Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Måndagen den 15 augusti 2022.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, Olle Branders formelsamling.
Lösningsskiss: Tünde Fülöp

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Ett kroklinjigt koordinatsystem u, v, w definieras genom sambanden

$$
\begin{aligned}
x &= u \\
y &= (v^2 - w^2)/2 \\
z &= vw
\end{aligned}
$$

   (a) Härled basvektorerna och skalfaktorerna! *(5p)*
   (b) Visa att dessa basvektorer bildar ett ortonormerat högersystem! *(2p)*
   (c) Uttryck divergensen av ett vektorfält i dessa koordinater! *(5p)*

Lösning:

Skalfaktorerna är $h_u = 1$, $h_v = h_w = \sqrt{v^2 + w^2}$.

Basvektorerna är

$$\hat{e}_u = (1, 0, 0)$$

$$\hat{e}_v = \frac{(0, v, w)}{\sqrt{v^2 + w^2}}$$

$$\hat{e}_w = \frac{(0, -w, v)}{\sqrt{v^2 + w^2}}$$

Divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F}$ är

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} =& \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_w F_w)\right) \\
=& \frac{\partial F_u}{\partial u} + \frac{1}{v^2 + w^2}\left(\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{v^2 + w^2} F_v) + \frac{\partial}{\partial w}(\sqrt{v^2 + w^2} F_w)\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

2. Använd indexnotation och härled ett alternativt uttryck, utan kryssprodukter, av

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}).$$

(10p)

Lösning:
Använd definitionen av kryssprodukt för att skriva

$$\epsilon_{ijk}A_jB_k\epsilon_{ilm}C_lD_m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}A_jB_kC_lD_m.$$

Använd identiteten med två Levi-Civita tensorer $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ för att få

$$(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})A_jB_kC_lD_m = A_jC_jB_kD_k - A_jD_jB_kC_k$$

så vi finner att

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$

3. Beräkna linjeintegralen

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

där C är en cirkel med radien R i planet $2x+y+2z=7$ och vektorfältet ges av $\mathbf{F}=(-z,x,y)$. Omloppsriktningen är godtycklig (så att man får två värden). *Ledning: notera att vektor* $(2,1,2)$ *är vinkelrät mot planet.*
(10p)

Lösning:
Låt S vara den cirkelskiva i planet som begränsas av C.

Enligt Stokes sats är

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{n}dS$$

där

$$\nabla\times\mathbf{F} = (1,-1,1)$$

och

$$\hat{n} = \pm\frac{(2,1,2)}{\sqrt{4+1+4}} = \pm\frac{1}{3}(2,1,2)$$

så att

$$\nabla\times\mathbf{F}\cdot\hat{n} = (1,-1,1)\cdot\left(\pm\frac{1}{3}\right)(2,1,2) = \pm\frac{1}{3}(2-1+2) = \pm 1$$

Därmed blir

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \pm\int_S dS = \pm\pi R^2.$$

4. Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = e^{xyz}(yz, xz, xy)$ är konservativt och beräkna sedan linjeintegralen från punkt (0,0,0) till punkt (1,1,1) av $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dvs

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(10p)

Lösning:

Man ser att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ med $\phi = e^{xyz}$. Eftersom fältet har en potential är det konservativt.

Integralen blir

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} d\phi = \phi(1,1,1) - \phi(0,0,0) = e - 1.$$

5. Vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F} = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\hat{\rho} + \rho\hat{\varphi} + z\hat{z}$$

i cylindriska koordinater. Bestäm normalytintegralen $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, där ytan S ges av ekvationen $\rho^2 + (z+1)^2 = 4$.
(10p)

Lösning:

Ekvationen för ytan $\rho^2 + (z+1)^2 = 4$ beskriver en sfär med radien 2 och centrum i (0,0,-1).

Fältet är singulärt på z-axeln, och termen $\hat{\rho}/\rho$ är en linjekälla med styrkan 2π. Bidraget från linjekällan är den totalt inneslutna källan, dvs 8π.

Divergensen av den reguljära delen av fältet är 3. Gauss sats ger bidraget $3 \cdot (4\pi 2^3/3) = 32\pi$.

Totala värdet på integralen är 40π.

6. Ett gasmoln i rymden har tätheten $n(r) = 6/r^5$, uttryckt i sfäriska koordinater och för $r > 1$. Gravitationsfältet har en potential som uppfyller Poissons ekvation

$$-\Delta U = n$$

Bestäm alla sfäriskt symmetriska lösningar $U = U(r)$ till denna ekvation för $r > 1$!

(10p)

Lösning:

Ekvationen $-\Delta U = n$ blir i sfäriska koordinater (och förutsatt endast radiellt beroende)

$$-\frac{1}{r^2}\left(r^2 U'(r)\right)' = \frac{6}{r^5}$$

vilket ger

$$r^2 U'(r) = \frac{3}{r^2} - A$$

som ger

$$U(r) = -\frac{1}{r^3} - \frac{A}{r} + B$$

där A och B är godtyckliga konstanter.