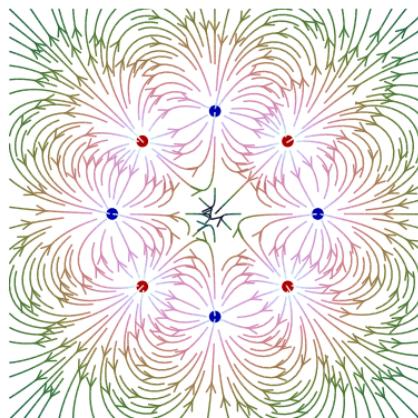

En första kurs i matematisk fysik



Martin Cederwall¹

Christian Forssén¹

¹Institutionen for fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

Aug 29, 2017

Förord. Detta kompendium är tänkt att användas i kursen Vektorfält och klassisk fysik i årskurs 2 på Teknisk fysik, Chalmers. Det kan möjligens ha andra användningsområden, för vilkas följer författaren inte ansvarar. Tja, författare och författare... Texten bygger på föreläsningsanteckningar från kurstillfället 2009, men är delvis ganska omarbetad jämfört med dessa. Många exempel och problem är hämtade från ett övningskompendium av Ulf Torkelsson, som i sin tur till delar bygger på äldre tradition (men ofta förändrade för att överensstämma med konventioner och metoder i teoriavsnitten). Jag vill tacka alla på institutionen för Fundamental fysik, på Fysik GU och på den tidigare institutionen för Teoretisk fysik som har varit delaktiga i denna tradition, inte minst Ulf Ottoson, Olle Brander, Ulf Torkelsson och Henrik Johannesson.

Kapitlen 1-9 och 12 utgör kärnan i kursen, medan resterande kapitel behandlar fysikaliska tillämpningar. Dock kan även de grundläggande teoretiska avsnitten i viss mån fördjupas i de tillämpade kapitlen. Vissa kapitel och delkapitel är markerade med en asterisk (*). Det betyder att de av olika skäl är att betrakta som överkurs, och alltså inte examineras i kursen Vektorfält och klassisk fysik. övningsuppgifter är samlade efter varje kapitel. Så gott som alla räkneuppgifter har svar i det facit som finns på slutet. Uppgifter markerade med (*) kan betraktas som överkurs, uppgifter som innehåller orepresentativt komplicerade element, eller uppgifter som rekommenderas för den särskilt intresserade.

Det förutsätts att studenten behärskar grundläggande analys i en och flera variabler, samt linjär algebra. Vissa begrepp från Newtonsk mekanik används, både för att underbygga teorin och som exempel.

Det finns många vägar för vidare studier efter denna kurs. Naturliga fortsättningar är en kurs i Fourieranalys, och därefter kurser i partiella differentialekvationer och matematisk fysik. Tillämpningarna är för många för att räkna upp. De exempel som ges kan utgöra en fingervisning.

Några ord om notation: De sfäriska koordinaterna betecknas genomgående $r\theta\varphi$ och de cylindriska $\rho\varphi z$. (Beteckningen ρ används t.ex. för densitet, källtäthet och laddningstäthet, medan ϕ brukar beteckna ett skalärt fält.) "log" betyder alltid den naturliga logaritmen. En hatt över en koordinat, t.ex. \hat{r} , betecknar den normerade basvektorn associerad med koordinaten. I övrigt noteras vektoriella storheter med bokstäver med pil över, t.ex. \vec{F} , $\vec{\omega}$. Vad beträffar fysikaliska storheter har jag försökt att välja vedertagen notation. Käll- och virveltätheter noteras i enlighet med sina elektromagnetiska exempel: ρ för källtäthet, q för källa; \vec{j} för strömtäthet, J eller \vec{J} för ström. Ytkälltäthet skrivs σ , vilket torde vara standard. För linjekälltäthet finns ingen dominerande konvention. Ibland

ses τ ; jag har valt k för att undvika sammanblandning med den vanliga notationen τ för kurvans parameter.

Detta kompendium tillägnas med tacksamhet Gösta Wahde (1932-2010), min lärare i bl.a. flervariabelanalys.

juli 2010

Martin Cederwall

I andra upplagan, 2011, har mindre förändringar skett. Det rör sig främst om korrektioner av fel som smugit sig in här och där, men ibland också om förändringar i texten. Stort tack till alla som uppmärksammat mina misstag, framför allt till Sten Salomonson för noggrann läsning. Numreringen av uppgifterna skiljer sig från den i första upplagan. Detta av anledningen att jag försökt ordna uppgifterna så att de tidigare i varje kapitel skall vara mer inbjudande än i förra upplagan. Några uppgifter har tillkommit.

augusti 2011

Martin Cederwall

Den tredje upplagan, 2017, innehåller utökade diskussioner på sina håll (bl.a för deltafunktioner) samt ledtrådar eller utförliga lösningar till vissa utvalda uppgifter. Här vill jag passa på att tacka Christin Rhen som har bidragit till flera av lösningarna. Dessutom innehåller denna upplaga lite nytt material. Här finns t.ex. ett appendix om datorvisualisering av fält. Kompendiet har även överförts till det moderna formateringsverktyget Doconce (Hans-Petter Langtangen: <http://hplgit.github.io/doconce/doc/pub/manual/manual.html>) vilket tillåter att producera versioner både för tryck och för läsning på diverse olika mobila plattformar.

augusti 2017

Christian Forssén

Avsikten är att fortsätta utöka texten med fler diskussioner och lösta exempel. Vi ser därför fram emot kommentarer från studenter som följer

någon kurs där detta kompendium ingår som kurslitteratur. Dessutom finns det en risk att tryckfel har smugit sig in när texten har formaterats om. Lämna gärna kommentarer och förslag via följande url: <https://goo.gl/forms/qs1ZQBUbCsEVN8o82>

Innehåll

1 Fält och derivator	1
1.1 Skalärfält och vektorfält, gradient	1
1.2 Skalärfält, riktningssderivata, nivåytor	2
1.3 Vektorfält, fältlinjer	3
1.4 Divergens och rotation, Laplaceoperatorn	5
1.5 Uppgifter	6
2 Kroklinjiga koordinater	11
2.1 Koordinater, koordinatlinjer och -ytor	11
2.2 Gradient	15
2.3 Uppgifter	17
3 Integraler	27
3.1 Parametrisering av kurvor och ytor	27
3.2 Linjeintegraler	30
3.3 Ytintegral	33
3.4 Volymintegraler	37
3.5 Parametrisering i kroklinjiga koordinater	38

3.6 Uppgifter	38
4 Integralsatser	43
4.1 Gauss sats	43
4.2 Kontinuitetsekvationen	49
4.3 Stokes sats	50
4.4 Divergens, rotation och Laplaceoperatorn i kroklinjiga koordinater	56
4.5 Uppgifter	60
5 Indexnotation	69
5.1 Indexnotation	69
5.2 Produkter av vektorer	70
5.3 Algebraiska identiteter	71
5.4 Identiteter för derivator	72
5.5 Uppgifter	75
6 Singulära fält	79
6.1 Fält från punktkällor	79
6.2 Fält från linjekällor och ytkällor	83
6.3 Fält från virveltrådar	85
6.4 Beräkning av fält från källfördelningar	87
6.5 Greensfunktioner	89
6.6 Uppgifter	92
7 Deltafunktioner	105
7.1 Diracs deltafunktion i en dimension	106
7.2 Diracs deltafunktion i flera dimensioner	111
7.3 Integraler av singulära fält	112
7.4 Virveltrådar och Stokes sats	113
7.5 Uppgifter	115

8 Potentialteori	119
8.1 Rotationsfria vektorfält, skalära potentialer	119
8.2 Poissons och Laplaces ekvationer	120
8.3 Divergensfria vektorfält, vektorpotentialer	120
8.4 Potentialer för godtyckliga vektorfält	122
8.5 Standardexempel på käll- och virvelfördelningar	122
8.6 Randvärdesproblem	124
8.7 Uppgifter	125
9 Lösningsmetoder för partiella differentialekvationer ..	129
9.1 Greensfunktioner	130
9.2 Spegling	133
9.3 Variabelseparation	134
9.4 Uppgifter	138
10 Diffusion, värmceledning	145
10.1 Värmceledningsekvationen	145
10.2 Greensfunktioner för värmceledningsekvationen	148
10.3 Uppgifter	152
11 Elektromagnetism	155
11.1 Statiska elektriska och magnetiska fält	155
11.2 Maxwells ekvationer	158
11.3 Vågekvationen från Maxwells ekvationer (*)	161
11.4 Grundläggande begrepp för vågrörelse (*)	161
11.5 Elektromagnetiska vågor (*)	162
11.6 Greensfunktioner för vågekvationen (*)	163
11.7 Ekvationer för potentialerna (*)	166
11.8 Uppgifter	168
12 Tensorer	175

12.1 Skalärer och vektorer	175
12.2 Tensorer	176
12.3 Tensorer i fysiken	178
12.4 Ohms lag	178
12.5 Tröghetstensorn	179
12.6 Uppgifter	180
13 Kontinuumsmekanik: deformation och spänning (*) ..	183
13.1 Kraft och spänning	183
13.2 Jämviktsekvationer	184
13.3 Deformationer	185
13.4 Samband mellan spänning och deformation	187
13.5 Dynamik för fasta material	191
13.6 Uppgifter	192
14 Strömningsmekanik (*)	195
14.1 Tryck och spänning	195
14.2 Hastighet och deformationshastighet	196
14.3 Samband mellan spänning och deformationshastighet. Viskositet	196
14.4 Kraft och acceleration. Navier–Stokes ekvation	196
14.5 Tryckvågor	199
14.6 Virvlar, vorticitet	200
14.7 Inkompressibelt flöde	201
14.8 Potentialströmning	201
14.9 Uppgifter	204
A Visualisering av fält med Matlab och Python	207
B Ledningar och lösningar till utvalda uppgifter	215
Sakregister	235

1.1 Skalärfält och vektorfält, gradient

Fältbegreppet är viktigt inom så gott som alla grenar av fysiken. Så snart man har någon fysikalisk storhet vars värde beror på läget i rummet (och eventuellt tiden) kan man tala om ett fält. Vi kommer att se många exempel under kursen: hastighetsfält, kraftfält, elektromagnetiska fält, deformationsfält, temperaturfält,...

- Skalärt fält: $\phi(\vec{r}, t)$ eller $\phi(\vec{r})$.
- Vektorfält: $\vec{F}(\vec{r}, t)$ eller $\vec{F}(\vec{r})$.

Påminnelse: "Skalär" betyder att värdet är oberoende av vilket koordinatsystem storheten observeras från. Temperatur, t.ex., är en skalär, men projektionen av en vektor på en koordinataxel är inte en skalär. En vektor $\vec{F} = \hat{x}F_x + \hat{y}F_y + \hat{z}F_z$ är densamma i alla system, vilket betyder att komponenterna transformeras med en ortogonal matris vid byte av ortonormerat system. Vilken uppsättning som helst av tre tal är inte en vektor.

Skalära fält och vektorfält är specialfall av tensorfält, som vi kommer att titta på senare i kursen.

I ett Cartesiskt koordinatsystem har man partiella derivator $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$. Ofta skriver vi " ∂_x ", vilket betyder samma sak som $\frac{\partial}{\partial x}$. Vi har vektoroperatorn

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z \quad (1.1)$$

(utläses "nabla" eller "dell"). Dessutom har man förstås tidsderivatan $\frac{\partial}{\partial t}$, då man har tidsberoende fält. Det mesta som görs i den tidigare delen av detta kompendium kommer att röra tidsberoende fält, eller, om de har ett tidsberoende, fältens beteende vid en viss tidpunkt. Med undantag av vissa avsnitt (speciellt kapitel 4.2) kommer tidsberoende fält in på allvar först i kapitel 10.

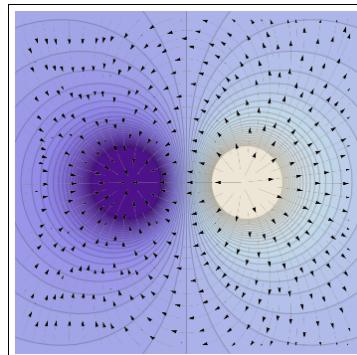
1.2 Skalärfält, riktningssderivata, nivåtor

Ett skalärt fält representeras alltså av ett tal i varje punkt. Exempel på sådana fält är temperatur, tryck, elektrisk laddningstäthet. Om vi tar reda på hur fältet ϕ ändras när man ändrar koordinaterna litet, får vi

$$\begin{aligned} d\phi &= dx\partial_x\phi + dy\partial_y\phi + dz\partial_z\phi \\ &= (dx, dy, dz) \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi, \end{aligned} \quad (1.2)$$

där vektorfältet $\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)$ kallas gradienten av ϕ (noteras även $\text{grad}\phi$). Riktningssderivatan av ett fält ϕ i riktningen given av en enhetsvektor \vec{n} definieras som $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi$. Enligt ekv. (1.2) ger den ändringen av ϕ per längdenhet vid förflyttning i den riktning i vilken \vec{n} pekar.

Ofta definierar man, utgående från ett skalärfält ϕ , som då kallas potential, ett vektorfält $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$, som kallas fältstyrka (det har mängder av tillämpningar, varav vi kommer att se flera i kursen; från mekaniken kan man minnas konservativa kraftfält).



För att få en bild av fältet kan man rita fältlinjer, som är de kurvor som har $-\vec{\nabla}\phi$ som tangent i varje punkt. Man talar också om nivåytor eller ekvipotentialytor, som är ytor på vilka ϕ tar samma värde överallt (beroende på vilken fysikalisk storhet som beskrivs av det skalära fältet kan andra namn användas: isotermer för temperatur osv.). Dessa ytor är alltså lösningar till ekvationen $\phi(\vec{r}) = \phi_0$ för något (konstant) ϕ_0 . Om \vec{t} är en tangentriktning till nivåtan i punkten \vec{r} , betyder det att $\vec{t} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = 0$. Fältlinjerna skär alltså nivåtorna vinkelrätt. Figuren visar som exempel fältlinjer och ekvipotentialytor för det elektrostatiska fältet från två lika stora och motsatta laddningar.

1.3 Vektorfält, fältlinjer

Ett vektorfält beskriver på samma sätt en fysikalisk kvantitet som i varje punkt i rummet är en vektor. Exempel på sådana kvantiteter är hastigheten i en strömmande fluid, den elektriska och den magnetiska fältstyrkan, och den elektriska strömtätheten. Geometriskt kan vi representera ett vektorfält genom att konstruera fältlinjer. För att förstå vad en fältlinje är kan vi börja med att tänka oss ett vektorfält $\vec{u}(\vec{r})$, som representerar en hastighet i en fluid. Vi låter för enkelhets skull flödet vara tidsoberoende (stationärt). En testpartikel (eller en liten del av fluiden) följer då en bana som beskrivs av

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{u}(\vec{r}(t)). \quad (1.3)$$

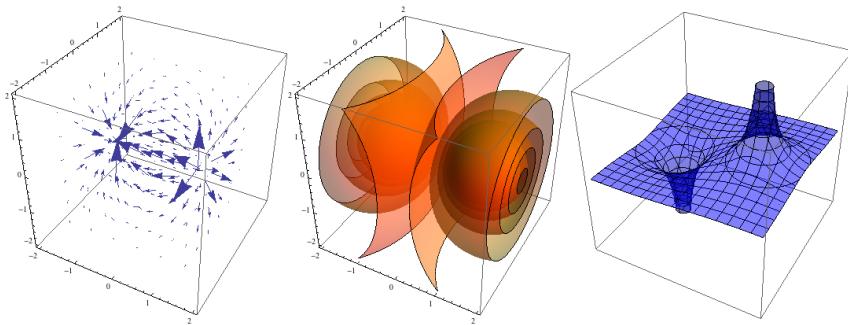
Analogt med detta definierar vi en fältlinje som den bana vi får genom att följa med ett godtyckligt vektorfält \vec{F} som om det var ett hastighetsfält. Ekvationen för ett sådant vektorfält är

$$\frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} = C\vec{F}(\vec{r}(\tau)), \quad (1.4)$$

där C är en godtycklig konstant (dvs. du kan välja den som du själv vill, sålänge du inte sätter den till noll), och τ är en parameter för att numrera punkterna längs fältlinjen. Genom byte av parameter ses att man kan låta C vara en godtycklig funktion av τ (som inte tar värdet noll).

Det är bra att tidigt vänja sig vid att visualisera fält av olika slag, både i huvudet och grafiskt med penna eller dator. Vid problemlösning kan man ofta få resultat som är matematiskt relativt komplicerade, och det

är då enkelt och lämpligt att kontrollera genom att låta datorn rita fältet. Vi diskuterar visualisering av fält med Matlab och Python i appendix A. Ytterligare några exempel finns i facit. Det är bra att göra detta till en vana. Tvådimensionella bilder är oftast väl så upplysande som försök till tredimensionell visualisering. Om vi återgår till exemplet med två laddningar, är det tvådimensionella utsnittet i bilden på föregående sida väl så informativt som nedanstående försök att visa tredimensionella bilder av fält och nivåytor. Den tredje figuren visar, alternativt till bilden på föregående sida, ett tvådimensionellt utsnitt, där potentialens värde ritats på den vertikala axeln. Välj själv med omdöme vilken typ av illustrationer du tycker fungerar bäst i olika sammanhang.



Exempel

Vi vill konstruera fältlinjerna till

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 \left(\frac{x}{a} \hat{x} + \hat{y} \right).$$

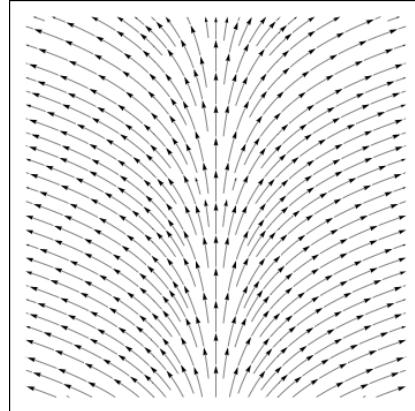
Detta ger oss differentialekvationerna

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = CF_0 \frac{x}{a}, \\ \frac{dy}{d\tau} = CF_0. \end{cases}$$

Vi väljer nu $C = a/F_0$, så att ekvationerna blir $\frac{dx}{d\tau} = x$, $\frac{dy}{d\tau} = a$. Dessa har lösningarna

$$\begin{cases} x = x_0 e^\tau, \\ y = a\tau + y_0, \end{cases}$$

där x_0 och y_0 är den punkt på fältlinjen där $\tau = 0$.



1.4 Divergens och rotation, Laplaceoperatorn

Om vektoroperatorn $\vec{\nabla}$ skall verka på ett vektorfält \vec{F} , känner vi till två möjligheter. Vi kan bilda en skalär som divergensen $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ eller en vektor som rotationen $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ (dessa noteras ofta också $\text{div}\vec{F}$ respektive $\text{rot}\vec{F}$). Det är rättframt att skriva ned dessa i ett Cartesiskt system:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z, \quad (1.5)$$

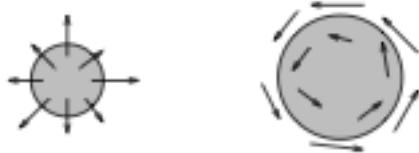
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{x}(\partial_y F_z - \partial_z F_y) + \hat{y}(\partial_z F_x - \partial_x F_z) + \hat{z}(\partial_x F_y - \partial_y F_x) \end{aligned} \quad (1.6)$$

(så småningom skall vi se att det finns ytterligare ett sätt att låta en derivata verka på en vektor; resultatet är då en symmetrisk tensor). Vi kan också definiera den viktiga Laplaceoperatorn $\vec{\nabla}^2 = \Delta$ verkande på ett skalärt fält som

$$\Delta\phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\phi. \quad (1.7)$$

Divergens kan grovt talat förstås som ett kvantitativt mått på att fältlinjerna ”går isär”, divergerar. Om vi tar som exempel fältet $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, som pekar radiellt utåt, ser vi att dess divergens är $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$,

medan dess rotation är noll, $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$. På liknande vis kan rotation förstås som att fältet ”snurrar runt”. Ett exempel är hastighetsfältet för en roterande kropp: $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Med $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ fås $\vec{u} = \omega(-y\hat{x} + x\hat{y})$ och rotationen blir $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 2\omega \hat{z}$, medan divergensen är noll, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.



Självklart kan man tala om en riktningsderivata även av ett vektorfält. Komponenterna av riktningsderivatan av \vec{F} är riktningsderivatorna av komponenterna av \vec{F} . Riktningsderivatan i riktningen \vec{n} av \vec{F} är $(\vec{n} \cdot \vec{\nabla})\vec{F}$. Likaså kan man tala Laplaceoperatorn på ett vektorfält, $\Delta \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{F} = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\vec{F}$. Sammantaget kan man helt enkelt betrakta $\vec{\nabla}$ som en vektoroperator. Riktningsderivatan (på skalära fält såväl som på vektorfält) är $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}$ och Laplaceoperatorn är $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$.

1.5 Uppgifter

1.5.1

Beskriv nivåytorna till $f(x, y, z) = 4x + 3y - 12z + 8$.

Svar. Plan med normalen $\frac{1}{13}(4, 3, -12)$.

1.5.2

Beskriv nivåytorna till $f(x, y, z) = x^2 + 4x + y^2 + 3$.

Svar. Cylinderytor med en axel utefter linjen $x = -2, y = 0$.

1.5.3

Beskriv ytan $|\vec{r} - \hat{x} - y\hat{y}| = y$.

Svar. Kon med spetsen i $(1, 0, 0)$, öppningsvinkel 90° och axeln utefter linjen $x = 1, z = 0$, öppningen mot positiva y .

1.5.4

Det skalära fältet ϕ är givet: $\phi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{x^2 + 4y^2}$. Beskriv kortfattat de möjliga formerna på dess nivåytör.

Svar. $\phi = C$.

$C < \frac{1}{4}$: ellipsoid med halvaxlar $\frac{a}{\sqrt{1-C}}, \frac{a}{\sqrt{1-4C}}, a$;

$C = \frac{1}{4}$: elliptisk cylinder $\parallel y$ -axeln;

$\frac{1}{4} < C < 1$: enmantlad hyperboloid, axel längs y -axeln, elliptiskt tvärsnitt;

$C = 1$: hyperbolisk cylinder $\parallel x$ -axeln;

$C > 1$: tvåmantlad hyperboloid, axel längs z -axeln, elliptiskt tvärsnitt

1.5.5

Vektorfältet $\vec{F}(\vec{r}) = F_0(\frac{x}{a}\hat{x} + \hat{y})$ är givet. Bestäm dess fältlinjer.

Svar. $x(\tau) = x_0 e^\tau$,

$y(\tau) = y_0 + a\tau$,

$z(\tau) = z_0$.

1.5.6

Bestäm fältlinjerna till vektorfältet $\vec{F} = (x^2 + y^2)^{-1}(-y\hat{x} + x\hat{y})$.

Svar. Horisontella cirklar med mittpunkt på z -axeln.

1.5.7

Beräkna en enhetsnormal till ytan $x^2yz = -2$ i punkten $(1, 2, -1)$

Svar. $\hat{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{21}}(4, 1 - 2)$

1.5.8

Visa att om \vec{a} är en konstant vektor och \vec{r} är ortvektorn, så gäller $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$, $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{a}$ samt $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}$.

1.5.9

Visa att arean av en parallelogram kan skrivas $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$, där \vec{a} och \vec{b} är vektorer längs två av parallelogrammens sidor.

1.5.10

Visa att volymen av en parallelepiped ges av absolutbeloppet av den skalära trippelprodukten $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$, där \vec{a} , \vec{b} och \vec{c} är vektorer längs parallelepipedens sidor.

1.5.11

Det skalära fältet $\phi(\vec{r}) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ och ytan $S : 9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36a^2$, är givna. Beräkna i punkten $(\sqrt{2}a, \sqrt{3}a, \sqrt{6}a)$ riktningsderivatan av ϕ i normalriktningen till ytan S .

Svar. $\frac{20\sqrt{6}}{3}a$

1.5.12

Inom ett bergsmassiv beskrivs den lokala nivån $h(x, y)$ över havsytan av funktionen

$$h(x, y) = \frac{k}{(x/a)^2 + (y/\sqrt{2}a)^2 + 1},$$

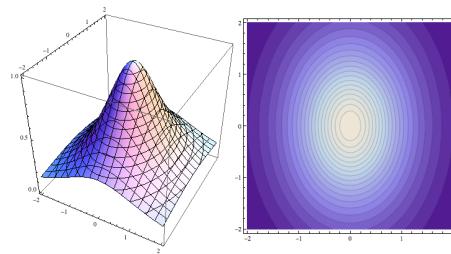
där a och k är konstanter, och där koordinatsystemet valts så att \hat{x} - (\hat{y} -) axeln ligger i väst-östlig (syd-nordlig) riktning.

a. Skissa nivålinjerna.

b. Bergsmassivet är brantast i områden väster och öster om toppen. Bestäm stigningen och höjden över havet i den brantaste punkten, givet informationen att $a = 1$ m och att massivets topp ligger på 1000 m.ö.h.

Svar. a. Ellipser med centrum i origo och halvaxlar $a\sqrt{(k/c - 1)}$ och $a\sqrt{2(k/c - 1)}$.

b. Stigningen är 650 och höjden är 750 m.



1.5.13

Temperaturen i ett rum beskrivs av skalärfältet $T = T_0(x^2 + 2yz - z^2)$ [$^\circ\text{C}$]. där $T_0 = 1^\circ\text{C}/\text{m}^2$. En frusen fluga befinner sig i punkten $(1, 1, 2)$.

- I vilken riktning skall flugan flyga om den vill bli varm så fort som möjligt?

- Hur snabbt (uttryckt i $^\circ\text{C}/\text{s}$) ökar temperaturen om flugan flyger med hastigheten 0.3 m/s i riktningen $(-2, 2, 1)$?

Svar. a. Flugan skall flyga i riktningen $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$.
b. Temperaturen ökar med $0.2 \text{ } ^\circ\text{Cs}^{-1}$.

1.5.14

Temperaturen i ett stycke uppvärmt keramiskt material anges av skalärfältet $T(\vec{r}) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz$ [$^\circ\text{C}$]. Betrakta temperaturvariationerna i olika riktningar från punkten $P_0 : (1, 2, -3)$ och visa att alla riktningar i vilka temperaturen minskar med $2^\circ \text{ C/längdenhet}$ bildar samma vinkel α med den riktning \hat{n} i vilken temperaturen växer snabbast. Bestäm α och \hat{n} .

Svar. $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{21}}(4, -1, -2)$, $\alpha = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{21}})$.

1.5.15

Skalärfältet $f(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 + 2z^2 - 2y$ är givet. Använd gradientens egenskaper för att approximativt beräkna det vinkelräta avståndet från punkten $(1, 2, -1)$ på nivåytan $f = 1.000000$ till nivåytan $f = 1.000003$.

Svar. $\frac{3 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5}}$

Kroklinjiga koordinater

2

Uttrycken för derivator av fält ovan är givna i ett Cartesiskt koordinatsystem. Vi skall nu börja undersöka vad som händer om man använder mer allmänna koordinater. Det finns två huvudanledningar till detta: Dels ställs man ibland inför ett fysikalskt problem vars geometri gör det naturligt att använda andra koordinater, dels utgör valet av koordinater, av parametrisering av rummet, ett artificiellt och i den meningen godtyckligt val, och det är av principiellt intresse att kunna hantera mer allmänna koordinatsystem.

Kommentar: Det finns massor (∞) av möjliga koordinatsystem. De som främst är av intresse för oss är cylindriska (som ”innehåller” polära) och sfäriska. Anledningen till att de är viktiga är förstås att många fysikaliska situationer (och även tekniska) uppvisar någon rotationssymmetri. Titta på http://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate_systems för en längre lista.

2.1 Koordinater, koordinatlinjer och -ytter

Vi arbetar i tre dimensioner. Hur det generaliseras till annat antal bör vara uppenbart. För att bestämma ortvektorn för en punkt behövs tre tal, som vi kan kalla koordinater, $\{u_i\}_{i=1}^3$ (för den som har studerat analytisk mekanik är det analogt med ”generaliserade koordinater”, som används för att bestämma läget för en partikel). Exempel är cylindriska koordinater (ϱ, φ, z) och sfäriska koordinater (r, θ, φ) .

Att säga att värdena på u_1 , u_2 och u_3 bestämmer ortvektorn är liktydigt med att säga att det finns en "översättningstabell" från u :na till de Cartesiska koordinaterna, dvs. $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$.

Vi definierar en koordinatlinje (-kurva) som den kurva som genomlöps om en av koordinaterna tillåts variera och de andra hålls fixa. En koordinatyta definieras som den yta på vilken en koordinat hålls fix och de andra tillåts variera. I exemplet med sfäriska koordinater har man t.ex.

r -linje: stråle från origo,

θ -linje: vertikal halvcirkel med ändpunkter på z -axeln,

φ -linje: horisontell cirkel;

r -yta: sfär med centrum i origo,

θ -yta: cirkulär kon med spets i origo,

φ -yta: halvplan med rand på z -axeln.

En möjlig och naturlig definition av normerade basvektorer är att ta normerade tangentvektorer till koordinatlinjerna. Dvs., med skalfaktorerna $h_i = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}|$,

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}. \quad (2.1)$$

Med denna definition kan man skriva

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 h_i \vec{e}_i du_i. \quad (2.2)$$

Utgående från definitionerna ovan och relationen mellan sfäriska och Cartesiska koordinater, $\vec{r} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$, får man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), & h_r &= 1, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta), & h_\theta &= r, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0), & h_\varphi &= r \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

och alltså

$$\begin{aligned} \hat{r} &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ \hat{\theta} &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \hat{\varphi} &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

(dessa kan förstås också härledas genom att rita och titta i en figur).

Uttrycket (2.2) är relevant t.ex. när man vill använda koordinaterna u_i för att parametrисera en integral. Vi skall se hur längder, areor och volymer beter sig. Men först skall vi inskränka valet av koordinatsystem en smula. Vi tittar bara på koordinatsystem för vilka de tre normerade basvektorerna bildar ett ortnormalt högersystem. Att de tre basvektorerna är ortogonalna kan uttryckas

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \triangleq \delta_{ij} \quad (2.5)$$

Här har vi passat på att introducera Kroneckers delta, δ_{ij} som definieras av den sista likheten. Om man ser det som en matris är det enhetsmatrisen. Högersystem (när vi redan antagit att de tre basvektorerna är ortogonalna) betyder att $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ (och cykliska permutationer av detta).

Vi kan nu beräkna längden ds av vektorn $d\vec{r}$, det s.k. bågelementet $ds = |d\vec{r}|$. Vi har

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 h_i^2 du_i^2, \quad (2.6)$$

som är den korrekta generaliseringen av Pythagoras sats för kroklinjiga koordinater. Skalfaktorerna kallas så dårför att det verkliga avståndet är skalfaktorn gånger ändringen av koordinaten.

Vi kan också skriva areaelementet för (t.ex.) en u_1 -yta, $dS = h_2 h_3 du_2 du_3$, och med normalvektor, $d\vec{S} = \vec{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3$. Volymelementet blir $dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$. För exemplet med sfäriska koordinater reproduceras det välbekanta uttrycket $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$, och för cylindriska koordinater får man $dV = \varrho d\varrho d\varphi dz$. Uttrycken för area- och volymelement kommer att visa sig mycket användbara när det gäller att räkna ut derivator av vektorfält i kroklinjiga koordinater (se kapitel 3).

När vi konstruerade basvektorerna, valde vi dem som normerade tangentvektorer till koordinatlinjerna. Ett alternativt val är att ta dem som normalvektorer till koordinatytorna. Dessa normalvektorer pekar i riktningarna $\vec{\nabla} u_i$. I allmänhet är detta inte samma sak. Det gäller dock alltid (se uppgift 2.3.3) att $\vec{\nabla} u_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} = \delta_{ij}$, så dårför är t.ex. $\vec{\nabla} u_1$ ortogonal mot $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}$, men det betyder inte att den är parallell med $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$, om inte systemet är ortogonalt. När vi inskränker oss till ortogonala system pekar $\vec{\nabla} u_i$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ åt samma håll, och vi kan lika väl skriva $\vec{e}_i = h_i \vec{\nabla} u_i$.

Exempel

Ett slags elliptiska cylinderkoordinater uvz ges av

$$\begin{aligned}x &= a \cosh u \cos v, \\y &= a \sinh u \sin v, \\z &= z,\end{aligned}\tag{2.7}$$

där $a > 0$, $-\infty < z < \infty$, $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$. Bestäm och beskriv dess koordinatytor, samt beräkna skalfaktorerna till systemet.

Lösning: Eftersom z -koordinaten är oförändrad räcker det att undersöka koordinatkurvor i xy -planet. Vi kan bilda en trigonometrisk etta genom att skriva

$$\left(\frac{x}{a \cosh u}\right)^2 + \left(\frac{y}{a \sinh u}\right)^2 = 1.$$

Detta är ekvationen för en ellips i xy -planet med centrum i $x = y = 0$ (z -axeln) och med halvaxlar $a \cosh u$ och $a \sinh u$. u -koordinatytorna är alltså elliptiska cylindrar. Notera att för små u är ellipserna mycket excentriska, och degenererar mot intervallet $-a \leq x \leq a$, $y = 0$ då $u \rightarrow 0^+$, medan de för stora u närmar sig cirklar.

Vi kan också bilda den hyperboliska ettan $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ genom att skriva

$$\left(\frac{x}{a \cos v}\right)^2 - \left(\frac{y}{a \sin v}\right)^2 = 1.$$

Detta är ekvationen för hyperbler i xy -planet. Hyperblerna har halvaxlar $a \cos v$ och $a \sin v$ och foki i $x = \pm a$. Alltså blir v -koordinatytorna hyperboliska cylindrar med z -axeln som axel. z -koordinatytorna är som vanligt plan parallella med xy -planet.

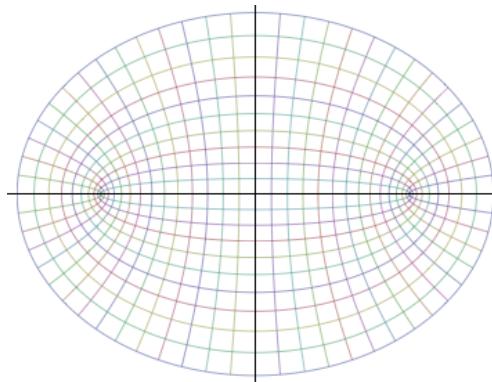
För att bestämma skalfaktorerna behöver vi tangentbasvektorerna

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} &= (a \sinh u \cos v, a \cosh u \sin v, 0) , \\
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= (-a \cosh u \sin v, a \sinh u \cos v, 0) , \\
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= (0, 0, 1) .
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Det följer trivialt att $h_z = 1$.

$$\begin{aligned}
 h_u &= \sqrt{(a \sinh u \cos v)^2 + (a \cosh u \sin v)^2} \\
 &= a \sqrt{(\cosh^2 u - 1) \cos^2 v + \cosh^2 u (1 - \cos^2 v)} \\
 &= a \sqrt{\cosh^2 u \cos^2 v - \cos^2 v + \cosh^2 u - \cosh^2 u \cos^2 v} \\
 &= a \sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} ,
 \end{aligned}$$

och på samma sätt kan man visa att $h_v = h_u$. För att göra lösningen fullständig bör man också visa att tangentbasvektorerna är ortogonala mot varandra, det vill säga att deras inbördes skalärprodukter är 0. Detta syns direkt från ekv. (2.8).



2.2 Gradient

Vi kan nu härleda ett uttryck för gradienten av ett skalärfält i kroklinjiga koordinater. Vid en liten förändring du_i av koordinaterna har man

$$d\phi = \begin{cases} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^3 du_i h_i \vec{e}_i \cdot \vec{\nabla}\phi \\ \sum_{i=1}^3 du_i \frac{\partial\phi}{\partial u_i} \end{cases} \quad (2.9)$$

Eftersom de två uträkningarna skall ge samma resultat för alla möjliga infinitesimala förflyttningar, får man $h_i \vec{e}_i \cdot \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u_i}$, dvs.

$$\vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial\phi}{\partial u_i} \quad (2.10)$$

I exemplet med sfäriska koordinater:

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}, \quad (2.11)$$

och i cylindriska koordinater:

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{\varrho} \frac{\partial\phi}{\partial\varrho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \hat{z} \frac{\partial\phi}{\partial z}. \quad (2.12)$$

Exempel

De elliptiska cylinderkoordinaterna har definierats i ekvation (2.7). Ge ett uttryck för gradienten av ett skalärt fält i detta system.

Lösning: Med användande av basvektorer och skalfaktorer från exemplet kring ekvation (2.7) blir gradienten av fältet ϕ

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial u} \hat{u} + \frac{\partial\phi}{\partial v} \hat{v} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{z}.$$

Återstår att härleda uttryck för divergensen och rotationen av ett vektorfält i kroklinjiga koordinater. Känner vi divergensen kan vi bilda Laplaceoperatorn på ett skalärfält som divergensen av gradienten av fältet. I princip kan man räkna ut divergens och rotation på ett direkt sätt (liksom vi gjorde med gradienten). Detta är dock en trasslig räkning, och det blir mycket trevligare att använda Gauss och Stokes satser för att göra det. Vi gör det i kapitel 4.4.

