FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Istvan Pusztai, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

29 september 2021

Mål Målet med föreläsningen är att lära oss hantera Diracs deltafunktion i en och flera dimensioner; samt att kunna utföra integraler med deltafunktioner i integranden. (Kap 7 i kompendiet.)

7. Deltafunktioner

Hur kan vi skriva källtätheten, $\rho(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{F}$, för en punktkälla? Och hur ska vi hantera Gauss sats?

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{1}$$

Vi har att $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ för $r \neq 0$, men explicit uträkning ger $\mathrm{HL} = q$ om den inneslutna volymen V innehåller origo.

Kan vi approximera $\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho(\mathbf{r})$, där laddningsfördelningen motsvarar en punktkälla, på något sätt? Vi tar en stor konstant källtäthet som är lokaliserad till en liten volym, så att $\int \rho_\varepsilon(\mathbf{r})\mathrm{d}V = q$. Dvs,

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon^3/3} & r \leq \varepsilon \\ 0 & r > \varepsilon \end{cases}, \tag{2}$$

där ε är ett godtyckligt litet positivt tal.

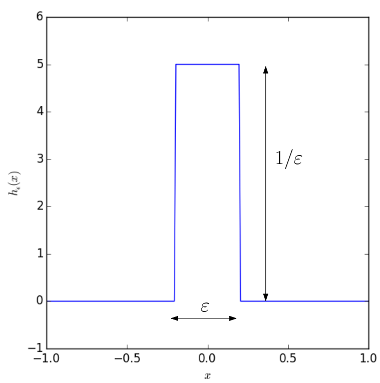
Vi får en sekvens av funktioner genom att ta allt mindre ε. Man kan föreställa en punktkälla som gränsen av den här sekvensen där $\varepsilon \to 0^+$. Intuitivt, bör det helst vara något som är obegränsat stort i origo, och noll utanför origo, medan det samtidigt har en ändlig integral. Tyvärr, strängt taget så existerar ingen sådan funktion. Det matematiska objektet som utgör gränsen till en sådan sekvens (en s.k. *delta-sekvens*) kallas för en *delta-distribution*. En distribution är en sorts generaliserad funktion, som definieras genom sin integral tilsammans med välbeteende funktioner. I fysik vi kallar dessa för *deltafunktioner* ändå.

Deltafunktioner i en dimension

Deltafunktionen (som alltså inte är en riktig funktion, strikt sett, men ändå kallas det) introducerades av Paul Dirac, som ett verktyg att modellera punktkällor och liknande.

Vi konstruerar denna "funktion" som en gräns $\varepsilon \to 0^+$ för funktionen

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \tag{3}$$



Kontrollera.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(x) = 0,$$

för $x \neq 0$. Dessutom har vi

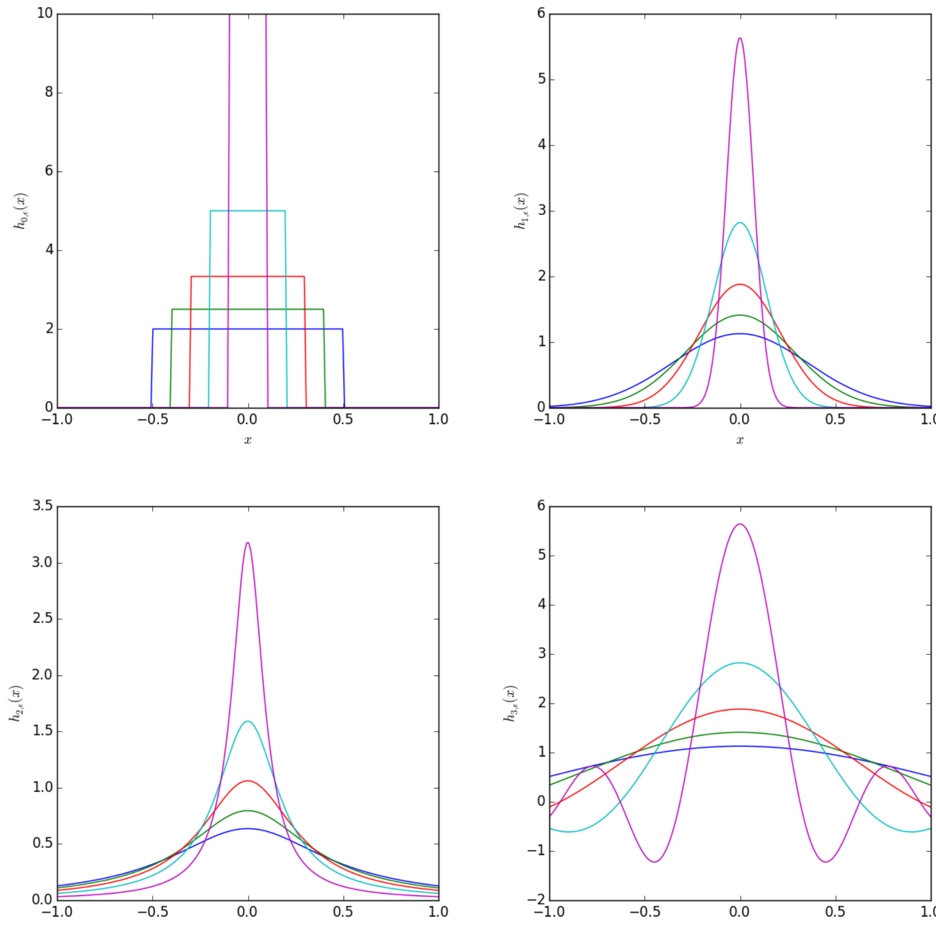
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a<0}^{b>0} h_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[x\right]_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} = \lim_{\varepsilon \to 0} 1 = 1.$$

