Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Måndagen den 3 januari 2022 08.30-12:30.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Tünde Fülöp (031–772 3180).
Jourhavande lärare:	Tünde Fülöp (031–772 3180).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. Ett tvådimensionellt potentialfält ϕ är givet av

$$\phi(x,y) = \phi_0 \left(\frac{x^2+y^2}{ax} \right)$$

där ϕ_0 är konstant. Ta fram ekvationer för och skissa potentialens ekvipotentialytor och tillhörande fältlinjer.
(10 poäng)

2. Genom sambanden

$$x = uv\cos\varphi \tag{1}$$
$$y = uv\sin\varphi \tag{2}$$
$$z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \tag{3}$$

och $u, v \in [0,\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ definieras ett kroklinjigt koordinatsystem.

(a) Visa att koordinatsystemet är ortogonalt. (2p)

(b) Beräkna divergensen av vektorfältet

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{h_u}{u}\hat{e}_u + \frac{h_v}{v}\hat{e}_v + \frac{h_\varphi \varphi}{uv}\hat{e}_\varphi$$

där h_u, h_v och h_φ är skalfaktorerna i det kroklinjiga koordinatsystemet. (8p)

3. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{A} = (2y, 4x, 6z^2 + 17)$$

genom den del av enhetssfären runt origo som har $z \geq 0$. Observera att ytan inte är sluten. Normalriktningen väljs så att dess z-komponent är positiv.
(10 poäng)

4. Bestäm kurvintegralen

$$\oint_L \frac{1}{r}\hat{e}_\varphi \cdot d\boldsymbol{r}$$

där kurvan L definieras av $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ och $z = 0$.
(10 poäng)

5. Tyngdkraftsaccelerationen $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ satisfierar ekvationen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = -k\rho$$

där k är en konstant och $\rho(\boldsymbol{r})$ är masstätheten. Beräkna $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ när $\rho = 0$ överallt utom i rymden mellan två sfäriska ytor med radierna R och $2R$, där är $\rho = \rho_0 =$ konstant. *Ledning: Behandla de tre intervallen $0 < r < R$, $R < r < 2R$, $r > 2R$ var för sig, och använd Gauss' sats.*
(10 poäng)

6. Skalärfältet Φ ges av uttrycket

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r}),$$

där $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är konstanta vektorer och $\boldsymbol{r}$ är ortsvektorn. Beräkna och förenkla gradienten $\nabla\Phi$ så långt som möjligt med hjälp av indexräkning.
(10 poäng)