Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Tisdagen den 3 januari 2023, Johanneberg.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Tünde Fülöp (031–772 3180).
Jourhavande lärare:	Tünde Fülöp (031–772 3180).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. (a) Beräkna tangentlinjeintegralen $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, där

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a}(-y\hat{x} + x\hat{y})$$

och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = (b \cos t, c \sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$. *(6p)*

(b) Beräkna $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x)\delta(2x)\mathrm{d}x$, där $\delta(x)$ är en endimensionell deltafunktion. *(4p)*

2. Bestäm riktningsderivatan av det skalära fältet

$$\phi(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 7z^2$$

i normalriktningen till ytan $x^3 + y^4 + z^5 = 1$, taget i punkten $(1, 1, -1)$. (Ledning: Enhetsnormalen $\hat{n}$ till en yta $\psi(x, y, z) = konst$ ges av $\hat{n} = \pm\nabla\psi/|\nabla\psi|$.)
(10p)

3. Beräkna normalytintegralen av

$$\mathbf{F} = F_0 \frac{a^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left[x\hat{x} + y\hat{y} + \left(z + \frac{z}{a} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{a^2} \right) \hat{z} \right]$$

över ytan $S: \, x^2 + y^2 = (z - 3a)^2$, $0 \leq z \leq 3a$. F_0 och a är konstanter.
(10p)

4. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater som

$$\mathbf{F} = \frac{a\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}.$$

Bestäm a så att fältet blir virvelfritt (ignorera singulariteten i $r \to 0$). Bestäm potentialen ϕ.
(10p)

5. Lös Laplaces ekvation inuti en (oändligt lång) cylinder med radien a. Vid ytan gäller ett Dirichlet randvillkor

$$\phi(\mathbf{r})\big|_{\rho=a} = \phi_0 + \phi_1 \cos p\varphi,$$

där p är ett heltal och (ρ, φ, z) är cylindriska koordinater.
(10p)

6. Använd indexnotation för att visa

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A}).$$

(10p)