Kommentar: Friheten att välja koordinater är central vid den matematiska beskrivningen av geometriska rum (Riemannsk geometri), och i dess tillämpning, allmän relativitetsteori. Man inskränker sig då inte till system med ortogonalala basvektorer, utan tillåter helt allmänna ko-

ordinattransformationer (diffeomorfismar). Avstånd kan då skrivas som $ds^2 = \sum_{i,j=1}^D g_{ij} du^i du^j$. g är den så kallade "metriken", det grundläggande fältet i Einsteins gravitationsteori.

2.3 Uppgifter

2.3.1

Beskriv koordinatlinjer och -ytor för cylindriska koordinater!

Svar. ρ -linje: horisontell stråle från z -axeln,

φ -linje: horisontell cirkel,

z -linje: vertikal linje;

ρ -yta: cirkulär cylinder med z -axeln som symmetriaxel,

φ -yta: halvplan med rand på z -axeln,

z -yta: horisontellt plan.

2.3.2

Hitta på ett system, kanske i två dimensioner, vars basvektorer inte är ortogonala. Rita ut vektorerna $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ och $\vec{\nabla} u_i$ och bekräfta att de inte pekar åt samma håll.

2.3.3

Visa att $\vec{\nabla} u_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} = \delta_{ij}$.

2.3.4

Visa genom explicit beräkning, i exemplet med sfäriska koordinater, att konstruktionen $\vec{e}_i = h_i \vec{\nabla} u_i$ ger samma resultat som $\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$, dvs. att $\hat{r} = \vec{\nabla} r$, $\hat{\theta} = r \vec{\nabla} \theta$ och $\hat{\varphi} = r \sin \theta \vec{\nabla} \varphi$.

2.3.5

Härled gradienten av ett skalärt fält i cylindriska koordinater!

2.3.6

Det skalära fältet ϕ är givet i cylindriska koordinater: $\phi(\varrho, \varphi, z) = \varrho^2 - 2\varrho \cos \varphi - z^2$. Beskriv dess nivåytor.

Svar. $\phi = C \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 - z^2 = C + 1$.

$C = -1$: kon, axel $x = 1, y = 0$;

$C > -1$: enmantlad hyperboloid, halvaxlar $\sqrt{C+1}$;

$C < -1$: tvåmantlad hyperboloid, apex i $z = \pm\sqrt{-C-1}$

2.3.7

Det skalära fältet ϕ är givet i sfäriska koordinater $\phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi$. Beskriv dess nivåytor.

Svar. $\phi = x^2 - y^2 = C$: hyperboliska cylindrar som fås genom att hyperblerna translateras i z -led.

2.3.8

Betrakta vektorfältet $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{m}{4\pi r^3}(2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$, där m är en konstant. Bestäm ekvationen för den fältlinje till $\vec{E}(\vec{r})$ som går genom punkten $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/4, \pi/6)$. (Detta är fältet från en elektrisk dipol. Se vidare kapitel 6.5 och uppgift 6.6.36.)

Svar. $r = 4 \sin^2 \theta, \varphi = \pi/6$.

Kommentar. Uppgiften illustrerar hur man ställer upp differentialekvationerna för fältlinjer i fallet då vektorfältet enklast beskrivs i ett kroklinjigt koordinatsystem. Den illustrerar också hur en specifik fältlinje kan identifieras från ett randvillkor.

2.3.9

Ett vektorfält \vec{A} är givet i cylinderkoordinater som $\vec{A} = \varrho \cos \varphi \hat{\varrho} + \varrho^2 \hat{\varphi} + \varrho \sin \varphi \hat{z}$. Härled ekvationerna för fältlinjerna till \vec{A} . Betrakta fältlinjen som går genom punkten $\varrho = 3, \varphi = \pi/2, z = 2$. I vilka punkter går denna fältlinje genom planet $y = 0$?

Svar. Fältlinje: $\varrho = \sin \varphi + 2, z = -\cos \varphi + 2$;

Punkter: $(2, 0, 1), (-2, 0, 3)$.

2.3.10

Det skalära fältet $\phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \theta$ och ytan $S : r \sin \theta = a$ är givna i sfäriska koordinater. Beräkna i punkten $\vec{r} = (0, a, a)$ på S riktningsderivatan av ϕ i ytans normalriktning i punkten.

Svar. $\frac{a}{\sqrt{2}}$

2.3.11

Beskriv nivåytorna till fältet $\phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos 2\theta - 2ar \sin \theta \cos \varphi$, där r, θ, φ är sfäriska koordinater. Beräkna därefter riktningsderivatan av ϕ i riktningen $\hat{\theta}$ i punkten $P : r = a, \theta = \pi/4, \varphi = \pi$. Beskriv också fältlinjerna till $\vec{\nabla}\phi$.

Svar. $\phi = C :$

$a^2 - C > 0$: enmantlad hyperboloid med axeln genom $(-a, 0, 0)$ och parallell med z -axeln;

$a^2 - C < 0$: tvåmantlad hyperboloid med spetsar i $(-a, 0, \pm\sqrt{C - a^2})$ och axeln parallell med z -axeln.

Riktningsderivatan: $-2a(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Fältlinjer:

$$x = (x_0 + a)e^t - a,$$

$$y = y_0e^t,$$

$$z = z_0e^{-t}.$$

2.3.12

Temperaturfördelningen i ett område kring en punkt P i ett skiktat material med en värmekälla i origo beskrivs av skalärfältet $T = \frac{2+\cos\theta}{r^2}$, där P har de sfäriska koordinaterna $r = 2, \theta = \pi/2, \varphi = \pi/4$.

a. Hur snabbt ökar temperaturen per längdenhet då man utgår från P i riktningen $\hat{r} + \hat{\varphi}$?

b. I vilken riktning utgående från P ökar temperaturen snabbast och hur stor är den maximala temperaturökningen per längdenhet?

Svar. a. Temperaturökning $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b. Snabbast ökning i riktningen $\frac{1}{\sqrt{17}}(-4\hat{r} - \hat{\theta})$ med beloppet $\frac{\sqrt{17}}{8}$.

2.3.13

Funktionen $f(x)$ uppfyller differentialekvationen

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{a} \cdot \vec{r}) = f(\vec{a} \cdot \vec{r}),$$

där \vec{a} är en konstant vektor och \vec{r} är ortvektorn. Bestäm alla lösningar $f(x)$.

Svar. $f(x) = Cx$

2.3.14

Ett kroklinjigt koordinatsystem uvw ges av sambanden

$$\begin{aligned} u &= r(1 - \cos \theta), \\ v &= r(1 + \cos \theta), \\ w &= \varphi. \end{aligned}$$

där $r\theta\varphi$ är sfäriska koordinater. Visa att systemet är ortogonalt och beräkna dess skalfaktorer. Hur ser gradientoperatorn $\vec{\nabla}$ och ortvektorn \vec{r} ut i uvw -systemet?

Svar. Skalfaktorer:

$$\begin{aligned} h_u &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{u}} \\ h_v &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{v}} \\ h_w &= \sqrt{uv} \end{aligned}$$

Gradient:

$$\vec{\nabla} = \frac{2}{\sqrt{u+v}} \left(\sqrt{u}\hat{u} \frac{\partial}{\partial u} + \sqrt{v}\hat{v} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{\sqrt{uv}}\hat{w} \frac{\partial}{\partial w}$$

Ortsvektor:

$$\vec{r} = \frac{\sqrt{u+v}}{2} (\sqrt{u}\hat{u} + \sqrt{v}\hat{v})$$

2.3.15

Den skalära funktionen $u(f)$ är given. Beräkna den skalära storheten $\vec{a} \cdot \vec{\nabla} u(f)$, där \vec{a} är en konstant vektor, $f = (\vec{a} \times \vec{r})^2$, samt \vec{r} är ortvektorn.

Svar. 0

2.3.16

Differentialekvationen

$$\vec{r} \cdot [\vec{\nabla} \phi(r)] = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

är given. Vilka funktioner $\phi(r)$ löser den?

Svar. $\phi(r) = -\frac{2}{r} + C$

2.3.17

Paraboliska koordinater $uv\alpha$ definieras genom sambandet

$$\vec{r} = \left(uv \cos \alpha, uv \sin \alpha, \frac{1}{2} (u^2 - v^2) \right),$$

där $u \geq 0$, $v \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Beräkna tangentbasvektorerna till detta koordinatsystem.

$$\textbf{Svar. } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (v \cos \alpha, v \sin \alpha, u)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (u \cos \alpha, u \sin \alpha, -v)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = uv (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$$

2.3.18

Ett koordinatsystem (paraboliska koordinater) ges av sambanden

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2 \cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2 \sinh^2 u} &= 1, \\ \frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 v} &= 1, \\ \frac{z}{w} &= 1, \end{aligned}$$

där $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$ och $-\infty < w < \infty$. Visa att systemet är ortogonalt och bestäm dess skalfaktorer.

Svar. $h_1 = h_2 = a\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}$, $h_3 = 1$.

2.3.19

Ett kroklinjigt koordinatsystem uvw definieras i övre halvplanet ($z \geq 0$) av $x = 2u + v$, $y = u + \lambda v$, $z = w^2$. Bestäm värdet på parametern λ för vilket systemet är ortogonalt och ge för detta fall ett uttryck för bådelementet. Uttryck ortvektorn \vec{r} i det ortogonalala uvw systemets koordinater och basvektorer.

Svar. $\lambda = -2$

$$ds^2 = 5du^2 + 5dv^2 + 4w^2dw^2$$

$$\vec{r} = \sqrt{5}u\hat{u} + \sqrt{5}v\hat{v} + 4w^2\hat{w}$$

2.3.20

De paraboliska koordinaterna $uv\varphi$ definieras av sambandet

$$\vec{r} = \left(uv \cos \varphi, uv \sin \varphi, \frac{1}{2} (u^2 - v^2) \right),$$

där $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < \infty$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$. Ett vektorfält \vec{F} är givet som

$$\vec{F} = \sqrt{u^2 + v^2} \sin \varphi \hat{u} + \sqrt{u^2 + v^2} \cos \varphi \hat{v},$$

där \hat{u} och \hat{v} är enhetsbasvektorer i det paraboliska koordinatsystemet. Undersök om det finns någon fältlinje till vektorfältet \vec{F} som går genom punkterna $\vec{r} = (1, 0, 0)$ och $\vec{r} = (-1, 0, 0)$.

Svar. Nej.

2.3.21

Ett koordinatsystem (oblata sfäroidkoordinater) ges av sambanden

$$x = a \sinh \xi \cos \eta,$$

$$y = a \cosh \xi \sin \eta \cos \varphi,$$

$$z = a \cosh \xi \sin \eta \sin \varphi,$$

där $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. I detta system är det skalära fältet ϕ givet som $\phi(\xi, \eta, \varphi) = \phi_0 \cosh^2 \xi$. Beräkna $\vec{\nabla} \phi$.

Svar. $\vec{\nabla} \phi = \frac{\phi_0 \sinh 2\xi}{a\sqrt{\cosh^2 \xi - \sin^2 \eta}} \hat{\xi}$

2.3.22

Ett koordinatsystem uvz är definierat genom

$$\begin{aligned} x &= uv, \\ y &= u^2 + \lambda v^2, \\ z &= z. \end{aligned}$$

där $u \geq 0$. Bestäm λ så att koordinatsystemet blir ortogonalt, och beräkna systemets skalfaktorer. är koordinatsystemet uvz ett höger- eller vänstersystem?

Svar. $\lambda = -\frac{1}{4}$
 $h_u = (4u^2 + v^2)^{1/2}$
 $h_v = \frac{1}{2}(4u^2 + v^2)^{1/2}$
 $h_z = 1$

Systemet är ett vänstersystem.

2.3.23

Ett kroklinjigt koordinatsystem uvw definieras av

$$\begin{aligned} x &= \alpha e^w \cos v, \\ y &= \beta e^w \sin v, \\ z &= u. \end{aligned}$$

där α och β är reella konstanter. Bestäm en relation mellan α och β för vilken systemet är ortogonalt, och ge för detta fall ett uttryck för bågelementet ds^2 .

Svar. $\beta = \pm \alpha$
 $ds^2 = du^2 + \alpha^2 e^{2w} (dv^2 + dw^2)$

2.3.24

Ett koordinatsystem $uv\varphi$ ges av $\vec{r} = a(uv \cos \varphi, uv \sin \varphi, (u^2 - v^2)/2)$, där $0 \leq u, v < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ och a är en konstant av dimension längd. Bestäm dess skalfaktorer och koordinatytor.

Svar. $h_1 = a\sqrt{u^2 + v^2}$

$$h_2 = a\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$h_3 = auv$$

u -yta: $z = -\frac{x^2+y^2}{2au^2} + \frac{u^2a}{2}$, rotationsparaboloid med öppningen nedåt
 $z_{\max} = u^2a/2$.

v -yta: $z = \frac{x^2+y^2}{2av^2} - \frac{v^2a}{2}$, rotationsparaboloid med öppningen uppåt $z_{\min} = -v^2a/2$.

φ -yta: $\tan \varphi = \frac{y}{x}$, halvplan från z -axeln.

2.3.25

Ett kroklinjigt koordinatsystem uvw ges av $\vec{r} = a(1 + u + e^u \cos v, v + e^u \sin v, w)$, där $-\infty < u < \infty$, $-\pi \leq v < \pi$, $-\infty < w < \infty$ och a är en konstant av dimension längd. Visa att detta system är ortogonal, samt beskriv i grova drag hur en v -yta ser ut.

2.3.26

Bestäm de normerade basvektorerna i det kroklinjiga koordinatsystemet $u_1 = x^2 - y^2$, $u_2 = xy$, $u_3 = z$, och visa att de är ortogonala.

Svar. $\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, -y, 0)$,

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, x, 0),$$

$$\hat{u}_3 = (0, 0, 1).$$

2.3.27

Ett koordinatsystem $\alpha\beta\gamma$ definieras av sambandet

$$\vec{r} = c(\gamma, \alpha^2 - \beta^2, 2\alpha\beta) ,$$

där c är en positiv konstant av dimensionen längd. Beskriv systemets koordinatytor. Ge också uttryckena för bådelementet.

Svar. $\alpha = \text{konstant}$: $z^2 = -4c\alpha^2y + 4c^2\alpha^4$, parabolisk cylinder mot negativt y med spetsen i $y = c\alpha^2$.

$\beta = \text{konstant}$: $z^2 = 4c\beta^2y + 4c^2\beta^4$, parabolisk cylinder mot positivt y med spetsen i $-c\beta^2$

$\gamma = \text{konstant}$: plan parallellt med yz -planet.

$$ds^2 = 4c^2(\alpha^2 + \beta^2)(da^2 + d\beta^2) + c^2d\gamma^2.$$

I första kapitlet repeterade vi olika sätt att derivera skalära fält och vektorfält. Vi införde också s.k. kroklinjiga koordinatsystem (termen syftar på att koordinatlinjer, till skillnad från det Cartesiska fallet, inte är räta linjer). Vi begränsade oss dock till val av koordinater som leder till basvektorer som är inbördes ortogonala.

Vi började att härleda uttryck för differentialoperatorer i de kroklinjiga koordinaterna, men kom bara till gradienten. Det visar sig vara praktiskt att vänta med divergensen, rotationen och Laplaceoperatorn tills vi har talat om integralsatser. 04-integralsatserna kan nämligen utnyttjas för att ge alternativa, ekvivalenta, definitioner av divergens och rotation som väsentligen förenklar härledningen av deras uttryck i kroklinjiga koordinater.

Såväl integraler (linje-, yt- och volymintegraler) som integralsatser (Gauss, Stokes och analoga satser) och beräkning av integraler genom parametrisering förutsätts kända. Det skadar dock inte med litet repetition.

3.1 Parametrisering av kurvor och ytor

När vi tidigare studerade fältlinjer såg vi hur vi kan beskriva fältlinjen med en parameter, låt oss säga τ . Det gäller rent allmänt att vi kan beskriva varje kontinuerlig kurva med hjälp av en parameter.

Exempel

En cirkel i xy -planet med radien r_0 kan parametriseras med en vinkel φ enligt $x = r_0 \cos \varphi$, $y = r_0 \sin \varphi$, där $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Exempel

Parametrисera linjen $5x + 2y = 4$.

Lösning: Vi kan börja med att sätta $x = t$. Det följer då att $y = 2 - \frac{5}{2}t$. Dessa båda uttryck ger en parametrisering av linjen för $-\infty < t < \infty$.

En viktig egenskap hos kurvan $\vec{r}(\tau)$ är att derivatan $\frac{d\vec{r}}{d\tau}$ i varje punkt ger en tangentvektor till kurvan.

Exempel

Cirkeln $\vec{r}(\varphi) = r_0(\cos \varphi, \sin \varphi)$ har tangentvektorn $\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = r_0(-\sin \varphi, \cos \varphi)$.

Exempel

Linjen $\vec{r}(t) = (t, 2 - 5t/2)$ har tangentvektorn $\frac{d\vec{r}}{dt} = (1, -5/2)$.

För att beskriva en två-dimensionell yta behöver man på samma sätt två parametrar.

Exempel

En sfär med radien r_0 och centrum i origo kan skrivas som:

$$\begin{aligned}x &= r_0 \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r_0 \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r_0 \cos \theta.\end{aligned}$$

där $0 \leq \theta < \pi$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Exempel

Finn en parametrisering av planet $x + 2y + z = 8$.

Lösning: Vi sätter $x = s$ och $y = t$. Vi kan då skriva $z = 8 - s - 2t$, och vi har funnit en parametrisering av ytan för $-\infty < s, t < \infty$.

För en yta $\vec{r}(s, t)$ kan vi nu finna två tangentvektorer $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$. Dessa är i allmänhet linjärt oberoende. Det går alltså inte att beskriva en yta med en enda tangentvektor. Däremot kan man beskriva ytan med en normalvektor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$.

Exempel

Sfären $\vec{r}(\theta, \varphi) = r_0(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ har tangentvektorerna

$$\vec{t}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r_0 (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$$

och

$$\vec{t}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r_0 (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0).$$

Normalvektorn blir då

$$\begin{aligned}\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 &= r_0^2 \left(\sin^2 \theta \cos \varphi, \sin^2 \theta \sin \varphi, \right. \\&\quad \left. \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \right) \\&= r_0^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\&= r_0 \sin \theta (x, y, z) = r_0^2 \sin \theta \hat{r}.\end{aligned}$$

En annan normalvektor är förstås enhetsvektorn \hat{r} . Vi kan här lägga märke till att vår normalvektor $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2$ blir noll på z -axeln. Det är ett tecken på att de sfäriska koordinaterna degenererar på z -axeln.

3.2 Linjeintegraler

Det vektoriella linjeelementet är $d\vec{r}$. Det kan användas t.ex. för att skriva den inom fysik tillämpningar vanligaste linjeintegralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där \vec{F} är ett vektorfält och C är en kurva i \mathbb{R}^3 . Det finns förstås andra sätt att bilda en skalär eller vektor från ett skalärt fält ϕ eller ett vektorfält \vec{F} med hjälp av $d\vec{r}$ eller $ds = |d\vec{r}|$, t.ex. $\int_C \phi ds$ eller $\int_C \vec{F} \times d\vec{r}$. Den precisa betydelsen av integralen som en vanlig endimensionell integral är enkel: om man parametriserar kurvan C som $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t_1 < t < t_2$, får man $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$, och alltså

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt. \quad (3.1)$$

Resultatet är oberoende av vilken parameter som används. Visa gärna detta! Denna egenskap som är receptet för hur man räknar ut en linjeintegral genom parametrisering, kan också ses som själva definitionen av integralen. En bekant fysikalisk tolkning är att en kraft \vec{F} verkande under en liten förflyttning $d\vec{r}$ utför ett arbete $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Integralen svarar mot arbetet utfört av kraften under förflyttning längs kurvan C . Uträkningen i ekv. (3.1), där t är tiden, kan då tolkas som $W = \int_{t_1}^{t_2} P dt$, där $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ är effekten. Begreppen "linjeintegral" och "kurvintegral" är synonyma.

Exempel

En elektron rör sig längs banan $y = x^2/H$ från $(0, 0)$ till $(L, L^2/H)$ under inverkan av en elektrostatisk kraft $\vec{F} = eE_0\hat{y}$. Beräkna det arbete som kraften utför på elektronen.

Lösning 1: Arbetet ges av integralen

$$\int_C eE_0\hat{y} \cdot d\vec{r},$$

där C är den kurva som elektronen följer. Vi kan nu använda koordinaten x för att parametrисera vår kurva och skriver kurvan som $\vec{r}(x) = (x, x^2/H)$. Då gäller att

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = (1, 2x/H).$$

Vi kan nu beräkna arbetet ur

$$\begin{aligned}\int_C eE_0 \hat{y} \cdot d\vec{r} &= \int_0^L eE_0 \hat{y} \cdot \frac{d\vec{r}}{dx} dx = \int_0^L eE_0 \frac{2x}{H} dx \\ &= \frac{eE_0}{H} [x^2]_0^L = \frac{eE_0 L^2}{H}.\end{aligned}$$

Lösning 2: Elektrostatiska krafter är konservativa, så vi kan ersätta kurvan med två räta linjer, en C_1 som går från $(0, 0)$ till $(L, 0)$ och är parallell med x -axeln, och en kurva C_2 som går från $(L, 0)$ till $(L, L^2/H)$ och är parallell med y -axeln. Arbetet kan nu skrivas som

$$\int_C eE_0 \hat{y} \cdot d\vec{r} = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right) eE_0 \hat{y} \cdot d\vec{r}.$$

Eftersom kraften överallt är ortogonal mot kurvan C_1 följer att integralen längs med C_1 måste vara noll, så det återstår bara att beräkna

$$\int_{C_2} eE_0 \hat{y} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} eE_0 \hat{y} \cdot \hat{y} ds = eE_0 \int_{C_2} ds.$$

Den sista integralen ger nu längden på kurvan C_2 , vilken är L^2/H , så arbetet blir till slut $eE_0 L^2/H$. En kanske ännu bättre lösning är att finna en potential till fältet (se mekanikkursen och kapitel 8).

Exempel

En partikel följer en bana $\vec{r}(t) = r_0(\cos \omega t, \sin \omega t, \omega t)$, där $0 \leq t \leq 4\pi/\omega$, under inverkan av en fjäderkraft $\vec{F} = k(x, y, z)$. Beräkna det arbete fjädern utför på partikeln.

Lösning: Vi kan skriva arbetet som integralen $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Vi börjar med att beräkna tangentvektorn till banan $C : \frac{d\vec{r}}{dt} =$

$r_0\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 1)$. Skalärprodukten blir sedan

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} &= kr_0(\cos \omega t, \sin \omega t, \omega t) \cdot r_0\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 1) \\ &= kr_0^2\omega[-\sin \omega t \cos \omega t + \sin \omega t \cos \omega t + \omega t] = kr_0^2\omega^2 t.\end{aligned}$$

Vi kan nu skriva integralen som

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{4\pi/\omega} kr_0^2\omega^2 t dt = kr_0^2\omega^2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{4\pi/\omega} = 8\pi^2 kr_0^2.$$

I en del fall behöver man inte explicit parametrisera kurvan utan det räcker att använda ett mer geometriskt resonemang.

Exempel

Beräkna integralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = F_0(\hat{r} + \hat{\varphi})$ och C är den övre halvcirkeln med centrum i origo som går från $(r_0, 0)$ till $(-r_0, 0)$.

Lösning: Vi noterar först att $\hat{\varphi}$ är en tangentvektor till C , och att $\vec{F} \cdot \hat{\varphi} = F_0$. Eftersom $d\vec{r} = \hat{\varphi} ds$ så blir integralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_0 \int_C ds$, där vi kan tolka själva integralen som längden av halvcirkel. Detta ger $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi F_0 r_0$.

Det finns också andra typer av linjeintegraler som kan dyka upp, $\int_C \phi d\vec{r}$ och $\int_C \vec{F} \times d\vec{r}$, och dessa kan tolkas analogt med integralerna ovan.

Exempel

En cirkulär strömslinga med radien r_0 genom vilken det löper en ström I ligger i xy -planet. Beräkna den kraft med vilken ett homogent magnetfält $B_0\hat{z}$ påverkar slingan.

Lösning: Ett element $d\vec{r}$ av slingan påverkas av en kraft $d\vec{F} = Id\vec{r} \times \vec{B}$, och alltså ges den totala kraften av $\vec{F} = \int_C Id\vec{r} \times \vec{B}$. Om vi antar att cirkelns centrum ligger i origo, så får vi att $\hat{\varphi}$ är en tangentvektor till cirkeln. Vi noterar nu att

$$\vec{B} \times I\vec{d}r = B_0 I (\hat{z} \times \hat{\varphi}) ds = B_0 I (-\hat{r}) ds .$$

Lägg nu märke till att \hat{r} har motsatt riktning i två diametralt motsatta punkter på cirkeln, och därför kommer kraften från dessa båda punkter att ta ut varandra. Vi kan upprepa detta resonemang för alla punkter längs strömslingan, och alltså måste nettokraften på slingan vara 0.

3.3 Ytintegral

För en ytintegral har man det skalära areaelementet dS , och det vektoriella $d\vec{S} = \vec{n}dS$, där \vec{n} är en normalerad normalvektor till ytan S . (För att $d\vec{S}$ skall vara definierad krävs att ytan är orienterbar, dvs. har två sidor. Ett exempel på en icke orienterbar yta är ett Möbiusband.) En mycket vanlig typ av ytintegral är $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$. Om man ser \vec{F} som någon sorts flödestäthet — det kan vara en vätska eller gas, eller även elektriskt fält etc. — representerar denna ytintegral flödet genom ytan. Denna typ av ytintegral kallas normalytintegral.

Exempel

En vätska med densiteten ρ och (konstant) hastighet \vec{u} strömmar genom ett rör med tvärsnittsarean S . Flödet av vätska genom röret (det vill säga den massa som per tidsenhet strömmar genom röret är då $\rho u S$).

Vad händer om vätskans hastighet \vec{u} beror på avståndet r från rörets symmetriaxel? Isåfall får vi definiera en flödestäthet $\rho u(r)$ så att flödet genom ett ytelement dS blir $\rho u(r) dS$. Om vi tar dS som en ring med centrum i symmetriaxeln och med en tjocklek dr så är $dS = 2\pi r dr$ och det totala flödet genom röret blir

$$\int \rho u(r) dS = 2\pi \int_0^R \rho u(r) r dr ,$$

där R är rörets radie.

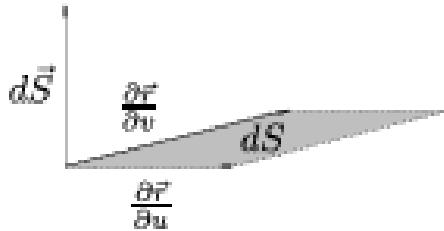
För att nu ytterligare komplicera det hela och verkligen blanda in vektorerna så antar vi att vätskan strömmar genom en tvärsnittsarea dS , vilken inte är vinkelrät mot vätskans strömningshastighet \vec{u} . Vi antar att vinkeln mellan normalvektorn \vec{n} till ytan dS och vätskans

hastighet \vec{u} är θ . Då blir flödet genom ytan $dA \rho u dA \cos \theta$. Om vi nu enligt ovan väljer att definiera en vektor $d\vec{S}$ för ett ytelement med storleken dS och riktningen \vec{n} , så ser vi att vi kan skriva flödet som $\rho \vec{u} \cdot d\vec{S}$.

Om man parametriserar ytan med hjälp av två parametrar $(u, v) \in D$ där D är parameterområdet (som rimligen bör väljas så att det enkelt kan uttryckas i termer av u och v) får man enligt figuren $dS = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}| dudv$ och

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dudv. \quad (3.2)$$

Detta är ett allmänt uttryck som gäller för alla parametriseringar; u och v behöver alltså inte vara koordinater i ett kroklinjigt koordinatsystem med ortogonala basvektorer, så $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ behöver inte vara vinkelräta. Kryssprodukten ser till att det infinitesimala ytelementet blir rätt ändå.



Exempel

Beräkna normalytintegralen av fältet $\vec{u} = (x, z, -y)$ över cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ mellan $z = 0$ och $z = 1$, med utåtriktad normal.

Lösning: Vi kan beskriva punkterna på ytan genom deras z -koordinat och vinkeln φ som ortvektorn bildar med \hat{x} . Det vill säga, vi använder cylindriska koordinater med $\varrho = 1$, $\vec{r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)$. Tangentvektorerna blir

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \hat{\varphi}$$

och

$$\frac{d\vec{r}}{dz} = (0, 0, 1) = \hat{z}.$$

Normalvektorn blir då $\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{\varrho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$. Vi kan sedan beräkna integralen som

$$\begin{aligned}\int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi (\cos \varphi, z, -\sin \varphi) \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi (\cos^2 \varphi + z \sin \varphi) = \pi\end{aligned}$$

(endast den första termen i integranden bidrager).

Exempel

Beräkna integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ där $\vec{F} = \frac{F_0}{a} (x, y, z)$, och ytan S ges av $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = a^2$, $z \geq 0$.

Lösning: Ytan S är den övre halvan av en ellipsoid med halvaxlarna a , $2a$ och $3a$. Vi kan parametrisera ytan med hjälp av de sfäriska vinklarna θ och φ

$$\begin{aligned}x &= a \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= 2a \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= 3a \cos \theta.\end{aligned}$$

där $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$. Vi får då tangentvektorerna

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= a (\cos \theta \cos \varphi, 2 \cos \theta \sin \varphi, -3 \sin \theta), \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= a (-\sin \theta \sin \varphi, 2 \sin \theta \cos \varphi, 0).\end{aligned}$$

Normalvektorn blir då

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = a^2 \sin \theta (6 \sin \theta \cos \varphi, 3 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta).$$

Vi kan nu beräkna skalärprodukten $\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) = \dots = 6F_0a^2 \sin \theta$, och integralen erhålls enligt

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta 6F_0a^2 \sin \theta = 12\pi F_0 a^2.$$

Det finns också andra typer av ytintegraler som dyker upp i olika tillämpningar, såsom $\int_S \vec{F} dS$, $\int_S \phi dS$, $\int_S \phi d\vec{S}$ och $\int_S \vec{F} \times d\vec{S}$.

Exempel

Beräkna ytintegralen $\oint_S \vec{r} dS$ av ortvektorn \vec{r} över sfären S : $|\vec{r} - a\hat{z}| = a$.

Lösning: Integralen skall bli en vektor. Integrationsområdet är ytan av en sfär med centrum i $a\hat{z}$. Vi flyttar origo till sfärens centrum för att dra nytta av den sfäriska symmetrin. Vi kan då skriva $\vec{r} = a\hat{z} + \vec{r}_1$, där \vec{r}_1 är ortvektorn i det nya koordinatsystemet. Integralen kan då delas upp i två delar:

$$\oint_S \vec{r} dS = \oint_S a\hat{z} dS + \oint_S \vec{r}_1 dS = a\hat{z} \oint_S dS + \oint_S \vec{r}_1 dS.$$

Den första integralen är sfärens area $4\pi a^2$. Den första termen blir därför $4\pi a^3 \hat{z}$.

För den andra termen tänker vi oss att vi summerar vektorer \vec{r}_1 över varje punkt på sfärens yta. I och med att sfären har sitt centrum i origo så blir vektorerna lika långa på varje punkt på sfärens yta, men på två diametralt motsatta punkter på ytan måste vektorerna peka åt motsatta håll, och därmed ta ut varandra. Det följer därmed att integralen måste vara 0. Därför får vi $\oint_S \vec{r} dS = 4\pi a^3 \hat{z}$.

Exempel

Låt S vara mantelytan av cylindern $x^2 + y^2 = a^2$, $|z| < a$. Beräkna integralen $\int_S (\vec{r} + \rho\hat{\varphi}) \times d\vec{S}$.

Lösning: Integralen skall bli en vektor. Med tanke på att integrationsområdet är en cylinder är det fördelaktigt att arbeta med cylinderkoordinater. I cylinderkoordinater kan vi skriva ortvektorn som $\vec{r} = \varrho\hat{\varrho} + z\hat{z}$. Normalvektorn till cylindern är $\hat{\varrho}$. Vi kan också skriva ytelementet dS på cylindern som $ad\varphi dz$.

Vi beräknar nu först vektorprodukten $(\vec{r} + \varrho\hat{\varphi}) \times \hat{\varrho} = z\hat{\varphi} - \varrho\hat{z}$. Lägg märke till att $\varrho = a$ på cylinderns mantelyta. Vi kan nu skriva integralen som

$$\int_S (\vec{r} + \varrho\hat{\varphi}) \times d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_{-a}^a (z\hat{\varphi} - a\hat{z}) adz d\varphi.$$

Lägg märke till att enhetsvektorn $\hat{\varphi}$ inte är en konstant.

När vi beräknar integralen $\int_0^{2\pi} \hat{\varphi} d\varphi$ så summerar vi $\hat{\varphi}$ över alla punkter längs en cirkel till vilken den är tangenten. Eftersom tangentvektorn har motsatt riktning i två punkter som skiljer sig åt med en vinkel π , så måste integralens värde bli 0 när vi har summerat över alla punkter. Den första termen i integralen ger därför inget bidrag. \hat{z} däremot är en konstant vektor och vi kan därför utan problem beräkna integralen

$$-\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-a}^a dz a^2 \hat{z} = -4a^3 \pi \hat{z},$$

vilket då är vår ursprungliga integrals värde.

Det torde framgå av exemplen ovan att integralberäkningarna kan bli mycket tidsödande om man inte kan hitta enkla geometriska resonemang. Vi skall i kapitel 4 studera mer effektiva metoder för att beräkna både kurv- och ytintegraler med hjälp av Stokes och Gauss satser.

3.4 Volymintegraler

Volymintegraler är på sätt och vis enklare, det finns bara $\int_V \phi dV$ och $\int_V \vec{F} dV$. Det (skalära) volymelementet är $dV = dx dy dz$. Om man parametrисerar med tre parametrar (u, v, w) blir volymelementet den infinitesimala volymen av parallelepipeden med sidorna $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$ och $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw$, dvs. den ges av den skalära trippelprodukten $dV = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right) \right| du dv dw$. Övertyga gärna dig själv om att värdet på en yt- eller volymintegral,

uträknad med hjälp av en parametrisering, är oberoende av vilken parametrisering man väljer.

3.5 Parametrisering i kroklinjiga koordinater

Många gånger använder man koordinatlinjer eller -ytor i kroklinjiga koordinater som kurvor eller ytor att integrera över. En linjeintegral längs en u_1 -kurva blir då t.ex. $\int_C \vec{F} \cdot \vec{r} = \int_{u_1,1}^{u_1,2} F_1 h_1 du_1$. Yt- och volymintegraler förenklas tack vare ortogonaliteten för basvektorerna. En ytintegral över en u_1 -yta blir t.ex. $\int_S \vec{F} \cdot \vec{S} = \int_D F_1 h_2 h_3 du_2 du_3$ och en volymintegral $\int_V \phi dV = \int_{V'} \phi h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$ (där D och V' är parameterområdena).

3.6 Uppgifter

3.6.1

Beräkna integralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = (ye^x, xe^y)$ och C är en triangel med hörnen i $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(2, 2)$ genomlöpt i positiv led, dvs moturs.

Svar. -4

3.6.2

Beräkna integralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = (y \log \frac{x^2}{y}, -\frac{x}{y})$ och C är parabelbågen $y = x^2$ från $(1, 1)$ till $(2, 4)$.

Svar. -2

3.6.3

En partikel som påverkas av kraften $\vec{F} = (y^3, x^3)$ rör sig i positiv led längs ellipsen $x^2 + y^2/4 = 1$ från punkten $(0, 2)$ till punkten $(1, 0)$. Beräkna det arbete som kraften uträttar på partikeln.

Svar. $-27\pi/8$

3.6.4

Vektorfältet \vec{B} och kurvan C är givna:

$$\vec{B} = \frac{B_0}{a} \frac{1}{x^2 + y^2} \left[(x - y) a^2 \hat{x} + (x + y) a^2 \hat{y} + (x^2 + y^2) z \hat{z} \right],$$

$C : \vec{r} = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, \frac{a\varphi}{\pi})$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Beräkna integralen $\int_C d\vec{r} \times \vec{B}$ från punkten $(a, 0, 0)$ till punkten $(a, 0, 2a)$.

Svar. $-2\pi a B_0 \hat{z} - 2a B_0 \hat{y}$

3.6.5

14 deluppgifter: Härled linjeelement för integration längs koordinatlinjer, ytelement för integration över koordinatytor, samt volymelement i cylindriska och sfäriska koordinater!

3.6.6

Härled linjeelement för integration längs koordinatlinjer, ytelement för integration över koordinatytor, samt volymelement i de elliptiska cylinderkoordinaterna som definierats i ekvation (2.7).

3.6.7

Tolka ytintegralen $\oint_S \vec{r} dS$ av ortvektorn \vec{r} över sfären S (se exempel i avsnitt 3.3), och dess uppdelning i två delar, i termer av begreppet masscentrum.

3.6.8

Beräkna integralen $\int_C F_0 \sin \varphi \hat{\varphi} \cdot d\vec{r}$, där C är cirkeln $\varrho = a$, $z = 0$.

