FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

2 september 2021

Målet med föreläsningen är att studera kroklinjiga koordinater. Den huvudsakliga anledningen är att man ofta har ett fysikaliskt problem vars geometri gör det naturligt att välja andra koordinater, t.ex. cylindriska eller sfäriska.

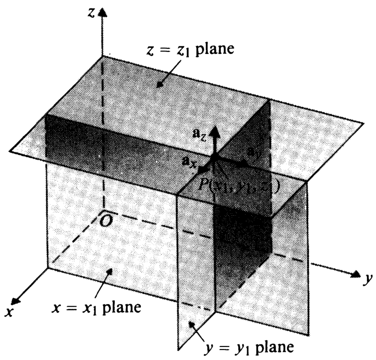
Vi ska först definiera koordinatkurva och koordinatyta. Vi visar detta genom två exempel, kartesiska och cylindriska koordinater. Efter det går vi vidare att studera basvektorer som är normerade tangentvektorer till koordinatlinjerna. I samma veva definierar vi skalfaktorer. Vi exemplifierar detta återigen genom att bestämma skalfaktorer och basvektorer för cylindriska koordinatsystem.

Sedan går vi vidare och härleder några användbara samband, som båglängden längs en kurva, ytelement på ett koordinatyta och volymelement (exempel i cylindriska koordinater). Slutligen räknar vi ut samma storheter också för sfäriska koordinater.

Koordinater, koordinatlinjer och -ytor

Allmänt behöver vi tre parametrar u_1, u_2, u_3 för att beskriva en godtycklig punkt i rummet (i tre dimensioner). Vi kan då skriva ortsvektorn som $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$. Exempel är kartesiska koordinater (x, y, z) som vi redan tittat på - idag ska vi behandla cylindriska och sfäriska som vi kommer att beteckna med ρ, ϕ, z och r, θ, ϕ.

Koordinatyta definieras som den yta på vilken en koordinat hålls fix och de andra tillåts variera.



Figuren illustrerar kartesiska koordinatytor. Punkten $P(x_1, y_1, z_1)$ är i korsningen av tre koordinatytor: $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$.

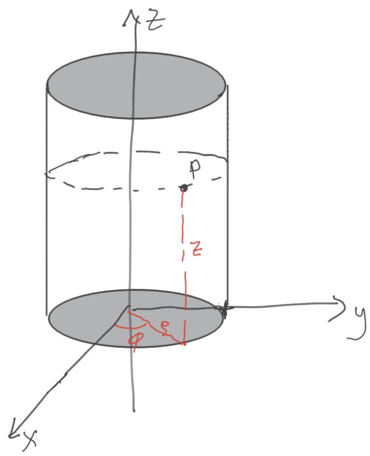
Om vi återvänder till de generella koordinaterna u_i: Koordinatytor för koordinat i är alla lösningar till $u_i =$ konstant. Dvs om vi håller en av parametrarna, säg u_1, fix och låter u_2 och u_3 variera, så får vi en två-dimensionell yta, vilken vi kallar u_1-ytan. På samma sätt kan vi då definiera ytor för de andra koordinaterna.

Två koordinatytor, till exempel de för koordinaterna u_2 och u_3, skär varandra längs en en-dimensionell kurva. Längs denna kurva kommer då bara koordinaten u_1 att variera, så denna kurva är en koordinatkurva för u_1.

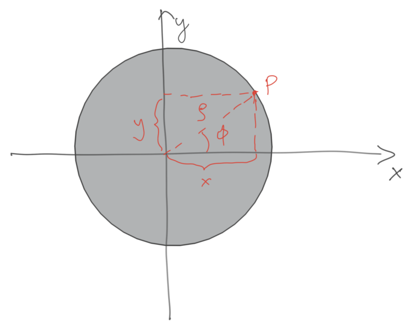
Koordinatkurva är den kurva som fås om en koordinat tillåts variera och de andra hålls konstanta.

Cylindriska koordinater Cylinderkoordinater är lämpliga för problem med cylindersymmetri. Koordinaterna ρ, ϕ och z definieras i figuren:

- ρ är radien i xy-planet,
- ϕ är vinkeln i xy planet mellan x-axeln och projektionen av linjen mellan origo och punkten till xy-planet,
- z är avståndet mellan punkten och xy planet.

