FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

13 oktober 2021

Repetition: Värmeledningsekvationen med värmekälltäthet $u(\mathbf{r}, t)$ är

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T + u \tag{1}$$

om vi försummar konvektion.

Vi har visat att lösningen kan skrivas

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \, G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') u(\mathbf{r}', t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \, \frac{\sigma(t-t')}{(4\pi k(t-t'))^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4k(t-t')}} u(\mathbf{r}', t') \\ &= \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \, \frac{1}{(4\pi k(t-t'))^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4k(t-t')}} u(\mathbf{r}', t'). \end{aligned} \tag{2}$$

Lösning av värmeledningsekvationen med ett visst begynnelsevillkor Ovanstående ekvation 2 kan användas också till att lösa värmeledningsekvationen utan källa men med ett visst begynnelsevillkor $T(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r})$. Ekvation 2 är väldigt generell, och den kan hantera situationer där vi har en källa i hela rummet och dessutom i tiden från $-\infty$ to t. Men för att emulera ett initialvillkor, låt oss tänka oss en källa som är noll under tiden från $-\infty$ till 0, sedan plötsligt dyker upp en funktion i rummet $\mathbf{r}$ med en viss form $f(\mathbf{r})$. Vi sätter alltså $u(\mathbf{r}', t') = f(\mathbf{r}')\delta(t')$ i ekvation 2.

Vi får då

$$T(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{t} dt' F_1$$

där

$$F_1 = \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \, \frac{1}{(4\pi k(t-t'))^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4k(t-t')}} f(\mathbf{r}')\delta(t').$$

Vi kan flytta $\delta(t')$ framför integraltecknet i F_1 för det beror inte på x', dvs $F_1 = \delta(t')F_2$ och vi har då lösningen

$$T(\mathbf{r},t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t<0 \\ F_2|_{t'=0} & \text{om } t>0 \end{cases} \tag{3}$$

Vi kan nu sätta $t=0$ och då får vi

$$T(\mathbf{r},0) = \lim_{t\to 0^+} F_2 = \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \, \delta^D(\mathbf{r}-\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}). \tag{4}$$

Vi kan nu skriva om ekvation 3 med $f(\mathbf{r}') = T(\mathbf{r}',0)$ (enligt ekv 4) för att få

$$T(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \, \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4kt}} T(\mathbf{r}',0).$$

Exempel Lös värmeledningsekvationen i en dimension med begynnelsevillkoret

$$T(x,0) = \begin{cases} 0\,, & x<0 \\ T_0\,, & x>0 \end{cases}$$

Begynnelsevillkoret är alltså en stegfunktion. Hur mjukas den upp då tiden går?

Enligt ovan är lösningen (med $D=1$) för $t>0$

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} T(x',0) \\ &= T_0 \int_0^{\infty} dx' \, \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} \,. \end{aligned}$$

Byt integrationsvariabel till $y = \frac{x'-x}{\sqrt{4kt}}$.

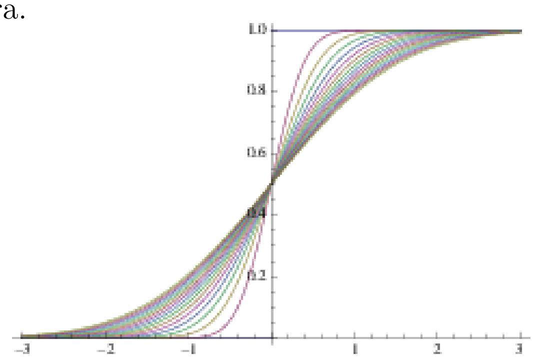
$$T(x,t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-y^2} dy \,.$$

Resultatet kan uttryckas med hjälp av funktionen (error function) $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy$, och blir då

$$T(x,t) = \frac{T_0}{2}\left(\mathrm{erf}(\infty) - \mathrm{erf}(-\frac{x}{\sqrt{4kt}})\right) = \frac{T_0}{2}\left(1 + \mathrm{erf}(\frac{x}{\sqrt{4kt}})\right) .$$

Detta ser ut som en "uppmjukad stegfunktion". Värdet i $-\infty$ och ∞ är hela tiden 0 resp. T_0, men övergången mellan värdena blir allt mjukare ju mer tiden går, och sker vid tiden t över en typisk längdskala $\sqrt{kt}$.

Figuren visar utseendet för några tider. Tidsstegen mellan närliggande kurvor är lika stora.



11. Elektromagnetiska fält och Maxwells ekvationer

Vi börjar med att betrakta *statiska* elektriska och magnetiska fält (elektrostatik och magnetostatik) för att sedan ta med *tidsberoendet* och se hur det innebär en koppling mellan de två fälten.