Svar. 0

3.6.9

Vektorfältet \vec{B} är givet i sfäriska koordinater

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = \frac{B_0 a}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} + \hat{\varphi} \right).$$

Bestäm kurvintegralen av \vec{B} längs kurvan C med parameterframställningen

$C : \vec{r} = (a \cos \alpha, 2a \sin \alpha, \frac{a\alpha}{\pi})$ från punkten $(a, 0, 0)$ till $(a, 0, 2a)$.

Svar. $2\pi a B_0$

3.6.10

En partikel rör sig i en spiralliknande bana på ytan av en sfär med radien 2 dm och centrum i origo. Dess läge vid tiden t , $(0 \leq t \leq \pi)$ ges i sfäriska koordinater av $r = 2$, $\theta = \frac{1}{2}(\pi - t)$, $\varphi = 2t$. Sfärens yta sprayas med en kemisk lösning vilken påverkar partikeln med en friktionskraft $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$, där \vec{v} är partikelns hastighet och γ en friktionskoefficient med värdet 0.3 Ns/m. Hur mycket energi måste tillföras partikeln i tidsintervallet $\pi/2 \leq t \leq \pi$ för att denna rörelse skall vara opåverkad av friktionen?

Ledtråd. $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dr} dr + \frac{d\vec{r}}{d\theta} d\theta + \frac{d\vec{r}}{d\varphi} d\varphi$.

Svar. $-\gamma 10^{-2} (\frac{9\pi}{2} - 8) \text{ J}$

3.6.11

Beräkna $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = (xz, yz, \frac{z^3}{a})$ och S är en sfär med radien a och centrum i origo.

Svar. $4\pi a^4/5$

3.6.12

Beräkna integralen $\int_S \left(\frac{A}{r^2} \hat{r} + B \hat{z} \right) \cdot d\vec{S}$, där S är sfären $r = a$.

Svar. $4\pi A$

3.6.13

(*) En kropp är rotationssymmetrisk runt z -axeln, och begränsas av cirkelytor med radien ϱ_0 vid $z = -a$ och $z = a$. Däremellan beskrivs den av ekvationen $\varrho \leq f(z)$. Hur skall funktionen f väljas för att kroppens mantelyta skall bli så liten som möjligt?

Svar. Funktionen f skall vara $f(z) = \alpha \cosh \frac{z}{\alpha}$, där $\alpha \cosh \frac{a}{\alpha} = \varrho_0$.

Integralsatser

4

Alla integralsatser säger något i stil med

$$\int_{V_D} (\text{derivata av fält}) = \int_{(\partial V)_{D-1}} (\text{fält}). \quad (4.1)$$

Här är V_D ett D -dimensionellt område, och $(\partial V)_{D-1}$ dess $(D - 1)$ -dimensionella rand. Precis hur derivatan och fältet skall se ut framgår förstås inte av den här lilla minnesregeln.

Det enklaste exemplet är integration av en funktion av en variabel. Man har

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dx} dx = [f(x)]_{x=x_1}^{x_2}. \quad (4.2)$$

Randen till intervallet $[x_1, x_2]$ består bara av punkterna $\{x_1, x_2\}$, så tolkningen av det schematiska uttrycket (4.1) blir förenklad till en summa över dessa två punkter.

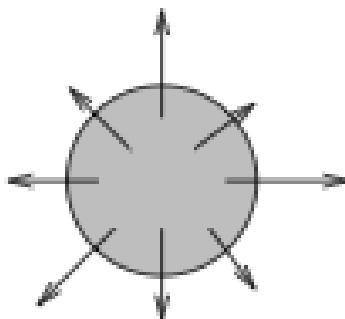
Uppenbarligen gäller integrationsformeln (4.2) bara om $\frac{df}{dx}$ är väldefinierad i hela intervallet. Vi kan inte tillåta diskontinuerliga funktioner. (Dock skall vi så småningom, i kapitlet om deltafunktioner, se att det går att definiera derivator av diskontinuerliga funktioner.)

4.1 Gauss sats

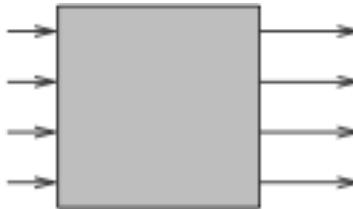
Gauss sats lyder

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (4.3)$$

Notera att den följer mönstret i ekv. (4.1). Vi skall snart bevisa den (även om detta redan gjorts i kursen i flervariabelanalys).



Hur kan man förstå detta? Att vektorfältet \vec{F} har en divergens större än noll kan ses som att fältlinjerna divergerar, går isär. I figuren, där den skuggade ytan representerar V och dess cirkeln dess begränsningsyta ∂V , ser vi att $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} > 0$ inne i V , så att vänsterledet i Gauss sats är positivt. Vi ser också att högerledet är positivt (kom ihåg att konventionen för val av normal till en sluten yta alltid är att den är riktad utåt). Vi ser kanske inte direkt i figuren att de två ledens är lika, men det är ett gott tecken. En fysikalisk tolkning är att högerledet representerar ett flöde ut genom ytan S , och att vänsterledet representerar närväro av källor till detta flöde. Integranden $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ kallas källtäthet.



Bilden ovan är starkt förenklad. Det finns vektorfält som har en divergens, men vars fältlinjer inte alls går isär. Som ett enkelt exempel kan vi ta fältet $\vec{F} = e^x \hat{x}$, vars divergens är $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = e^x$. Dess fältlinjer är alla parallella med x -axeln och pekar i positiv x -led. Om vi testar Gauss sats genom att lägga en låda med begränsningsytor vid $x = x_1$ och $x = x_2$, där $x_1 < x_2$, ser vi att flödet ut genom ytan vid x_2 är större än det in genom ytan vid x_1 . Gauss sats stämmer genom endimensionell integration enligt ekv. (4.2).

Låt oss repetera ett bevis. För enkelhets skull låter vi volymen vara sådan att den med ett lämpligt val av koordinater (x, y, z) kan skrivas $V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, f(x, y) < z < g(x, y)\}$, där D är en region i planet (om inte det går, får man dela upp volymen i flera sådana delar). Vänsterledet i Gauss sats är

$$\int_V (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z) dx dy dz. \quad (4.4)$$

Låt oss beräkna den sista termen. Den är

$$\begin{aligned} \int_D dx dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz \partial_z F_z &= \int_D dx dy [F_z(x, y, g(x, y)) \\ &\quad - F_z(x, y, f(x, y))] . \end{aligned} \quad (4.5)$$

För att beräkna högerledet i Gauss sats behöver vi ytelementet $d\vec{S}$. Det fås enligt ekv. (3.2) med x och y som parametrar. Vi har t.ex. $\partial_x(x, y, g(x, y)) = (1, 0, \partial_x g(x, y))$ och $\partial_y(x, y, g(x, y)) = (0, 1, \partial_y g(x, y))$ för den "övre" delen av begränsningsytan, och alltså $d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dx dy = (-\partial_x g(x, y), -\partial_y g(x, y), 1) dx dy$. Det viktiga här är att z -komponenten är $dx dy$. Om vi för stunden beräknar den del av högerledet i Gauss sats som innehåller F_z får vi

$$\int_{\partial V} F_z dS_z = \int_D dx dy [F_z(x, y, g(x, y)) - F_z(x, y, f(x, y))], \quad (4.6)$$

där minustecknet i den andra termen kommer från att normalen är nedåtriktad. Detta är samma uttryck som i ekv. (4.5). Samma argument görs, med cyklistiskt permuterade index, även för de delar som innehåller F_x och F_y . ■

En strategi när man använder Gauss sats för integralberäkning kan vara:

1. Bestäm utseendet på den angivna ytan S och rita en tydlig figur.
2. Undersök fältet \vec{F} . Identifiera singulariteter. Beräkna $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ eller $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.
3. Slut ytan S på ett sådant sätt att volymen V inte innehåller några singulariteter. (Metoder för att hantera singulariteter ges i kapitel 6 och 7.)
4. Teckna Gauss sats.
5. Beräkna de integraler som uppträder i Gauss sats.
6. Kontrollera att normalen har rätt orientering överallt.

Exempel

Beräkna integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = \frac{F_0}{a}(x, y, 0)$ och S är ytan $2a - \sqrt{x^2 + y^2} = z$, och $0 \leq z \leq 2a$.

Lösning: Vi kan börja med att beräkna $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2F_0/a$. Eftersom divergensen har ett så enkelt uttryck är det lockande att använda Gauss sats, men ytan S är en kon med spetsen i $z = 2a$ och öppningen nedåt; den är alltså inte en sluten yta. Vi kan dock sluta den genom att lägga till en cirkelskiva S' i xy -planet med radien $2a$ och normalvektorn $-\hat{z}$.

På den slutna ytan $S + S'$ kan vi sedan tillämpa Gauss sats

$$\oint_{S+S'} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \frac{2F_0}{a} \int_V dV.$$

Volymen av konen är

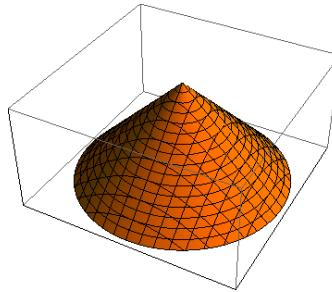
$$\int_V dV = \frac{1}{3}\pi(2a)^2 2a = \frac{8\pi a^3}{3},$$

och alltså blir integralen

$$\oint_{S+S'} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{2F_0}{a} \frac{8\pi a^3}{3} = \frac{16\pi F_0 a^2}{3}.$$

Vi kan nu separat beräkna $\int_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{S}$, men här lägger vi märke till att \vec{F} saknar z -komponent, så dess normalintegral över S' blir noll. Slutligen har vi alltså

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{16\pi F_0 a^2}{3}.$$



Exempel

Låt S vara ytan $y^2 + z^2 = 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $z \geq 0$ med uppåtriktad normalvektor. Beräkna $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = (x, x^2yz^2, x^2y^2z)$.

Lösning: Ytan S är en den övre halvan av en cylinder med x -axeln som symmetriaxel. För att tillämpa Gauss sats behöver vi sluta denna yta, vilket vi kan göra genom att lägga till två halva cirkelskivor, S_1 och S_3 vid $x = 1$ och $x = -1$, samt en bottenyta, S_2 . Normalvektorn till dessa ytor skall väljas som en fortsättning av normalvektorn på S . Detta innebär att S_1 och S_3 får normalvektorna \hat{x} och $-\hat{x}$, samt att normalvektorn till S_2 blir $-\hat{z}$. Vi ser nu att normalvektorn överallt pekar ut från den volym som innesluts av S , S_1 , S_2 och S_3 , vilket är vad som krävs för att vi skall kunna använda Gauss sats.

Vi kan nu beräkna divergensen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 1 + x^2z^2 + x^2y^2 = 1 + x^2\varrho^2,$$

där vi har infört $\varrho^2 = y^2 + z^2$. Vi inför alltså cylindriska koordinater som utgår från x -axeln istället för som vanligt från z -axeln. Vi kan nu beräkna volymintegralen

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV &= \int_V dV + \int_{-1}^1 dx \int_0^1 \varrho d\varrho \int_0^\pi d\varphi x^2 \varrho^2 \\ &= \pi + \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Vi får nu ta hand om de enskilda begränsningsytorna.

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} x dS = \int_{S_1} dS = \frac{\pi}{2},$$

eftersom $x = 1$ på S_1 . På samma sätt får vi på S_3 $\int_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{2}$. Slutligen så finner vi att på S_2 så är

$$\int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_2} x^2 y^2 z dS = 0,$$

ty $z = 0$ på S_2 .

Om vi ställer samman dessa uträkningar har vi

$$\left(\int_S + \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} \right) \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV,$$

och om vi här löser ut integralen över S samt sätter in värdena för de enskilda integralerna får vi

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Exempel

Beräkna ytintegralen

$$\oint_S (a^2 \hat{x} + ay \hat{y} + z^2 \hat{z}) \cdot d\vec{S}$$

över den slutna ytan $S : x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

Lösning: Vi börjar med att studera ytan S . Den kan skrivas om som $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$. Detta är en sfär med radien a och centrum i $(0, 0, a)$. Lägg märke till att eftersom ytan redan är sluten, så råder det inte någon tvekan om hur normalvektorn är riktad. Konventionen säger oss att normalvektorn för en sluten yta alltid pekar ut från den inneslutna volymen.

I och med att vi redan har en sluten yta, så är det lockande att använda Gauss sats, och därför beräknar vi divergensen $\vec{\nabla} \cdot (a^2 \hat{x} + ay \hat{y} + z^2 \hat{z}) = a + 2z$. Innan vi tar itu med volymintegralen byter vi z -koordinaten till $z' = z - a$, så att sfären i de nya koordinaterna får sitt centrum i origo. I dessa koordinater blir divergensen $3a + 2z'$.

Enligt Gauss sats blir vår ytintegral nu

$$\oint_S (a^2 \hat{x} + ay \hat{y} + z^2 \hat{z}) \cdot d\vec{S} = \int_{V'} (3a + 2z') dV.$$

Vi byter nu till sfäriska koordinater, och får

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^a dr (3a + 2r \cos \theta) r^2 \sin \theta \\ &= 2\pi \int_0^a dr \left[-3ar^2 \cos \theta + r^3 \sin^2 \theta \right]_{\theta=0}^\pi \\ &= 2\pi \int_0^a 6ar^2 dr = 4\pi a^4, \end{aligned}$$

vilket är värdet på vår ursprungliga ytintegral.

I exemplen ovan är fälten kontinuerliga och deriverbara i hela det område där vi tillämpar Gauss sats. Detta är viktigt för att resultatet skall bli rätt. Tills vidare undviker vi att försöka använda Gauss sats på singulära fält. Vi kommer att se i kapitel 6 och 7 hur denna svårighet kan övervinnas.

4.2 Kontinuitetsekvationen

Gauss sats har många tillämpningar. Låt oss undersöka vad den får för konsekvenser för ett flöde av en gas eller vätska. Det centrala antagandet vi skall göra är att *massan är bevarad*, dvs. att massan som finns i en volym V endast kan ändras på grund av flöde genom dess begränsningsyta ∂V . Vi kallar densiteten för ρ , och hastighetsfältet i vätskan/gasen för \vec{v} . Det är naturligt att införa massflödestätheten $\vec{j} = \rho \vec{v}$; den är konstruerad så att mängden massa som passerar genom ett ytelement $d\vec{S}$ (med normalens riktning räknad som positivt flöde) är $dm = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$. (Kontrollera detta! Ett argument genomfördes i det första strömningsexemplet i avsnitt 3.3.) Den totala massan i volymen är $m_V = \int_V \rho dV$. Vi kan nu använda massans bevarande för att räkna ut ändringen i m_V på två sätt: dels genom att derivera uttrycket för massan ovan, dels genom att beräkna flödet in genom begränsningsytan. Vi får

$$\frac{dm_V}{dt} = \begin{cases} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \\ - \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV \end{cases} \quad (4.7)$$

där Gauss sats har använts i det nedre uttrycket (minustecknet kommer från att vi räknar ut inflödet, fast normalen pekar utåt). Likheten mellan de två uttrycken gäller för vilken volym V som helst, så integranderna måste vara lika. Resultatet är den så kallade *kontinuitetsekvationen*,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (4.8)$$

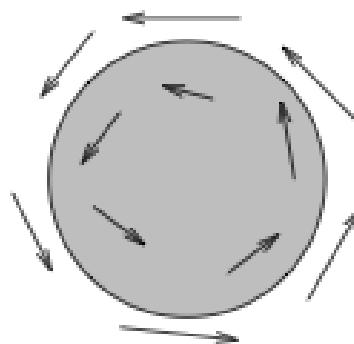
Ni kommer att råka på den i många grenar av fysiken. Den uttrycker alltså att en storhet är bevarad (i vårt fall massa). ρ representerar densiteten för storheten och \vec{j} strömmen (mer korrekt: strömtätheten). Exemplet gäller (med rätt tolkning av storheterna) i alla situationer där en skalär storhet är bevarad. Det kan vara elektrisk laddning (då är \vec{j} den elektriska strömtätheten), energi, kvantmekanisk sannolikhet osv.)

4.3 Stokes sats

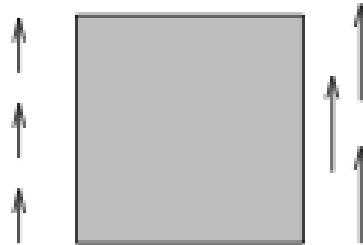
Vi går vidare med Stokes sats. Den lyder

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (4.9)$$

(cirkeln på integralen syftar på integrering över en sluten kurva eller yta, och är egentligen överflödig, eftersom en rand inte kan ha någon rand, dvs. $\partial\partial S = \emptyset$). Eftersom vi har att göra med en yta med en normal och en kurva med en riktning, måste de två riktningarna väljas rätt i förhållande till varandra. Konventionen är att man följer kurvan runt i positiv riktning och att då $d\vec{S}$ är riktad enligt "skruvregeln". Observera att det generella mönstret i (4.1) går igen.



Liksom vi gjorde en bild av vad divergens betyder, kan vi förstå rotation på ett liknande sätt. Att ett vektorfält har en rotation kan tolkas som att fältlinjerna ”vrider” sig, t.ex. som i figuren ovan. Rotationen är då riktad enligt skravregeln, dvs. ut ur papprets plan. Vi ser i figuren att både vänsterledet och högerledet i Stokes sats blir positiva, om ytans normal tas ut ur pappret och kurvan genomlöps moturs. Vi kommer för tillfället inte att ge något exempel på tillämpningar av Stokes sats, i stil med det vi gjorde för Gauss sats, utan väntar med det tills vi talar om elektromagnetism. Analogt med begreppet källtäthet kallas $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ virveltätheten för fältet \vec{F} .



Liksom var fallet med källtäthet/divergens tidigare, är bilden av virveltäthet/ rotation som ges av figuren ovan starkt förenklad, men fångar det väsentliga beteendet hos ett vektorfält vars rotation är nollskild. Fältlinjerna behöver inte ”gå runt” som i figuren. För en mer förfinad förståelse uppmuntras läsaren att undersöka t.ex. vektorfältet $\vec{F} = e^x \hat{y}$, och använda Stokes sats för något område och dess rand.

Vi skall förstås också repetera ett bevis av Stokes sats. Antag, liksom för beviset av Gauss sats, att ytan S kan skrivas $S = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z = g(x, y)\}$, så att S parametriseras av x och y . Högerledet i Stokes sats kan skrivas som en integral över ∂D

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy \right). \quad (4.10)$$

Låt oss definiera ett tvådimensionellt vektorfält \vec{G} enligt $(G_x, G_y) = (\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y})$. Då är

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} \vec{G} \cdot d\vec{r}. \quad (4.11)$$

Nu vill vi också uttrycka vänsterledet i Stokes sats i termer av fältet \vec{G} . Vi har

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = [-(\partial_y F_z - \partial_z F_y) \partial_x g - (\partial_z F_x - \partial_x F_z) \partial_y g + (\partial_x F_y - \partial_y F_x)] dx dy. \quad (4.12)$$

Komponenterna av \vec{G} är explicit

$$\begin{cases} G_x = F_x + F_z \partial_x g, \\ G_y = F_y + F_z \partial_y g, \end{cases} \quad (4.13)$$

vilket leder till derivatorna

$$\begin{aligned} \partial_y G_x &= \partial_y F_x + \partial_z F_x \partial_y g + F_z \partial_y \partial_x g + \partial_y F_z \partial_x g + \partial_z F_z \partial_y g \partial_x g, \\ \partial_x G_y &= \partial_x F_y + \partial_z F_y \partial_x g + F_z \partial_x \partial_y g + \partial_x F_z \partial_y g + \partial_z F_z \partial_x g \partial_y g. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Subtraktion av dessa, och jämförelse med ekv. (4.12) visar att

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = (\partial_x G_y - \partial_y G_x) dx dy. \quad (4.15)$$

För att slutligen bevisa Stokes sats behöver vi visa likheten

$$\int_D (\partial_x G_y - \partial_y G_x) dx dy = \oint_{\partial D} (G_x dx + G_y dy). \quad (4.16)$$

Detta kallas Greens formel, och den är känd från flervariabelanalysen. Vi kan också visa den genom att definiera ett nytt fält $\vec{H} = (H_x, H_y) = (G_y, -G_x)$. Vänsterledet är då $\int_D \vec{\nabla} \cdot \vec{H} dx dy$ och en liten räkning visar att högerledet är $\oint_{\partial D} (H_x dy - H_y dx) = \oint_{\partial D} \vec{H} \cdot \vec{n} ds$, där \vec{n} är normalvektorn till kurvan ∂D . Detta är helt enkelt Gauss sats i två dimensioner. ■

Strategin för att beräkna integraler med hjälp av Stokes sats är förstås lik den för Gauss sats, och kan t.ex. sammanfattas:

1. Bestäm kurvan C och rita en tydlig figur.
2. Undersök fältet \vec{F} . Beräkna $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Identifiera singulariteter och dela upp fältet i delfält. (Singulariteter kommer att hanteras i kapitel 6 och 7.)
3. Slut C och bestäm ytan S (denna yta är inte entydigt bestämd och kan ibland anpassas efter fältet \vec{F}).
4. Teckna Stokes sats.
5. Beräkna de ytintegraler som uppträder.
6. Kontrollera att delkurvorna och ytan S har konsistenta orienteringar.

Exempel

Beräkna integralen $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där

$$\vec{F} = [x^2 - a(y+z)] \hat{x} + (y^2 - az) \hat{y} + [z^2 - a(x+y)] \hat{z},$$

och Γ är den kurva som utgör skärningen mellan cylindern

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2, \quad z \geq 0,$$

och sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad R > 2a,$$

där a är en konstant med dimensionen längd.

Lösning: Vi kan först konstatera att skärningen mellan cylinder och sfär är en ellipsliknande kurva vars exakta form är något komplicerad att fastställa. Eftersom kurvan Γ är en sluten kurva är det lockande att använda Stokes sats, så vi beräknar rotationen

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \dots = a\hat{z}.$$

Alltså är rotationen av \vec{F} en rent vertikal vektor.

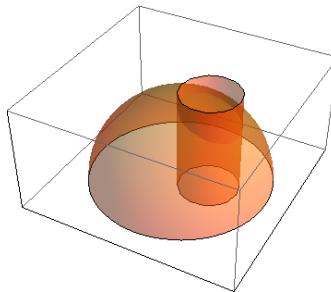
Vi kan nu använda Stokes sats, ekv. (4.9), med $\partial S = \Gamma$. Lägg märke till att ytan skall orienteras så att den följer högerhandsregeln. Detta betyder att om vi följer kurvan Γ moturs så skall normalen \hat{n} till S peka uppåt.

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = a \int_S \hat{z} \cdot \hat{n} dS.$$

Skalärprodukten i den sista integralen betyder att vi projicrar ner arean S på ett plan vinkelrätt mot \hat{z} , det vill säga på xy -planet. I detta plan är skärningen cylinderns tvärsnittsyta, en cirkel med radien a , och integralen blir cirkelarean πa^2 .

Alltså blir integralen till slut

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi a^3.$$



Exempel

En partikel påverkas av kraftfältet

$$\vec{F} = F_0 \left[\left(\frac{\pi y}{a} + \sin \frac{\pi z}{a} \right) \hat{x} + \frac{x}{a} \hat{y} + \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{a} \hat{z} \right].$$

Vilket arbete uträttar fältet då partikeln rör sig kring den cirkel som ges av skärningen mellan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ och $x = z$?

Lösning: För att få ut arbetet behöver vi beräkna integralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Vi börjar med att bestämma skärningskurvan C . $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ är en sfär med radien a och centrum i origo, medan $x = z$ är ett plan med normalvektorn $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$. Skärningen mellan de båda ytorna blir en cirkel med radien a . Den motsvarande cirkelskivan har också normalvektorn \hat{n} . Med det val som vi har gjort av normalvektorn, så gäller Stokes sats om partikeln rör sig moturs längs cirkeln.

Vi beräknar nu rotationen

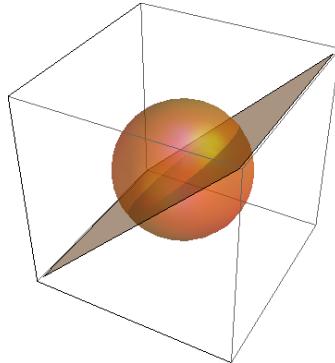
$$\vec{\nabla} \times F = \dots = F_0 \frac{1 - \pi}{a} \hat{z}.$$

Stokes sats ger oss sedan

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_S F_0 \frac{1-\pi}{a} \hat{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-\hat{x} + \hat{z}) dS = \frac{\pi(1-\pi)aF_0}{\sqrt{2}},$$

vilket är svaret.



En viktig observation är att man kan välja olika ytor S som alla har samma rand. Integralen i vänsterledet är alltså oberoende av vilken man väljer. Tag två ytor S_1 och S_2 med samma rand. Genom att sätta samman dem, och vända riktning på normalen till den ena får vi en sluten yta S med $\partial S = \emptyset$. Vi har alltså $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = (\int_{S_1} - \int_{S_2}) (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$. Eftersom ytan är sluten kan vi använda Gauss sats, som säger att detta skall vara lika med $\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) dV$ där $\partial V = S$. Integranden här är identiskt noll. Så vänsterledets i Stokes sats oberoende av vilken yta man väljer kan via Gauss sats ses som en konsekvens av identiteten $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$. Saker hänger ihop...

Från Gauss och Stokes satser kan man härleda en rad "varianter", som ofta kallas "Gauss-analoga" eller "Stokes-analoga" satser. Sådana satser kan fås genom att i integralsatserna låta vektorfältet vara $\vec{F} = \vec{a}f$ eller $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{v}$, där \vec{a} är en konstant vektor. Vi hänvisar till övningsuppgifterna 4.5.19, 4.5.22 och 5.5.10 för dessa följsatser.

Som en kuriositet kan man nämna att det schematiska uttrycket (4.1) faktiskt kan ges en helt precis mening. Om man vill lära sig det får man hitta en kurs i differentialgeometri. Med lämpliga definitioner av de

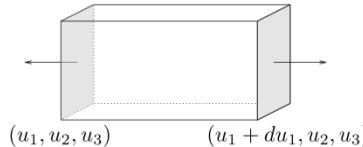
ingående storheterna och integralerna kan man skriva $\int_D d\Omega = \int_{\partial D} \Omega$. Alla integralsatser vi diskuterat (och många fler i annat antal dimensioner) är specialfall av denna “enkla” formel.

4.4 Divergens, rotation och Laplaceoperatorn i kroklinjiga koordinater

Vi skall nu gå tillbaka till uppgiften att konstruera differentialoperatrar, speciellt divergens och rotation, i kroklinjiga koordinatsystem. Alla konventioner här är som i kapitel 2. Där hade vi på ett ganska enkelt och direkt sätt fått fram ett uttryck för gradienten av ett skalärt fält, $\vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$. Att göra motsvarande räkning för divergens och rotation är mycket tråssligare (rekommenderas inte), så vi skall ta en genväg via Gauss och Stokes satser.

Om vi tillämpar Gauss sats på en mycket liten (infinitesimal) volym δV , så att $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ kan betraktas som konstant i volymen, ger Gauss sats ett alternativt, och koordinatoberoende, uttryck för divergensen,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\delta V} \int_{\partial \delta V} \vec{F} \cdot d\vec{S}. \quad (4.17)$$



Egentligen borde vi skriva ett gränsvärde, men vi kan tillåta oss att tänka att vi dividerar med differentieraler. Nu kan vi göra integralen i högerledet, och låta begränsningsytorna till δV vara koordinatytor för de kroklinjiga koordinaterna (u_1, u_2, u_3) . Börja med de två ytor (skuggade i figuren) som är koordinatytor för u_1 . Båda dessa ytor har arean $h_2 h_3 du_2 du_3$. Normalen för den yta som är belägen vid u_1 är riktad åt vänster, dvs. $-\vec{e}_1$, och normalen för den som är belägen vid $u_1 + du_1$ är riktad åt höger, dvs. \vec{e}_1 . Bidraget till integralen från dessa två ytor är då $(h_2 h_3 F_1)(u_1 + du_1, u_2, u_3)du_2 du_3 - (h_2 h_3 F_1)(u_1, u_2, u_3)du_2 du_3$. Detta kan skrivas (med definitionen av vanlig partiell derivata) som $\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 F_1) du_1 du_2 du_3$ (tänk på att såväl skalfaktorerna som komponen-

terna av \vec{F} kan bero på u_1). Sedan skall vi enligt ekv. (4.17) dividera med den lilla volymen, som vi vet är $h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$. Resultatet, så långt, är $\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 F_1)$. Till detta skall vi lägga bidraget från de andra två paren av begränsningsytor, u_2 - och u_3 -ytorna. Den räkningen behöver vi inte göra igen, det är bara att byta index på sakerna. Resultatet är

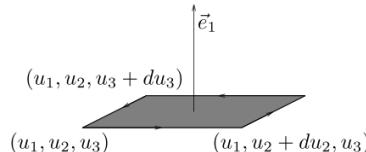
$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 F_3) \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} F_i \right).\end{aligned}\quad (4.18)$$

Det är förstås en nödvändig kontroll på att vi räknat rätt att det blir det vanliga uttrycket för Cartesiska koordinater. Då är alla $h_i = 1$, och vi har $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} F_i$, som det skall vara. En annan, litet mer avancerad, kontroll man kan göra är att testa att uttrycket inte ändras om man byter t.ex. u_1 mot $u'_1 = cu_1$, där c är en konstant. Då är $\frac{\partial}{\partial u'_1} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial u_1}$, och följaktligen $h'_1 = \frac{1}{c} h_1$. Det innebär att ett skalärt uttryck (som ju inte beror på val av koordinater) måste innehålla en faktor h_i^{-1} för varje $\frac{\partial}{\partial u_i}$. Detta stämmer för ekv. (4.18).

På ett liknande sätt använder man Stokes sats för att få ett koordinatoberoende uttryck för rotationen av ett vektorfält. Tag en liten (infinitesimal) yta δS med normal \hat{n} (när vi säger att ytan skall vara liten menar vi också att den är "platt", så att normalriktningen är konstant över ytan). Stokes sats säger då

$$\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \frac{1}{\delta S} \oint_{\partial \delta S} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (4.19)$$

där återigen vi har struntat i att skriva ut gränsvärdet, utan tänker på högerledet som en kvot av differentialelement.



För att få fram alla tre komponenter av $\vec{\nabla} \times F$ behöver vi alltså göra integraler över tre små ytor med normalvektorer \vec{e}_i . Börja då med att låta δS vara en u_1 -yta. På liknande sätt som när vi härledde divergensen

från Gauss sats är det förstås praktiskt att låta begränsningskurvan till δS bestå av koordinatlinjer för u_2 och u_3 . Vi börjar med att beräkna kurvintegralen längs de två sidor som är u_3 -linjer, dvs. den främre och bakre i figuren. På dessa är $d\vec{r} = \vec{e}_2 h_2 du_2$. Den bakre linjen går i negativ u_2 -riktnings och kommer därför med minustecken. Vi får bidraget till kurvintegralen $(h_2 F_2)(u_1, u_2, u_3)du_2 - (h_2 F_2)(u_1, u_2, u_3 + du_3)du_2 = -\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 F_2)du_2 du_3$. De andra två linjerna (till vänster och höger) ger på samma sätt $\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 F_3)du_2 du_3$. Vi lägger ihop dessa bidrag, och dividerar med $\delta S = h_2 h_3 du_2 du_3$ enligt ekv. (4.19), vilket ger $\vec{e}_1 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \frac{1}{h_2 h_3} [\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 F_2)]$. Sedan får man göra motsvarande räkningar för att få fram de andra komponenterna av $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Dessa behöver man inte göra explicit, utan kan få dem genom cyklisk permutation av indexen. Resultatet är då

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{e}_1 \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 F_2) \right] \\ &\quad + \vec{e}_2 \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 F_3) \right] \\ &\quad + \vec{e}_3 \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 F_1) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Slutligen kan man använda uttrycken för gradient och divergens för att få Laplaceoperatorn på en skalär i kroklinjiga koordinater:

$$\Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \right). \quad (4.21)$$

även detta uttryck reducerar till rätt uttryck för Laplaceoperatorn i Cartesiska koordinater, och är invariant under skalning av koordinaterna.

Kontrollera själv att de uttryck för divergens och rotation som ges i formelsamlingen i cylindriska och sfäriska koordinater stämmer. Det är bara att sätta in. Vi gör Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater. Skalfaktorerna är, enligt kapitel 2, $h_r = 1$, $h_\theta = r$ och $h_\varphi = r \sin \theta$. Inställning i ekv. (4.21) ger

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \quad (4.22)\end{aligned}$$

En intressant sak med ett uttryck som (4.22) är att man kan betrakta funktioner som bara beror på θ och φ , inte på r . Sådana funktioner är funktioner på en sfär S^2 , som inte är ett platt tvådimensionellt rum. Man kan alltså komma fram till hur Laplaceoperatorn på S^2 ser ut,

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (4.23)$$

tack vare att sfären kan bättas in i \mathbb{R}^3 . Denna operator har mycket tillämpningar, t.ex. dyker den upp i kvantmekaniska system med sfärisk symmetri såsom väteatomen.

Exempel

Härled uttryck för divergens och rotation av ett vektorfält samt Laplaceoperatorn av ett skalärt fält i de elliptiska cylinderkoordinaterna som definierats i ekvation (2.7).

Lösning: Med hjälp av ekv. (4.18) får man divergensen,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{a(\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} A_u \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} A_v \right) \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Insättning i ekv. (4.20) ger rotationen,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{a^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v)} \\ &\quad \times \begin{vmatrix} a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \hat{u} & a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \hat{v} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} A_u & a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} A_v & A_z \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Laplaceoperatorn av en skalär ges slutligen av ekv. (4.21),

$$\Delta\phi = \dots = \frac{1}{a^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Vi har fortfarande inte skrivit ned hur Laplaceoperatorn verkar på en vektor i kroklinjiga koordinater. Detta dröjer till kapitel 5. Utan att gå händelserna för mycket i förväg kan det ändå vara på sin plats att varsko att den *inte* ges av uttrycket i ekv. (4.21) verkande på var och en av komponenterna, trots att motsvarande är sant i Cartesiska koordinater. Detta beror på att basvektorerna inte är konstanta.

4.5 Uppgifter

4.5.1

Kontrollera att de två leden i Gauss sats överensstämmer genom att explicit räkna ut dem då V är kuben $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, och fältet ges av $\vec{F} = ax\hat{x} + by\hat{y} + cz\hat{z}$.

4.5.2

Kontrollera att de två leden i Stokes sats överensstämmer genom att explicit räkna ut dem då S är kvadraten $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0$, och fältet ges av $\vec{F} = ay\hat{x} + bx\hat{y}$.

4.5.3

Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = \frac{F_0}{a}(-y, x, 0)$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = (b \cos t, c \sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$.

Svar. $\frac{2\pi bc}{a} F_0$

4.5.4

Härled uttrycken för divergens, rotation och Laplaceoperatorn i cylindriska och sfäriska koordinater!

4.5.5

Det skalära fältet ϕ är givet i cylinderkoordinater:

$$\phi(\varrho, \varphi, z) = \phi_0 \left[2\varphi + \exp\left(-3\frac{z^2}{a^2}\right) - 5\frac{\varrho}{a} \sin \varphi \right].$$

Beräkna $\Delta\phi(\varrho, \varphi, z)$.

Svar. $\Delta\phi = \frac{6\phi_0}{a^2} \left(\frac{6z^2}{a^2} - 1 \right) \exp\left(-3\frac{z^2}{a^2}\right)$

4.5.6

Vektorfältet \vec{B} är givet i sfäriska koordinater:

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = 2r \cos^2 \theta \hat{r} - r \sin 2\theta \hat{\theta} + r \sin \theta \hat{\varphi}.$$

Beräkna $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ och $\vec{\nabla} \times \vec{B}$.

Svar. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 2$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 2\hat{z}$.

4.5.7

Vektorfältet \vec{F} är givet i sfäriska koordinater:

$$\vec{F}(r, \theta, \varphi) = F_0 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left(2 \sin \theta \cos \varphi \hat{r} - \cos \theta \cos \varphi \hat{\theta} + \sin \varphi \hat{\varphi} \right).$$

Beräkna $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ och $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

Svar. $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$ och $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

4.5.8

Beräkna $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, där

$$\vec{F} = \frac{2u^2v\hat{u} - uv^2\hat{v}}{\sqrt{4u^2 + v^2}}$$

är givet i det kroklinjiga koordinatsystemet från uppgift 2.3.22.

Svar. \hat{z}

4.5.9

Beräkna Δf där $f = uvw$ är givet i det kroklinjiga koordinatsystemet från uppgift 2.3.23.

Svar. $\Delta f = 0$

4.5.10

Bestäm Laplaceoperatorn i systemet från uppgift 2.3.25. Föreslå ett fysikalskt problem till vilket detta koordinatsystem borde kunna användas.

Svar. $\Delta = \frac{1}{a^2(1+2e^u \cos v + e^{2u})} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2}$.

