FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

24 september 2021

Mål Målet med föreläsningen är att fortsätta arbeta med singulariteter: punktkälla, dipol, linjekälla, ytkälla.

Repetition

Punktkälla i origo Fältet i punkten $\mathbf{r}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{e}_r, \tag{1}$$

vilket fås av potentialen

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi r}. \tag{2}$$

Normalytintegralen av fältet från en punktkälla över en sfär är lika med källstyrkan:

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = q$$

Punktkälla i allmän punkt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|^3}. \tag{3}$$

Dipol En elektrisk dipol är två elektriska laddningar med samma styrka q men olika tecken placerade nära varandra, med avståndet d. Notera att det här är inte bara en teoretisk konstruktion utan existerar verkligen, eftersom många atomer eller molekyler består av positiva och negativa laddningar, lite förskjutna från varandra. Deras vibration är den enklaste och viktigaste mekanismen bakom elektromagnetiska vågor. Både synligt ljus och UV strålning alstras främst av rörelsen hos de yttre svagt bundna elektronerna i atomer och molekyler. Trots att energiemissionen från atomer är en kvantmekanisk process kan vi förstå det viktigaste genom att tänka i termer av en oscillerande elektrisk dipol. Men detta gör ni i elfältkursen - här tittar vi på den matematiska delen.

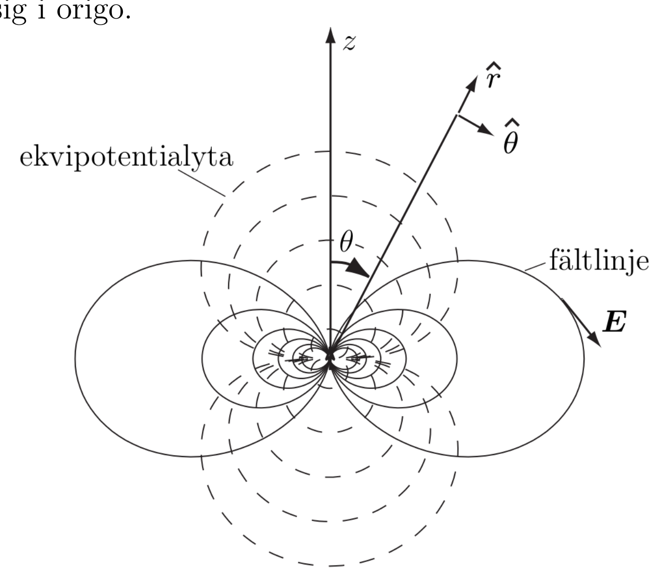
Fältet från en sådan dipol är

$$\mathbf{F} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta\right), \tag{4}$$

där $\mathbf{p} = q\mathbf{d} = p\hat{z}$ är dipolmomentet. Storleken på dipolmomentet är laddning gånger avstånd, och riktningen är från negativ till positiv laddning. Fältstyrkan avtar med tredje potensen av avståndet.

För att hålla diskussionen allmän (och inte specialisera oss till elektrostatik) ska vi här ignorera den konstanta faktorn ϵ_0. Här är vi bara intresserade av att lära oss hantera singulariteten och integraler av sådana fält.

Figuren visar fältlinjer och ekvipotentialytor för en punktdipol $\mathbf{p} = p\hat{z}$ som befinner sig i origo.



Potentialen för en dipol är

$$\phi = \frac{p\cos\theta}{4\pi r^2}, \tag{5}$$

som generellt kan skrivas som

$$\phi = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi r^3},$$

där man tagit hänsyn till riktningen på dipolmomentet $\mathbf{p}$ och att $\hat{z}\cdot\mathbf{r} = r\cos\theta$.

Det finns också magnetisk dipol. Magnetfältet från en liten cirkulär strömslinga är väldigt likt elektriska fältet från en elektrisk dipol.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta\right),$$

där $\mathbf{m} = I\pi b^2\hat{z} = m\hat{z}$ är det magnetiska dipolmomentet. Magnetiska dipolmomentets storlek är produkten av strömmen och arean av den cirkulära slingan och riktningen är enligt högerregeln (dvs där tummen pekar om högerhanden följer strömmens riktning).