Men det finns också andra möjligheter:

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi}\varepsilon}, \tag{4}$$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}, \tag{5}$$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}. \tag{6}$$



Samtliga dessa utgör en *sekvens av funktioner* (en delta-sekvens) från vilka vi kan definiera *Diracs deltafunktion*

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} h_\varepsilon(x) \tag{7}$$

med de definierande egenskaperna

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \tag{8}$$

$$f(0) = \int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x, \tag{9}$$

för en godtycklig välbeteende funktion $f(x)$, och $[a, b]$ inkluderar 0.

Alla sekvenserna leder till samma egenskaper hos deltafunktionen, men de kan vara användbara i olika sammanhang. T.ex. den första (ekv 3) gör det enklare att bevisa integralsatsen, den andra (s.k. *Gauss-distribution*, ekv 4) spelar en viktig roll i statistik, och är enklare att derivera, den tredje (s.k. *Cauchy-distribution*, ekv 5) förekommer i resonanssammanhang, och den sista (ekv 6) är speciellt användbar i Fourieranalys.

Exempel: $f(x) = 1$ Ett specialfall ($f(x) = 1$) av integral över deltafunktionen är

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{10}$$

Egenskaper hos Diracs deltafunktion

- Jämn:

  $$\delta(-x) = \delta(x)$$

  Den här egenskapen kan ses direkt om man betraktar någon av sekvenserna.

- Skalning:

  $$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$$

  Visas enklast genom att göra substitutionen $y = xa$ i uttrycket. Om $a > 0$

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} f(y/a)\delta(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{a} f(0)$$

Om $a < 0$ kan vi göra motsvarande, så det innebär att $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.

- Translation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = f(x_0).$$

visas genom substitutionen $y = x - x_0$ och med användandet av att då $y = 0$ gäller att $x = x_0$.

- Funktion som argument:

Alla de ovanstående egenskaper är specialfall av den följande allmäna identiteten:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|},$$

där summan löper över rötterna av ekvation $g(x) = 0$, som betecknas med x_i.

- Derivata

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-x_0)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = -f'(x_0),$$

vilket kan betraktas som definitionen av derivatan $\delta'(x)$.

Visas genom partiell integration med någon av funktionssekvenserna som definierar deltafunktionen.

- Kan generaliseras till fler dimensioner. Vi skriver generellt $\delta^{(D)}(\mathbf{r})$, där vi skall tolka superskriptet som antalet dimensioner. T.ex. har vi för $D = 3$
$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(x, y, z).$$
I kartesiska koordinater är $\delta^{(3)}(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

- En diskret analog till Diracs deltafunktion är Kroneckers delta.

Exempel: tentauppgifter 2021-08-16

- $\int_2^6 (3x^2 - 2x - 1)\delta(x-3)dx = 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 1 = 20$
- $\int_{-2}^2 (2x+3)\delta(3x)dx = \frac{1}{3}(2 \cdot 0 + 3) = 1$

- Visa att $x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x)$. Tips: använd partiell integration.

  Lösning

$$\int_a^b f(x)x\frac{d}{dx}\delta(x)dx = [f(x)x\delta(x)]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(f(x)x\right)\delta(x)dx$$
$$= -\int_a^b f'(x)x\delta(x)dx - \int_a^b f(x)\delta(x)dx \quad (11)$$
$$= -\int_a^b f(x)\delta(x)dx, \quad (12)$$

  där vi har gjort partiell integration på produkten av $xf(x)$ och $\frac{d}{dx}\delta(x)$.