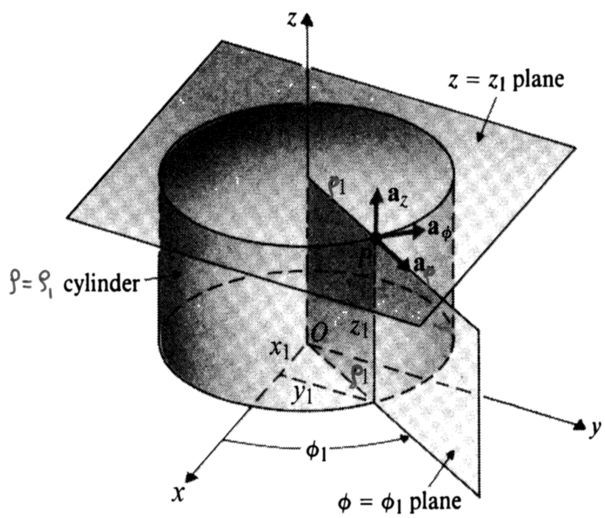


Figuren ger följande relationer: $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$.



Koordinatytorna för ρ, ϕ, z är

- ρ = *konstant*: en cylinder med z-axeln som symmetriaxel och med radien ρ,
- ϕ = *konstant*: ett plan som utgår från z-axeln och bildar en vinkel ϕ med x-axeln, samt
- z = *konstant*: ett plan parallellt med xy-planet och med z-koordinaten z.



Koordinatlinjerna för ρ, ϕ, z blir då

- en stråle som utgår från z-axeln och bildar vinkeln ϕ med x-axeln,
- en cirkel med radien ρ i samma plan med centrum i $x = y = 0$, och
- en linje parallell med z-axeln.

Basvektorer

Varje koordinatsystem har associerade basvektorer som anger de riktningar i vilka koordinaternas värden ökar.

Betrakta ortsvektorn $\mathbf{r}$ i kartesiska koordinater:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Vektorn $\mathbf{r}$ identifierar positionen av en punkt P med koordinaterna x, y, z. Det är en vektor från origo till punkten P. Om vi ersätter punktens kartesiska koordinater med cylinderkoordinater i ovanstående ekvation får vi

$$\mathbf{r} = (\rho \cos\phi, \rho \sin\phi, z) = \rho \cos\phi\hat{x} + \rho \sin\phi\hat{y} + z\hat{z}.$$

Notera att vi använder cylinderkoordinater men basvektorerna är fortfarande kartesiska. Vad är basvektorerna i ett cylindriskt koordinatsystem?

Om vi nu studerar en liten förskjutning av ortsvektorn, $\mathrm{d}\mathbf{r}$, så kan vi i och med att ortsvektorn är en funktion av u_1, u_2, u_3 skriva denna som

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3. \tag{1}$$

Tänk nu på att den partiella derivatan $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$ är definierad som derivatan då vi håller u_2 och u_3 konstanta. Därför måste $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$ vara en tangentvektor till koordinatkurvan för u_1. Vi kan då definiera en basvektor för u_1 som

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \tag{2}$$

där

$$h_1 = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\right| \tag{3}$$

kallas för skalfaktorn. På samma sätt kan vi bestämma skalfaktorer och basvektorer till u_2 och u_3. Förskjutningsvektorn $\mathrm{d}\mathbf{r}$ kan vi nu skriva som

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = h_1\hat{e}_1\mathrm{d}u_1 + h_2\hat{e}_2\mathrm{d}u_2 + h_3\hat{e}_3\mathrm{d}u_3. \tag{4}$$

Exempel: Basvektorer för cylindriska koordinater I cylindriska koordinater är $\mathbf{r} = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$. Vi kan då beräkna

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos\phi, \sin\phi, 0), \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (-\rho\sin\phi, \rho\cos\phi, 0), \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1). \tag{7}$$