Jordens magnetfält är ett dipolfält.

Divergensen av dipolfältet är noll överallt förutom i origo. Integralen av dipolfältet över en sfär (och alla andra ytor som innesluter dipolens två laddningar) blir 0.

Exempel: tentauppgift 17 okt 2011 Vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_0 a^3\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{e}_\theta\right) + F_1 a^2\frac{\mathbf{r}-2a\hat{x}}{|\mathbf{r}-2a\hat{x}|^3}$$

Beräkna normalytintegralen av $\mathbf{F}$ över begränsningsytan till en kub med sidlängden $3a$ och sidorna parallella med koordinataxlarna, vars mittpunkt är belägen i $(x, y, z) = (5a/2, 0, 0)$.

Lösning: Dela upp fältet i $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1$, där $\mathbf{F}_0$ är den del som innehåller konstanten F_0.

Fältet F_0 kan man känna igen som fältet från en punktdipol. Man förväntar sig därför att divergensen är 0, utom i origo, där $\mathbf{F}_0$ är singulärt.

Bidraget från $\mathbf{F}_0$ till integralen är 0. Dels är origo utanför kuben, men även om origo var innanför kuben skulle bidraget vara noll i det här fallet för en punktdipol består av två laddningar av motsatt tecken.

$\mathbf{F}_1$ känns igen som fältet från en punktkälla, med styrkan $4\pi F_1 a^2$ belägen i $(2a, 0, 0)$. Denna punktkälla ligger inne i kuben, och bidraget till integralen är $4\pi F_1 a^2$.

Integralens värde är alltså $4\pi F_1 a^2$.

Kommentar För att övertyga sig om att integralen över en sfär är samma som integralen över kubens sidor kan man dela upp volymen i två delar: en sfär som innesluter punktladdningen (i det här fallet kan man ta en sfär med radie a) och volymen utanför sfären men innanför kuben. och dela in volymen $V = V_{sfär} + V_{resten}$, där V_{resten} inte innehåller några laddningar. Eftersom V_{resten} inte innehåller några laddningar är bidraget till integralen noll. Så det räcker att beräkna integralen över sfären, som vi vet sedan tidigare är lika med källstyrkan i fallet med punktkälla.

6.2 Linjekällor

Ett fält av typen

$$\mathbf{F} = \frac{k}{2\pi\rho}\hat{e}_\rho \tag{6}$$

är singulärt längs hela z-axeln. Storheten k motsvarar då laddning/längdenhet. Linjekällan är då källan till ett fält som överallt pekar radiellt ut från z-axeln.

Fältet kan erhållas från potentialen

$$\phi = -\frac{k}{2\pi}\log\frac{\varrho}{\varrho_0}. \tag{7}$$

Fältet är divergensfritt $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, förutom för $\varrho = 0$.

Om vi antar konstant källtäthet kan vi räkna ut normalytintegralen för en cylinder med längden L som omsluter linjekällan längs z-axeln till

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = kL. \tag{8}$$

Mer generellt blir normalytintegralen av fältstyrkan över en smal tub nära en godtycklig kurva lika med den inneslutna källan $q(C) = \int_C k dl$, där C är den del av kurvan som innesluts av tuben.

Exempel: Linjekälla (sid 78 i kompendiet). Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{9}$$

där ytan S ges av $r = 2a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ och $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ och har normalen $\hat{e}_r$, och fältet ges av

$$\mathbf{F} = F_0 \left[\left(\frac{a}{\rho} + \frac{\rho}{a} \right) \hat{e}_\rho + \frac{z}{a} \hat{e}_z \right]. \tag{10}$$

F_0 och a är här konstanter.

Lösning. Ytan S är den mittersta delen av en sfär. Den avgränsas vid $z = \pm\sqrt{2}a$.