Tidsoberoende fält: elektrostatik och magnetostatik

Elektrostatik. Om en laddning q befinner sig i ett elektriskt fält $\mathbf{E}$ (dvs magnetfältet ärn noll) påverkas den av en kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Elektrisk fältstyrka definieras som $\mathbf{E}$ är kraft på positiv enhetsladdning. Enheten för laddning är $[q] = \mathrm{C(Coulomb)} = \mathrm{As(ampere - sekund)}$. Enheten för elektriskt fält blir då N/As=V/m.

Statiska elektriska fält $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ uppfyller

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{6}$$

där $\rho(\mathbf{r})$ är elektriska volymladdningstätheten, som har enheten C/m^3. $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi) = 8.85 \times 10^{-12}$ As/Vm är dielektricitetskonstanten (permittiviteten) i vakuum.

Den första ekvationen (ekv 5) är Gauss lag och säger att elektriska fält har elektriska laddningar som källor.

Den andra ekvationen säger att elektrostatiska fält är rotationsfria ($\nabla \times \mathbf{E} = 0$) och därmed konservativa.

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

där ϕ är den elektrostatiska potentialen. Detta gäller bara i elektrostatik (vi kommer att se senare hur det förändras om vi har tidsberoende fält).

Gauss lag är skriven i differentialform i ekvation 5. Differentialformen av Gauss lag lämpar sig för beräkning av laddningsfördelningen när man känner elektriska fältet.

Om vi använder en av integralsatserna (Gauss sats) kan vi skriva Gauss lag i integralform:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q_{innesluten}}{\epsilon_0}$$

Integralformen är användbart för att räkna ut elektriska fältet när laddningsfördelningen är känd – kräver dock symmetri för att det ska vara enkelt genomförbart. Tillräcklig symmetri har man i fallen sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning, oändligt lång cylindrisk laddningsfördelning, laddning på oändligt stort plan.

Magnetostatik. Om en laddning q som rör sig med hastigheten $\mathbf{v}$ i magnetfältet $\mathbf{B}$ påverkas den av en kraft $\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. I analogi med definition av elektriskt fält, kan vi använda detta för att definiera magnetfält: kraften på en enhetsladdning är $\mathbf{F}_m/q = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Magnetfältet $\mathbf{B}$ har enheten T = Vs/m^2 = Wb(weber)/m^2. Tesla är en ganska stor enhet, och ibland använder man Gauss (som är 10^{-4} T) Jordens magnetfält har styrkan mellan 50 till 100 mikrogauss (dvs 10^{-8} T).

Fusionsreaktorer har ett magnetfält som är ett par tesla, rekord är på 20 tesla. Laserproducerade plasmor kan ha tiotals kilotesla (för korta ögonblick).

I närvaro av både elektriskt och magnetiskt fält påverkas en laddning q med hastigheten $\mathbf{v}$ av kraften:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

som kallas Lorentzkraften.

Statiska magnetiska fält $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ uppfyller

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \tag{8}$$

där $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ är elektrisk strömtäthet med enheten A/m^2.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ TA^{-1}m^{-1} är magnetisk permeabilitet i vakuum. Relationen mellan μ_0 och ϵ_0 är $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, där c är ljusets hastighet.

Den första ekvationen (ekv 7) säger att magnetostatiska fält är divergensfria ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) (eller källfritt) och kan uttryckas med en vektorpotential

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Den andra ekvationen är Amperes lag, som ger ett samband mellan linjeintegralen av $\mathbf{B}$ runt en sluten väg och strömmen genom den yta, som begränsas av den slutna vägen. I integralform är den

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i_{omsluten} \tag{9}$$

där vi har använt Stokes sats på ekvation 8.

Om vi har tidsberoende elektriska fält kommer den få ytterligare en term (förskjutningsströmmen) som vi strax ska se.

Sambandet mellan omloppsriktningen $d\mathbf{l}$ och riktningen på ytvektorns $d\mathbf{s}$ fås enligt högerhandsregeln: fingrarna i $d\mathbf{l}$-riktningen medför $d\mathbf{s}$ i tummens riktning. Precis som Gauss lag i elektrostatiken, är Amperes lag användbar vid symmetri, t.ex. oändligt rak ledare, oändligt lång spole etc.

Definitionen av ström är laddning per tidsenhet $I = dq/dt$. Enhet Ampere (Coulomb/sekund). Strömmar i ficklampa är typiskt 1 A, bilbatteri 200 A, radio och TV-kretsar mA (milli-Ampere) eller μA (mikro-Ampere) i datorer nA (nanoAmpere), i fusionsreaktorer MA.

Exempel: Bestämning av ett magnetfält En oändligt lång rak ledare har ett cirkulärt tvärsnitt med radien a och leder en likström med strömstyrkan I. Använd Amperes lag för att härleda magnetfältet i och kring ledaren om materialet i den antas homogent och isotropt.

Lösning: Problemet har cylindriskt symmetri så det är fördelaktigt att använda Amperes lag i integralform. Om den elektriska ledaren sammanfaller med z-axeln så kommer magnetfältet vara riktat i φ-riktningen.