Exempel: Tentauppgift 1b 2014-10-27 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x^2-1)e^{-x}dx = \frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})$
Se också tentauppgifter 1abc 2021-01-04, 1a 2020-01-07

Deltafunktioner i högre dimensioner

Vi startar med punktkällan i origo: $\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{e}_r$, och den problematiska volymsintegralen

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}V,$$

som borde bli lika med q om V omfattar origo. Detta kan vi åstadkomma genom att införa $\nabla\cdot\mathbf{F} = q\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = q\delta^{(3)}(x,y,z)$ eftersom

$$\int_V \delta^{(3)}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1.$$

Låt oss använda sfäriska koordinater. Hur kan vi uttrycka $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ så att följande integralegenskap uppfylls?

$$\int_V \delta^{(3)}(\mathbf{r})r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = 1,$$

om volymen V innesluter origo. Vi vill finna $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ som ett gränsvärde av en delta-sekvens $h_\varepsilon(\mathbf{r})$.

Starta från ett *regulariserat* fält

$$\mathbf{F}_\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi(r^2+\varepsilon^2)}\hat{e}_r \quad (13)$$

som uppenbarligen går mot $\mathbf{F}$ då $\varepsilon\to 0^+$.

Divergensen för $r \neq 0$ blir ($\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \ldots$)

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{r^2+\varepsilon^2}\right)}_{=\frac{2r}{r^2+\varepsilon^2} - \frac{2rr^2}{(r^2+\varepsilon^2)^2} = \frac{2r\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^2}} = \frac{q\varepsilon^2}{2\pi}\frac{1}{r(r^2+\varepsilon^2)^2} \to 0 \quad \text{då } \varepsilon \to 0. \tag{14}$$

Utan styrkan q kallar vi denna sekvens av funktioner för $h_\varepsilon(\mathbf{r})$ och påstår att $\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r})$. Utför integralen

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}_\varepsilon \mathrm{d}V = \int_V q h_\varepsilon(\mathbf{r})\mathrm{d}V = \frac{q\varepsilon^2}{2\pi} 4\pi \int_0^\infty r^2 \mathrm{d}r \frac{1}{r(r^2+\varepsilon^2)^2} \tag{15}$$

$$= 2q\varepsilon^2 \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{r^2+\varepsilon^2}\right]_0^\infty = 2q\varepsilon^2 \frac{1}{2\varepsilon^2} = q \tag{16}$$

Alltså har vi visat att

- $\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(\mathbf{r}) = 0$ för $r \neq 0$.
- $\int_{\mathbf{R}^3} h_\varepsilon(\mathbf{r})\mathrm{d}V = 1$

Alltså skriver vi källtätheten

$$\rho(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = -\Delta\phi = q\delta^3(\mathbf{r}).$$

Ett differentiellt uttryck för deltafunktionen

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2},$$

eller mer allmänt

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

där vi noterar att ∇ opererar på koordinaten $\mathbf{r}$.

Exempel: tentauppgifter 2021-08-16

- Beräkna volymintegralen $\int_{\mathcal{V}} (r^2+2)\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) dV$, där $\mathcal{V}$ är en sfär med centrum i origo och radien R.

  Lösning:

  $$\int_{\mathcal{V}} (r^2+2)\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) dV = \int_{\mathcal{V}} (r^2+2)4\pi\delta(\mathbf{r})dV = 4\pi(0^2+2) = 8\pi.$$

Man får samma resultat genom att skriva

$$(r^2+2)\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{(r^2+2)\hat{r}}{r^2}\right)-\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)\cdot\nabla(r^2+2),$$

och sedan använda Gauss satsen på första termen i HL och beräkna det som en ytintegral, medan utföra volymintegralen direkt för den andra termen (som, tillsammans med volymelementen ger en integral som inte är divergent i origo).

Linjekälla. Linjekällan $\mathbf{F}=\frac{k}{2\pi\rho}\hat{e}_\rho$ (motsvarar en punktkälla i $D=2$). Källtätheten kan skrivas

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=k\delta^2(\rho)\left(=k\delta^{(2)}(x,y)\right).$$

Studera t.ex. normalytintegralen genom en cylinder med höjden L runt linjekällan

$$\int_S\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_{S+S_0+S_L}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_V\nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}V=\int_0^L\mathrm{d}z\int\mathrm{d}x\mathrm{d}yk\delta^{(2)}(x,y)=\int_0^L\mathrm{d}zk=kL.$$

där vi först har slutit ytan genom att införa ytorna S_0 och S_L som är cirkelskivor vid botten och toppen och som har normalytintegralen noll eftersom fältet är vinkelrät mot normalen.

Virveltråd. Vi kan resonera på liknande sätt för en virveltråd $\mathbf{F}=\frac{J}{2\pi\rho}\hat{e}_\phi$. Stokes sats säger att

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

där vi kan räkna ut VL $=J$ (t.ex. för en cirkel runt virveltråden). För detta fält är det rotationen som är problematisk. Notera att detta är en vektor.

$$\nabla\times\mathbf{F}=J\delta^2(\rho)\hat{z}=\mathbf{J}\delta^{(2)}(x,y).$$