Som fysikalskt problem kan man tänka sig fältet kring kanten av en plattkondensator.

4.5.11

Bestäm Laplaceoperatorn på ett skalärt fält $\phi(\alpha, \beta, \gamma)$ uttryckt i koordinaterna från uppgift 2.3.27.

Svar. $\Delta \phi = \frac{1}{4c^2(\alpha^2 + \beta^2)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma^2}$

4.5.12

Uttryck divergensen av ett vektorfält $\vec{A}(u_1, u_2, u_3)$, där u_i är koordinaterna i uppgift 2.3.26, i derivator av fältets komponenter längs dessa basvektorer. Svaret ska endast innehålla koordinaterna u_1, u_2 och u_3 .

Svar. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 2\sqrt{u_1^2 + 4u_2^2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{A_{u_1}}{(u_1^2 + 4u_2^2)^{1/4}} + \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{A_{u_2}}{2(u_1^2 + 4u_2^2)^{1/4}} + \frac{\partial}{\partial u_3} \frac{A_{u_3}}{2(u_1^2 + 4u_2^2)^{1/4}} \right)$

4.5.13

De kroklinjiga koordinaterna u, v och w är definierade genom

$$\begin{aligned} x &= a \cosh u \cos v, \\ y &= a \sinh u \sin v, \\ z &= w. \end{aligned}$$

Hitta den lösning till ekvationen $\Delta\Phi = 0$ som enbart beror på u , och som antar värdena 0 och 2 på ellipserna $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = \frac{a^2}{16}$ respektive $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \frac{a^2}{9}$, med $u \geq 0$, $0 \leq v < 2\pi$.

Svar. $\Phi = \frac{2}{\log 3 - \log 2} (u - \log 2)$

4.5.14

Vektorfältet $\vec{F} = (x, -y^2, 1)$ och cylinderytan S sammansatt av mantelytan S_1 , bottenytan S_2 och locket S_3 ,

$$\begin{aligned} S_1 : \quad &x^2 + y^2 = a^2, \quad -b < z < b \\ S_2 : \quad &z = -b, \quad x^2 + y^2 < a^2 \\ S_3 : \quad &z = b, \quad x^2 + y^2 < a^2 \end{aligned}$$

är givna. Beräkna normalytintegralen av \vec{F} över S .

Ledning: $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 1 - 2y$. $-2y$ är udda vid spegling i planet $y = 0$. Volymen av cylindern är $2\pi a^2 b$.

Svar. $2\pi a^2 b$

4.5.15

Vektorfältet $\vec{F} = \vec{r} + \hat{z}$ och ytan S , som är en del av en rotationsparaboloid, $S : x^2 + y^2 = 1 - 2z$, $0 < z < \frac{1}{2}$, $x > 0$, är givna. Beräkna normalytintegralen av \vec{F} över S .

Ledning: \hat{z} ger bidraget $\frac{\pi}{2}$. \vec{r} ger bidraget $\frac{3\pi}{8}$. $V = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2} (1 - 2z) dz = \frac{\pi}{8}$.

Svar. $\pm \frac{7\pi}{8}$

4.5.16

Beräkna integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = (xz, yz, z^2)$ och S är den del av enhetssfären som ligger inom konområdet $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z > 0$ och normalvektorn till S är uppåtriktad.

Svar. $\frac{\pi}{2}$

4.5.17

Låt S vara ytan $y^2 + z^2 = 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $z \geq 0$ med uppåtriktad normalvektor. Beräkna $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F} = (x, x^2yz^2, x^2y^2z)$.

Svar. $\frac{\pi}{6}$

4.5.18

En partikel påverkas av kraftfältet

$$\vec{F} = F_0 \left[\left(\frac{\pi y}{a} + \sin \frac{\pi z}{a} \right) \hat{x} + \frac{x}{a} \hat{y} + \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{a} \hat{z} \right].$$

Vilket arbete uträttar fältet då partikeln beskriver cirkeln som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ och $x = z$?

Svar. $\pm \frac{\pi a}{\sqrt{2}} (\pi - 1) F_0$

4.5.19

Bevisa de Gauss-analoga satserna

$$\int_V \vec{\nabla} f dV = \oint_{\partial V} f d\vec{S}$$

och

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{v} dV = \oint_{\partial V} d\vec{S} \times \vec{v}.$$

4.5.20

Visa att $\oint_{\partial V} d\vec{S} = 0$.

4.5.21

Visa att $V = \frac{1}{3} \oint_{\partial V} \vec{r} \cdot d\vec{S}$. Bekräfta detta för en sfär.

4.5.22

Bevisa den Stokes-analoga satsen

$$\int_S d\vec{S} \times \vec{\nabla} f = \oint_{\partial S} f d\vec{r}.$$

4.5.23

Vektorfältet \vec{F} ges av potentialen $\phi(x, y, z) = 6xyz + 2xy$, det vill säga $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$. Beräkna integralen $\oint_S \vec{F} \times d\vec{S}$ då S är rotationsellipsoiden $S : x^2 + y^2 + (3z - 1)^2 = 1$.

Ledning: \vec{F} är överallt kontinuerligt deriverbar. $\oint_S \vec{F} \times d\vec{S} = - \int_V \vec{\nabla} \times \vec{F} dV$, men $\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$.

Svar. 0

4.5.24

Det skalära fältet $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ och sfären $S : x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$ är givna. Beräkna ytintegralen $\oint_S \phi d\vec{S}$.

Ledning: $\oint_S \phi d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \phi dV = 2 \int_V (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) dV$ Byt variabel. $z_1 = z - 3$, så att $x^2 + y^2 + z_1^2 = 4$ och beräkna $\int_V (x\hat{x} + y\hat{y} + (z_1 + 3)\hat{z}) dV$. Sfären går över i sig själv vid speglingar $x \rightarrow -x$ osv. $\oint_S \phi d\vec{S} = 6V\hat{z}$.

Svar. $64\pi\hat{z}$

4.5.25

Trycket $p(\vec{r})$ i en kompressibel vätska kan skrivas som $p(\vec{r}) = p_0 - \rho gz + kz^2$ för $z < 0$, där p_0 , ρ , g och k är konstanter. En kropp nedsänkt i vatten upptar området $V : 4(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 + 4(\frac{z}{a})^2 + 32\frac{z}{a} + 48 < 0$, där a är en konstant. Beräkna den totala tryckkraften $\vec{F} = -\int_S pd\vec{S}$ på begränsningsytan till kroppen.

Svar. $\frac{64}{3}\pi a^3 (\rho g + 8ka) \hat{z}$

4.5.26

Vektorfältet $\vec{F}(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$, och ytorna

$$\begin{aligned} S_1 : \quad & 4\rho^2 + z^2 = 20, \\ S_2 : \quad & \arctan \frac{z}{x+y} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

är givna. Bestäm kurvintegralen $\oint_C \vec{F} \times d\vec{r}$ runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2 .

Svar. $\pm\sqrt{10}\pi(2\sqrt{3}-1, 3\sqrt{3}, \sqrt{3}-2)$

4.5.27

Beräkna integralen $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där

$$\vec{F} = [x^2 - a(y+z)]\hat{x} + (y^2 - az)\hat{y} + [z^2 - a(x+y)]\hat{z},$$

och Γ är den kurva som utgör skärningslinjen mellan cylindern $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, $z \geq 0$, och sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 2a$, där a är en konstant med dimensionen längd.

Svar. πa^3

4.5.28

En kurva C med parameterframställningen $\vec{r} = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, b\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, och ett vektorfält $\vec{B} = B_0 \left(\frac{x}{a}\right)^3 \hat{z}$ är givna. Beräkna integralen $\vec{F} = \int_C d\vec{r} \times \vec{B}$. ($I\vec{F}$ är kraften på en strömgrenomfluten spolar med strömmen I och formen C i magnetfältet \vec{B} .)

Svar. $\frac{3\pi}{4} B_0 a \hat{x}$

4.5.29

Vektorfältet $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{a}(y-x, x-y, 2z)$ och ytorna $S_1 : 4x^2 + (y-z)^2 = 16a^2$, $S_2 : z = a$ är givna. Bestäm integralen $\oint_C \vec{F} \times d\vec{r}$ runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2 .

Svar. $\pm 16\pi a\hat{z}$

4.5.30

Skärningskurvan C mellan ytorna S_1 och S_2 , $S_1 : x^2 + 4y^2 + z^2 = 4a^2$, $y < 0$, $S_2 : x + 2y = 0$ och det skalära fältet $\phi(x, y, z) = a^2 + x^2 + 4xy + 4y^2$ är givna. Bestäm integralen $\int_C \phi d\vec{r}$ om C genomlöps från punkten $(0, 0, -2a)$ till punkten $(0, 0, 2a)$.

Svar. $4a^3\hat{z}$

4.5.31

(*) I kvantmekanik har man ett komplext skalärt fält ψ som lyder Schrödingerekvationen

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi,$$

där $V(\vec{r})$ är någon (reell) potential. Sannolikhetstätheten är $\rho = |\psi|^2$ och sannolikhetsströmtätheten $\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\bar{\psi} \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \bar{\psi})$. Visa att sannolikhet är bevarad, dvs. att ρ och \vec{j} uppfyller en kontinuitetsekvation.

5.1 Indexnotation

Det vi nu skall göra är egentligen inget nytt, utan som rubriken antyder bara en fråga om notation. Vi skall skriva vektorer och vektoroperationer på ett annat sätt än tidigare. Formalismen är helt ekvivalent med sådant ni redan kan, men visar sig som vi snart skall se vara ganska kraftfull.

Normalt skriver vi en vektor som \vec{A} (eller \mathbf{A} , men vi har valt att använda en pil över bokstaven för vektorer). Detta skrivsätt är speciellt trevligt, då vektorstorheten inte beror på någon speciell bas. Vektorn \vec{A} är densamma i alla koordinatsystem, Cartesiska såväl som kroklinjiga. I någon given bas kan dess komponenter skrivas ut: $\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \vec{e}_i$.

Det vi nu skall göra kan vid en första åsyn te sig som ett steg tillbaka. Istället för att använda en koordinatoberoende notation skall vi använda komponenterna till \vec{A} i ett Cartesiskt koordinatsystem. Så när vi talar om vektorn \vec{A} skall vi skriva

$$A_i \tag{5.1}$$

vilket vi kan tolka som en lista över komponenterna, alltså $\{A_i\}_{i=1}^3$. Indexet i kallas ett ”fritt index”, eftersom det kan ta värdena $i = 1, 2, 3$ (generaliseringen till annat antal dimensioner är uppenbar).

5.2 Produkter av vektorer

Vi skall nu titta på skalärprodukt och kryssprodukt i indexnotation. Detta är ju lätt, eftersom vi sedan länge vet uttrycken för dem i termer av Cartesiska komponenter. Skalärprodukten av två vektorer \vec{A} och \vec{B} är $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i$. För att göra notationen mer kompakt inför vi nu ”Einstiens summationskonvention”, som säger att vi inte behöver skriva ut summatecknet, och att summation är underförstådd så snart ett index förekommer två gånger. Med dessa skrivregler har vi då

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i. \quad (5.2)$$

Det här uttrycket för skalärprodukten gäller i godtyckligt antal dimensioner¹. Resultatet av skalärprodukten är förstås en skalär. Indexen i i ekv. (5.2) är *inte* fria index, utan summationsindex, eller kontraherade index.

En matris representeras av sina matriselement. Det första indexet är rad- och det andra kolumnindex. Matrismultiplikation $MN = P$ skrivs som

$$M_{ik} N_{kj} = P_{ij}. \quad (5.3)$$

Spåret av en matris, dvs. summan av diagonalelementen är $\text{Tr}[M] = M_{ii}$.

Exempel

Vi har redan sett Kroneckers delta, δ_{ij} , som definieras av

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Notera att detta helt enkelt är matriselementen av enhetsmatrisen.

Betrakta uttrycket $\delta_{ij} A_j$. Här är indexet j repeterat och därför ett summationsindex, och uttrycket skall utläsas $\sum_{j=1}^3 \delta_{ij} A_j = A_i$, dvs. helt enkelt multiplikation av vektorn \vec{A} med enhetsmatrisen.

Nu till kryssprodukt. Låt $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$. Komponentvis gäller $C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2$ medan de andra komponenterna ges av cykliska permuteringar av indexen. Vi inför nu objektet ε_{ijk} som definieras av

¹ Att vi skriver lägre index har ingen betydelse, om man vill kan man t.ex. skriva $A_i B^i$. Först när man sysslar med vektorer/tensorer i icke-Cartesiska system behöver man göra åtskillnad på index uppe och nere. Detta gäller t.ex. i speciell relativitetsteori.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk \text{ jämn permutation av } 123, \text{ dvs } 123, 231, 312 \\ -1, & ijk \text{ udda permutation av } 123, \text{ dvs } 132, 213, 321 \\ 0, & \text{annars, dvs. om minst två index tar samma värde.} \end{cases} \quad (5.4)$$

ε_{ijk} kallas "ε-tensorn", eller "Levi–Civita-tensorn". Vi har inte riktigt definierat vad en tensor är ännu. Det kommer senare, och är inte speciellt dramatiskt. För tillfället kan vi bara tänka på det som ett objekt som har ett antal index, alltså en naturlig generalisering av vektor- och matrisbegreppen. Definitionen (5.4) gör att ε_{ijk} har egenskapen att den byter tecken om man byter plats på två index, vilka som helst. Man säger att den är fullständigt antisymmetrisk.

Eftersom ε_{ijk} har tre index, kan vi kontrahera två av dem med index på vektorer, och alltså bilda $C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$. Notera alltså att högerledet har två summationsindex (jk) och ett fritt index (i). Med hjälp av definitionen (5.4) kan vi räkna ut t.ex. C_1 , och får resultatet $C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2$, dvs. samma som första komponenten av $\vec{A} \times \vec{B}$. Detsamma gäller de andra komponenterna. Kryssprodukten skrivs alltså

$$[\vec{A} \times \vec{B}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k. \quad (5.5)$$

Kryssprodukten är specifik för tre dimensioner, just för att ε-tensorn har tre index i tre dimensioner. Motsvarande objekt i D dimensioner har D index: $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_D}$.

5.3 Algebraiska identiteter

Indexnotation kan (bl.a.) hjälpa oss att finna identiteter för algebraiska uttryck med skalär- och kryssprodukter och för uttryck med derivator. Vi skall också se (framför allt i avsnittet om kontinuumsmekanik) att den är till hjälp både för modellering och beräkning. Denna notation är alltså väldigt kraftfull.

Exempel

Skalär trippelprodukt, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ kan skrivas $A_i \varepsilon_{ijk} B_j C_k = \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$ med indexnotation. Notera att vi kan byta plats på faktorerna, men vi kan inte byta plats på indexen. Detta uttryck är bättre än det första, eftersom det ger samma roll till alla tre

vektorerna, och antisymmetrin vid utbyte av två av dem syns tydligt.

Studera t.ex. $\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = \varepsilon_{ijk} B_i A_j C_k = \varepsilon_{ijk} A_j B_i C_k$. Detta är likt uttrycket ovan, men har en annan ordning på indexen. Vi byter namn på $i \Leftrightarrow j$ vilket ger $\varepsilon_{jik} A_i B_j C_k = -\varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$, där vi utnyttjade antisymmetrin hos ε i det sista steget. Alltså har vi visat att $\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = -\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

Antag att vi har uttrycket $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$. Hur kan det förenklas/skrivas om? Utskrivet i indexnotation blir det $\varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{klm} B_l C_m$. Kan vi förenkla produkten $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}$? Man övertygar sig snabbt om att paren ij och lm måste vara lika. Antingen är $i = l$, $j = m$ eller $i = m$, $j = l$. I det första fallet är resultatet 1, i det andra -1 . Man får

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (5.6)$$

(jämför de två ledens med hjälp av definitionerna av δ och ε !). Insättning ger identiteten

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{klm} B_l C_m &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= A_j B_i C_j - A_j B_j C_i, \end{aligned} \quad (5.7)$$

och alltså

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}. \quad (5.8)$$

Gå igenom räkningen som leder fram till ekv. (5.8). Om man kan följa stegen har man erövrat en bra del av handhavandet av tensorer. Ett bra tips för att träna ögat och hjärnan att titta på uttryck som innehåller många index, är att först se efter vilka som är summationsindex och vilka som är fria index. Det är ju bara de fria indexen som "finns kvar", och avgör vilken sorts tensor man har. Passa också på att härleda $\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}$ och $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$.

Flera identiteter kan förstås härledas på liknande sätt.

5.4 Identiteter för derivator

Vi skall nu avsluta med att betrakta derivator i indexnotation. Vi har då vektoroperatorn $\vec{\nabla}$ med komponenterna $\frac{\partial}{\partial x_i}$, som vi ofta skriver ∂_i . Gradienten av ett skalärt fält skrivs $[\vec{\nabla}\phi]_i = \partial_i \phi$. Divergensen av

ett vektorfält är $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_i F_i$ och rotationen $[\vec{\nabla} \times \vec{F}]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$. Laplaceoperatorn verkande på ett skalärt fält är $\Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \partial_i \partial_i \phi$.

Man kan härleda en mängd identiteter för de olika typerna av derivata verkande på produkter av fält, och för produkter av derivator verkande på ett fält. Vi skall inte vara uttömmande här. De man behöver för vardagsbruk finns i formelsamlingen. Tag gärna och härled ett par av dem. Bland de enklare är $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$ och $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$. Båda dessa identiteter kommer från antisymmetrin hos ε_{ijk} . Försök gärna att visa dem själv innan du tittar på bevisen i exemplen nedan

Exempel

Härled följande två viktiga samband

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0 \quad (5.9)$$

och

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \quad (5.10)$$

Bevis av ekvation (5.9).

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f$$

Notera att derivatorna *opererar* på fältet f . En viktig poäng är därför att de sista två faktorerna *inte* får byta plats eftersom $\partial_k f \neq f \partial_k$. Vi studerar först $i = 1$

ijk	∂_j	∂_k	ε_{ijk}
123	2	3	+1
132	3	2	-1
övriga			0

dvs det finns bara två nollskilda termer. Detta betyder att $[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f]_1 = (\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2) f = 0$. Det blir precis likadant för $i = 2$ och $i = 3$.

Bevis av ekvation (5.10).

$$[\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})]_i = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k$$

Notera att $\partial_i \partial_j F_k = \partial_j \partial_i F_k$, vilket betyder att dessa två faktorer kan byta plats. Summan ovan har 27 termer, men enbart sex nollskilda

ijk	term
123	$\partial_1 \partial_2 F_3$
231	$\partial_2 \partial_3 F_1$
312	$\partial_3 \partial_1 F_2$
132	$-\partial_1 \partial_3 F_2$
213	$-\partial_2 \partial_1 F_3$
321	$-\partial_3 \partial_2 F_1$
övriga	0

och eftersom dessa tar ut varandra parvis blir summan noll.

Andra användbara identiteter är

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{A}, \\ \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Här skall vi tolka $\vec{A} \cdot \vec{\nabla}$ som

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}.\tag{5.12}$$

Som en konsekvens av ekv. (5.8) får vi en identitet för rotationen av rotationen av ett vektorfält: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$, som ger ett uttryck för Laplaceoperatorn på ett vektorfält:

$$\Delta \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}).\tag{5.13}$$

eller, ekvivalent, operatorlikheten (verkande på en vektor)

$$\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}.\tag{5.14}$$

Vi minns att Laplaceoperatorn på en vektor i Cartesiska koordinater fås genom att låta Laplaceoperatorn $\Delta = \partial_i \partial_i$ verka på var och en av komponenterna av vektorn. I kroklinjiga koordinater är detta inte längre sant (beroende på att basvektorerna inte är konstanta). Istället måste man använda ekv. (5.13). Den som är hågad kan räkna ut vad det ger i termer av komponenter och skalfaktorer i kroklinjiga koordinater,

och verifiera att resultatet inte är komponentvis verkan av den skalära Laplaceoperatorn. Annars gör man det när det behövs.

Den som en vacker dag bestämmer sig för att studera differentialgeometri kommer att se att ekv. (5.13), trots att den verkar vara en krånglig omskrivning av Laplaceoperatorn på en vektor, i själva verket utgör den mest naturliga definitionen av den.

5.5 Uppgifter

5.5.1

Visa att en fullständigt antisymmetrisk tensor med D index i D dimensioner är proportionell mot ε -tensorn. Börja gärna i två dimensioner, där ε_{ij} är en matris.

5.5.2

Bevisa identiteterna i ekv. (5.11)!

5.5.3

Den antisymmetriska tensorn A_{ij} konstrueras från en vektor \vec{a} enligt $A_{ij} = k\varepsilon_{ijk}a_k$, där k är en konstant. För vilka värden på k gäller $A_{ij}A_{ij} = |\vec{a}|^2$?

Svar. $k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

5.5.4

Gå igenom räkningen som leder fram till ekv. (5.8). Härled också $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}$ och $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

5.5.5

Ge ett alternativt uttryck, utan kryssprodukter, för $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$.

Svar. $(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

5.5.6

A_{ij} är en symmetrisk tensor. Beräkna vektorn $v_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\varepsilon_{knP}A_{lm}A_{nP}$.

Svar. $v_i = 0$

5.5.7

Beräkna $\Delta \vec{B}$, där \vec{B} är vektorfältet från uppgift 4.5.6.

Svar. $\Delta \vec{B} = 0$

5.5.8

Beräkna $\vec{\nabla} \cdot \{\vec{r} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{r})]\}$

Svar. 0

5.5.9

Beräkna vektorfältet $\vec{B} = \vec{r} \times \{\vec{\nabla} \times [\vec{r} \times (\vec{A} \times \vec{r})]\}$ där \vec{A} är en konstant vektor och \vec{r} är ortvektorn.

Svar. $3(\vec{A} \cdot \vec{r})\vec{r} - 3r^2\vec{A}$

5.5.10

Bevisa den Stokes-analoga satsen

$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \times \vec{v} = \int_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \times \vec{v}.$$

Visa att ett val av ytan S i xy -planet reproducerar Greens formel.

5.5.11

Visa att arean av en plan yta omsluten av en kurva C är

$$A = \frac{1}{2} \left| \oint_C \vec{r} \times d\vec{r} \right|.$$

5.5.12

Det skalära fältet ϕ är givet,

$$\phi(\vec{r}) = [\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{r})]^2 + \vec{r} \cdot [\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{r})],$$

där \vec{A} är en konstant vektor och \vec{r} är ortvektorn. Bestäm och beskriv dess nivåytor.

Svar. $\phi(\vec{r}) = C \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{r} = C - 4|\vec{A}|^2 \Rightarrow$ plan med \vec{A} som normal.

5.5.13

Om \vec{r} är ortvektorn och \vec{A} och \vec{B} är konstanta vektorer, förenkla så långt som möjligt uttrycket

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times (\vec{r} \times \vec{B})].$$

Svar. $2\vec{A} \cdot \vec{B}$

5.5.14

M är matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vad är värdet av $\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}M_{il}M_{jm}M_{kn}$?

Svar. 4

5.5.15

Matriserna \mathbf{X} , \mathbf{Y} och \mathbf{Z} ges av

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beräkna $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}X_{il}Y_{jm}Z_{kn}$.

Svar. 14

5.5.16

Härled uttryck för Laplaceoperatorn verkande på en vektor i cylindriska och sfäriska koordinater.

5.5.17

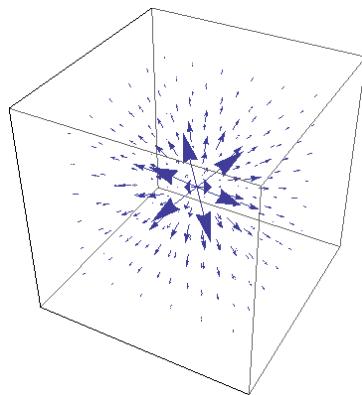
(*)Härled ett allmänt uttryck för Laplaceoperatorn verkande på en vektor i kroklinjiga koordinater.

I detta kapitel skall vi dels gå igenom några typer av singulära käll- och virvelfördelningar, dels undersöka hur man, givet en källfördelning kan bestämma potential och fältstyrka. De fält man bör kunna identifiera utantill är fälten från en punktkälla, en linjekälla och en virveltråd.

6.1 Fält från punktkällor

Betrakta vektorfältet

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}. \quad (6.1)$$



Vi kallar detta fältet från en punktkälla med styrkan q . Med lämplig tolkning av konstanten q kan detta t.ex. föreställa det elektriska fältet från en laddning i origo, eller gravitationsfältet från en massa i origo. Det kan också representera flödet av någon substans (vätska/gas) med konstant densitet som ”skapas” i origo och flödar radellt utåt. Detta fält är rotationsfritt, vilket kan verifieras direkt enligt

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2)$$

Rotationsfriheten är också en direkt följd av att \vec{F} kan erhållas från en skalär potential

$$\phi = \frac{q}{4\pi r} \quad (6.3)$$

enligt $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$. (Mer om fält och potentialer följer i kapitel 8.)

Vektorfältet \vec{F} är också divergensfritt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{q}{4\pi r^2} \right) = 0, \quad r > 0. \quad (6.4)$$

Trots frånvaron av divergens får vi ett resultat skilt från noll om vi beräknar normalytintegralen av \vec{F} över en yta som omsluter origo. Detta görs enklast genom att utföra integralen över en sfär med radien a

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi a^2} \cdot 4\pi a^2 = q. \quad (6.5)$$

Resultatet är oberoende av sfärens radie. Vill vi beräkna integralen över en yta med annan form (som fortfarande omsluter origo) kan vi tillämpa Gauss sats på volymen mellan ytan och en sfär. Eftersom fältet är divergensfritt fås värdet q för alla ytor som omsluter origo. Om, å andra sidan, ytan inte omsluter origo, kan Gauss sats tillämpas direkt för att visa att integralen är noll. Vi har

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} q, & O \in V, \\ 0, & O \notin V. \end{cases} \quad (6.6)$$

En viktig slutsats är att det vore fel att naivt tillämpa Gauss sats på en volym innehållande origo, trots att fältet ser divergensfritt ut. Det beror på att det är singulärt där. Med vår nuvarande kunskap får vi

acceptera att vi måste undvika punkter där fält är singulära när vi använder integralsatser.

En mer förfinad version av ekv. (6.6) för normalytintegralen av fältet från en punktkälla över en godtycklig yta S är

$$\int_S \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \Omega, \quad (6.7)$$

där Ω är den rymdvinkel ytan S tar upp sedd från origo (bevisa gärna detta!). Rymdvinkeln räknas här som positiv då normalen för S är utåtriktad och negativ då den är inåtriktad.

En fysikinspirerad tolkning av fältet från en punktkälla är att det sitter något i origo (eller i den punkt där fältet är singulärt) från vilket fältet "flödar". Detta är förstås precis vad som åsyftas med termen "punktkälla". För närvärande kan vi inte skriva detta som ett konkret matematiskt uttryck för $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, och därmed inte heller använda Gauss sats. I kapitel 7 skall vi visa hur dessa brister kan åtgärdas genom att införa s.k. deltafunktioner.

För en allmän fältkonfiguration kan vi definiera att *Fältet \vec{F} har en punktkälla med styrkan q i punkten $\vec{r} = \vec{r}_0$ om*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\vec{r} - \vec{r}_0| = \epsilon} \vec{F} \cdot d\vec{S} = q. \quad (6.8)$$

Ovanstående gäller förstås i tre dimensioner. I två dimensioner har man för fältstyrka och potential från en punktkälla:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{q}{2\pi\varrho} \hat{\varrho}, \\ \phi &= -\frac{q}{2\pi} \log \frac{\varrho}{a}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

där \log är den naturliga logaritmen, och a en godtycklig konstant med dimension längd, som har införts för att man skall ha ett dimensionslöst uttryck i logaritmen (olika val av a ger potentialer som skiljer sig med en konstant).

I en dimension gäller

$$F = \frac{q}{2} \text{sign}(x), \quad (6.10)$$

$$\phi = -\frac{q}{2} |x| \quad (6.11)$$

(tänk på att en sfär S^0 i en dimension består av punkterna $x = \pm a$, och att ”normalytintegralen” över denna sfär av en funktion $f(x)$ är $f(a) - f(-a)$).

I godtycklig dimension $D \geq 3$ kan man skriva

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{q}{\text{Area}(S^{D-1})r^{D-1}}\hat{r}, \\ \phi &= \frac{q}{(D-2)\text{Area}(S^{D-1})r^{D-2}},\end{aligned}\tag{6.12}$$

där $\text{Area}(S^{D-1}) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$ är arean av enhetssfären i D dimensioner.

Exempel

Beräkna integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är ytan $\rho = a - z$, $0 \leq z \leq a$, med en normal som pekar uppåt, och fältet ges av

$$\vec{F} = F_0 \left[\left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{r^2 \cos^3 \theta}{a^2} \right) \hat{r} - \frac{r^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{a^2} \hat{\theta} \right],$$

där F_0 och a är konstanter.

Lösning: Vi börjar med att studera ytan S som är en kon med spetsen i $z = a$. Konen har sin öppna bottentyta vid $z = 0$.

Om vi tittar på fältet, så ser vi genast att det har en punktkälla i origo. För att tolka de övriga termerna så skriver vi om fältet som

$$\vec{F} = F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{r} + F_0 \frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}).$$

Uttrycket inom parentesen är basvektorn \hat{z} , och $r \cos \theta = z$. Vi kan därför dela upp fältet i två delar, en del som vi skriver i sfäriska koordinater, och som är singulär, och en andra del som vi skriver i Cartesiska koordinater:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{r} + F_0 \frac{z^2}{a^2} \hat{z}.$$

Vi kan behandla normalytintegralerna av \vec{F}_1 och \vec{F}_2 separat. \vec{F}_1 är fältet från en punktkälla i origo med styrkan $4\pi F_0 a^2$, och ytan S tar upp rymdvinkeln 2π , så $\int_S \vec{F}_1 \cdot d\vec{S} = 2\pi F_0 a^2$.

Divergensen av \vec{F}_2 är enkel, $\nabla \cdot \vec{F}_2 = \frac{2F_0z}{a^2}$. För att använda Gauss sats behöver vi sluta konen, vilket vi gör genom att lägga till en cirkelskiva, S_1 , med ytterradien a och normalvektorn $-\hat{z}$ i xy -planet. \vec{F}_2 är noll på cirkelskivan, där $z = 0$, så Gauss sats ger

$$\int_S \vec{F}_2 \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}_2 dV = \frac{2F_0}{a^2} \int_V z dV,$$

där V är volymen mellan konen och cirkelskivan. Den sista integralen görs enkelt. Arean av cirkelskivan på höjden z är $\pi(a-z)^2$, så

$$\int_V z dV = \pi \int_0^a z(a-z)^2 dz = \dots = \frac{\pi a^4}{12}.$$

Den totala integralen blir $2\pi F_0 a^2 + \frac{1}{6}\pi F_0 a^2 = \frac{13}{6}\pi F_0 a^2$.

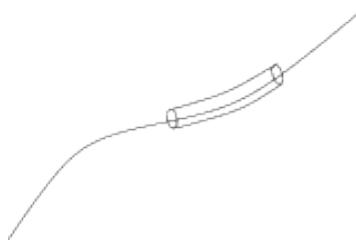
6.2 Fält från linjekällor och ytkällor

Betrakta nu följande fält i tre dimensioner

$$\vec{F} = \frac{k}{2\pi\varrho} \hat{\varrho}. \quad (6.13)$$

Det är singulärt längs hela z -axeln, och är helt oberoende av z . Det kan erhållas från potentialen $\phi = -\frac{k}{2\pi} \log \frac{\varrho}{a}$. Formellt tar det samma form som fältet från en punktkälla i två dimensioner. Vi tolkar det som att det finns en *linjekälla* med styrkan k på z -axeln. Om vi tänker i termer av elektrostatik, och ser q som laddning, är k laddning per längdenhet. En linjekälla behöver inte ha konstant styrka, och kan förstås ligga på andra kurvor än en rak linje (vilket är uppenbart i den elektrostatiska bilden; man kan låta laddningstätheten per längdenhet variera längs en kurva), men uttryck för fälten kan då inte lika lätt skrivas ned (vi kommer snart, i kapitel 6.4 och 6.5, att behandla metoder för att göra detta).

Närvaro av en linjekälla syns alltid som att fältstyrkan beter sig som $\frac{k}{2\pi\varrho} \hat{\varrho}$ när $\varrho \rightarrow 0$, där ϱ är en radiell koordinat på en liten cirkelskiva med kurvans tangentvektor som normal. Det betyder också att normalytintegralen av fältstyrkan över en smal tub nära kurvan är lika med den inneslutna källan $q(C) = \int_C k ds$, där C är den del av kurvan som innesluts av tuben.



Speciellt kan man ofta direkt avläsa normalytintegralen av fältet från en rak linjekälla med konstant täthet. Om integralen av fältet i ekv. (6.13) görs över en rak cylinder med höjden h och godtyckligt tvärsnitt som omsluter z blir resultatet, dvs. den inneslutna källan, hk .

På motsvarande sätt kan vi använda den endimensionella punktkällan för att tala om ytkällor i tre dimensioner. Fältet

$$\vec{F} = \frac{\sigma}{2} \text{sign}(z) \hat{z}, \quad (6.14)$$

relaterat till potentialen $\phi = -\frac{\sigma}{2}|z|$, har samma form som en endimensionell punktkälla i $z = 0$. I det elektrostatiska fallet skulle vi kalla σ en ytladdningstäthet, laddning per ytenhet. Vi kallar detta fältet från en ytkälla i xy -planet med konstant ytkälltäthet σ . Liksom för en linjekälla kan man förstås ha varierande ytkälltäthet belägen på vilken yta som helst. Kriteriet för att avgöra om det finns en ytkälla följer direkt från ekvivalentens med en endimensionell punktkälla: Närvaron av en ytkälla på ytan S med styrkan σ är liktydigt med att normalkomponenten av \vec{F} har en diskontinuitet enligt $\hat{n} \cdot (\vec{F}_+ - \vec{F}_-) = \sigma$, där \vec{F}_+ är fältets värde på den sida dit normalen pekar, och \vec{F}_- dess värde på motsatta sidan. Se även uppgift 6.6.1.

Exempel

Beräkna integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där ytan S ges av $r = 2a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ och $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ och har normalen \hat{r} , och fältet ges av

$$\vec{F} = F_0 \left[\left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\varrho}{a} \right) \hat{\varrho} + \frac{z}{a} \hat{z} \right],$$

där F_0 och a är här konstanter.

Lösning: Ytan S är den mittersta delen av en sfär. Den avgränsas vid $z = \pm\sqrt{2}a$. Fältet \vec{F} är singulärt för $\varrho = 0$, det vill säga längs z -axeln. Vi kan skriva det som

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F_0 \frac{a}{\varrho} \hat{\varphi} + F_0 \frac{r}{a} \hat{r}.$$

Vi behandlar de två delarna var för sig.

Den första delen, \vec{F}_1 , känns igen som fältet från en linjekälla på z -axeln med styrka $2\pi F_0 a$. Dess normalytintegral är densamma som om integralen varit över en cylinder med höjden $2\sqrt{2}a$, $\int_S \vec{F}_1 \cdot d\vec{S} = 2\pi F_0 a \cdot 2\sqrt{2}a = 4\sqrt{2}\pi F_0 a^2$.

Den andra delen kan beräknas på olika sätt, med eller utan användande av Gauss sats. Vi väljer att beräkna den direkt. På S är $\vec{F}_2 \cdot d\vec{S} = 2F_0 dS$, så integralen blir $2F_0$ gånger arean av S . Den senare beräknas enligt

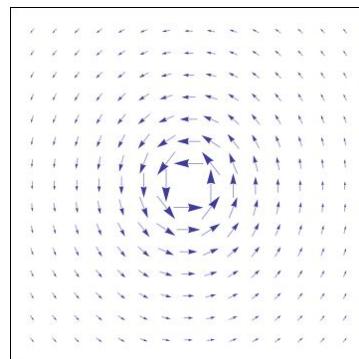
$$A = 2\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta (2a)^2 \sin \theta = 8\sqrt{2}\pi a^2.$$

Den totala integralen är alltså $4\sqrt{2}\pi F_0 a^2 + 16\sqrt{2}\pi F_0 a^2 = 20\sqrt{2}\pi F_0 a^2$.

6.3 Fält från virveltrådar

Vi skall undersöka fältet

$$\vec{F} = \frac{J}{2\pi\varrho} \hat{\varphi}. \quad (6.15)$$



Fältet är singulärt på z -axeln, men det beter sig inte som fältet från en linjekälla, utan har istället fältlinjer som går runt axeln. Vi kan beräkna rotationen av fältet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \frac{\varrho \hat{\varphi}}{\partial \varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \varrho \frac{J}{2\pi\varrho} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.16)$$

för $\varrho > 0$. Samtidigt är

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = J \quad (6.17)$$

om kurvan C omsluter z -axeln ett varv i positiv led, medan integralen blir noll för kurvor som inte omsluter z -axeln. Man visar detta enklast genom att göra integralen för en cirkel. Sedan kan Stokes sats tillämpas för att komma till andra kurvor, sålänge inte ytan skär z -axeln. Liksom i fallet med punktkällan måste man följaktligen vara försiktig med att använda integralsatser där fältet är singulärt.