Enligt Amperes lag, dvs ekvation 9, har vi

$$\oint_{\partial S_\rho} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0 I_\rho, \tag{10}$$

där I_ρ är strömmen som passerar genom en tvärsnittsyta S_ρ, som är en cirkelskiva med z-axeln som centrum och radien ρ, och vi låter ∂S_ρ vara randen till S_ρ, dvs en cirkel som genomlöps moturs.

Först tittar vi på fallet att cirkelns radie $\rho > a$. Strömmen är då I, och Amperes lag ger oss

$$\oint_{\partial S_\rho} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0 I. \tag{11}$$

Integralen blir då

$$\oint_{\partial S_\rho} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 2\pi\rho B_\varphi. \tag{12}$$

Vi kan nu lösa ut

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}. \tag{13}$$

I fallet att cirkelns radie $\rho < a$ så antar vi att strömmen är jämnt fördelad i tråden, vilket ger oss att den inneslutna strömmen blir

$$I_\rho = I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2. \tag{14}$$

Integralen blir nu

$$\oint_{\partial S_\rho} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 2\pi\rho B_\varphi = \mu_0 I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2. \tag{15}$$

Vi kan då lösa

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{\rho}{a}. \tag{16}$$

Sammanfattningsvis har vi alltså att $\mathbf{B} = B_\varphi \hat{e}_\varphi$ med

$$B_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & \rho > a \\ \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} & \rho \leq a \end{cases} \tag{17}$$

Repetition: Poissons ekvation för skalär- och vektorpotentialen Från ekvationerna 5 och 6 följer direkt att den elektrostatiska potentialen uppfyller Poissons ekvation

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Från kapitel 9.1 vet vi lösningen:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}V' \, \frac{\rho(\mathbf{r}\,')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|}.$$

Om man vet volymladdningstätheten kan man beräkna elektriska fältet (genom superpositionsprincipen) genom att välja ett litet volymelement, betrakta $dq = \rho dv$ som en punktladdning, och integrera. Att direktintegrera på det här sättet är ofta rätt jobbigt. Kolla därför alltid om det finns någon symmetri i problemet som gör det möjligt att få resultat enklare genom att använda Gauss lag.

Vad gäller vektorpotentialen, låt oss betrakta Amperes lag i det tidsoberoende fallet

$$\mu_0\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}. \tag{18}$$

Om vi nu ersätter $\mathbf{B}$ med $\nabla \times \mathbf{A}$ så har vi

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j}. \tag{19}$$

För vänsterledet har vi räknereglen

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A}\right) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{20}$$

Den frihet, gauge, som vi har i att bestämma $\mathbf{A}$ gör det alltid möjligt att garantera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, så vi kan reducera ekvationen till

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}, \tag{21}$$

och vi har på så sätt kommit fram till en Poisson-ekvation för vektorpotentialen. Resultatet är (se kapitel 9.1)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|}\mathbf{j}(\mathbf{r}\,')dV'.$$

Maxwells ekvationer

Hittills har vi studerat elektrostatiska och magnetostatiska fält. I tidsberoende problem har vi en koppling mellan elektriskt och magnetiskt fält – ett $\mathbf{B}$-fält som varierar i tiden ger ett $\mathbf{E}$-fält och vice-versa.

Kontinuitetsekvationen (konservering av elektrisk laddning). Låt oss betrakta sambandet mellan elektrisk strömtäthet och (rotationen av) ett magnetfält. Detta samband har konsekvenser för kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}.$$

från Amperes lag får vi nämligen att högerledet i kontinuitetsekvationen blir

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0,$$

enligt räknereglerna för vektoroperatorerna. Detta skulle betyda att

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

vilket är orimligt, för det betyder att det inte går att flytta en elektrisk laddning.

Maxwells lösning var att lägga till en term (förskjutningsströmmen)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{22}$$

Notera att den extra termen betyder att kontinuitetsekvationen uppfylls eftersom

$$-\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

där vi har utnyttjat Gauss lag.

Induktion (Faradays lag). Vi har sedan tidigare funnit att elektriska laddningar kan skapa elektriska fält och att elektriska strömmar kan skapa magnetfält.

Vi vet dock att elektriska fält också kan skapas genom induktion. En förändring av det magnetiska flödet, Φ, genom en elektrisk ledare inducerar en spänning, U, i ledaren då det magnetiska flödet förändras.

$$U = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{23}$$

där Φ är ett magnetiskt flöde genom ytan S

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{24}$$

och U är den inducerade spänningen längs randen ∂S

$$U = \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{25}$$

Vi sätter nu Ekv (25) och (23) lika med varandra och får Faradays lag på integralform

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Använder vi Stokes sats på vänsterledet får vi Faradays lag på differentialform (notera att ytan S är helt godtycklig)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{26}$$

Kommentar 3: Det elektriska fältet är inte längre konservativt vilket ju modifierar en av våra ekvationer.