Skalfaktorerna blir då

$$h_\rho = \left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right)^{1/2} = 1, \tag{8}$$

$$h_\phi = \left(\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi\right)^{1/2} = \rho, \tag{9}$$

$$h_z = 1. \tag{10}$$

Basvektorerna blir

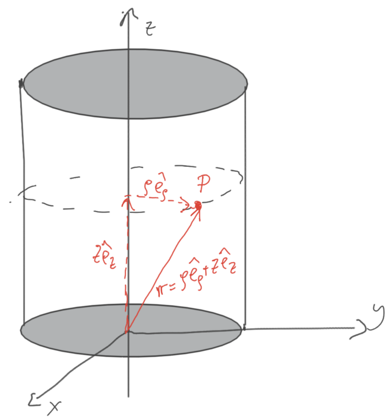
$$\hat{e}_\rho = (\cos\phi, \sin\phi, 0), \tag{11}$$

$$\hat{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0), \tag{12}$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1). \tag{13}$$

Förskjutningsvektorn kan då skrivas som

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \hat{e}_\rho \mathrm{d}\rho + \rho\hat{e}_\phi \mathrm{d}\phi + \hat{e}_z \mathrm{d}z. \tag{14}$$



Ortogonala basvektorer I fortsättningen skall vi begränsa oss till koordinatsystem med ortogonala basvektorer, dvs

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \tag{15}$$

där vi passat på att introducera Kroneckers delta, δ_{ij}.

Vi skall också anta att basvektorerna bildar ett högersystem, dvs att

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3. \tag{16}$$

Differentialelement

Differentialelement anger infinitesimala förändringar av variabler. Viktiga differentialelement är infinitesimala linjeelement, ytelement och volymelement.

Båglängd (också kallad linjeleeement, längdelement) Linjeelement kallas också båglängd. Båglängden längs en kurva är

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = h_1^2 \mathrm{d}u_1^2 + h_2^2 \mathrm{d}u_2^2 + h_3^2 \mathrm{d}u_3^2. \tag{17}$$

Betrakta ovanstående båglängd för fallet då $du_2 = du_3 = 0$. Det står då klart att vi kan tolka $h_1 du_1$ som båglängden ds_1, dvs som en infinitesimal förflyttning i u_1-riktningen.

Notera att $h_i du_i$ alltid måste ha enheten längd.

Exempel: Bågelementet i cylindriska koordinater blir

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{18}$$

Längs den radiella riktningen är linjeelementet $d\rho$. Längs vinkelriktningen är det $\rho d\phi$ (notera att det inte är endast $d\phi$). Längs z-riktningen är det dz.

Ytelement Med hjälp av dessa linjeelement kan nu ytelement beräknas.

Ett ytelement $\mathrm{d}S_1$ på koordinatytan u_1 är en rektangel som genereras av $\mathrm{d}u_2$ och $\mathrm{d}u_3$. Rektangelns sidor har då längderna $h_2\mathrm{d}u_2$ och $h_3\mathrm{d}u_3$ och ytelementet blir $dS_1 = h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$

Ibland definierar man ytelementet som en vektor (dvs med riktning), med hjälp av produkter av komponenter av $d\mathbf{r}$ i två riktningar. Vi använder:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3 = h_1\hat{e}_1\mathrm{d}u_1 + h_2\hat{e}_2\mathrm{d}u_2 + h_3\hat{e}_3\mathrm{d}u_3 \tag{19}$$

och får ytelementet

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_1 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3\right) = (h_2\hat{e_2}du_2) \times (h_3\hat{e}_3du_3) \tag{20}$$

så vi får

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_1 = \hat{e}_1h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3, \tag{21}$$

och på samma sätt kan vi beräkna ytelementen på koordinatytorna för u_2 och u_3.

Exempel: ytelement i cylindriska koordinater Ett ytelement på ρ-ytan skrives

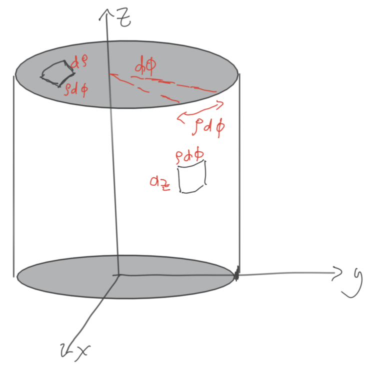
$$\mathrm{d}\mathbf{S}_\rho = \hat{e}_\rho\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z, \tag{22}$$

på ϕ-ytan

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_\phi = \hat{e}_\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z \tag{23}$$

och på z-ytan

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_z = \hat{e}_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi. \tag{24}$$