Detta kallas fältet från en virveltråd med styrkan J på z -axeln. Det vanligaste exemplet är det statiska magnetiska fältet från en ström. Virveltrådar kan naturligtvis, precis som elektriska strömmar, ligga längs andra kurvor än raka linjer. Dock är det inte meningsfullt att säga att styrkan för en virveltråd beror på var på kurvan man är. Virveltrådens styrka definieras ju av en linjeintegral längs en kurva C som omsluter virveltråden, och beroende på vilken yta S man väljer att ha C som rand skär S virveltråden på olika ställen (se uppgift 8.7.1).

Exempel

Beräkna integralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där kurvan C ges av $x^2 + \frac{y^2}{4} = a^2$ och $z = 0$, som genomlöps i positiv riktning, och fältet ges av

$$\vec{F} = F_0 \left[\frac{\varrho \sin 2\varphi}{2a} \hat{\varrho} + \left(\frac{a}{\varrho} - \frac{\varrho \sin^2 \varphi}{a} \right) \hat{\varphi} \right].$$

F_0 och a är konstanter.

Lösning: Kurvan C är en ellips med centrum i origo och halvaxlarna a och $2a$. Enligt högerhandsregeln väljer vi \hat{z} som normal till ellipsskivan. Fältet \vec{F} är singulärt på z -axeln. Singulariteten sitter helt i $\vec{F}_1 = F_0 \frac{a}{\varrho} \hat{\varphi}$, som vi känner igen som en virveltråd på z -axeln

med styrkan $2\pi F_0 a$. Vi kallar resten av fältet \vec{F}_2 . Dess rotation är

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_2 = \frac{F_0}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \frac{\varrho \hat{\varphi}}{\partial \varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\varrho \sin 2\varphi}{2a} & -\frac{\varrho^2 \sin^2 \varphi}{a} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{F_0}{a} \hat{z}.$$

Eftersom C omsluter z -axeln en gång i positiv led, ger \vec{F}_1 bidraget $2\pi F_0 a$. Bidraget från \vec{F}_2 fås med hjälp av Stokes sats som $-F_0/a$ gånger arean av ellipsen, som är $2\pi a^2$. Värdet på den totala integralen är $2\pi F_0 a - \frac{F_0}{a} \cdot 2\pi a^2 = 0$.

Notera att vi i samtliga exempel i detta kapitel undviker att använda Gauss och Stokes satser för singulära fält, då vi upprepade gånger har sett att det händer något i de singulära punkterna som gör att integralsatserna "inte fungerar". I kapitel 7 kommer vi att se hur vi faktiskt, på ett precist sätt, kan definiera divergens och rotation av singulära fält, och skriva "funktioner" som beskriver dessa singulära käll- och virvelfördelningar så att integralsatserna fungerar.

6.4 Beräkning av fält från källfördelningar

Vi skall nu undersöka hur man kan beräkna fält utifrån givna källfördelningar (även virvelfördelningar skall behandlas, men det görs bäst med begreppet vektorpotential som introduceras i kapitel 8).

Låt oss börja med fältet från en godtycklig linjekälla. Vi har då en kurva C där källan är belägen, och en linjekälltäthet som kan bero på läget på kurvan. I en parametrisering med parameter τ

$$C = \vec{r}(\tau), \tau_- < \tau < \tau_+, \\ \text{linjekälltäthet } k(\tau). \quad (6.18)$$

Vi kan nu beräkna potentialen (eller fältstyrkan) genom superposition. Vi vill beräkna fältet i en punkt \vec{r} , och för att inte blanda ihop beteckningarna för punkten i vars värde vi söker fältet (\vec{r}) och för punkten där källan ligger, kallar vi den senares ortvektor \vec{r}' . Ett litet linjeelement $ds' = |d\vec{r}'| = |\frac{d\vec{r}'}{d\tau}| d\tau$ på kurvan bär på en källa ("laddning") $dq = k(\tau) ds'$. Potentialen från detta linjelement är

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{k(\tau)ds'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.19)$$

Nu får vi hela potentialen genom att lägga ihop bidragen från olika punkter på kurvan, dvs. genom integration:

$$\phi(\vec{r}) = \int_C \frac{k(\tau)ds'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.20)$$

För att bestämma fältstyrkan kan man antingen integrera bidraget

$$d\vec{F}(\vec{r}) = k(\tau)ds' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6.21)$$

eller derivera uttrycket (6.20) för att få

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_C \frac{k(\tau)(\vec{r} - \vec{r}')ds'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6.22)$$

På precis samma sätt får man potential och fältstyrka från en yt-källfördelning. Låt ytan S parametreras av två parametrar u, v , och låt ytkälltätheten $\sigma(u, v)$ bero på dessa. Ett litet ytelement dS' ger ett bidrag till potentialen i punkten \vec{r}

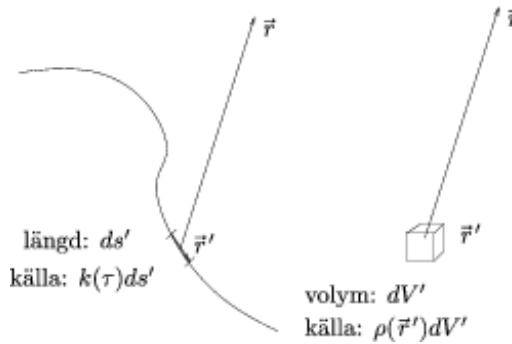
$$d\phi(\vec{r}) = \frac{\sigma(u, v)dS'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (6.23)$$

som kan integreras till

$$\phi(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(u, v)dS'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.24)$$

Slutligen kan vi tala om rymdkällor, som ju inte är singulära källfördelningar, men som kan behandlas likadant. Med en källtäthet $\rho(\vec{r}')$ har ett litet volymelement laddningen $\rho(\vec{r}')dV'$, och ger ett bidrag $d\phi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$. Potentialen från rymdkällan blir

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.25)$$



6.5 Greensfunktioner

Vi ser att tillvägagångssättet är detsamma oberoende av vilken typ av källa man har: man integrerar den infinitesimala källan i ett element av källfördelningen, multiplicerad med potentialen i \vec{r} från en punktkälla i \vec{r}' . Denna senare funktion är såpass viktig att den har ett särskilt namn; den kallas Greensfunktion. Vi återkommer i kapitel 9.1 med en mer generell av begreppet Greensfunktioner, och de differentialekvationer som de skall uppfylla. För tillfället nöjer vi oss med följande: *Greensfunktionen*

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.26)$$

är potentialen i punkten \vec{r} från en punktkälla med styrka 1 i punkten \vec{r}' . Potentialen från en källfördelning ρ är

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' . \quad (6.27)$$

Motsvarande resonemang kan förstas föras i annat antal dimensioner än tre. I två dimensioner är Greensfunktionen istället potentialen från en tvådimensionell punktkälla,

$$G(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}') = -\frac{1}{2\pi} \log |\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'| , \quad (6.28)$$

och potentialen från en källfördelning σ är

$$\phi(\vec{\varrho}) = \int_{\mathbb{R}^2} G(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}') \sigma(\vec{\varrho}') dS' . \quad (6.29)$$

Exempel

Vad är potentialen från en ytkälla med konstant täthet σ_0 , belägen på cirkelskivan med radie a i (x, y) -planet med z -axeln som symmetriaxel? Speciellt, vad är potentialen på z -axeln?

Lösning: Beteckna, som ovan, ortvektorn för en punkt på källan med \vec{r}' och ortvektorn för punkten vi vill veta potentialen i med \vec{r} . Problemets symmetri gör det lämpligt att använda cylindriska koordinater, och vi får avståndet mellan de två punkterna som

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi') + z^2}$$

med hjälp av cosinusteoremet. Vi använder uttrycket (6.24) för att skriva ett explicit uttryck för potentialen:

$$\phi(\vec{r}) = \int_0^a d\varrho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \varrho' \frac{\sigma_0}{4\pi\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi') + z^2}}.$$

Vi räknar inte vidare med detta allmänna uttryck, det ser krångligt ut. Men om \vec{r} ligger på z -axeln förenklas uttrycket till

$$\begin{aligned} \phi(0, 0, z) &= \int_0^a d\varrho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \varrho' \frac{\sigma_0}{4\pi\sqrt{\varrho'^2 + z^2}} = \frac{\sigma_0}{2} \left[\sqrt{\varrho'^2 + z^2} \right]_{\varrho'=0}^a \\ &= \frac{\sigma_0}{2} \left(\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right). \end{aligned}$$

Vi kan kontrollera vad som händer då $|z| \rightarrow +\infty$. Då är $\sqrt{z^2 + a^2} - |z| = |z|(\sqrt{1 + a^2/z^2} - 1) \approx |z|(1 + \frac{a^2}{2z^2} - 1) = \frac{a^2}{2|z|}$, så $\phi(0, 0, z) \approx \frac{a^2\sigma_0}{4|z|}$, vilket är fältet från en punktkälla med styrka $\pi a^2 \sigma_0$. Bra. Vi kan också kontrollera hur fältet ser ut nära planet, då $|z| \ll a$. Då är $\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \approx a - |z|$, och $\phi(0, 0, z) \approx \frac{1}{2}\sigma_0(a - |z|)$. Detta stämmer med fältet från en oändlig ytladdning (det vill säga effektivt en endimensionell punktladdning). Också bra.

Exempel

Bestäm, så långt möjligt, fältet från en sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$.

Lösning: Vi kan använda en Greensfunktion enligt ekvation (6.27). På grund av den sfäriska symmetrin kommer potentialen endast att bero på r , och det räcker att beräkna den för $\theta = 0$.

Då har vi $|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'$, och

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \frac{1}{4\pi} 2\pi \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' r'^2 \sin \theta' \rho(r') \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr' r'^2 \rho(r') \left[\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'} \right]_{\theta'=0}^\pi \\ &= \frac{1}{2r} \int_0^\infty dr' r' \rho(r') (r + r' - |r - r'|) \\ &= \frac{1}{r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \int_r^\infty dr' r' \rho(r').\end{aligned}\quad (6.30)$$

Längre än så kommer vi inte utan att veta något mer om funktionen $\rho(r)$. Genom inspektion av uttrycket ser vi att om $\rho(r) = 0$ för $r > a$, så är

$$\phi(r) = \frac{1}{r} \int_0^a dr' r'^2 \rho(r'), \quad r > a.$$

Detta är fältet från en punktkälla med styrkan $q = 4\pi \int_0^a dr r^2 \rho(r) = \int_{r < a} \rho(r) dV$, dvs. den totala källan. Om å andra sidan $\rho(r) = 0$ för $r < a$, blir ϕ konstant (och fältstyrkan noll) för $r < a$.

Naturligtvis finns det andra käll- och virvelfördelningar som är intressanta och förekommer i fysikaliska tillämpningar, men man behöver inte kunna dem utantill. En speciell intressant fältkonfiguration är den från en *dipol*, dvs. två lika och motsatta laddningar nära varandra. Lägg en laddning $\frac{\mu}{\varepsilon}$ på $(x, y, z) = (0, 0, \varepsilon)$ och en laddning $-\frac{\mu}{\varepsilon}$ i origo. Potentialen från de båda laddningarna tillsammans blir

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi |\vec{r} - \varepsilon \hat{z}|} - \frac{\mu/\varepsilon}{4\pi r}. \quad (6.31)$$

Vi kan skriva $|\vec{r} - \varepsilon \hat{z}| = \sqrt{\rho^2 + (z - \varepsilon)^2}$, och om ε är litet blir detta $\sqrt{\rho^2 + z^2 - 2\varepsilon z} = \sqrt{r^2 - 2\varepsilon z} \approx r(1 - \frac{\varepsilon z}{r^2})$. Så $\frac{1}{|\vec{r} - \varepsilon \hat{z}|} \approx \frac{1}{r}(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2})$. Poten-

tialen blir

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \left(1 + \frac{\varepsilon z}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \right] = \frac{\mu z}{4\pi r^3} = \frac{\mu \cos \theta}{r^2}. \quad (6.32)$$

Alternativt kan man skriva $\phi = \vec{\mu} \cdot \vec{r}/r^3$, där $\vec{\mu} = \mu \hat{z}$ är dipolmomentet (som alltså ges av produkten av laddningen $\frac{\mu}{\varepsilon}$ och separationsvektorn $\varepsilon \hat{z}$). Kontrollera, t.ex. genom att använda Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater, att $\Delta\phi = 0$ för $r \neq 0$. En alternativ konstruktion av detta dipolfält ges i uppgift 9.4.9.

Man kan också definiera "multipolfält": kvadrupoler osv. En trevlig övning är att undersöka potentialen för ett kvadrupol, som ges av

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\mu_{ij} x^i x^j}{4\pi r^5}, \quad (6.33)$$

där $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ och $\mu_{ii} = 0$. Kontrollera att $\Delta\phi = 0$ för $r > 0$, och skissa fältlinjerna för något enkelt val av μ . Generaliseringen till multipoler går nu nästan att gissa (se uppgift 6.6.36).

6.6 Uppgifter

6.6.1

Använd Gauss sats för att, med lämpligt val av en liten volym, visa att normalkomponenten av fältet har en diskontinuitet över en ytkälla enligt $\hat{n} \cdot (\vec{F}_+ - \vec{F}_-) = \sigma$.

6.6.2

Vektorfältet

$$\vec{F} = 4x\hat{y} + \frac{\vec{r} - \hat{z}}{|\vec{r} - \hat{z}|^3}$$

och ellipsoiden $S : 4x^2 + 4y^2 + (z - 1)^2 = 1$ är givna. Beräkna ytintegralen $\oint_S \vec{F} \times d\vec{S}$.

Svar. $-4\pi\hat{z}/3$

6.6.3

Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med radien a och mittpunkt i origo, och vektorfältet \vec{F} ges av $\vec{F} = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$, där $\vec{r}_0 = \frac{3a}{5}(\hat{x} + \hat{y} - \hat{z})$?

Svar. 0

6.6.4

Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är begränsningsytan till kuben med sidlängden 4 och mittpunkt i origo, vars kanter är parallella med koordinataxlarna, och vektorfältet \vec{F} ges av $\vec{F} = \frac{\vec{r}-\hat{x}}{|\vec{r}-\hat{x}|^3}$?

Svar. 4π

6.6.5

Beräkna ytintegralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där \vec{F} är vektorfältet

$$\vec{F} = z\hat{z} - \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{x^2 + y^2}$$

och S är den del av ellipsoiden $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ som har $z > 0$ och och normalen riktad så att $\vec{n} \cdot \hat{z} > 0$.

Svar. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

6.6.6

Beräkna normalytintegralen av

$$\vec{F} = F_0 \frac{a^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(x, y, z + \frac{z(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{a^2} \right)$$

över ytan $x^2 + y^2 = (z - 3a)^2$, $0 \leq z \leq 3a$. F_0 och a är konstanter.

Svar. $11\pi F_0 a^2$

6.6.7

Beräkna integralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{(x-1)\hat{y} - y\hat{x}}{(x-1)^2 + y^2} + \hat{\varrho}(1-\varrho)e^{-\varrho} \sin \varphi + \hat{\varphi}(e^{-\varrho} \cos \varphi - z \sin \varphi) + \hat{z} \cos \varphi$$

och C är kurvan $(\varrho, \varphi, z) = (2 + \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}, t, 0)$ då parametern t går från 0 till 4π . (De cylindriska koordinaterna (ϱ, φ, z) är relaterade på vanligt sätt till de Cartesiska (x, y, z) .)

Svar. 4π (observera att kurvan omluter virveltråden två varv).

6.6.8

Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\hat{\varrho}}{2\pi\varrho}$ (ϱ är den radiella cylindriska koordinaten) och S är en sfär med radien 1 och mittpunkt i origo?

Svar. 2

6.6.9

Låt \hat{n} vara den normal till hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ som pekar från z -axeln och låt $\vec{u} = \frac{(xz, yz, xy)}{x^2 + y^2}$. Beräkna $\int_S \vec{u} \cdot \hat{n} dS$ över den del av hyperboloiden där $a \leq z \leq b$.

Svar. $\pi(b^2 - a^2)$

6.6.10

Vektorfältet $\vec{A}(\vec{r}) = \left(\frac{a^3 y}{x^2 + y^2} - az, ax - \frac{a^3 x}{x^2 + y^2}, ay + x^2 \right)$ och ytorna

$$S_1 : 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 40a^2,$$

$$S_2 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad z > 0$$

är givna. Bestäm tangentlinjeintegralen av \vec{A} runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2 .

Svar. $\pm 6\pi a^3$

6.6.11

Beräkna integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där fältet \vec{F} ges av $\vec{F} = F_0 \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\varrho^2}{a^2} \right) \hat{\varrho}$, och ytan S ges av $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq 4a$. F_0 och a är konstanter.

Svar. $16\pi a^2 F_0$

6.6.12

Beräkna integralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där C är den slutna kurvan som bildas av skärningen mellan ytorna $z = \frac{x^2+y^2}{4a}$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 9a^2$, och \vec{F} är fältet $\vec{F} = F_0 \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\varrho^2}{a^2} \right) \hat{\varphi}$. a och F_0 är konstanter.

Svar. $2\pi F_0 a \left[8 \left(\sqrt{13} - 2 \right)^{3/2} + 1 \right]$

6.6.13

Vektorfältet \vec{F} är givet i cylinderkoordinater:

$$\vec{F}(\varrho, \varphi, z) = F_0 \left[\left(\frac{\varrho}{a} + \frac{a}{\varrho} \right) (\hat{\varrho} + \hat{\varphi}) + \frac{z}{a} \hat{z} \right],$$

liksom ytan S , $\varrho^2 + z^2 + 2az = 3a^2$. Beräkna normalytintegralen av \vec{F} över S .

Svar. $40\pi F_0 a^2$

6.6.14

Vektorfältet \vec{F} är givet i sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} \vec{F}(r, \theta, \varphi) = \frac{F_0}{ar \sin \theta} & \left[\left(a^2 + ar \sin \theta \cos \varphi \right) (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) \right. \\ & \left. - \left(a^2 + ar \sin \theta \sin \varphi - r^2 \sin^2 \theta \right) \hat{\varphi} \right], \end{aligned}$$

och kurvan C är skärningskurvan mellan ytorna $S_1 : x^2 + 4y^2 = 12a^2 + 8ay$ och $S_2 : x^2 + y^2 = 4az - 2ay - a^2$. Bestäm kurvintegralen av \vec{F} längs C . Ledning: uttryck fältet i cylindriska koordinater.

Svar. $\pm 14\pi a F_0$

6.6.15

Använd en (3-dimensionell) Greensfunktionsmetod för att finna det elektriska fältet från en linjeladdning längs z -axeln med konstant laddningstäthet ρ .

6.6.16

Bestäm potentialen inne i en boll med konstant källfördelning!

Svar. Om källfördelningen är $\rho(r) = \frac{3q}{4\pi a^3}$ då $r < a$ och noll annars, blir potentialen för $r \leq a$: $\phi(r) = \frac{q}{8\pi a}(3 - \frac{r^2}{a^2})$.

6.6.17

Vektorfältet $\vec{F} = \frac{\hat{\varrho}}{\varrho} + \frac{\hat{\varphi}}{\varrho} + z\hat{z}$ och den koniska ytan $S : \varrho + z = 2$, $-1 < z < 2$ är givna. Bestäm normalytintegralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Svar. $\pm 6\pi$

6.6.18

Låt S vara ytan $\varrho + z = a$, $z > 0$. Beräkna integralen $\int_S d\vec{S} \times (\vec{r} + a\hat{\varrho} - a\hat{\varphi})$, där ϱ, φ, z är cirkulära cylinderkoordinater.

Svar. $-\pi a^3 \hat{z}$

6.6.19

Vektorfältet \vec{A} och ytan S är givna i cylinderkoordinater $\varrho\varphi z$

$$\vec{A}(\varrho, \varphi, z) = A_0 \left[\left(\frac{a}{\varrho} + \frac{2\varrho}{a} \cos^2 \varphi \right) \hat{\varrho} - \frac{\varrho}{a} \sin 2\varphi \hat{\varphi} - \frac{z}{a} \hat{z} \right],$$

$S : \varrho^2 - 2a\varrho \cos \varphi - 3a^2 = 0$, $0 < z < a$. Bestäm normalytintegralen av \vec{A} över S .

Svar. $10\pi a^2 A_0$

6.6.20

Paraboliska koordinater $uv\varphi$ definieras genom avbildningen

$$\vec{r} = \left(uv \cos \varphi, uv \sin \varphi, (u^2 - v^2)/2 \right),$$

$u \geq 0, v \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. I detta koordinatsystem är givet dels en sluten yta S med ekvationen $u^4 + v^4 + u^2v^2 = 1$ och dels ett vektorfält \vec{F} genom sin skalärpotential ϕ

$$\phi(u, v, \varphi) = (u^2 - 1)^2 + (v^2 + 1)^2 + 2uv(\sin \varphi + uv) + (u^2 + v^2)^{-1}.$$

Beräkna flödet av vektorfältet \vec{F} ut genom ytan S .

Svar. $-10\pi/3$

6.6.21

Ett vektorfält \vec{F} kan sönderläggas i två delar, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, där \vec{F}_1 har skalärpotentialen

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2}} + xy^3,$$

och där \vec{F}_2 enklast beskrivs i ett cylindriskt koordinatsystem som

$$\vec{F}_2 = \frac{\varrho^2 - az}{\varrho} \hat{\varrho},$$

där a är en konstant. Beräkna flödet av vektorfältet \vec{F} ut ur en sfär med radien 3 och medelpunkten i $\vec{r} = (2, 1, 1)$.

Svar. $-356\pi - 8\pi a$

6.6.22

Vektorfältet \vec{A} och ytan S är givna i sfäriska koordinater:

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = A_0 \left[\hat{r} \left(\frac{a}{r} + \frac{2r}{a} \cos^2 \theta \right) + \hat{\theta} \left(\frac{a}{r} \cot \theta - \frac{r}{a} \sin 2\theta \right) \right],$$

$S : r^2 (1 + \cos^2 \theta) = 2a^2$. Beräkna normalytintegralen av \vec{A} över S .

Svar. $28\pi a^2 A_0/3$

6.6.23

Vektorfältet

$$\vec{F}(r, \theta\varphi) = \left(\frac{r}{a} \right)^3 \hat{r} + \left(1 + \frac{a}{r \sin \theta} \right) \hat{\varphi},$$

där $r\theta\varphi$ är sfäriska koordinater, och ytorna $S_1 : x^2 + y^2 = 4a^2$ och $S_2 : x^2 + (y+a)^2 + z^2 = 9a^2$, $z > 0$, är givna. Bestäm tangentlinjeintegralen av \vec{F} runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2 .

Svar. $\pm 6\pi a$

6.6.24

En volym begränsas av hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ och planen $z = -a$ och $z = 2a$. Beräkna $\int \vec{A} \cdot d\vec{S}$ över begränsningsytan om

$$\vec{A} = \frac{xz}{x^2 + y^2} \hat{x} + \frac{yz}{x^2 + y^2} \hat{y}.$$

Svar. $3\pi a^2$

6.6.25

Vektorfältet

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(-6a^2 x, -6a^2 y, (x^2 + y^2)(z + a) \right)$$

och halvellipsoiden $S : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36a^2$, $z > 0$ är givna. Bestäm normalytintegralen av \vec{B} över den buktiga ytan S .

Svar. $\pm 18\pi a^3$

6.6.26

Vektorfältet $\vec{F}(r, \theta, \varphi) = F_0(a^{-1}r \sin 2\theta \sin \varphi \hat{r} - 2a^{-1}r \sin^2 \theta \sin \varphi \hat{\theta} - (2r \sin \theta)^{-1}a \hat{\phi})$ är givet i sfäriska koordinater, med a en konstant med dimensionen längd. Beräkna tangentlinjeintegralen av \vec{F} längs skärningskurvan C mellan ytorna $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 25a^2$, $x \geq 0$, och $S_2 : 16x - 12y - 9z = 0$ från punkten $(0, -3a, 4a)$ till punkten $(0, 3a, -4a)$.

Svar. $-\frac{\pi}{2}aF_0 \left(1 + \frac{800}{\sqrt{481}} \right)$

6.6.27

En elektrisk kvadrupol i origo ger upphov till vektorfältet

$$\vec{E} = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^4} \hat{r} + \frac{\sin 2\theta}{r^4} \hat{\theta}$$

med r och θ sfäriska koordinater. Beräkna flödet av detta fält ut genom den cylindriska burk som avgränsas av ytorna $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, och $z = -1$.

Svar. 0

6.6.28

Ett vektorfält har potentialen ϕ , given i cylinderkoordinater $\varrho \varphi z$ som

$$\phi = \left(\frac{a}{\rho} + b\rho \right) \sin \varphi,$$

där a och b är konstanter. Beräkna vektorfältets flöde ut genom begränsningsytan till kuben med sidan c och mittpunkt i $(x, y, z) = (0, d, 0)$ där $c < d$.

Svar. 0

6.6.29

Det skalära fältet $\phi(\varrho, \varphi, z) = \varrho \sin \varphi + z^3$ och ytorna $S_1 : \varrho^2 - z^2 = 1$, $z > 0$ och $S_2 : 3\varrho^2 + z^2 = 7$ är givna i cylinderkoordinater $\varrho \varphi z$. Bestäm integralen $\oint_C d\vec{r} \phi$ av ϕ runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2 .

Svar. $\pm 2\pi \hat{x}$

6.6.30

Vektorfältet \vec{F} är givet i cylinderkoordinater $\varrho\varphi z$

$$\vec{F}(\varrho, \varphi, z) = F_0 a \frac{1}{\varrho^2 + a^2 + 2a\varrho \cos \varphi} [(\varrho + a \cos \varphi) \hat{\varrho} - a \sin \varphi \hat{\varphi}] .$$

Beräkna normalytintegralen av \vec{F} över sfären med radie a och centrum i punkten $(x, y, z) = (-a, 0, 0)$.

Svar. $4\pi F_0 a^2$

6.6.31

Vektorfältet \vec{F} med vektorpotentialen \vec{A}

$$\vec{A} = \frac{\varrho}{a} \sin(2\varphi) \hat{\varrho} - \left(\frac{2\varrho}{a} \sin^2 \varphi + \frac{z}{\varrho} \right) \hat{\varphi} + \log \frac{\varrho}{a} \hat{z}$$

och ytan $S : \varrho + 2z = 2b$, $0 < z < b$ är givna i cylinderkoordinater (ϱ, φ, z) , med a och b konstanter. Beräkna normalytintegralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Svar. $\pm 2\pi b \left(1 - \frac{4b}{a} \right)$

6.6.32

Vektorfältet \vec{F} och ytorna S_1 och S_2 är givna i sfäriska koordinater $r\theta\varphi$

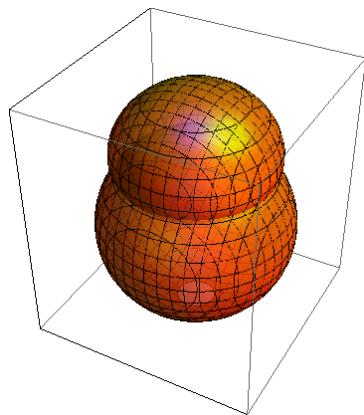
$$\vec{F}(r, \theta, \varphi) = F_0 \left[\left(\frac{r^3}{a^3} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{a}{r} \right) \hat{r} + \frac{a}{r} \cot \theta \hat{\theta} + \frac{a}{r \sin \theta} \hat{\varphi} \right] ,$$

$$S_1 : \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{r}{a} = 7 - 2 \cos \theta,$$

$$S_2 : \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 3 \frac{r}{a} = 4 \cos \theta - 4,$$

där F_0 och $a > 0$ är konstanter. Bestäm linjeintegralen $\oint_C \vec{F} \times d\vec{r}$ runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2 .

Svar. $11\pi F_0 a \hat{z}$



6.6.33

Bestäm potentialen på z -axeln från den konstanta linjekälltätheten k längs spiralen $\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, \frac{bt}{\pi})$, $-\pi < t < \pi$.

Svar. $\phi(0, 0, z) = \frac{k}{4} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{\pi^2}} \left(\sinh^{-1} \frac{b-z}{a} + \sinh^{-1} \frac{b+z}{a} \right)$

6.6.34

En ytkälla med konstant täthet σ_0 befinner sig på kalottytan $r = a$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Beräkna potentialen på z -axeln, och visa att den då $\theta_0 = \pi$ är konstant i sfären.

Svar. $\phi(0, 0, z) = \frac{a\sigma_0}{2z} \left(\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta_0} - |z - a| \right)$

6.6.35

(*) En cylinder med radien a och längden b är belagd med en konstant ytkälltäthet σ_0 , både på mantelytan och ändytorna. Bestäm potentialen på cylinderaxeln.

Svar. Potentialen på x -axeln blir

$$\begin{aligned}\phi(x, 0, 0) = & \frac{\sigma_0}{2} \left(\sqrt{(x+b)^2 + a^2} + \sqrt{x^2 + a^2} - |x+b| - |x| \right. \\ & \left. + a \log \frac{x+b+\sqrt{(x+b)^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \right)\end{aligned}$$

6.6.36

Multipoler och klotytfunktioner. Kontrollera att

$$\phi_{(\mu)}(\vec{r}) = \frac{\mu_{i_1 \dots i_\ell} x^{i_1} \dots x^{i_\ell}}{4\pi r^{2\ell+1}},$$

där $\mu_{i_1 \dots i_\ell}$ är symmetrisk vid utbyte av vilka två index som helst och spårlös vid kontraktion av två indices, uppfyller Laplacekvationen för $r \neq 0$. Källa, dipol och kvadrupol svarar alltså mot specialfallen $\ell = 0, 1, 2$. Visa att den kan skrivas

$$\phi_{(\mu)}(\vec{r}) = r^{-\ell-1} Y_{(\mu)}(\theta, \varphi).$$

där funktionen $Y_{(\mu)}$ bara beror på vinklarna, och alltså är en funktion på S^2 , en s.k. klotytfunktion. Visa att $\Delta_{S^2} Y_{(\mu)} = -\ell(\ell+1)Y_{(\mu)}$, dvs. att $Y_{(\mu)}$ är en egenfunktion till Laplaceoperatorn på S^2 (se ekv. (4.23)) med egenvärde $-\ell(\ell+1)$. Hur många linjärt oberoende klotytfunktioner finns det för ett givet värde på ℓ ? Klotytfunktioner är viktiga t.ex. när man löser Schrödingerekvationen för en väteatom.

Svar. Det finns $2\ell+1$ linjärt oberoende funktioner för givet ℓ .

6.6.37

(*)Härled ett allmänt uttryck för potentialen från en rotationssymmetrisk källfördelning $\sigma(\varrho)$ i två dimensioner (ekivalent, en källfördelning i tre dimensioner som endast beror på ϱ).

Svar. Greensfunktionsmetoden ger

$$\phi(\varrho) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\varrho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \varrho' \sigma(\varrho') \log(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos\varphi').$$

Integralen över φ' är lurig, men går att slå upp. Resultatet blir

$$\phi(\varrho) = -\log \varrho \int_0^\varrho d\varrho' \varrho' \sigma(\varrho') - \int_\varrho^\infty d\varrho' \varrho' \log \varrho' \sigma(\varrho').$$

Notera att potentialen utanför en källfördelning, som man kan vänta sig, är densamma som potentialen från en punktkälla.

6.6.38

(*)Härled genom rekursion uttrycket för “arean” av en sfär av godtycklig dimension!

Deltafunktioner

7

Vi såg i kapitel 6 att singulära käll- och virvelfördelningar är farliga när det kommer till integralsatser. Till exempel är normalytintegralen av fältstyrkan från en punktkälla, $\vec{F} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$, över en sluten yta som omsluter origo inte noll, utan q , trots att $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$. Divergensfriheten för \vec{F} gäller dock bara för $r > 0$, så det är i origo, där fältet är singulärt, som något händer.

Från en fysikalisk synvinkel är det inte så konstigt. När vi tänker oss en strikt punktformig källa (laddning, massa osv.) gör vi någon sorts idealisering. Det kan t.ex. vara så att källan har en liten utsträckning, som är mycket mindre än de avstånd på vilka man mäter fälten. Då spelar dess utsträckning ingen roll, och det blir enklare att hantera den som en idealiserad punktkälla. Man kan formulera detta som att man har en mycket hög laddningstäthet i ett mycket litet område, så att den totala laddningen är ändlig (q). Ett exempel kan t.ex. vara

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3q}{4\pi\epsilon^3}, & r \leq \epsilon, \\ 0, & r > \epsilon. \end{cases} \quad (7.1)$$

På "stora" avstånd [$(r \gg \epsilon)$, se ekvation (6.30)] ser fältet ut precis som det från en punktkälla med styrka q . Det vi skall göra i det följande är ta en gräns $\epsilon \rightarrow 0$ av uttryck liknande ekv. (7.1). Det betyder att källtätheten blir större och större i ett mindre och mindre område, men att den totala källan är konstant, q . Till slut får man, i gränsen, en "funktion" som är noll överallt utom i origo, där den är oändligt stor.

Bilden blir ännu tydligare om vi tittar på fältet från en källa i en dimension. I en dimension har vi alltså $\frac{dF}{dx} = 0$, så F är konstant. Fältet är (strunta i konstanten framför, det viktiga är hur funktionen ser ut)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{q}{2}, & x < 0, \\ \frac{q}{2}, & x > 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

(skillnaden i tecken kommer sig av att den radiella enhetsvektorn är $-\hat{x}$ resp. \hat{x} för $x < 0$ resp. $x > 0$). Motsvarigheten till Gauss sats i en dimension är

$$\int_a^b dx \frac{dF}{dx} = [F(x)]_{x=a}^b. \quad (7.3)$$

En alltför naiv tillämpning av detta, då $a < 0$, $b > 0$, ger (precis som i $D = 3$) resultatet q för högerledet (“ytintegralen”) och 0 för vänsterledet (“volymintegralen”). Det är “volymintegralen” som är fel — derivatan av F är inte definierad i $x = 0$. Vem som helst kan titta på grafen till funktionen i ekv. (7.2) och se att dess derivata inte är 0 i $x = 0$. Snarare verkar den vara “oändligt stor”. Så, vad är den?

Det kan hjälpa oss att tänka litet fysikaliskt här. Antag att källan i origo inte verkligen är koncentrerad till en punkt, utan att den är “utsmetad” över ett litet område. Då har man en ändlig och fin källtäthet, som är mycket stor i ett litet område. Men vi vill fortfarande att integralen över den skall bli lika med den totala laddningen. Kan vi ta en “gräns” av en sådan mycket smal och mycket hög funktion? Ja, det går bra. Man leds till “Diracs deltafunktion”.

7.1 Diracs deltafunktion i en dimension

Diracs deltafunktion kan definieras genom resultatet som fås då den integreras med en godtycklig funktion $f(x)$ — integrationen plockar ut värdet för $f(x)$ i en punkt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0). \quad (7.4)$$

Man kan alltså tänka på $\delta(x)$ som en “funktion” som tar värdet noll överallt utom i $x = 0$ där den är “oändligt stor”, men precis så stor att integralen i ekv. (7.4) blir rätt. Från definitionen följer att

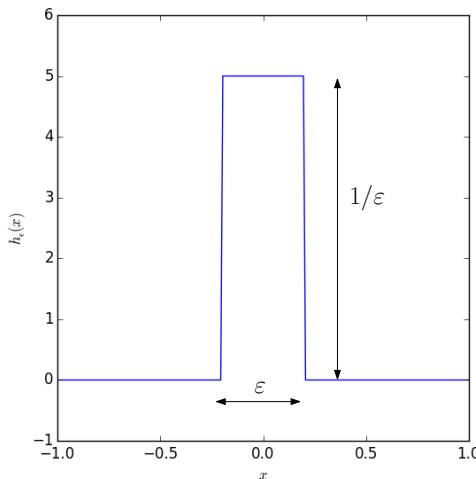
$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{då } 0 \in [a, b] \\ 0, & \text{då } 0 \notin [a, b] \end{cases} \quad (7.5)$$

(vi förutsätter att $b > a$ och att $a \neq 0, b \neq 0$). Diracs deltafunktion, eller kortare, deltafunktionen, är ingen funktion i vanlig mening, i och med att dess värde i 0 inte är definierat. En sådan här generaliserad funktion kallas en *distribution*.

Liksom vi argumenterade ovan, kan man konstruera en deltafunktion som ett “gränsvärde” av en följd av vanliga funktioner. En enkel möjlighet är att definiera en “lådfunktion” med stöd mellan $-\frac{\varepsilon}{2}$ och $\frac{\varepsilon}{2}$,

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & \text{då } -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases} \quad (7.6)$$

och låta $\varepsilon \rightarrow 0$. Se figur 7.1.