Fältet $\mathbf{F}$ är singulärt för $\rho = 0$, det vill säga längs z-axeln.

Vi kan skriva det som

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = F_0 \frac{a}{\varrho} \hat{\varrho} + F_0 \frac{r}{a} \hat{r}\,.$$

Vi behandlar de två delarna var för sig.

Den första delen, $\mathbf{F}_1$, känns igen som fältet från en linjekälla på z-axeln med styrka $2\pi F_0 a$. Dess normalytintegral är densamma som om integralen varit över en cylinder med höjden $2\sqrt{2}a$,

$$\int_S \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{S} = 2\pi F_0 a \cdot 2\sqrt{2}a = 4\sqrt{2}\pi F_0 a^2.$$

Den andra delen kan beräknas på olika sätt, med eller utan användande av Gauss sats. Vi väljer att beräkna den direkt. På S är

$$\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{S} = 2F_0 dS,$$

så integralen blir $2F_0$ gånger arean av S. Den senare beräknas enligt

$$A = 2\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta (2a)^2 \sin\theta = 8\sqrt{2}\pi a^2\,.$$

Den totala integralen är alltså $4\sqrt{2}\pi F_0 a^2 + 16\sqrt{2}\pi F_0 a^2 = 20\sqrt{2}\pi F_0 a^2$.

Kommentar Det finns oändligt många singulära fält. Men vissa standardfält förekommer ofta och kan man känna igen dessa så sparar man en del arbete. Många gånger kan det löna sig att byta koordinatsystem för att lättare känna igen standardfälten.

Ytkälla Fältet

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2}\hat{z} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2}\hat{z} & z < 0 \end{cases} \tag{11}$$

motsvar en ytkälla i xy-planet (vid $z = 0$), där σ, i det elektrostatiska fallet, skulle kallas för en ytladdningstäthet (laddning per areaenhet).

Notera att de andra singulära fält vi har tittat på (punktkälla, linjekälla, dipol) var verkligen singulära, dvs de blev oändliga vid en viss punkt, men fältet är begränsat vid en ytkälla. Däremot måste fältet ha ett ändligt språng vid ytan som källan ligger på.

Den allmänna definition av fältet ytkälla är följande:

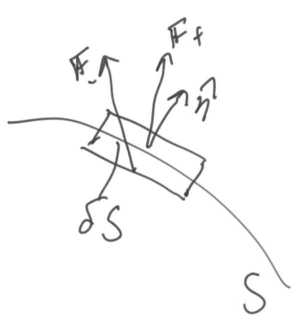
$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \sigma dS$$

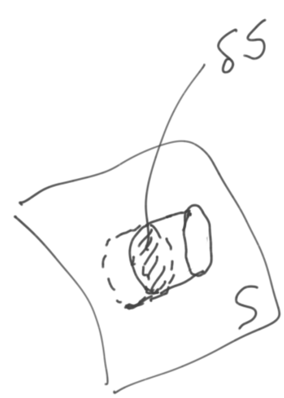
dvs om jag integrerar σ över gränsytan får jag samma som skillnaden mellan integralen av fältet strax till höger och strax till vänster om ytan.

Ytkälla medför att normalkomponenten av fältet har en diskontinuitet (uppgift 6.7.1) Närvaron av en ytkälla på ytan S med styrkan σ är liktydigt med att normalkomponenten av $\mathbf{F}$ har en diskontinuitet enligt $\hat{n} \cdot (\mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_-) = \sigma$, där $\mathbf{F}_+$ är fältets värde på den sida dit normalen pekar, och $\mathbf{F}_-$ dess värde på motsatta sidan, eller mer formellt

$$\mathbf{F}_\pm(\mathbf{r}_s) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbf{F}(\mathbf{r}_s \pm \epsilon\hat{n})$$

Bevis Lägg in en snusdosa med höjden h och ytan δS över ytan S där ytkällan ligger.