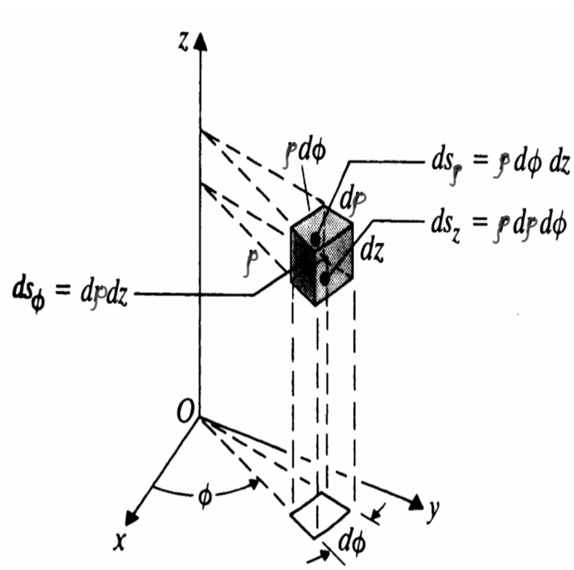


Volymelement Analogt kan vi beräkna volymelementet som genereras av $\mathrm{d}u_1$, $\mathrm{d}u_2$ och $\mathrm{d}u_3$, vilket blir

$$\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3. \tag{25}$$

Exempel: Volymelement i cylindriska koordinater

$$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z. \tag{26}$$



Skalär- och vektorprodukt i cylindriskt koordinatsystem Studera två vektorer i ett cylindriskt koordinatsystem:

$$\mathbf{v} = v_\rho \hat{e}_\rho + v_\phi \hat{e}_\phi + v_z \hat{e}_z$$

$$\mathbf{w} = w_\rho \hat{e}_\rho + w_\phi \hat{e}_\phi + w_z \hat{e}_z$$

Eftersom cylindriska koordinater är ortonormala blir värdet av skalärprodukten av likadana basvektorer 1, medan skalärprodukten av olika vektorer ger 0. Man kan lätt visa att vi får

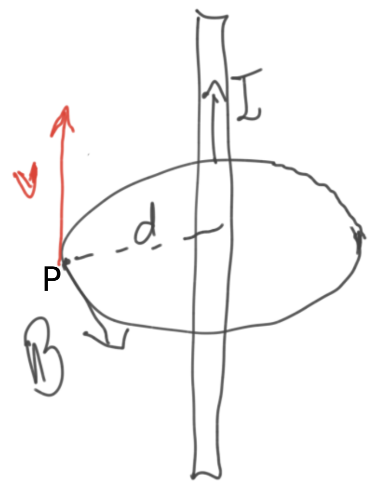
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_\rho w_\rho + v_\phi w_\phi + v_z w_z$$

Kryssprodukten skrivs med hjälp av determinanter på samma sätt som i kartesiska koordinater

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ v_\rho & v_\phi & v_z \\ w_\rho & w_\phi & w_z \end{vmatrix} \tag{27}$$

Exempel: Kraften på en laddad partikel som rör sig i magnetfältet från en rak ledare Kraften som verkar på en punktformad laddning q som rör sig med hastigheten $\mathbf{v}$ i ett kombinerat elektriskt fält $\mathbf{E}$ och magnetiskt fält $\mathbf{B}$ är $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Det kallas Lorentzkraften (men har faktiskt härletts redan av Heaviside tre år innan Lorentz). JJ Thompson som upptäckte elektronen skrev också upp den, men med en faktor två fel, som Heaviside rättade till.

Låt oss studera en oändligt lång rak ledare som leder en elektrisk ström I. Vi vet att strömmen genererar ett magnetiskt fält med storlek proportionell mot I och omvänt proportionell mot avståndet från tråden.



Magnetfältets storlek på avståndet d från ledaren är $|\mathbf{B}| = \mu_0 I/(2\pi d)$ och riktningen är tangentiell till en tänkt cirkel vars centrum befinner sig på tråden och som passerar genom elektronen. (Detta kan härledas av Maxwells ekvationer, men vi nu accepterar det utan bevis.)