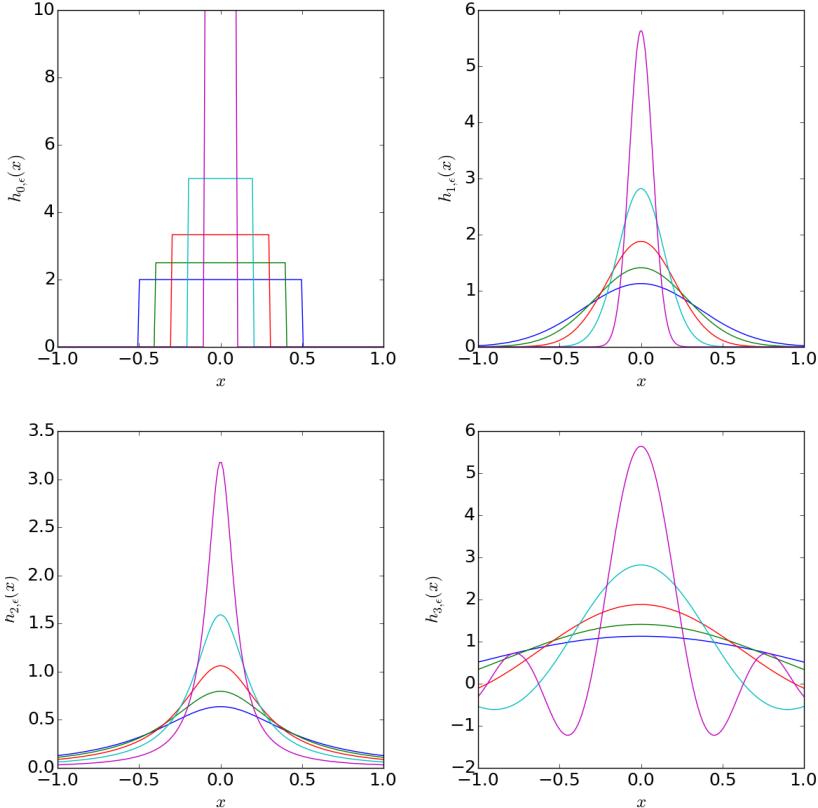
Figur 7.1 Gränsvärdet av en enkel lådfunktion blir en deltafunktion i en dimension.

Men det finns också andra möjligheter:

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi}\varepsilon}, \quad (7.7)$$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \quad (7.8)$$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}. \quad (7.9)$$



Figur 7.2 Gränsvärdet av olika distributioner blir en deltfunktion i en dimension. Här visas distributionerna i ekvationerna (7.6), (7.7), (7.8) och (7.9) för några olika värden på ε .

Samtliga dessa utgör en *sekvens av funktioner* (en distribution) från vilka vi får Diracs deltfunktion

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} h_\varepsilon(x) \quad (7.10)$$

med de definierande egenskaperna

$$\delta(x) = 0, \quad \text{för } x \neq 0 \quad (7.11)$$

$$f(0) = \int_a^b f(x)\delta(x)dx, \quad (7.12)$$

där $f(x)$ är en "välbeteende" funktion och $[a, b]$ inkluderar 0. Ett speciell fall av ovanstående är

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \quad (7.13)$$

I alla fallen konstruerar man funktioner som när ε görs mindre och mindre blir allt smalare och högre, men på ett sådant sätt att den totala ytan under funktionen alltid är 1. De kontinuerliga funktionerna (7.7), (7.8) och (7.9) är trevliga på så sätt att dessa har väldefinierade derivator.

Exempel

Kontrollera att gränsvärdet av distributionerna (7.6) och (7.8) uppfyller de definierande egenskaperna

Lösning: Vi studerar först lådfunktionerna (7.6) och inser att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(x) = 0,$$

för $x \neq 0$. Dessutom har vi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a<0}^{b>0} h_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 = 1.$$

För distributionen (7.8) med $x \neq 0$ gäller

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon} \exp(x^2/\varepsilon^2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon} \left[1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\varepsilon^2} \right)^2 + \dots \right]} \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\left(x^2 + \varepsilon^2 + \frac{x^4}{2\varepsilon^2} + \dots \right)} \rightarrow 0 \quad \text{då } \varepsilon \rightarrow 0^+ \end{aligned} \quad (7.14)$$

Vidare har vi integralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\varepsilon^2} dx = \sqrt{\pi\varepsilon^2}$ (se t.ex. Mathematics Handbook for Science and Engineering [Beta] 7.5-41). Detta ger

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi\varepsilon^2}}{\sqrt{\pi\varepsilon}} = 1, \quad (7.15)$$

för $\varepsilon > 0$. För att vara helt korrekta skall vi egentligen visa den mer allmänna egenskapen $\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0)$ för en väl beteende funktion $f(x)$. Eftersom ekv. (7.14) gäller, och $f(x)$ inte utgör något problem, kan vi utöka integrationsintervallet och istället visa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0).$$

Vi Taylorutvecklar, $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + \dots$, och konstaterar att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)h_\varepsilon(x)dx = f(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)dx = f(0),$$

enligt vad vi visat ovan (7.15). Det återstår att visa att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n h_\varepsilon(x)dx = 0, \quad (7.16)$$

för alla heltalet $n > 0$. I vårt fall har vi en jämn funktion $h_\varepsilon(x)$ vilket gör att ekv. (7.16) är trivialt uppfyllt för udda n då integranden blir udda. För jämma $n = 2k$ finner vi (se t.ex. Mathematics Handbook for Science and Engineering [Beta] 7.5-42)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi\varepsilon} \varepsilon^{2k} = 0,$$

för $\varepsilon > 0$. Alltså har vi visat att

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a<0}^{b>0} f(x) \frac{\exp(-x^2/\varepsilon^2)}{\sqrt{\pi\varepsilon}} dx = f(0), \quad \text{för } \varepsilon > 0.$$

Diracs deltafunktion har vissa viktiga egenskaper som listas nedan

- Jämn: $\delta(-x) = \delta(x)$
- Skalning: $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.
- Translation: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$.

Skalningsegenskapen visas enklast genom att göra substitutionen $y = xa$ i uttrycket $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)dx$. Men var noga med tecknet på integrationsgränserna. Translationsegenskapen visas genom substitutionen $y = x - x_0$.

Man kan fortsätta och definiera derivator av deltafunktionen. Dessa skall bete sig så att det går att partialintegrera i integralerna. T.ex. skall man ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f'(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x - x_0) f(x). \quad (7.17)$$

Visa gärna att denna egenskap gäller genom partiell integration med någon av funktionssekvenserna som definierar deltafunktionen.

Den primitiva funktionen till en deltafunktion är en vanlig stegfunktion,

$$\int_{-\infty}^x dy \delta(y) = \sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (7.18)$$

(värdet i 0 är inte så viktigt, men tas ofta till 1/2).

7.2 Diracs deltafunktion i flera dimensioner

Deltafunktioner i fler dimensioner konstrueras med hjälp av den endimensionella. Sålunda är $\delta^2(\vec{\varrho}) = \delta(x)\delta(y)$ i två dimensioner och $\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ i tre dimensioner, och så vidare (notationen " δ^D " betyder alltså inte "delta upphöjt till D " utan "deltafunktionen i D dimensioner"). Detta leder uppenbarligen till den önskade egenskapen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} dV \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \\ &\times \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Om man använder andra koordinater än Cartesiska, måste man vara försiktig med deltafunktioner. Om man har kroklinjiga koordinater med skalfaktorer h_i , så är volymelementet $dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$. Därför får det önskade resultatet $\int_{\mathbb{R}^3} dV \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0)$ endast om

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{h_1(\vec{r}_0)h_2(\vec{r}_0)h_3(\vec{r}_0)} \delta(u_1 - u_{1,0}) \delta(u_2 - u_{2,0}) \delta(u_3 - u_{3,0}) \quad (7.20)$$

(kontrollera detta genom explicit insättning!), och analogt för annat antal dimensioner. Detta uttryck gäller endast så länge koordinatsystemet inte

degenererar, dvs. så länge inte en punkt svarar mot flera möjliga värden på någon av koordinaterna. Uttrycket (7.20) kan alltså inte användas för $\delta^3(\vec{r})$ i sfäriska koordinater eller för $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$ i cylindriska koordinater då $\varrho_0 = 0$. Det finns knep för att hantera även sådana situationer, men vi går inte in på dem här.

I fysikaliska tillämpningar har en (Cartesisk) koordinat dimensionen längd. Integration över en koordinat ger en faktor längd i tillskott i dimension. Det betyder att den endimensionella deltafunktionen har dimension (längd) $^{-1}$. Detta ser man också direkt i approximationerna i ekv. (7.6), (7.7) och (7.8). En D -dimensionell deltafunktion δ^D har alltså dimension (längd) $^{-D}$ (eftersom den är en produkt av D deltafunktioner av Cartesiska koordinater).

7.3 Integraler av singulära fält

Genom att använda distributioner kan giltigheten för t.ex. Gauss sats utvidgas till singulära fält.

Vi går tillbaka till det endimensionella exemplet. Nu har vi det nödvändiga redskapet för att skriva ned derivatan av fältet $F(x)$ från ekv. (7.2). Den är precis en deltafunktion,

$$\frac{dF}{dx} = q\delta(x). \quad (7.21)$$

Nu stämmer de två leden i "Gauss sats", ekv. (7.3), överens. Båda ger resultatet q . Fältet F har en potential $\phi = -\frac{q}{2}|x|$, som uppfyller

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -q\delta(x). \quad (7.22)$$

På samma sätt kan vi behandla fält från singulära källor i högre dimensioner. Betrakta fältet från en punktkälla i origo, $\vec{F} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$. Om Gauss sats skall fungera, måste volymintegralen av källtätheten $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ bli q för varje volym som innehåller origo. Därför behöver man $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = q\delta^3(\vec{r})$. De två leden i Gauss sats blir då, om volymen tas till en boll med centrum i origo:

$$\int_{r=a} dS \vec{n} \cdot \vec{F} = q \quad (7.23)$$

(som vanligt), och

$$\int_{r < a} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \int_{r < a} dV q\delta^3(\vec{r}) = q. \quad (7.24)$$

Ett ganska enkelt sätt att visa att detta stämmer är att approximera den tredimensionella deltafunktionen $\delta^3(x)$ med en regulariserad ("uppmjukad") funktion

$$h_\varepsilon(\vec{r}) = \frac{\varepsilon^2}{2\pi r(r^2 + \varepsilon^2)^2}. \quad (7.25)$$

Vi ser dels att

$$\int_{\mathbb{R}^3} h_\varepsilon dV = 2\varepsilon^2 \int_0^\infty dr \frac{r}{(r^2 + \varepsilon^2)^2} = 2\varepsilon^2 \left[-\frac{1}{2(r^2 + \varepsilon^2)} \right]_{r=0}^\infty = 1, \quad (7.26)$$

dels att $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(\vec{r}) = 0$ för $r \neq 0$. Detta räcker för att h_ε skall vara en bra approximation av en deltafunktion. Om vi approximerar fältet med

$$\vec{F}_\varepsilon(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi(r^2 + \varepsilon^2)} \hat{r}, \quad (7.27)$$

så följer att $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\varepsilon = qh_\varepsilon$, och i gränsen $\varepsilon \rightarrow 0$ alltså

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{4\pi r^2} = \delta^3(\vec{r}). \quad (7.28)$$

Potentialen till fältstyrkan uppfyller då

$$\Delta \frac{1}{4\pi r} = -\delta^3(\vec{r}). \quad (7.29)$$

Vi ser att vi inte längre behöver göra undantag för singulära fält när vi kan förstå singulariteten i termer av distributioner.

7.4 Virveltrådar och Stokes sats

Ovan har vi sysslat med Gauss sats, men Stokes går lika bra. Betrakta fältet

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{J}{2\pi\rho} \hat{\phi}, \quad (7.30)$$

som alltså ges i cylindriska koordinater. Vi ser lätt att $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, utom möjligent på z -axeln, där fältet är singulärt. Det fysikaliska typexemplet är det magnetiska fältet från en ledare på z -axeln med ström $\vec{J} = J\hat{z}$.

Här kallar vi det fältet från en virveltråd. Nu kan vi se vad Stokes sats ger, för en sluten kurva $C = \partial S$ som omsluter z -axeln i positiv riktning. Enklast är att utföra linjeintegralen för en cirkel, och vi får $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = J$. För att Stokes sats skall fungera måste $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ ge samma resultat. Om vi räknar ut det för en yta parallell med xy -planet ser vi att det stämmer om $\vec{\nabla} \times \vec{F} = J\hat{z}\delta^2(\varrho)$, där $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Att detta stämmer (dvs. att man kan approximera \vec{F} med ett fält parametriserat av en liten parameter ε , och att man får deltfunktionen då $\varepsilon \rightarrow 0$) är lämnat som en övningsuppgift.

Exempel

Ett exempel på en tillämpning av deltfunktionen: Fouriertransform och ortogonalitet.

Givet en funktion $f(x)$ definieras dess Fouriertransform som

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x).$$

Den inversa transformen ger frekvenssönderläggningen av $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k)$$

(normeringen har valts för att åstadkomma symmetri mellan de två uttryckena).

Genom att sätta in det andra uttrycket i det första får man, under förutättning att man kan byta integrationsordning,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} f(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)} \right) f(y). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Uttrycket inom parenteser i det sista ledet beror bara på $x - y$, och om resultatet skall bli $f(x)$ måste det vara lika med $2\pi\delta(x - y)$ (se ekv. (7.4)). Genom att byta vågtalet k och koordinaten x får man också $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k-k')x} = 2\pi\delta(k - k')$. Funktionerna $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ kan alltså ses som ortogonala och "deltafunktionsnormalerade" med ortogonalitetsrelationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e_k(x) e_{k'}^*(x) = \delta(k - k') .$$

Man kan bekräfta resultatet genom att göra beräkningen explicit för de regulariserade funktionerna $e_{k,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx - \varepsilon^2 x^2}$ och låta $\varepsilon \rightarrow 0$ (se uppgift 7.5.15). Man kan säga att bytet av integrationsordning i ekv. (7.31), som inte är tillåtet om integralen innanför parenteserna i högerledet skall vara meningsfull i termer av vanliga funktioner, blir tillåten när den kan ges en mening i termer av distributioner.

7.5 Uppgifter

7.5.1

Konstruera approximationerna till stegfunktionen svarande mot approximationerna av deltafunktionen i ekv. (7.6), (7.7) och (7.8)!

Svar. I samtliga fall har man $\sigma_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^x h_\varepsilon(y) dy$, där $h_\varepsilon(x)$ är approximationen av $\delta(x)$. Svarande mot (7.6) har man en styckvis linjär och kontinuerlig funktion som är 0 för $x < -\frac{\varepsilon}{2}$, 1 för $x > \frac{\varepsilon}{2}$ och växer linjärt däremellan. Svarande mot (7.7) har man $\sigma_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf}(\frac{x}{\varepsilon}))$ och mot (7.8) har man $\sigma_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tanh(\frac{x}{\varepsilon})$.

7.5.2

Konstruera approximationerna till de första tre derivatorna av en deltafunktion svarande mot approximationerna (7.7) och (7.8) av deltafunktionen! Skissa funktionernas beteende (m.h.a. dator om du vill) och reflektera över varför deras integraler mot en funktion $f(x)$ ger de resultatet de gör i gränsen $\varepsilon \rightarrow 0$.

7.5.3

Bestäm konstanten a så att funktionen

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} a \cos^2 \frac{x}{\epsilon}, & |x| \leq \frac{\pi\epsilon}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi\epsilon}{2} \end{cases}$$

närmar sig en deltafunktion $\delta(x)$ då $\epsilon \rightarrow 0^+$ (a kan eventuellt bero på ϵ).

Svar. $a = \frac{2}{\pi\epsilon}$

7.5.4

Konstruera en approximation till deltafunktionen som i en gräns $\varepsilon \rightarrow 0$ ger den "vanliga" definitionen av andraderivata, erhållen från den vanliga definitionen av derivatan!

Svar. En funktion som är kontinuerlig, noll utanför ett litet interval kring $x = 0$, växer linjärt till sitt maxima värde i $x = 0$ och är symmetrisk kring $x = 0$.

7.5.5

Vad är värdet av integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \frac{\pi}{4}) \tan x \, dx$?

Svar. 1

7.5.6

Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-x} \delta_N(x) \, dx$, där $\delta_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(x - n)$.

Svar. 2

7.5.7

Visa att definitionen av $\delta(x)$ genom "lådfunktionerna" $h_\varepsilon(x)$ leder till δ' som ger det vanliga gränsvärdet i definitionen av en derivata när $\delta'(x - x_0)$ integreras mot en funktion $f(x)$ (ledning: derivatan av g_ε är en distribution även då $\varepsilon \neq 0$). Om du vill, använd andra gränser för deltafunktionen för att härleda alternativa definitioner av derivatan i termer av ett gränsvärde då $\varepsilon \rightarrow 0$.

7.5.8

Visa att $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$, där a är en konstant.

7.5.9

Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion som har nollställena x_I , $I = 1, \dots, N$. Visa att

$$\delta(f(x)) = \sum_{I=1}^N \frac{1}{|f'(x_I)|} \delta(x - x_I).$$

7.5.10

Finn Fouriertransformen till deltafunktionen, och till en konstant funktion!

Svar. De är varandras Fouriertransformer.

7.5.11

Finn den laddningsdistribution som leder till den elektriska potentialen

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > r_0 \\ \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0}, & r \leq r_0 \end{cases}$$

Svar. Laddningstätheten är noll för $r \neq r_0$. På sfären $r = r_0$ måste man ha en total laddning e om potentialen utanför sfären skall se ut som den från en punktladdning e i origo. Laddningsfördelningen är $\rho = \frac{e}{4\pi r_0^2} \delta(r - r_0)$.

7.5.12

Skriv ned deltafunktionen $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$ i cylindriska och sfäriska koordinater för icke-degenererade värden på \vec{r}_0 . Kontrollera att uttrycken har rätt dimension.

Svar. Cylindriska: $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\varrho_0} \delta(\varrho - \varrho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0)$ för $\varrho_0 \neq 0$. Sfäriska: $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \theta_0} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$ för $r_0 \neq 0$, $\sin \theta_0 \neq 0$.

Man bör undvika att använda dessa uttryck för degenererade värden på koordinaterna (annars riskerar man att råka ut för integraler vars ena gräns ligger "mitt i" deltafunktionen, och det är inte utan vidare väldefinierat).

7.5.13

$h_\varepsilon(\vec{r}) = \frac{\varepsilon^2}{2\pi r(r^2 + \varepsilon^2)^2}$ är en bra approximation för $\delta^3(\vec{r})$ då $\varepsilon \rightarrow 0$. Kontrollera att den har rätt dimension!

7.5.14

Betrakta fältet från en oändligt lång virveltråd längs z -axeln, $\vec{u}(\vec{r}) = \frac{J}{2\pi\varrho}\hat{\phi}$. Detta fält uppfyller $\vec{\nabla} \times \vec{u} = J\delta^2(\varrho)\hat{z}$, där $\vec{\varrho} = \varrho\hat{\varrho} = x\hat{x} + y\hat{y}$ (visa gärna detta, om du har lust, med en liknande approximation som i uppgift 7.5.13!). Kontrollera att Stokes sats gäller även för ytor vars ränder omsluter z -axeln.

7.5.15

Visa, t.ex. genom att införa regulariseringar av basfunktioner $e_{k,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx - \varepsilon^2 x^2}$ och genomföra den gaussiska integrationen, att $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx e_{k,\varepsilon}(x)e_{k',\varepsilon}^*(x) = \delta(k - k')$.

7.5.16

Vad är, i distributionsmening, laddningsfördelningen för en punktdipol belägen i punkten $\vec{r} = \vec{r}_0$ och med dipolmomentet \vec{m} ?

Svar. $\rho = -\vec{m} \cdot \vec{\nabla} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$

7.5.17

I två dimensioner, bilda (som vanligt) den komplexa variabeln $z = x + iy$ med komplexkonjugatet $\bar{z} = x - iy$, samt derivatorna $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. Visa att $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z} = \pi\delta^2(x, y)$. Vad har detta med Cauchys formel att göra?

Svar. Man kan t.ex. uttrycka derivatorna i termer av polära koordinater. Då reproduceras samma uttryck som för en 2-dimensionell punktkälla.

Vi har redan (i denna kurs och i mekaniken) stött på potentialer till vektorfält. I mekaniken kunde man, för konservativa krafter, ha $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$, där \vec{F} är en kraft och ϕ motsvarande potentiella energi. Begreppet potential har mycket vidare tillämpningar än så, och dyker upp i de flesta grenar av fysiken. T.ex. är det relevant inom elektromagnetism och strömningslära. Vi skall nu undersöka det litet mer ingående.

8.1 Rotationsfria vektorfält, skalära potentialer

Ett kraftfält kallas *konservativt* om det bevarar den totala mekaniska energin, dvs. kinetisk plus potentiell energi¹.

Arbetet som kraften utför när en partikel flyttas längs kurvan C från \vec{r}_1 till \vec{r}_2 är $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, och ändringen i kinetisk energi under tiden ges av $T_2 - T_1 = W$. Den potentiella energin måste då uppfylla

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2), \quad (8.1)$$

för att summan $T + \phi$ skall vara bevarad. Detta är liktydigt med att

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (8.2)$$

och också med att

¹ Att energin är bevarad är ett grundläggande faktum. Dissipativa krafter (t.ex. friktion) omvandlar dock mekanisk energi till värme, en irreversibel process.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0, \quad (8.3)$$

vilket inses genom att tillämpa Stokes sats på randytor till slutna kurvor C , runt vilka ekv. (8.1) ger $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

I en mer allmän situation än mekanik har vi alltså ett fält \vec{F} som av någon fysikalisk anledning är rotationssfritt (virvelfritt), dvs. uppfyller $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Ett sådant fält kan skrivas i termer av en potential ϕ : $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ (minustecknet är bara en konvention, som passar bra med energitolkningen i mekanik). Potentialen ϕ är inte unikt definierad: om man byter ut $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$, där ϕ_0 är en konstant, ändras inte vektorfältet.

8.2 Poissons och Laplaces ekvationer

Ofta skall ett vektorfält (ett vektorfält med en potential kallas ofta fältstyrka) uppfylla en ekvation $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho$, där ρ är en källfördelning. Vi har redan tolkat denna ekvation i termer av elektrostatik och massflöde. Det betyder att potentialen uppfyller

$$\Delta\phi = -\rho, \quad (8.4)$$

där $\Delta = \partial_i \partial_i$ är Laplaceoperatorn. Denna ekvation kallas *Poissons ekvation* och är mycket viktig. Motsvarande homogena ekvation, dvs. utan källa,

$$\Delta\phi = 0, \quad (8.5)$$

heter *Laplaces ekvation*. Ett fält som löser Laplaces ekvation kallas ett harmoniskt fält. Många fysikaliska problem kan reduceras till att lösa Poissons (eller Laplaces) ekvation för någon källfördelning och med några randvillkor (mer om dessa senare). Vi skall ägna kapitel 9 åt en mycket kort introduktion till några lösningsmetoder.

8.3 Divergensfria vektorfält, vektorpotentialer

Man kan också undersöka vad som händer om man har ett vektorfält som är divergensfritt (källfritt) istället för rotationsfritt, alltså

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0. \quad (8.6)$$

På liknande sätt som man visar att ett rotationsfritt fält kan skrivas som gradienten av en skalär potential, visar man att ett divergensfritt fält

kan skrivas som rotationen av en vektorpotential,

$$\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (8.7)$$

Vi nöjer oss med att notera att detta uppenbarligen är en lösning till ekv. (8.6). Vektorpotentialen till ett givet rotationsfritt fält är inte unik. Om man ersätter $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$, där Λ är en godtycklig funktion, ändras inte \vec{G} . Detta kallas gaugeinvarians².

Om man tillämpar Gauss sats på ett sådant fält får man $\oint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = 0$ för varje sluten yta S . Ekvivalent (om man tänker sig en sluten yta sammansatt av två ytor med gemensam rand) beror $\int_S \vec{G} \cdot d\vec{S}$ endast på randen ∂S och är lika med $\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$.

Exempel

Ett statiskt magnetiskt fält \vec{B} är divergensfritt, och kan alltså skrivas som rotationen av en vektorpotential, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. En integral $m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ tolkas som det magnetiska flödet genom ytan S , och $m = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$

Exempel

Hastighetsfältet hos en vätska med konstant densitet är, som vi har sett, källfritt, och kan alltså uttryckas med hjälp av en vektorpotential.

Om fältet \vec{G} också uppfyller $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{j}$ (i det magnetiska exemplet är \vec{j} elektrisk strömtäthet), kan detta uttryckas som en ekvation för vektorpotentialen,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{j}. \quad (8.8)$$

Detta är nästan Poissons ekvation för vektorn \vec{A} . Kom ihåg att $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$. Det är vanligt att man använder gaugefriheten för \vec{A} för att välja en vektorpotential som uppfyller $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Med detta val får man Poissons ekvation:

² Den här godtyckligheten ser ut som en liten kuriositet just nu, men är helt fundamental i elektromagnetism, där den ligger till grund för att elektrisk laddning är konserverad. Gaugeinvarians utgör också basen för teorierna för svag och stark växelverkan, och är alltså central i teoretisk fysik.

$$\Delta \vec{A} = -\vec{j}. \quad (8.9)$$

Det går alltid att hitta en vektorpotential som uppfyller detta; gör den inte det från början lägger man till något $\vec{\nabla}A$ tills det stämmer. Vi går inte in på de detaljerna.

På detta sätt ser vi hur fysikaliska ekvationer, som talar om vilken käll- och virveltäthet vektorfält har, ger Poissons ekvation för potentialer.

8.4 Potentialer för godtyckliga vektorfält

Om vi har ett vektorfält som varken är käll- eller virvelfritt, utan uppfyller $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho$ och $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$, kan vi (eftersom ekvationerna är linjära) dela upp det i en rotationsfri del \vec{F} och en divergensfri del \vec{G} , dvs. $\vec{H} = \vec{F} + \vec{G}$, där

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \rho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} &= 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{j}.\end{aligned}\quad (8.10)$$

Sedan kan man uttrycka de två fälten som potentialer, $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$, $\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

8.5 Standardexempel på käll- och virvelfördelningar

Låt oss gå igenom "standardexemplen": punktkälla, linjekälla och virveltråd.

En punktkälla med styrkan q i origo (liksom i de andra fallen fås andra lägen genom translation av uttrycken) ger som bekant upphov till ett vektorfält

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}. \quad (8.11)$$

Vi har redan sett att detta fält är rotationsfritt, men har en källa $\rho = q\delta^3(\vec{r})$. Fältet har en potential

$$\phi = \frac{q}{4\pi r}, \quad (8.12)$$

som uppfyller Poissons ekvation med källan $\rho = q\delta^3(\vec{r})$,

$$\Delta\phi = -q\delta^3(\vec{r}). \quad (8.13)$$

En linjekälla på z -axeln med konstant styrka k (laddning per längdenhet, om man tänker på ett statiskt elektriskt fält) ger upphov till vektorfältet

$$\vec{F} = \frac{k}{2\pi\varrho} \hat{\varrho} \quad (8.14)$$

(detta är samma fält som från en punktkälla i två dimensioner; märk att nämnaren i både detta fall och det föregående är volymen av en $(D - 1)$ dimensionell sfär). Motsvarande potential är

$$\phi = -\frac{k}{2\pi} \log \frac{\varrho}{a}, \quad (8.15)$$

där vi har infört en konstant a för att undvika att ta logaritmen av något dimensionsfullt. Potentialen uppfyller Poissons ekvation:

$$\Delta\phi = -k\delta^2(\varrho). \quad (8.16)$$

En virveltråd på z -axeln med styrka J ger upphov till fältet

$$\vec{G} = \frac{J}{2\pi\varrho} \hat{\varphi}. \quad (8.17)$$

Vektorpotentialen är (t.ex., med tanke på gaugeinvarians)

$$\vec{A} = -\frac{J\hat{z}}{2\pi} \log \frac{\varrho}{a}, \quad (8.18)$$

vilket kan ses genom att uttryckligen räkna ut $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ i cylindriska koordinater:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \frac{\varrho\hat{\varphi}}{\partial\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\varrho} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{J}{2\pi} \log \varrho \end{vmatrix} = \frac{J}{2\pi\varrho} \hat{\varphi}. \quad (8.19)$$

Notera att denna vektorpotential uppfyller $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, och därför ges virvelfördelningen av $-\Delta\vec{A}$. Eftersom \vec{A} bara har en z -komponent, och z är en Cartesisk koordinat, kan man använda uttrycket för Laplaceoperatorn på en skalär verkande komponentvis för att räkna ut $\Delta\vec{A}$. Det blir samma räkning som för linjekällan ovan, och vi har

$$\Delta\vec{A} = -J\hat{z}\delta^2(\varrho). \quad (8.20)$$

Notera att ekvationen $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{j}$ innebär att \vec{j} i sin tur är divergensfri, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Se uppgift 8.7.1 för en fysikalisk tolkning.

8.6 Randvärdesproblem

Vi har sett att Poissons ekvation, och i frånvaro av källor och virvlar, dess homogena specialfall Laplaces ekvation, naturligt dyker upp som en differentialekvation som styr potentialerna. Förutom själva differentialekvationen behöver man förstås ange någon sorts randvärden för att problemet skall vara välspecificerat. Vi skall tänka att vi vill lösa Poissons ekvation i en ändlig volym³, V . Att ta reda på precis ”hur mycket” villkor, och av vilket slag, man bör lägga på fältet på randen ∂V är ju ett matematiskt problem, men det matematiska svaret på frågan bör också vara ett svar inom fysik, så att en given fysikalisk förutsättning ger en unik lösning (fältkonfiguration).

Vi tänker oss alltså att vi står inför ett randvärdesproblem, som består av den partiella differentialekvationen $\Delta\phi = -\rho$ samt några randvillkor som säger något om hur ϕ beter sig vid randen. Vi skall utföra ett litet trick för att ta reda på vettiga sätt att formulera randvillkor. Antag att ϕ_1 och ϕ_2 båda är lösningar. Om vi bildar skillnaden $\psi = \phi_1 - \phi_2$, uppfyller ψ Laplaces ekvation, $\Delta\psi = 0$. Om vi vill att lösningen till Poissons ekvation skall vara unik kan vi försöka visa det genom att visa att lösningen till Laplaces ekvation är en trivial potential $\psi = \text{konstant}$ (kom ihåg att potentialer som skiljer på en konstant ger samma vektorfält), så att ϕ_1 och ϕ_2 måste vara ”lika”, dvs. som mest skilja på en konstant.

Betrakta nu identiteten

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \Delta \psi = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi = |\vec{\nabla} \psi|^2, \quad (8.21)$$

som gäller när $\Delta\psi = 0$. Tillämpa nu Gauss sats på vektorfältet $\psi \vec{\nabla} \psi$. Man får

$$\int_V |\vec{\nabla} \psi|^2 dV = \int_{\partial V} \psi \vec{\nabla} \psi \cdot d\vec{S}. \quad (8.22)$$

Vänsterledet är positivt semidefinit, och noll endast om ψ är konstant. Så om vi hittar på randvillkor som gör högerledet till noll har vi visat det vi vill. Ytintegralen i högerledet är $\int_{\partial V} \psi (\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}) dS$. Vi har två faktorer i integranden, ψ och $\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}$ (detta är ”normalderivatan” vid randen, alltså riktningsderivatan i normalens riktning). Om den ena eller den andra är noll på randen är lösningen till Laplaces ekvation trivial

³ Vi har tidigare mest arbetat med lösningar på hela rummet. Ofta kan man se det som att man har en stor volym som går mot oändligheten. Det kan ofta finnas fysikaliska skäl att kräva speciella beteenden i oändligheten, t.ex. att en fältstyrka skall vara kvadratiskt integrerbar för att energin (i elektromagnetism t.ex.), sannolikheten (i kvantmekanik) eller någon annan fysikalisk storhet skall vara ändlig.

(konstant) på V (om $\psi|_{\partial V} = 0$ är lösningen att ψ är identiskt noll, men om $(\vec{\nabla}\psi)|_{\partial V} \cdot \vec{n} = 0$ är alla konstanta ψ en lösning).

Nu kan vi gå tillbaka och se hur randvillkor på ϕ , som skall uppfylla Poissons ekvation, kan formuleras. Om vi kräver

$$\text{Dirichlets randvillkor: } \phi|_{\partial V} = f, \quad (8.23)$$

där f är en funktion på randen, får vi motsvarande homogena villkor för $\psi = \phi_1 - \phi_2$. Likaså om vi kräver

$$\text{Neumanns randvillkor: } (\vec{\nabla}\phi)|_{\partial V} \cdot \vec{n} = g, \quad (8.24)$$

där g är en funktion på randen. Vi har då visat att Poissons ekvation i volymen V med någon källfördelning ρ har en unik lösning (sånär som på en ointressant konstant) för dessa två typer av randvillkor.

Exempel

Ett elektrostatiskt problem. Vi söker det elektriska fältet mellan två parallella ledande plan. Att randen är en ledare betyder att laddningar ställer in sig så att randen är en ekvipotentialytta. Man har Dirichlets randvillkor med ett konstantt värde på potentialen på det ena planet och ett annat konstantt värde på det andra. Problemet är endimensionellt. Lösningen blir att ϕ går linjärt mellan de två värden i utrymmet mellan planen.

8.7 Uppgifter

8.7.1

Bevisa/argumentera för att en virveltråd (i en omgivning som inte innehåller andra virvlar) inte kan ha ändar, dvs. att den antingen är sluten eller oändlig, och att den har konstant styrka. Man kan alltså *inte* ha t.ex. $\vec{j} = \hat{z}f(z)\delta^2(\vec{\varrho})$ om inte $f(z) = J$ är konstant. Tolka detta resultat för strömmen i det magnetostatiska exemplet i termer av konservering.

8.7.2

Ett vektorfält \vec{F} är givet i sfäriska koordinater som

$$\vec{F} = \frac{a \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{b \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}.$$

Bestäm det förhållande mellan a och b som gör att fältet blir virvelfritt.
Bestäm potentialen ϕ .

Svar. $\frac{a}{b} = 2$, $\phi = \frac{b \cos \theta}{r^2} + C$.

8.7.3

Det vektorfält som har den skalära potentialen $\phi(\vec{r}) = r^{-2} \cos \theta$ kan utanför origo alternativt beskrivas med en vektorpotential \vec{A} . Visa detta genom att ange en explicit form på \vec{A} . Vilka andra \vec{A} är möjliga?

Svar. $\vec{A} = \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\varphi} + \vec{\nabla} f$

8.7.4

Visa att villkoret för existensen av en skalär potential till ett vektorfält i godtyckligt antal dimensioner är $\partial_{[i} F_{j]} = 0$, och att det är tomt i en dimension. Vad är motsvarigheten till en vektorpotential i annan dimensionalitet än tre?

8.7.5

Visa eller argumentera övertygande för att om ett skalärt fält ϕ uppfyller Laplaces ekvation på hela \mathbb{R}^3 (och inte är en trivial lösning med $\vec{\nabla} \phi = 0$), kan inte någon ekvipotentialyta till ϕ vara sluten.

8.7.6

Låt V vara en begränsad volym (dvs. ∂V är en sluten yta) som innehåller punkten $\vec{r} = \vec{a}$. Betrakta Poissons ekvation $\Delta \phi(\vec{r}) = -q \delta^3(\vec{r} - \vec{a})$ med Neumanns homogena randvillkor på ∂V . Visa eller argumentera övertygande för att det inte finns någon lösning. Ge något exempel på fysikalisk tolkning av ekvationen och randvillkoret som visar det orimliga i frågeställningen.

8.7.7

Vad är fel i följande resonemang?

“Kriteriet för att ett vektorfält \vec{F} skall vara konservativt är att $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Om vi kontrollerar fältet $\vec{F} = \varrho^{-1}\hat{\varphi}$, givet i cylindriska koordinater, finner vi genom explicit uträkning av rotationen att $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Därför finns det en potential till \vec{F} , sådan att $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$, och $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ för varje sluten kurva C .”

8.7.8

(*) Använd Gauss sats för att bevisa “Greens andra formel”

$$\oint_{\partial V} (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{S} = \int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dV.$$

Välj sedan ψ som Greensfunktionen $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}$, där \vec{r}_0 ligger i V , och visa att detta leder till “Greens tredje formel”

$$\phi(\vec{r}_0) = - \int_V \frac{\Delta \phi}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} dV + \oint_{\partial V} \left(\phi \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} + \frac{\vec{\nabla} \phi}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} \right) \cdot d\vec{S}$$

(kom ihåg deltafunktionen i $\Delta \psi$). Låt nu ϕ vara en harmonisk funktion (i V) och välj V som en boll med centrum i \vec{r}_0 . Visa att ϕ uppfyller medelvärdessatsen för harmoniska funktioner: medelvärdet av fältet över en sfär är lika med värdet i sfärens mittpunkt:

$$\phi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S^2} \phi d\Omega.$$

Kontrollera medelvärdessatsen för fältet från en punktkälla genom explicit integration (när sfären inte omsluter punktkällan).

Lösningsmetoder för partiella differentialekvationer

9

Vi skall titta kort på ett par metoder för lösning av partiella differentialekvationer, med fokus på Poissons ekvation. Detta är ett mycket stort ämne, så det blir mycket summariskt och allt annat än heltäckande. Numeriska metoder utelämnar vi helt. Istället rekommenderas kursen i Fourieranalys, samt de valfria kurserna Partiella differentialekvationer och Matematisk fysik. Vissa metoder kommer naturligt in, och utvecklas, även i andra fysikkurser, t.ex. kurserna i elektromagnetisk fältteori och kvantfysik.

