

6. Man vill ta reda på hur värme läcker ut genom en husvägg. Väggen har tjockleken L och värmeledningsförmågan λ. Inomhustemperaturen är T_1 och utomhustemperaturen T_0. Väggens insida håller samma temperatur som råder inomhus, $T(x = 0) = T_1$. Vid väggens utsida visar det istället sig att värmeströmmen $\vec{q}$ ut ur väggen (normalriktning $\hat{x}$) är proportionell mot skillnaden mellan väggens utsidas temperatur och utomhustemperaturen, så att $\hat{x} \cdot \vec{q} = \alpha\,(T(x = L) - T_0)$. Bestäm temperaturfördelningen i väggen och teckna specifikt ett uttryck för temperaturen vid väggens utsida? Under vilken förutsättning råder approximativt ett homogent Neumann randvillkor vid ytterväggen, och vad blir temperaturen vid väggens utsida i det fallet? *(10 poäng)*

Lösning:

- Problemet är endimensionellt. Låt en x-koordinat vara 0 vid innerväggen och L vid ytterväggen. Lösningen till den stationära värmeledningsekvationen är att temperaturen varierar linjärt i x, och med villkoret att $T(0) = T_1$ fås

$$T(x) = T_1 - kx.$$

- Värmeströmmen blir då $\vec{q} = \lambda k \hat{x}$. Villkoret vid $x = L$ lyder alltså $\lambda k = \alpha(T_1 - kL - T_0)$, så k tar värdet

$$k = \frac{\alpha(T_1 - T_0)}{\lambda + \alpha L}.$$

- Vid ytterväggen är temperaturen

$$T(L) = \frac{\lambda T_1 + \alpha L T_0}{\lambda + \alpha L} = \frac{T_1 + \frac{\alpha L}{\lambda} T_0}{1 + \frac{\alpha L}{\lambda}}$$

- Dimensionskontroll: Eftersom $\vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T$ och $\hat{x} \cdot \vec{q} = \alpha(T - T_0)$, har vi att $[q] = [\lambda]K/m$ och $[q] = [\alpha]K$ så att λ och αL har samma dimension.
- Rimlighetskontroll: Det räcker att undersöka beroendet av den dimensionslösa parametern $\frac{\alpha L}{\lambda}$. Ett litet värde på α relativt λ/L svarar mot att värmeutstrålningen är liten (även för relativt stora temperaturskillnader). Randvillkoret blir effektivt ett homogent Neumann (perfekt isolering mot utomhus), och temperaturen vid ytterväggen är $T(L) \approx T_1$.