Vi tänker oss nu en elektron som just passerar genom punkten P i trådens riktning och vi ska beräkna Lorentzkraften på den.

Vi introducerar ett koordinatsystem med z-axeln sammanfallande med tråden och med origo placerat så att elektronen begfinner sig på höjden $z = 0$. Därmed är magnetfältet riktat längs $\hat{e}_\phi$. Uttrycket för magnetfältet är

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{e}_\phi$$

Elektronens hastighetsvektor är riktad längs z-axeln: $\mathbf{v} = v_0\hat{e}_z$. I detta problem finns inget elektriskt fält, så $\mathbf{E} = 0$. Elektronens laddning är $q = -e$. Då får vi

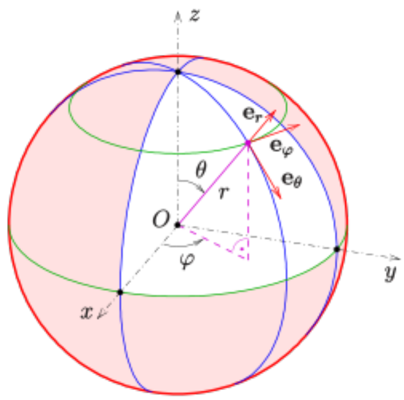
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -ev_0\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{e}_z \times \hat{e}_\phi$$

Kryssprodukten av basvektorerna blir $\hat{e}_z \times \hat{e}_\phi = -\hat{e_\rho}$ så

$$\mathbf{F} = ev_0\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{e}_\rho$$

Elektronen påverkas av en kraft som tenderar att föra den radiellt utåt, iväg frn z-axeln.

Sfäriska koordinater är användbara för problem med sfärisk symmetri. De sfäriska koordinaterna r, θ och ϕ definieras i figuren. Radien är avståndet från punkten P till origo, θ är vinkeln mellan z-axeln och ortsvektorn och ϕ är vinkeln mellan x-axeln och projektionen av ortsvektorn på xy-planet.



Relationerna mellan kartesiska och sfäriska koordinaterna är följande

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

där $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vinkeln ϕ är definierad för ett helt varv kring z-axeln, medan θ endast är definierad mellan 0 och π. (Kom ihåg i cylindriska koordinater hade vi $x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \sin\phi$, $z = z$.)

På samma sätt som för cylindriska koordinater kan man definiera ortonormala basvektorer för sfäriska koordinater. Basvektorerna $\hat{e}_r$,$\hat{e}_\theta$ och $\hat{e}_\phi$ identifierar de riktningar som r, θ och ϕ ökar utifrån en godtycklig punkt P (se figur).

Från

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \tag{28}$$

och

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)\,, \tag{29}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, -r\sin\theta)\,, \tag{30}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (-r\sin\theta\sin\phi,\ r\sin\theta\cos\phi, 0)\,. \tag{31}$$

Skalfaktorerna blir

$$h_r = 1, \tag{32}$$
$$h_\theta = r, \tag{33}$$
$$h_\phi = r\sin\theta. \tag{34}$$

och vi kan nu beräkna basvektorerna

$$\hat{e}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{e}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{e}_y + \cos\theta\hat{e}_z \tag{35}$$
$$\hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{e}_x + \cos\theta\sin\phi\hat{e}_y - \sin\theta\hat{e}_z \tag{36}$$
$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\hat{e}_x + \cos\phi\hat{e}_y \tag{37}$$

Att basvektorerna är ortonormala, det vill säga att de är ömsesidigt ortogonala och har längden 1, verifieras genom att skalärmultiplicera dem med varandra.

Ortsvektorn **r** får en enkel representation i sfäriska koordinater. Eftersom **r** är en vektor från origo till punkten P är dess riktning den radiella riktningen $\hat{e}_r$ och dess absolutvärde (längd) r utgörs av avståndet från P till origo. Så det blir $\mathbf{r} = r\hat{e}_r$.
Förskjutningsvektorn är

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \hat{e}_r\mathrm{d}r + r\hat{e}_\theta\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\hat{e}_\phi\mathrm{d}\phi$$

Areaelementet är

$$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta\hat{e}_r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi + r\sin\theta\hat{e}_\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi + r\hat{e}_\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

och volymelementet

$$dV = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$