De metoder som skall nämnas här är

1. *Greensfunktionsmetoden*. Man utgår från fältet från en punktkälla för att konstruera fältet från en godtycklig källfordelning.
2. *Speglings*. En metod som är intuitivt enkel och ger ett snabbt svar i vissa speciella geometrier.
3. *Variabelseparation*. En kraftfull och principiellt viktig metod, som vi skall behandla kortfattat.

En metod som är användbar i två dimensioner är konform avbildning; vi lämnar den till kursen i komplex analys. I praktiken kan man förstås kombinera olika metoder. Exempelvis kan man lösa en del av ett problem med variabelseparation, och till slut hamna i ett läge där man behöver göra en numerisk lösning. Numeriska metoder för lösning av partiella differentialekvationer är mycket viktiga i så gott som alla tillämpningar.

9.1 Greensfunktioner

Principen bakom Greensfunktioner är att om vi känner till fältet från en punktladdning, så kan vi använda superpositionsprincipen för att få fältet från en godtycklig laddningsfördelning.

Vi skall här titta på lösningar till Poissons ekvation,

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}). \quad (9.1)$$

Differentialoperatorn i vänsterledet är Laplaceoperatorn. Metoden i sig är mycket vidare tillämplig; det är bara de explicita uttryck vi skall härleda som gäller speciellt för Poissons ekvation. Förutom själva den partiella differentialekvationen har man randvillkor som ϕ skall uppfylla på randen till det område man löser Poissons ekvation i. Vi såg i förra kapitlet att det finns två typer av randvillkor som är "bra", i meningen att de leder till unika lösningar: Dirichlets randvillkor, som specificerar värdet av ϕ på randen, och Neumanns, som specificerar värdet av normalderivatan av ϕ , $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi$, på randen. Vi skall nu begränsa oss till homogena randvillkor, dvs antingen Dirichlet, $\phi|_{\partial V} = 0$, eller Neumann, $\vec{n} \cdot (\vec{\nabla}\phi)|_{\partial V} = 0$. (När det gäller områden som inte är begränsade, t.ex. \mathbb{R}^3 , har vi inte visat samma sak, utan litar mest på att det ordnar sig.)

Definition av Greensfunktion: Greensfunktionen är den funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ som uppfyller Poissons ekvation (sedd som en funktion av \vec{r}) när det finns en punktkälla med styrkan 1 i \vec{r}' , och som uppfyller de givna randvillkoren.

Uttryckt som en ekvation (i tre dimensioner, analogt i annat antal):

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (9.2)$$

samt randvillkoren då \vec{r} ligger på randen. Notera att Laplaceoperatorn endast har att göra med \vec{r} , inte med \vec{r}' .

Nu är tanken att om vi vet lösningen då det finns en punktkälla någonstans (varsomhelst), så bör vi kunna använda superpositionsprincipen för att få fram lösningen för vilken källfördelning som helst. Vi kan skriva källfördelningen ρ i högerledet i ekv. (9.1) "som en summa av deltafunktioner" enligt

$$\rho(\vec{r}) = \int_{V'} dV' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}'). \quad (9.3)$$

Denna ekvation är egentligen bara definitionen av en deltafunktion (se kapitel 7). Vi skriver alltså om Poissons ekvation:

$$\Delta\phi(\vec{r}) = - \int_{V'} dV' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') . \quad (9.4)$$

Om nu $G(\vec{r}, \vec{r}')$ uppfyller ekv. (9.2), så följer det direkt att

$$\phi(\vec{r}) = \int_{V'} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') . \quad (9.5)$$

Detta visas genom insättning:

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= \Delta \int_{V'} dV' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') = \int_{V'} dV' \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') \\ &= - \int_{V'} dV' \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') = -\rho(\vec{r}) . \end{aligned} \quad (9.6)$$

Lösningen är alltså en superposition av lösningarna svarande mot delafunktionskällor, viktade med ρ . Om vi kan lösa ekvationen för en delafunktionskälla ger ekv. (9.5) ett explicit uttryck för en godtycklig källfördelning.

På \mathbb{R}^3 vet vi vad potentialen från en punktkälla är. Greensfunktionen är

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad (9.7)$$

och lösningen till Poissons ekvation med källa ρ blir

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (9.8)$$

Detta är förstås samma uttryck som vi härledde genom superposition i kapitel 6.5. På \mathbb{R}^2 har vi på samma sätt $G(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}') = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'|}{a}$, och

$$\phi(\vec{\varrho}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dS' \rho(\vec{\varrho}') \log \frac{|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'|}{a} . \quad (9.9)$$

Uttrycket för potentialen (9.5) är givet i termer av källtätheten ρ . Hur gör man om källfördelningen är i form av t.ex. en ytkälla eller linjekälla? Isåfall innehåller ρ någon delafunktion som gör att uttrycket för t.ex. en ytkälla blir det man tror att det skall bli, nämligen

$$\phi(\vec{r}) = \int_{S'} dS' G(\vec{r}, \vec{r}') \sigma(\vec{r}') , \quad (9.10)$$

där σ är ytkälltätheten. När vi har tillgång till delafunktioner, behöver vi inte skriva ned olika specialfall beroende på om källan är en rymdkälla, ytkälla eller linjekälla. Alla fallen täcks av ekv. (9.5).

Exempel

Tag en linjekälla, $\rho(\vec{r}) = k\delta^2(\vec{\varrho})$. Vi sätter in i

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{\mathbb{R}^2} dS' k\delta^2(\vec{\varrho}') \frac{1}{4\pi|\vec{r} - (\varrho'\hat{\varrho}' + z'\hat{z})|}.\end{aligned}$$

Här kan vi utföra integralen $\int dS'$ över x' och y' , med resultatet

$$\phi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{k}{4\pi|\vec{r} - z'\hat{z}|}$$

som är identiskt med den direkta konstruktionen i ekv. (6.20).

Låt oss slutligen undersöka Poissons ekvation för ett vektorfält,

$$\vec{\nabla} \vec{A} = -\vec{j}. \quad (9.11)$$

Ekvationen är relevant speciellt när man har ett divergensfritt fält \vec{F} som därmed kan uttryckas som rotationen av en vektorpotential, $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Det följer direkt från konstruktionen för ett skalärt fält, med lösningen (9.8), att vektorpotentialen från en virvelfördelning $\vec{j}(\vec{r})$ kan skrivas som

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (9.12)$$

Av speciellt intresse är en virveltråd med konstant styrka J längs en oändlig eller sluten kurva C . Vektorpotentialen blir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_C \frac{J d\vec{r}'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (9.13)$$

Greensfunktionsmetoden är en allmän metod, som går bra att använda även för andra differentialoperatorer än Laplaceoperatorn. Den fungerar även i situationer då man har tidsberoende, t.ex. för värmceledningsekvationen och vågekvationen (se kapitel 10.2 och 11.6). Greensfunktionsmetoder är viktiga inom många grenar av fysiken. Sin främsta användning har de ändå då geometrin inte är för komplicerad, utan man kan finna enkla explicita uttryck för Greensfunktionen, som den för Laplaceoperatorn på \mathbb{R}^3 ovan. Sådana exakta lösningar till en linjär ekvation kan sedan tjäna

som utgångspunkt för behandling av icke-linjära ekvationer med hjälp av störningsteori (se t.ex. kvantfysikkursen).

9.2 Spegling

Vi har sett hur kännedom om Greensfunktionen ger fullständig tillgång till lösningar till inhomogena linjära partiella differentialekvationer. Det är då inte så förvånande att det, för krångliga geometrier, kan vara svårt eller omöjligt att lösa Greensfunktionsekvationen. För vissa enkla geometrier kan speglingsmetoden lösa problemet.

Låt oss börja med att betrakta den kanske enklaste modifikationen av \mathbb{R}^3 , nämligen halvrymden $\{\vec{r} : z > 0\}$ (med lämpligt valda koordinater). Från förra kapitlet minns vi att randvillkoren på planet $z = 0$ kan vara av två slag: Antingen Dirichlets randvillkor, $\phi = 0$, eller Neumanns, $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ (vi begränsar oss till homogena randvillkor).

Idén är att ”laddningen ser sin spegelbild i planet”. Låt ortvektorn för laddningen vara \vec{r}_0 . Om vi skulle tänka oss ytterligare en källa/laddning på andra sidan planet, alltså i den del av rummet som vi inte alls löser Poissons ekvation i, som är lika stor fast med motsatt tecken, så blir den kombinerade potentialen från de två laddningarna

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \quad (9.14)$$

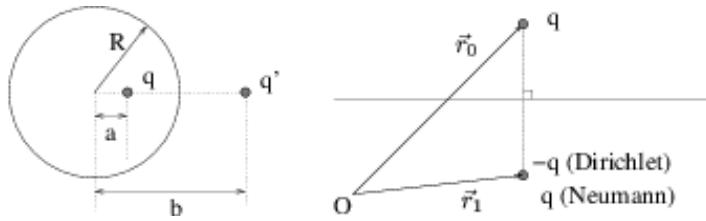
där \vec{r}_1 alltså är ortvektorn för spegelbilden. Vi ser att $\phi = 0$ för de punkter som har lika avstånd till laddningen och dess spegelbild, alltså punkterna på randen. Genom att införa en ”lätsasläddning” på andra sidan planet har vi lyckats få randvillkoren uppfyllda, och kan sedan glömma den; det är som om randen inte längre fanns. Greensfunktionen blir här alltså

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (9.15)$$

Har vi istället Neumanns randvillkor, kan man enkelt försäkra sig om att det uppfylls om man väljer samma tecken i stället för motsatt för den speglade laddningen.

Detta är ett bra tillfälle att repetera begreppen ekvipotentialytor och fältlinjer (till vektorfältet $-\vec{\nabla}\phi$). Se till att förstå att ett randvillkor $\phi = 0$ (Dirichlet) betyder att randen är en ekvipotentialyta, och att $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi = 0$ betyder att fältlinjerna är parallella med randen.

Intressant nog fungerar speglingsmetoden även för cirklar i två dimensioner och sfärer i tre dimensioner (i det senare fallet dock endast för Dirichlets randvillkor). Vi hänvisar detaljerna till uppgifterna 9.4.4 och 9.4.5.



9.3 Variabelseparation

Variabelseparation är en kraftfull metod som kan användas om geometrin i ett problem ”stämmer överens” med något hanterbart koordinatsystem. Den bygger på att man löser ekvationerna stegvis i en variabel i taget. Vi kommer inte att kunna utnyttja hela potentialen i denna formalism här; för att göra det behövs metoder från Fourieranalysen. Vi nöjer oss med att ge en introducerande bild av metoden, med några exempel.

Idén är att lösa den partiella differentialekvationen (som förutsätts vara linjär) stegvis i variabel efter variabel som en ordinär differentialekvation.

Låt oss först betrakta Laplaces ekvation, $\Delta\phi = 0$, på en cirkelskiva $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} < a$. På randen har man Dirichlets randvillkor, $\phi = \phi_0$. Detta är ett trivialt problem, som vi redan vet har den unika lösningen $\phi(\vec{\varrho}) = \phi_0$, men vi går lika fullt vidare. Laplaceoperatorn är

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \Delta_{S^1},\end{aligned}\quad (9.16)$$

där $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ kan tolkas som Laplaceoperatorn på en (enhets)cirkel. Vi vill lösa ekvationen först i variabeln φ , sedan i ϱ . Om vi gissar, med ledning av randvillkorets vinkelberoende, att hela lösningen är vinkelberoende, dvs. att $\phi(\vec{\varrho}) = \phi(\varrho)$, försvinner den andra termen i Δ , och ekvationen för $\phi(\varrho)$ blir

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \right) = 0, \quad (9.17)$$

med lösningarna $\phi(\varrho) = A + B \log \varrho$. Den senare känns igen som en punktkälla (dvs. den är en lösning bara för $\varrho \neq 0$), och får slängas. Matchning med randvillkoret ger $A = \phi_0$.

Detta var mycket besvärligt för något som vi redan visste. Men antag nu att randvillkoret inte är att ϕ skall vara konstant, utan att där finns något vinkelberoende. Tag t.ex. randvillkor $\phi(a, \varphi) = \phi_0 \cos m\varphi$, där m är ett heltal. Återigen kan vi gissa att hela lösningen har just detta beroende av φ , så att

$$\phi(\vec{\varrho}) = f(\varrho) \cos m\varphi. \quad (9.18)$$

Funktionen $\cos m\varphi$ uppfyller

$$\Delta_{S^1} \cos m\varphi = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \cos m\varphi = -m^2 \cos m\varphi, \quad (9.19)$$

dvs. den är en egenfunktion till Δ_{S^1} med egenvärdet $-m^2$. Därför ger insättning av ansatsen (9.18) i ekvationen:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{df(\varrho)}{d\varrho} \right) \cos m\varphi - \frac{m^2}{\varrho^2} f(\varrho) \cos m\varphi = 0, \quad (9.20)$$

och om detta skall gälla överallt på cirkelskivan måste man ha

$$\varrho \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{df(\varrho)}{d\varrho} \right) - m^2 f(\varrho) = 0. \quad (9.21)$$

Den partiella differentialekvationen har nu reducerats till en ordinär differentialekvation.

Med en ansats $f(\varrho) = A\varrho^p$ får vi $p^2 - m^2 = 0$, dvs. $p = \pm m$, där minustecknet väljs bort på grund av singulariteten i origo. Vi har alltså visat att en funktion

$$\phi(\varrho, \varphi) = \phi_0 \left(\frac{\varrho}{a} \right)^m \cos m\varphi \quad (9.22)$$

är en lösning till Laplaces ekvation på cirkelskivan med randvillkoret $\phi(a, \varphi) = \phi_0 \cos m\varphi$.

Hur gör man då om randvillkoret är en mer allmän funktion, $\phi(a, \varphi) = g(\varphi)$? Detta går utöver denna kurs, men behandlas i Fourieranalysen. Man får då skriva $g(\varphi)$ som en (oändlig) summa över m av termer med $\cos m\varphi$

eller sin $m\varphi$ (som var och en är en egenfunktion till Laplaceoperatorn på S^1) och lösa det radiella beroendet för var och en av dem. Den slutliga lösningen har formen av en oändlig summa av termer, en Fouriersumma.

Den enklaste situationen där variabelseparation kan tillämpas är förstås på en rektangel $a < x < b$, $c < y < d$. Laplaceoperatorn är $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Om man vill lösa Laplaces ekvation på rektangeln kan man använda lösningar av typen $\phi(x, y) = f(x)g(y)$, där f och g har egenvärden med samma belopp men olika tecken: $f''(x) = \lambda f(x)$, $g''(y) = -\lambda g(y)$. Om den ena är en trigonometrisk funktion blir den andra en exponentialfunktion.

Exempel

Funktionen

$$\phi(x, y) = \phi_0 \frac{\cosh \frac{\pi y}{2a}}{\cosh \frac{\pi b}{2a}} \cos \frac{\pi x}{2a},$$

löser Laplaces ekvation på rektangeln $-a < x < a$, $-b < y < b$ med randvärden $\phi(-a, y) = \phi(a, y) = 0$, $\phi(x, -b) = \phi(x, b) = \phi_0 \cos \frac{\pi x}{2a}$.

Separationsmetoden kan förstås användas med fler än två variabler. Vill man t.ex. använda den i sfäriska koordinater, hittar man egenfunktioner i tur och ordning i φ , θ och r . Eller så hittar man direkt egenfunktioner på S^2 , s.k. klotytfunktioner (se uppg. 6.6.36).

Exempel

Bestäm p och ℓ så att

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \left(\frac{r}{a} \right)^p \sin^\ell \theta \cos m\varphi,$$

är en lösning till Laplaces ekvation i området $r < a$.

Lösning: Vi minns (se ekv. (4.22)) att Laplaceoperatorn är

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}, \end{aligned}$$

där Laplaceoperatorn på S^2 ,

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

i sin tur kan skrivas

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \Delta_{S^1}.$$

Vi börjar med funktionen $\cos m\varphi$, som är en egenfunktion med egenvärde $-m^2$ till Δ_{S^1} . Nu krävs det att $\sin^\ell \theta \cos m\varphi$ är en egenfunktion till Δ_{S^2} , dvs. att

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d \sin^\ell \theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \sin^\ell \theta = \lambda \sin^\ell \theta.$$

Direkt derivering visar att detta är uppfyllt om $\ell = m$; egenvärdet blir då $\lambda = -\ell(\ell + 1)$. Slutligen har vi den radiella ekvationen, som lyder

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} r^p \right) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} r^p = 0.$$

Detta ger $p = \ell$ eller $p = -\ell - 1$. Den senare lösningen är singulär, så vi väljer den förra.

Funktionen $\phi(\vec{r}) = \phi_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\ell \sin^\ell \theta \cos \ell\varphi$ är alltså en lösning till Laplaces ekvation.

Vi kan inte i denna kurs göra separationsmetoden full rättvisa. För att helt utnyttja den krävs metoder från Fourieranalys, där godtyckliga funktioner kan utvecklas som en serie av funktioner som är egenfunktioner till någon differentialoperator. Tills vidare nöjer vi oss med att vissa typer av randvärden har den trevliga egenskapen att de själva är egenfunktioner till t.ex. Laplaceoperatorn i randvariablerna, och att man utifrån randvillkoren kan gissa sig till en ansats för den fullständiga lösningen. Detta kommer att användas vid problemlösning i kommande kapitel.

9.4 Uppgifter

9.4.1

Lös Poissons ekvation på \mathbb{R} med en punktkälla i $x = 0$.

Svar. $\phi(x) = -\frac{1}{2}q|x| + Ax + B$. Normalt skulle man välja $A = 0$.

9.4.2

Bestäm Greensfunktionen för Poissons ekvation på halvrymden $\{(x, y, z) : z > 0\}$ med Dirichlets homogena randvillkor på randen. (Ledning: en tänkt extra punktkälla på andra sidan begränsningsplanet kan göra att randvillkoret uppfylls, om dess laddning och läge väljs rätt.)

9.4.3

Bestäm Greensfunktionen för Poissons ekvation på $\{(x, y, z) : z > 0\}$ med Neumanns homogena randvillkor på randen.

9.4.4

Bestäm Greensfunktionen för Poissons ekvation på cirkelytan $\{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\}$ med Dirichlets homogena randvillkor på randen.

Svar. $G(\vec{\varrho}, \vec{\varrho}_0) = -\frac{q}{2\pi} \log \frac{|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|}{|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'_0|} + \frac{q}{2\pi} \log \frac{\varrho_0}{a}$, där spegelsbildens koordinater ges av $\varrho'_0 = \frac{a^2}{\varrho_0}$, $\varphi'_0 = \varphi_0$.

9.4.5

Bestäm Greensfunktionen för Poissons ekvation i en sfär med Dirichlets homogena randvillkor.

Svar. $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{\frac{a}{r_0}}{4\pi|\vec{r} - \frac{a^2}{r_0^2}\vec{r}_0|}$, där a är sfärens radie.

9.4.6

Bestäm Greensfunktionen för Poissons ekvation utanför en sfär med Dirichlets homogena randvillkor.

Svar. $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \frac{-q\frac{r_0}{a}}{4\pi|\vec{r} - \frac{a^2}{r_0^2}\vec{r}_0|}$, där a är sfärens radie.

9.4.7

Visa att alla ekvipotentialytor till potentialen från två lika stora och motsatta punktkällor i två dimensioner är cirklar. Rita. Tolka spegling för Dirichlets randvillkor på en cirkel i termer av detta påstående.

9.4.8

Visa att två punktkällor, vars laddningar har olika tecken, i tre dimensioner har precis en ekvipotentialyta som är en sfär. Rita. Tolka detta i termer av spegling.

9.4.9

Visa att fältstyrkan från en punktdipol kan fås genom att ta fältet från en liten (cirkulär) virveltråd, vars radie ε går mot noll samtidigt som $J\varepsilon^2$ hålls konstant, där J är styrkan hos virvelträden.

9.4.10

På en sfär med radien a befinner sig en ytkälla med tätheten $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, där θ är vinkeln från en punkt på sfären. Bestäm vektorfältet för en punkt på symmetriaxeln.

Svar. $\vec{F}(0, 0, z) = \frac{2\sigma_0 a^3}{3|z|^3} \hat{z}$ för $|z| > a$, $\vec{F}(0, 0, z) = -\frac{\sigma_0}{3} \hat{z}$ för $|z| < a$.

9.4.11

Bestäm lösningen till Poissons ekvation $\Delta\phi = -kr$ i området $r < a$ med Dirichlets homogena randvillkor för $r = a$ (k är en konstant).

Svar. $\phi = \frac{k}{12}(a^3 - r^3)$.

9.4.12

I en kvadrat uppfyller det skalära fältet ϕ Laplaces ekvation. Utefter kvadratens sidor varierar ϕ linjärt från $-V$ i ett av hörnen till V i det diagonalt motsatta hörnet. Bestäm ϕ i kvadraten.

Svar. $\phi = V\left(\frac{x+y}{a} - 1\right)$ (med lämpliga definitioner).

9.4.13

Bestäm den lösning till Laplaces ekvation i cirkeln $\rho < a$ som uppfyller $\phi = \phi_0 \cos m\varphi$ på randen, där φ är vinkelkoordinaten och ϕ_0 en konstant. Tolka gärna ditt svar i termer av funktioner av en komplex variabel.

Svar. $\phi = \phi_0 \left(\frac{\rho}{a}\right)^m \cos m\varphi$. Tolkning: realdelen av funktionen $\phi_0 \left(\frac{z}{a}\right)^m$.

9.4.14

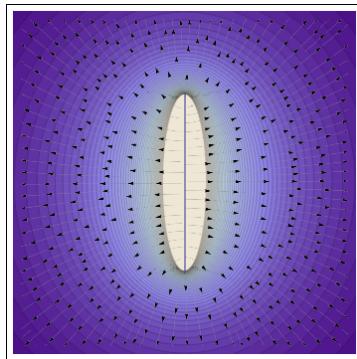
Bestäm lösningen till Laplaces ekvation mellan ellipserna $C_1 : \frac{x^2}{\cosh^2 u_1} + \frac{y^2}{\sinh^2 u_1} = a^2$ och $C_2 : \frac{x^2}{\cosh^2 u_2} + \frac{y^2}{\sinh^2 u_2} = a^2$ med randvillkoren $\phi|_{C_1} = 0$, $\phi|_{C_2} = \phi_0$

Svar. I elliptiska cylinderkoordinater: $\phi = \phi_0 \frac{u-u_1}{u_2-u_1}$.

9.4.15

Beräkna, gärna med en Greensfunktionsmetod, potentialen och fältet från en linjekälla med total laddning Q och konstant laddning per längdenhet, belägen på z -axeln mellan $z = -a$ och $z = a$. Kontrollera att fältet på stora avstånd $r \gg a$ approximeras av det från en punktkälla. Kontrollera också att gränsen $a \rightarrow \infty$ ger standardfältet för en linjekälla på z -axeln.

Svar. $\phi = \frac{Q}{8\pi a} \log \frac{z+a+\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}$



9.4.16

Om ett medium, t.ex. ett plasma, innehåller rörliga laddningar, kommer närvaren av en punktladdning att attrahera laddningar med motsatt tecken och repellera sådana med samma tecknen. Fältet från laddningen blir svagare än i vacuum, eftersom det (delvis) kancelleras av fältet från laddningarna den attraherat. Detta kallas "skärmning". En ekvation som används för att modellera skärmning är modifikationen av Poissons ekvation,

$$(\Delta - k^2)\phi = 0,$$

utanför en källa, där k är en invers längd. Visa att potentialen från en punktkälla q i origo (dvs. Greensfunktionen till denna differentialekvation) är

$$\phi = \frac{q}{4\pi r} e^{-kr}.$$

Om denna potential istället hade kommit från Poissons ekvation med en laddningsfördelning, beräkna den totala laddningen innanför en sfär med radien R , och visa, genom att låta $R \rightarrow \infty$, att den ansamlade laddningen med motsatt tecken är precis lika stor som den ursprungliga punktladdningen. (En annan situation där denna ekvation uppkommer är när man betraktar "fotoner" med massa. Potentialen ϕ kallas då Yukawapotential.)

9.4.17

I två dimensioner, bestäm potentialen från en homogen linjekälla med linjekälltäthet σ_0 på y -axeln mellan $y = -a$ och $y = a$. Kontrollera att din lösning uppfyller att x -komponenten av vektorfältet $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ är diskontinuerlig enligt:

$$F_x(0^+, y) - F_x(0^-, y) = \begin{cases} \sigma_0, & |y| < a, \\ 0, & |y| > a. \end{cases}$$

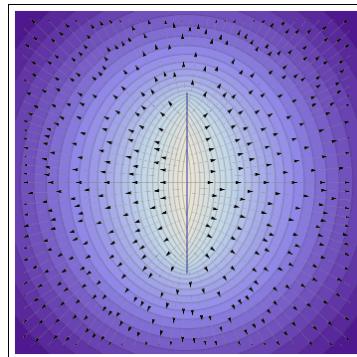
Ledtråd. En primitiv funktion som kan vara användbar är

$$\int \log(t^2 + c^2) dt = t \log(t^2 + c^2) - 2t + 2c \arctan \frac{t}{c}.$$

Svar. Lösningen blir

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= -\frac{\sigma_0}{4\pi} \left[z \log(z^2 + x^2) - 2z + 2x \arctan \frac{z}{x} \right]_{z=-a-y}^{a-y} \\ &= \frac{\sigma_0}{4\pi} \left((y-a) \log \frac{(y-a)^2 + x^2}{a^2} - (y+a) \log \frac{(y+a)^2 + x^2}{a^2} \right. \\ &\quad \left. + 2x \arctan \frac{y-a}{x} - 2x \arctan \frac{y+a}{x} \right) + \text{konstant} \end{aligned}$$

Alla termer utom de med arctan är kontinuerligt deriverbara nära linjekällan. När $x \rightarrow 0$ går argumentet för arctan mot $\pm\infty$. $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} \arctan r = \frac{\pi}{2} \text{sign}(r)$. Så nära $x = 0$ ger de termerna bidrag till potentialen $\frac{\sigma_0 x}{4} \text{sign}(x)(\text{sign}(y-a) - \text{sign}(y+a))$. Detta är $-\frac{\sigma_0 |x|}{2}$ för $|y| < a$ och noll annars, vilket ger rätt diskontinuitet i F_x

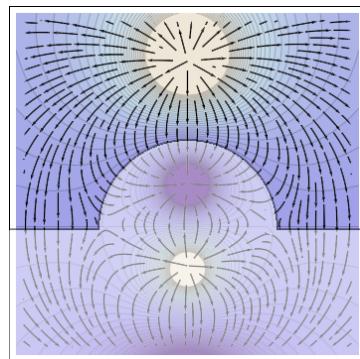


9.4.18

En plan metallyta har en halvsfärisk upphöjning med radien a . Mitt över denna upphöjning, på höjden $2a$ över planet, befinner sig en punktkälla med styrkan q . Bestäm potentialen ϕ från punktkällan, om potentialen i oändligheten och på metallytan är noll.

Svar.

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2a)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{a}{2})^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \frac{a}{2})^2}} \right)$$

**9.4.19**

Visa genom variabelseparation att Laplaceekvationen på en torus T^2 inte har några andra lösningar än en konstant. En torus $T^2 = S^1 \times S^1$ är produkten av två cirklar, och Laplaceoperatorn är $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$, där ϕ och ψ är två vinklar. Man kan också se torusen som en kvadrat med periodiska randvillkor, dvs. $f(x+a, y) = f(x, y+a) = f(x, y)$.

9.4.20

Lös Laplaces ekvation mellan två hyperbler av typen $y = C/x$, när fältet tar ett konstantt värde på vardera hyperbeln.

Svar. Pröva med linjära funktioner av xy .

9.4.21

(*) Låt C_1 och C_2 vara två slutna kurvor (i tre dimensioner). Man kan definiera en topologisk invariant, länkningstalet N , som talar om huruvida de två kurvorna är sammanlänkade, och isåfall hur många varv. Om $N = 0$ är inte kurvorna sammanlänkade, om $N = \pm 1$ hänger de ihop som två länkar i en kedja, osv. Visa (med hjälp av en Greensfunktion och genom att se den ena kurvan som en virveltråd) att länkningstalet ges av uttrycket (Gauss länkningsintegral)

$$N = \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{4\pi |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2).$$

Reflektera också över Stokes sats i sammanhanget.

Värmceledningsekvationen (eller diffusionsekvationen) är en partiell differentialekvation som dyker upp i många områden av fysiken. Den styr hur värmekonduktionen transporteras genom ett material, hur kemiska ämnen diffunderar, osv. Detta är det första exemplet, undantaget kontinuitetsekvationen, på en ekvation med tidsberoende vi behandlar. Ett par till (vågekvationen, Maxwells ekvationer, Navier–Stokes ekvation) kommer längre fram.

10.1 Värmceledningsekvationen

Vi skall ”härleda” ekvationen för värmekonduktionen. För andra fysikaliska diffusionsfenomen gäller i stort sett samma härledning, fast med andra bokstäver. Vi skall inte diskutera under vilka omständigheter ekvationen är giltig, utan lämnar det till andra ämnen. Det gör att härledningen i sig blir litet skakig, och i viss mån kan tyckas bygga på antaganden och idealiseringar som inte är så väl motiverade, och det är sant.

Vi tänker i första hand på värmekonduktionen i ett fast material. (Om man har en vätska eller gas, kan materialet självt vara i rörelse, och värmekonduktionen kan då ske i rörelse. Detta kallas konvektion, och är i många situationer en snabbare process för temperaturutjämning än diffusion. I ett rum som värmes av ett värmeelement, t.ex., är konvektion mycket viktigare än diffusion — luften cirkulerar.) Värmekonduktionskoefficienten

ϵ i materialet är typiskt proportionell mot temperaturen¹ enligt

$$\epsilon = c\rho T, \quad (10.1)$$

där ρ är densiteten och c värmekapacitiviteten (som alltså mäts i SI-enheten $J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}$). Om värmeeenergi transporteras i materialet kan vi också definiera en värmeströmtäthet \vec{q} , definierad så att det genom en infinitesimal yta med ytelement $d\vec{S}$ under en tid dt flödar energin $dE = \vec{q} \cdot d\vec{S} dt$. Värmeströmtätheten bär alltså SI-enheten $W\cdot m^{-2}$.

ϵ och \vec{q} måste uppfylla en kontinuitetsekvation. Detta påstående gäller så snart man har en täthet och en ström som "hör ihop", dvs. de beskriver täthet och rörelse av samma storhet (i detta fall energi). Vi härledde kontinuitetsekvationen för massflöde med hjälp av Gauss sats i kapitel 4.2. Liksom då är det värt att betona att kontinuitetsekvationen uttrycker att en storhet (i detta fall energi) är bevarad. Kontinuitetsekvationen lyder

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0. \quad (10.2)$$

Ibland vill vi också ta hänsyn till att värmeeenergin inte är bevarad, utan att det finns en källtäthet s . Då ändras ekvationen till att lyda

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = s. \quad (10.3)$$

För att nå fram till värmeförmedlingsekvationen, som är en ekvation för $T(\vec{r}, t)$, behövs ytterligare ett antagande. Vi antar att värmeströmmen \vec{q} är proportionell mot temperaturgradienten (detta är mycket likt ett antagande om t.ex. att en elektrisk ström är proportionell mot det elektriska fältet). Eftersom temperaturskillnader tenderar att utjämns, bör proportionalitetskonstanten vara negativ,

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T. \quad (10.4)$$

Materialkonstanten λ kallas värmeförmedningsförmåga. Ju större den är desto snabbare flödar energin och utjämnar temperaturskillnaderna. Vi skall för övrigt antaga att denna materialegenskap, liksom densiteten och värmekapacitiviteten, är konstanta, så att vi har att göra med ett homogent och isotrop material. Genom att sätta in detta sista antagande i kontinuitetsekvationen fås värmeförmedlingsekvationen,

¹ Strikt talat är det snarare så att $\epsilon = \epsilon_0 + c\rho T$ approximerar energins beroende av temperaturen i stora temperaturintervall, som inte innehåller fasövergångar. Konstanten ϵ_0 är oväsentlig i det följande.

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = s. \quad (10.5)$$

Värmeledningsekvationen (eller diffusionsekvationen) lyder

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = u, \quad (10.6)$$

där $u(\vec{r}, t)$, lämpligt normerad, är värmekälltätheten (i termer av storheterna ovan, $u = \frac{s}{c\rho}$) och $k = \frac{\lambda}{c\rho}$.

Vi kan notera ett par saker.

Värmeledningsekvationen är en första ordningens ekvation i $\frac{\partial}{\partial t}$. Begynnelsevillkor skall alltså ges för $T(\vec{r}, t_0)$, men inte för tidsderivatan.

Om man har en stationär temperaturfördelning, som alltså inte beror på tiden, reduceras värmeledningsekvationen till Poissons ekvation.

Exempel

I en boll med radien a finns en homogen värmekälla. På randen hålls temperaturen (med någon termostatanordning) till funktionen $T(a, \theta, \varphi) = T_0(1 + \frac{1}{2} \cos \theta)$. Bestäm den stationära temperaturfördelningen i bollen $r < a$.

Lösning: Det blir alltså Poissons ekvation, $\Delta T = -\rho_0$, där ρ_0 nu är kvoten av den konstanta värmekälltätheten och värmeledningsförmågan. Vi har inte utvecklat några allmänna metoder för att lösa liknande ekvationer. Fourieranalysen kommer att göra det. Vi blir tvungna att gissa litet, men om vi hittar en lösning vet vi att den är unik. Vi ser att källan inte har något vinkelberoende. Om inte randvillkoret heller hade haft det hade vi kunnat gissa på en helt vinkelberoende lösning. Nu har man också en term i randvillkoret som är proportionell mot $\cos \theta$. Den enklast möjliga ansatsen skulle vara att tro att även temperaturen själv har en vinkelberoende term och en term proportionell mot $\cos \theta$, alltså $T(r, \theta, \varphi) = f(r) + g(r) \cos \theta$. Vi beräknar Laplaceoperatorn på denna ansats, och får

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} (f + g \cos \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (g \cos \theta) \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left[(r^2 f')' + \cos \theta ((r^2 g')' - 2g) \right].\end{aligned}$$

(Detta visar, i och med att ingen annan typ av vinkelberoende genererades, att ansatsen var bra.) Detta skall matchas mot källtermen, vilket innebär att $r^{-2}(r^2 f')' = -\rho_0$, $(r^2 g')' - 2g = 0$. Vi löser ekvationen för f genom att integrera två gånger, vilket leder till $f(r) = -\frac{1}{6}\rho_0 r^2 + \frac{A}{r} + B$, där A och B är konstanter. Ekvationen för g kan lösas genom att ansätta en homogen lösning $g = \text{konstant} \times r^p$, som ger $p(p+1) - 2 = 0$, dvs. $p = 1$ eller $p = -2$. Temperaturen är

$$T(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{6}\rho_0 r^2 + \frac{A}{r} + B + Cr \cos \theta + \frac{D \cos \theta}{r^2}.$$

Termerna med konstanterna A och D är singulära i $r = 0$, så dem vill vi inte ha med. (Vi känner också igen A -termen som potentialen från en punktkälla i origo, och någon sådan finns inte. D -terminen är potentialen från en punktdipol.) Randvillkoret vid $r = a$ ger $B = \frac{1}{6}\rho_0 a^2 + T_0$, $C = \frac{T_0}{2a}$, och den resulterande stationära temperaturfördelningen är alltså

$$T(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{6}\rho_0(a^2 - r^2) + T_0 \left(1 + \frac{r}{2a} \cos \theta \right).$$

10.2 Greensfunktioner för värmeförädlingsekvationen

Som tidigare utlovat, kan vi bestämma Greensfunktioner även för tidsberoende differentialekvationer. Vad menar vi med en Greensfunktion? Att den är den temperaturfördelning som uppkommer om källan är en deltafunktion både i rum och tid. Om vi tänker i termer av energi, betyder det att man har en punktlit energikälla som "finns" bara under ett ögonblick, men är precis så stark att den tillförda energimängden är ändlig. Det känns som att det skulle betyda att temperaturen själv är ungefärlig en deltafunktion alldeles strax efter det att källan har "blinkat till". Vi skall strax se att det är så.

Vi söker alltså lösningen till Greensfunktionsekvationen svarande mot värmeförädlingsekvationen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \delta^D(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \quad (10.7)$$

på hela rummet \mathbb{R}^D . Finner vi lösningen till denna ekvation, kan lösningen till värmeförädlingsekvationen (10.6) för godtycklig källfördelning u skrivas

$$T(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^D x' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') u(\vec{r}', t') \quad (10.8)$$

(beteckningen $d^D x$ betyder en D -dimensionell integral). vilket ses genom att sätta in detta T i värmeförädlingsekvationen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) T(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^D x' \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') u(\vec{r}', t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^D x' \delta^D(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') u(\vec{r}', t') = u(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Vi har skrivit ekvationen i D dimensioner, och vill nu lösa den på ett oändligt rum. Istället för en metodisk lösning skall vi skriva ned lösningen och visa att den uppfyller ekvationen. För det första kan vi använda translationsinvarians i rum och tid för att skriva $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \tilde{G}(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$. Lösningen är

$$\tilde{G}(\vec{r}, t) = \frac{\sigma(t)}{(4\pi kt)^{D/2}} e^{-\frac{r^2}{4kt}}, \quad (10.10)$$

där $\sigma(t)$ är stegfunktionen som tar värdet 0 för $t < 0$ och 1 för $t > 0$. Vi kan se att denna funktion uppfyller Greensfunktionsekvationen genom direkt insättning. Man får två termer, en där $\frac{\partial}{\partial t}$ verkar på $\sigma(t)$ och en där $\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta$ verkar på resten. Kontrollera gärna själv att den andra av dessa är noll. Derivatan av $\sigma(t)$ är $\delta(t)$, och $(4\pi kt)^{-D/2} e^{-\frac{r^2}{4kt}}$ blir en D -dimensionell deltafunktion då $t \rightarrow 0^+$ (detta är en av de approximationer som leder till deltafunktionen som gavs i kapitel 7.2).