Enligt definitionen av ytkällan

$$\int_{\delta S} \sigma dS = \int_{\delta S} \mathbf{F}_+ \cdot \hat{n} dS + \int_{\delta S} \mathbf{F}_- \cdot (-\hat{n}) dS$$

eftersom fältet är begränsat och bidraget från mantelytorna går mot noll då höjden av snusdosan går mot noll.

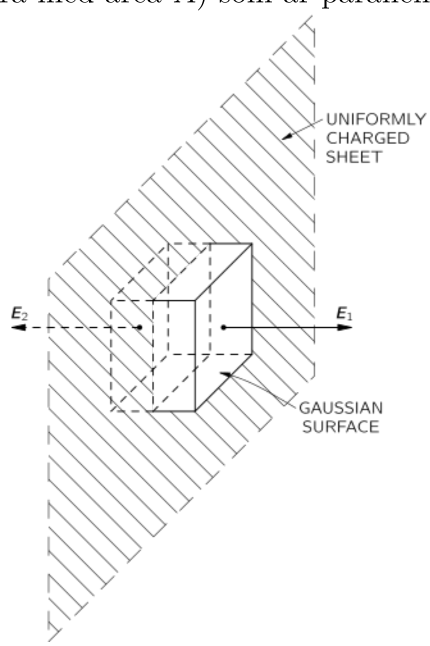
$$\int_{\delta S} [(\mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_-) \cdot \hat{n} - \sigma] dS = 0$$

och detta gäller för varje del δS av ytan S så då måste

$$(\mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_-) \cdot \hat{n} = \sigma$$

på ytan S.

Fältet av en ytkälla med laddningsgtätheten σ Beräkna flödet genom begränsningsytan till en kub som genomskärs av ytkällan och som har topp- och bottenytor (vardera med area A) som är parallella med densamma.



Om det inte finns några andra källor i närheten måste fältet vara lika stort på båda sidorna av symmetriskäl, så storleken av fältet $E_1 = E_2 = E$.

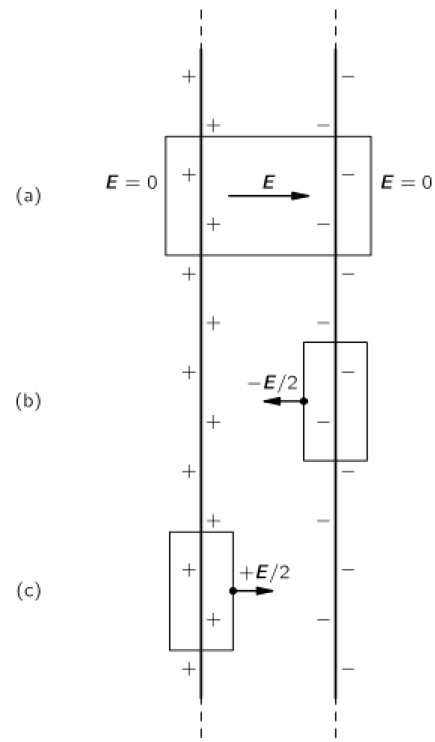
Man finner att

$$EA + EA = \sigma A$$

dvs det totala flödet blir σA, lika med den totala inneslutna laddningen. Här har vi utnyttjat att ytnormalen på kortsidorna är vinkelräta mot fältet.

Fältet är $E = \sigma/2$ – ett enkelt men viktigt resultat.

Notera att det här gäller bara om det inte finns några andra laddningar i närheten. Om det fanns skulle det totala fältet påverkas och Gauss lag skulle ge oss endast $E_1 + E_2 = \sigma$.



Exempel: två ytkällor med motsatt laddningstäthet Om man har två ytkällor med vardera $\pm\sigma$ får vi att fältet är lika med σ mellan ytorna, men det är noll utanför. Det kan man visa antingen genom att lägga två snusdosor runt de båda ytkällorna och lägga ihop fälten, eller lägga en stor snusdosa som innefattar båda.