Det är bra att faktorn $\sigma(t - t')$ finns med i Greensfunktionen. Den gör att en källa vid tidpunkten t' bara kan påverka vad som händer vid senare tidpunkter $t \geq t'$, så vi har kausalitet.

Genom att skissa Greensfunktionens utseende för olika t ser vi hur den börjar som en deltafunktion vid $t = 0^+$ för att när tiden går bli bredare och lägre, hela tiden med Gaussisk form. Det faktum att rumsintegralen av G är konstant i tiden för $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^D} d^D x G(\vec{r}, t) = 1, \quad (10.11)$$

följer förstås såväl från ekvation (10.7) (m.h.a. Gauss sats) som från dess lösning (10.10), och är ett uttryck för energins bevarande, och naturlig om vi minns att vi kan se värmeförmedlingsekvationen som en kontinuitetsekvation.

Värmeförmedlingsekvationen heter på engelska "the heat equation". Dess Greensfunktion kallas "heat kernel", på svenska ibland "värmekärna".

Lösningen till värmeförmedlingsekvationen med källa $u(\vec{r}, t)$ kan då skrivas

$$\begin{aligned} T(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') u(\vec{r}', t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \frac{\sigma(t-t')}{(4\pi k(t-t'))^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}{4k(t-t')}} u(\vec{r}', t') \\ &= \int_{-\infty}^t dt' \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \frac{1}{(4\pi k(t-t'))^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}{4k(t-t')}} u(\vec{r}', t'). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Vi såg nyss att Greensfunktionen själv beter sig som $\delta^D(\vec{r} - \vec{r}')$ för $t - t' \rightarrow 0^+$. Om vi skulle välja en källa $u(\vec{r}, t) = f(\vec{r})\delta(t)$ får vi alltså en lösning $T(\vec{r}, t)$ som då $t \rightarrow 0^+$ går mot $f(\vec{r})$. Att lösa värmeförmedlingsekvationen med en sådan källa är samma sak som att lösa värmeförmedlingsekvationen utan källa med begynnelsevillkoret $T(\vec{r}, 0) = f(\vec{r})$. (Detta är sant för denna ekvation, som är första ordningen i $\frac{\partial}{\partial t}$, liksom för Schrödingerekvationen, som också är det, men inte för t.ex. vågekvationen, som är en andra ordningens ekvation i $\frac{\partial}{\partial t}$.) Lösningen till värmeförmedlingsekvationen med detta begynnelsevillkor är då

$$T(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^D} d^D x' \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}{4kt}} T(\vec{r}', 0). \quad (10.13)$$

Det är värt att betona att den explicita Greensfunktion vi har skrivit ned här gäller då man har värmeförmedling/diffusion i ett (tänkt) oändligt medium. Om man har ett begränsat område med randvillkor för temperaturen (eller motsvarande fysikaliska storhet) skall också Greensfunktionen uppfylla dessa randvillkor, och kommer att se annorlunda ut.

Exempel

Lös värmeförmedlingsekvationen i en dimension med begynnelsevillkor

$$T(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Begynnelsevillkoret är alltså en stegfunktion. Hur mjukas den upp då tiden går?

Enligt ovan är lösningen (med $D = 1$) för $t > 0$

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} T(x', 0) \\ &= T_0 \int_0^{\infty} dx' \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}}. \end{aligned}$$

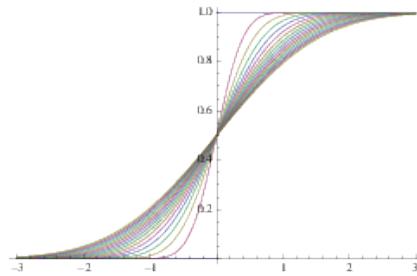
Byt integrationsvariabel till $y = \frac{x'-x}{\sqrt{4kt}}$.

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

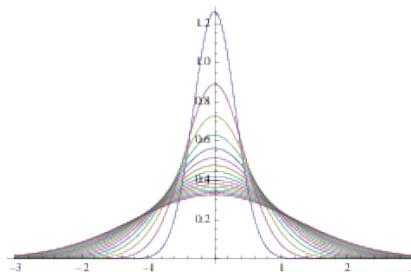
Resultatet kan uttryckas med hjälp av funktionen ("error function") $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$, och blir då

$$T(x, t) = \frac{T_0}{2} \left(\text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) - \text{erf}\left(-\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \right) = \frac{T_0}{2} \left(1 + \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \right).$$

Detta ser ut som en "uppmjukad stegfunktion". Värdet i $-\infty$ och ∞ är hela tiden 0 resp. T_0 , men övergången mellan värdena blir allt mjukare ju mer tiden går, och sker vid tiden t över en typisk längdskala \sqrt{kt} . Figuren visar utseendet för några tider. Tidsstegen mellan närliggande kurvor är lika stora.



Den andra figuren visar själva Greensfunktionens utseende för samma tidssteg.



10.3 Uppgifter

10.3.1

En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$ (där d är plattans tjocklek). Motsvarande begränsningsytor hålls vid konstanta temperaturer T_0 respektive T_d . Bestäm temperaturfördelningen i plattans inre, där Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ gäller.

Svar. $T(z) = (T_d - T_0) \frac{z}{d} + T_0$

10.3.2

Ett kompositmaterial med värmeförläggningsförmågan λ [W/mK] innehåller en radioaktiv isotop vars sönderfall ger en uppvärmning som av en värmekälla med en konstant rymdkälltäthet ρ_0 [W/m³]. Ett stycke av materialet formas till en sfär med radien a och kopplas till en termostat vilken reglerar temperaturfördelningen T vid ytskiktet så att denna uppfyller

$$T(a, \theta, \varphi) = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cos \theta \right),$$

där θ och φ är sfäriska vinkelkoordinater. Bestäm temperaturfördelningen inuti sfären.

Svar. $T(r, \theta) = \frac{\rho_0}{6\lambda} (a^2 - r^2) + T_0 + \frac{T_0}{2} \frac{r}{a} \cos \theta$

10.3.3

Ett sfäriskt skal tillförs en konstant värmeeffekt W_0 genom den inre ytan $r = a$ och avkyls enligt Newtons avkylningslag $\hat{r} \cdot \vec{J} = \alpha(T - T_0)$, genom den yttre ytan $r = b$, där α och T_0 är givna konstanter. Skalet antas homogent med konstant värmeförmedlingsförmåga λ och problemställningen sfäriskt symmetrisk. Bestäm temperaturen överallt i skalet.

Svar. $T(r) = T_0 + \frac{W_0}{4\pi\alpha b^2} + \frac{W_0}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$

10.3.4

En kropp V hålls värmesolerad från omgivningen; på randen till kroppen gäller Neumanns homogena randvillkor för temperaturen. Initiatlty gäller $T = T_0$ i hela kroppen. Vid tiden $t = 0$ slås en värmekälla på med värmekälltätheten $s = P\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$, där P är en konstant och \vec{r}_0 ortvektorn för en punkt i kroppen. Denna värmekälla förblir sedan påslagen. Bestäm värdet av $\int_V T(\vec{r}, t)dV$ för alla tider $t > 0$.

Svar. $\int_V T dV = T_0 V + \frac{Pt}{c\rho}$

10.3.5

Antag att man vid tiden $t = 0$ har en endimensionell temperaturfördelning $T(x, t = 0) = T_0 \frac{x}{a}$. (Detta är förstås i praktiken omöjligt, eftersom det finns en undre gräns för temperatur, så man kan se det som giltigt i ett område. Här behandlar vi det dock rent matematiskt.) Eftersom Laplaceoperatorn på begynnelsevärdet är noll, verkar det inte som att man (i frånvaro av värmekällor) får något tidsberoende alls hos temperaturen, utan $T(x, t) = T_0 \frac{x}{a}$. Verifiera att detta också är resultatet som en beräkning med Greensfunktion ger.

11.1 Statiska elektriska och magnetiska fält

Vi har redan använt statiska elektriska och magnetiska fält i många exempel. Ett statiskt elektriskt fält uppfyller

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad \leftarrow [\text{denna ekvation kommer att ändras}] \quad (11.1)$$

Här är ρ den elektriska laddningstätheten, och ϵ_0 en naturkonstant, som kallas dielektricitetskonstanten (eller permittiviteten) i vacuum. (Vi skall här bara titta på elektromagnetiska fält i vacuum. I något material kan man ha andra värden på ϵ .) För ett numeriskt värde på ϵ_0 , se nedan. Egentligen kan man se den som en omvandlingsfaktor, det går förstås att välja ett (“naturligt”) enhetssystem där den är 1.

Den första ekvationen i (11.1) säger att elektrisk laddning är källa till det elektriska fältet. Den andra ekvationen säger att det statiska elektriska fältet inte har några virvlar, och betyder att det kan uttryckas i termer av en skalär potential,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi. \quad \leftarrow [\text{denna ekvation kommer att ändras}] \quad (11.2)$$

Elektrostatiska problem kan alltså uttryckas som Poissons ekvation för den elektrostatiska potentialen ϕ

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (11.3)$$

För ett statiskt magnetiskt fält gäller "det omvänta", att det inte har några källor ("det finns inga magnetiska laddningar"), men virvlar, som ges av elektrisk ström, dvs. elektriska laddningar i rörelse:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad \leftarrow [\text{denna ekvation kommer att ändras}] \quad (11.4)$$

μ_0 är också en naturkonstant, som kallas magnetiska permeabiliteten hos vacuum. Liksom ϵ_0 kan den ses som en omvandlingsfaktor. I SI-enheter definieras värdet på μ_0 dumt nog till $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ TA}^{-1}\text{m}$. Som vi skall se om en liten stund är $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, där c är ljushastigheten, vilket med hjälp av definitionen $c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}$ ger värdet $\epsilon_0 \approx 8.854188 \times 10^{-12} \text{ CV}^{-1}\text{m}^{-1}$. (Enheterna för elektriska och magnetiska fält är stöksiga i SI-systemet, och vi skall inte syssla mer med dem än så här.)

Eftersom det magnetiska fältet är divergensfritt, kan det skrivas i termer av en vektorpotential,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (11.5)$$

Om man väljer $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (se kapitel 8.3), reduceras ett magnetostatiskt problem till Poissons ekvation för vektorpotentialen:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (11.6)$$

Exempel

Inuti en jordad metallsfär med radien a befinner sig en rymdladdning $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \cos \theta$. Bestäm potentialen i sfären.

Lösning: För potentialen i sfären gäller Poissons ekvation

$$\Delta \phi = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos \theta.$$

Det faktum att sfären är jordad ger oss randvillkoret $\phi(a, \theta, \varphi) = 0$.

Vi ansätter nu en lösning på formen $\phi(r, \theta, \varphi) = f(r) + g(r) \cos \theta$. På samma sätt som i värmeleddningsproblemets kan vi dela upp det på två ordinära differentialekvationer

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right) \cos \theta + \frac{g(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d \cos \theta}{d\theta} \right) \\ &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right) - \frac{2}{r^2} g(r) \right] \cos \theta = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos \theta. \end{aligned}$$

f har samma lösning som i det tidigare fallet: $f(r) = \frac{A}{r} + B$. Lösningen för g blir något mer komplicerad än tidigare, eftersom vi måste lägga till en partikulärlösning $-\frac{\rho_0}{4\epsilon_0}r^2$ och den totala lösningen för g blir $g(r) = \frac{C}{r^2} + Dr - \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}r^2$. Nu sätter vi först $A = C = 0$, så att lösningen inte blir singulär i origo. Sedan tillämpar vi vårt randvillkor att $\phi(a, \theta, \varphi) = 0$. Å Detta ger först att $B = 0$. Det ger också ekvationen $Da - \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}a^2 = 0$, som till sist ger $D = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}a$. Potentialen blir därför

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (a - r) r \cos \theta.$$

I vissa fall kan man istället utnyttja integralformen av Gauss lag,

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV = Q, \quad (11.7)$$

där Q alltså är den laddning som innesluts av ytan S .

Exempel

En sfärisk symmetrisk laddningsfördelning består av två delar: En rymladdning $\rho(r) = \rho_0$ för $r < a/2$ och en ytladdning $\sigma = -\rho_0 a/24$ för $r = a$. Bestäm det elektriska fältet.

Lösning: Eftersom laddningsfördelningen är sfäriskt symmetrisk kommer det elektriska fältet överallt att vara riktat i radiell led. Den totala positiva laddningen är $\pi a^3 \rho_0 / 6$ och den totala negativa laddningen är $-\pi a^3 \rho_0 / 6$. Det finns därför ingen nettoladdning, och därmed blir $\vec{E} = 0$ för $r > a$.

Om vi tillämpar Gauss lag på en sfärisk yta med en radie r sådan att $a/2 < r < a$ följer att

$$4\pi r^2 \epsilon_0 E_r(r) = \frac{\pi a^3 \rho_0}{6},$$

så att

$$E_r(r) = \frac{a^3 \rho_0}{24\epsilon_0 r^2}.$$

För $r < a/2$ får vi istället

$$4\pi r^2 \epsilon_0 E_r(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0,$$

så att

$$E_r(r) = \frac{r \rho_0}{3\epsilon_0}.$$

Denna och liknande uppgifter kan förstås även lösas direkt med uttrycket från ekvation (6.30).

11.2 Maxwell's ekvationer

Vi har redan indikerat ovan vilka av ekvationerna som behöver ändras när vi övergår från att betrakta statiska fält till att tillåta tidsberoende hos \vec{E} och \vec{B} . När man har tidsberoende fält är inte längre de elektriska och magnetiska fälten oberoende av varandra. Ett exempel på det är fenomenet induktion, som ni säkert stött på i gymnasiefysiken. Om det magnetiska flödet genom en yta S ändras (dvs. har en tidsderivata $\neq 0$) får spänning längs dess randkurva ∂S . Detta utnyttjas t.ex. i transformatorspolar. Relationen som styr detta formulerades och verifierades experimentellt på 1830-talet (Faraday, Henry) och kallas Faradays lag. Den säger att den elektriska spänningen är (minus) tidsderivatan av det magnetiska flödet ,

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (11.8)$$

där flödet är $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Genom att använda Stokes sats på vänsterledet, och utnyttja att ytintegranderna måste vara lika för att integralerna över varje yta S skall vara lika, får vi

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (11.9)$$

Denna ekvation skall alltså ersätta den första av de "felaktiga" ekvationerna ovan, den i ekv. (11.1).

Det är inte riktigt klart ännu. Ekvationerna som styr elektromagnetism måste vara konsistenta med att elektrisk laddning är bevarad. Vi påminner om att laddningskonservering uttrycks som kontinuitetsekvationen $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Men om vi använder den andra ekvationen i (11.4) får vi $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$. Tillsammans med kontinuitetsekvationen ger detta att $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, vilket är ett helt orimligt resultat (en laddning kan inte röra sig...). Om vi lägger en term proportionell mot $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ till den andra ekvationen i (11.4),

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}, \quad (11.10)$$

får vi istället $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot (\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, där $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ har använts i det sista steget. Istället för en besvärlig inkonsistens har vi med hjälp av denna nya term ordnat det så att kontinuitetsekvationen (och därmed laddningskonservering) följer från ekvationerna för \vec{E} - och \vec{B} -fältet. (Det är bra. Om man tänker efter, var skulle den annars följa från?)

Maxwell ordnade till detta sista som fattades i ekvationerna (1873), och hela uppsättningen ekvationer kallas Maxwells ekvationer:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Notera att, om man bortser från laddningar och strömmar, och även från konstanter, ekvationerna ser ut att vara mycket symmetriska mellan \vec{E} och \vec{B} .

Hur gick det nu med potentialerna? Jo, \vec{B} -fältet är fortfarande divergensfritt, så vi kan ännu skriva $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. \vec{E} -fältet är dock inte längre rotationsfritt, så den gamla relationen till en skalär potential fungerar inte. Vi har dock $0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$, vilket gör att vi kan integrera till $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$. De två homogena Maxwells ekvationer (alltså de som har 0 i högerledet) implicerar att vi kan uttrycka fälten i termer av potentialer enligt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (11.12)$$

Märk att den första av dessa ekvationer uttrycker \vec{E} i en rotationsfri del och en divergensfri del (om $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ väljs till 0), vilket alltid är möjligt, enligt kapitel 8.4.

Vi kommer inte att ägna oss så mycket åt att lösa de tidsberoende ekvationerna. (Det finns förstås metoder, och åtminstone på \mathbb{R}^3 kan man skriva ned Greensfunktioner som ger allmänna lösningar för ϕ och \vec{A} i termer av givna laddnings- och strömtätheter. Vi tittar kort på det i kapitel 11.7.) Den enda typen av lösning vi skall studera ingående är plana elektromagnetiska vågor.

En liten kommentar om vad Maxwells ekvationer innebär. Som vi strax skall se, finns det våglösningar till ekvationerna. Inte så förvånande för oss som har fått kunskap om elektromagnetiska vågor med modersmjölken. Dessa vågor går med farten $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Man undrade naturligt nog vad dessa vågor rör sig i, analogt med t.ex. ljudvågors utbredning i luft. Om man inte visste det kunde man ju inte veta vad de rör sig i förhållande till med farten c . Man tänkte sig en "substans" som uppfyllde universum, en världsenter, som var det medium i vilket vågorna propagerade. Detta visade sig vara fel, vilket slutligt visades av Einstein i hans speciella relativitetsteori (1905). Ljuset rör sig med farten c relativt varje observatör. Hade någon slug person istället tagit Maxwells ekvationer och direkt, matematiskt, undersökt vilken symmetri de har, skulle hon lett fram till Lorentztransformationer (som då hade haft ett annat namn) och speciell relativitetsteori. Den invariansen finns inbyggd i Maxwells ekvationer. Som en liten smak på detta kan vi titta på kontinuitetsekvationen $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Tänk att vi har fyra koordinater, varav ct är den fjärde, och tänk att vi får göra fyrdimensionella skalärprodukter genom att summa över produkter av komponenter. Kontinuitetsekvationen skulle då kunna skrivas $(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (c\rho, j^x, j^y, j^z) = 0$ i termer av fyrdimensionella vektorer. Laddningstätheten verkar vara den fjärde komponenten av strömmen. I fyra dimensioner är kontinuitetsekvationen enklare, och säger bara att strömmen är "divergensfri". På liknande sätt kombinerar ϕ och \vec{A} ihop sig till en fyrdimensionell vektorpotential. Hur man gör med fälten går vi inte in på, men det blir enklare, ekvationerna i (11.11) ersätts av två ekvationer som båda är fyrdimensionella vektorer. Läs en kurs i speciell relativitetsteori för fler sensationella avslöjanden.

11.3 Vågekvationen från Maxwell's ekvationer (*)

Vi skall slutligen ta en titt på elektromagnetiska vågor. Här utgår vi från Maxwell's ekvationer i vacuum utan laddningar och strömmar, dvs.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0.\end{aligned}\tag{11.13}$$

Låt oss kalla dessa ME1-4. Vi börjar med att härleda vågekvationen för det elektriska fältet. Tag rotationen av ME2. Vi får $0 = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$. För den första termen använder vi identiteten (minns hur vi visade den med hjälp av indexnotation) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$, där ME1 har använts i sista steget. För den andra termen ger ME4 $\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. Sammantaget, med användande av ME1, ME2 och ME4:

$$(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{E} = 0.\tag{11.14}$$

Här har vi redan kallat $\epsilon_0 \mu_0$ för $1/c^2$. Vi skall snart se att $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ är den fart med vilken en våglösning propagerar. Ekvation (11.14) kallas vågekvationen. Operatorn $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ kallas vågoperatorn, eller d'Alembert-operatorn, och skrivs ofta \square .

Det är det relativta minustecknet mellan de två termerna i vågekvationen (11.14) som gör att det finns en massa icke-triviala lösningar (vågor). Motsvarande är förstås inte sant om inte termen med tidsderivata hade varit där.

11.4 Grundläggande begrepp för vågrörelse (*)

För att undersöka lösningar till vågekvationen börjar vi med att titta på ett skalärt fält ϕ (har inget att göra med den skalära potentialen) som uppfyller

$$\square \phi = (\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = 0.\tag{11.15}$$

Vi gör en ansats

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (11.16)$$

(Detta är en komplex lösning. Vill man ha lösningen för ett reellt fält kan man ta realdelen. Det är enklare att arbeta med exponentialfunktioner än trigonometriska funktioner.) Denna funktion beskriver en plan våg som finns överallt i hela rummet. När vi deriverar får vi bara ut $i\vec{k}$ och $-i\omega$ som inre derivator. Vågekvationen är uppfylld om $(i\vec{k}) \cdot (i\vec{k}) - \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2 = 0$, dvs. om $|\omega| = c|\vec{k}|$.

Hur tolkar man vektorn \vec{k} och ω (detta gäller vågor i allmänhet)? Om man sitter på en given punkt i rummet så kommer vågen tillbaka till samma fas då $t \rightarrow t + \frac{2\pi}{\omega}$. Periodtiden är $\frac{2\pi}{\omega}$, dvs. ω är den vanliga vinkelfrekvensen $\frac{2\pi}{T}$. Om man å andra sidan betraktar vågen "fryst i tiden", så kommer man tillbaka till samma fas om man flyttar sig enligt $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \frac{2\pi\vec{k}}{|\vec{k}|^2}$. Längden av denna förflyttning är våglängden, dvs. $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$. Vektorn \vec{k} , som kallas vågvektorn, är riktad i vågens rörelseriktning och har beloppet (vågtalet) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Hur fort rör sig vågen? Om vi för enkelhets skull lägger x -axeln i samma riktning som \vec{k} pekar kan vi skriva funktionen $\phi = \phi_0 \exp(i(kx - \omega t)) = \phi_0 \exp(ik(x - \frac{\omega}{k}t))$. Om vi ändrar $x \rightarrow x + \delta x$, $t \rightarrow t + \delta t$ där $\delta x - \frac{\omega}{k}\delta t = 0$ befinner vi oss i samma fas som innan (t.ex. en vågtopp). Så vågens fart är

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\omega}{k} = c. \quad (11.17)$$

Parametern c i vågekvationen är vågens fart. Vågekvationen beskriver vågor som (oavsett frekvens) rör sig med en och samma fart. För elektromagnetism är detta ljushastigheten. Relationen $\omega = ck$, som uttrycker frekvensen som funktion av vågtalet, kallas en dispersionsrelation*. Andra typer av partiella differentialekvationer kan leda till andra dispersionsrelationer.

11.5 Elektromagnetiska vågor (*)

Låt oss nu gå tillbaka till de elektromagnetiska vågorna. Vi har sett att Maxwells ekvationer i vacuum och i frånvaro av laddningar och strömmar leder till att \vec{E} och \vec{B} uppfyller vågekvationen. Det är dock inte säkert att vågekvationen innehåller all information som fanns i Maxwells ekvationer (sannolikt gör den inte det, eftersom antalet ekvationer är mindre). Varje Cartesisk komponent av \vec{E} och \vec{B} uppfyller vågekvationen, så vi kan

skriva en lösning med en viss frekvens ω och vågvektor $\frac{\omega}{c}\vec{n}$ (\vec{n} är en enhetsvektor i vågens rörelseriktning) som

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)}, \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)}.\end{aligned}\quad (11.18)$$

En eventuell fasskillnad mellan elektriskt och magnetiskt fält sitter i de komplexa "amplituderna" \vec{E}_0 , \vec{B}_0 . Nu sätter vi in ekv. (11.18) i Maxwells ekvationer. ME1 och ME3 säger att $\vec{E}_0 \cdot \vec{n} = 0$ och $\vec{B}_0 \cdot \vec{n} = 0$. Fälten är alltså vinkelräta mot vågens rörelseriktning. ME2 säger att $\frac{i\omega}{c}(\vec{n} \times \vec{E}_0 - c\vec{B}_0) = 0$ och ME4 att $\frac{i\omega}{c}(\vec{n} \times \vec{B}_0 + \epsilon_0\mu_0 c\vec{E}_0) = 0$. Den första av dessa ekvationer säger att $\vec{B}_0 = c^{-1}\vec{n} \times \vec{E}_0$. Den andra ger då ingen mer information, eftersom $\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{B}_0) = -\vec{B}_0$ då $\vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0$.

Den allmänna planvågslösningen till Maxwells ekvationer är alltså

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)}, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0, \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\vec{n} \times \vec{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)}.\end{aligned}\quad (11.19)$$

För givet ω och \vec{n} finns det två "frihetsgrader", vektor \vec{E}_0 , som är vinkelrät mot \vec{n} . De representerar de två möjliga polariseringarna hos elektromagnetisk strålning.

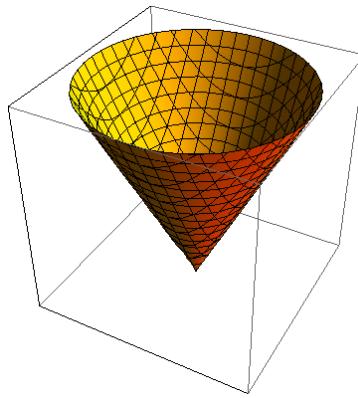
Vi har bara skrivit de lösningar som har en bestämd rörelseriktning och en bestämd frekvens. Vilken lösning som helst kan skrivas som en superposition av sådana vågor. För detaljerna kring det hänvisar vi till kursen i Fourieranalys.

11.6 Greensfunktioner för vågekvationen (*)

Vi skall härleda en Greensfunktion för vågekvationen, även om den är relevant för t.ex. elektromagnetiska vågor betraktar vi här bara vågekvationen för ett skalärt fält. Den skall då uppfylla

$$\square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = (\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t'). \quad (11.20)$$

För enkelhets skull kan vi ta $\vec{r}' = 0$, $t' = 0$.



Hur kan vi hitta en lösning? Vi kan tänka på att vågorna går med farten c , så om man har deltafunktionskällan i högerledet, som "blinkar till" i $\vec{r} = 0$ vid tiden $t = 0$, så bör signalen sprida sig med denna fart. Då skulle Greensfunktionen ha stöd endast på ljuskonen $r = ct$, och för ett givet t vara proportionell mot $\delta(r - ct)$. Om vi ansätter

$$G(\vec{r}, t; 0, 0) = g(t)\delta(r - ct) \quad (11.21)$$

har vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\vec{r}, t; 0, 0) &= \frac{\partial}{\partial t} (g'(t)\delta(r - ct) - cg(t)\delta'(r - ct)) \\ &= g''(t)\delta(r - ct) - 2cg'(t)\delta'(r - ct) + c^2g(t)\delta''(r - ct). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Vi kan också räkna ut

$$\Delta\delta(r - ct) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2\delta'(r - ct)) = \delta''(r - ct) + \frac{2}{r}\delta'(r - ct). \quad (11.23)$$

Här kan vi använda den allmänna relationen $(f(x) - f(y))\delta(x - y) = 0$, som deriverad m.a.p. x ger $0 = f'(x)\delta(x - y) + (f(x) - f(y))\delta'(x - y)$, för att skriva om den sista termen: $\frac{2}{r}\delta'(r - ct) = \frac{2}{ct}\delta'(r - ct) + \frac{2}{c^2t^2}\delta(r - ct)$. Vi samlar ihop termerna. Ekvationen lyder nu

$$\begin{aligned} [g(t) - g(t)]\delta''(r - ct) + \frac{2}{c} \left[\frac{g(t)}{t} + g'(t) \right] \delta'(r - ct) \\ + \frac{1}{c^2} \left[\frac{2g(t)}{t^2} - g''(t) \right] \delta(r - ct) = 0 \end{aligned} \quad (11.24)$$

för $t > 0$, och vi ser direkt att $g(t) = \frac{k}{t}$ är en lösning. (Det finns elegantare lösningsmetoder.)

Hur får vi deltafunktionen i högerledet i Greensfunktionsekvationen? Jo, funktionen $\frac{k}{t}\delta(r - ct)$ är ju bara skild från noll då $t \geq 0$. För små positiva tider har den också bara stöd nära $\vec{r} = 0$. Om vi kan bestämma k så att den för små tider är ungefärlig $c^2t\delta^3(\vec{r})$ är ekvationen uppfylld (andraderivatan av $\sigma(t)t$ är $\delta(t)$). Låt oss integrera över rummet och se:

$$\int_{\mathbb{R}^3} dV \frac{k}{t} \delta(r - ct) = \frac{4\pi k}{t} \int_0^\infty dr r^2 \delta(r - ct) = \frac{4\pi k}{t} c^2 t^2 = 4\pi k c^2 t. \quad (11.25)$$

Vi väljer alltså $k = \frac{1}{4\pi}$ Greensfunktionen är

$$G_+(\vec{r}, t; 0, 0) = \frac{1}{4\pi t} \delta(r - ct). \quad (11.26)$$

Detta är vad som brukar kallas en *retarderad* Greensfunktion. Termen kommer sig av att en källa bara påverkar fält vid efterföljande tider. Eftersom ekvationen är symmetrisk under $t \rightarrow -t$, är också

$$G_-(\vec{r}, t; 0, 0) = -\frac{1}{4\pi t} \delta(r + ct) \quad (11.27)$$

en lösning, den s.k. avancerade Greensfunktionen. Den är bara nollskild för $t < 0$. Linjärkombinationer med total vikt 1 av G_+ och G_- löser också ekvationen.

Det är värt att notera att det intuitivt ”sunda” antagandet att Greensfunktionen endast har stöd på ljuskonen faktiskt är mer subtilt än det verkar. Det går under namnet Huygens princip. Det visar sig vara sant i ett udda antal rumsdimensioner, men falskt i ett jämnt antal. I ett jämnt antal rumsdimensioner har Greensfunktionen stöd *inom* ljuskonen, inte endast *på* den. I två dimensioner har man t.ex.

$$G_+^{(2)}(\vec{r}, t; 0, 0) = \begin{cases} \frac{\sigma(t)}{2\pi\sqrt{(ct)^2 - r^2}}, & r < ct, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases} \quad (11.28)$$

Tänk på en sten som släpps i en vattenyta. En punkt på ytan påverkas inte bara just då vågfronten passerar, utan även vid alla senare tidpunkter. Tvådimensionell musik är kanske problematisk...

11.7 Ekvationer för potentialerna (*)

Låt oss undersöka vad Maxwells ekvationer ger när de uttrycks i potentialerna ϕ och \vec{A} , från vilka \vec{E} och \vec{B} erhålls genom ekv. (11.12). De två homogena ekvationerna är de som gör att fälten kan uttryckas i termer av potentialer. Om dessa uttryck sätts in i de två inhomogena av Maxwells ekvationer fås:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned}\quad (11.29)$$

Liksom i den magnetostatiska situationen behöver vi göra ett gaugeval för att få enklare ekvationer. Här passar det bra att välja $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Då förenklas ekvationerna till

$$\begin{aligned}\square\phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \square\vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}. \end{aligned}\quad (11.30)$$

Båda potentialerna uppfyller inhomogena vågekvationer. Man kan använda Greensfunktionen för vågekvationen för att skriva ned generella lösningar när laddningar och strömmar är givna.

Man måste förstås kunna bekräfta att man får rätt uttryck för en statisk laddningsfördelning. Om ρ är oberoende av tiden ger Greensfunktionsmetoden

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} dV' \int_{-\infty}^t dt' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0(t-t')} \delta(|\vec{r}-\vec{r}'|-c(t-t')) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \end{aligned}\quad (11.31)$$

vilket är identiskt med vad man får med hjälp av Greensfunktionen för Poissons ekvation.

Exempel

En elektron rör sig med konstant fart v längs z -axeln. Bestäm de elektriska och magnetiska fälten.

Lösning: elektronen har laddning $-e$. Dess läge beskrivs av $\vec{r}(t) = vt\hat{z}$. Laddningstätheten är $\rho(\vec{r}, t) = -e\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt)$, och strömmen ges av $\vec{j}(\vec{r}, t) = -ev\hat{z}\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt)$ (kontrollera att dessa uttryck uppfyller kontinuitetsekvationen!).

Nu kan man skriva potentialerna med hjälp av Greensfunktionen för vågekvationen:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} dV' \int_{-\infty}^t dt' (-e)\delta(x')\delta(y')\delta(z' - vt') \frac{1}{4\pi\epsilon_0(t - t')} \\ &\quad \times \delta(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} - c(t - t')) \\ &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \frac{1}{t - t'} \delta(\sqrt{\varrho^2 + (z - vt')^2} - c(t - t')) ,\end{aligned}\tag{11.32}$$

och $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{v}{c^2}\hat{z}\phi(\vec{r}, t)$. Integrationen över t' är litet krånglig att genomföra. Eftersom argumentet för δ -funktionen inte är en linjär funktion av t' får man lösa ekvationen $\sqrt{\varrho^2 + (z - vt')^2} - c(t - t') = 0$ för att ta reda på vilket värde för t' som ger ett bidrag. Dessutom behöver man använda resultatet i uppgift 7.5.9, dvs. man behöver räkna ut derivatan med avseende på t' av argumentet av δ -funktionen i dess nollställe. Genom att lösa en andragradsekvation för t' får man

$$t' = t - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{v}{c^2}(z - vt) \pm \frac{1}{c} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\varrho^2 + (z - vt)^2} \right] .$$

Endast lösningen med plustecken bidrar till integralen, då den andra ger $t' > t$. En stunds räkning ger vid handen att

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\varrho^2 + (z - vt)^2}} \\ &= -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(v)}{\sqrt{\varrho^2 + \gamma^2(v)(z - vt)^2}} ,\end{aligned}$$

där vi har infört konstanten $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Härur kan de elektriska och magnetiska fälten bestämmas. T.ex. har man

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\hat{\varphi} \frac{\partial A_z}{\partial \varrho} = -\frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{v\gamma(v)\varrho\hat{\varphi}}{(\varrho^2 + \gamma^2(v)(z-vt)^2)^{3/2}}.$$

(Det skall sägas att detta långtifråan är det enklaste sättet att räkna ut fälten från en laddning i rörelse. Om man har lärt sig speciell relativitetsteori kan man istället utgå från den statiska lösningen för en partikel i vila, och göra en Lorentztransformation för att komma fram till potentialerna ovan.)

11.8 Uppgifter

11.8.1

Härled vågekvationen för \vec{B} . Den skall ha samma form som den för \vec{E} .

11.8.2

En punktladdning q befinner sig på avståndet a från en plan metallyta (som kan betraktas som oändlig). Hur stor blir ytladdningen på metallytan? Hur stor blir den totala laddningen på ytan? (Fältet är noll inne i metallen.)

Svar. Ytladdning: $\sigma = -\frac{qa}{2\pi(\varrho^2+a^2)^{3/2}}$
Total laddning: $-q$

11.8.3

Schrödingerekvationen för vågfunktionen Ψ som beskriver en fri partikel med massan m lyder

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \Psi = 0,$$

där \hbar är Plancks konstant dividerad med 2π . Vilken dispersionsrelation leder denna ekvation till?

Svar. $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$

11.8.4

Energitätheten i ett elektrostatiskt fält är $\frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2$. Visa att energin i fältet på \mathbb{R}^3 från en laddningsfördelning $\rho(\vec{r})$ är $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})dV$.

11.8.5

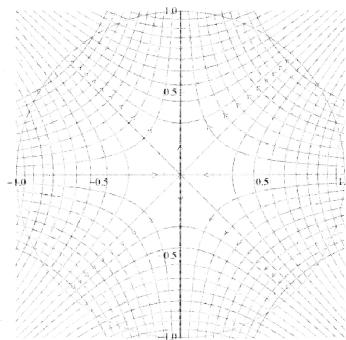
Ytan till en mycket lång cylindrisk kavitet (kan betraktas som oändligt lång) med radien a hålls vid den elektriska potentialen $\phi(\varrho = a, \varphi, z) = \phi_0 \cos 2\varphi$. Bestäm det statiska elektriska fältet i kaviteten. Skissa ekvipotentialytor och fältlinjer.

Svar. Potentialen är $\phi = \phi_0 \frac{\varrho^2}{a^2} \cos 2\varphi = \phi_0 \frac{x^2 - y^2}{a^2}$.

(Från det senare uttrycket är det uppenbart att ϕ löser $\Delta\phi = 0$.)

Det elektriska fältet är $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{2\phi_0 \varrho}{a^2}(-\hat{\varrho} \cos 2\varphi + \hat{\varphi} \sin 2\varphi) = -\frac{2\phi_0}{a^2}(x\hat{x} - y\hat{y})$.

Ekvipotentialytorna är hyperbler $x^2 - y^2 = \text{konstant}$. Fältlinjerna är hyperbler $xy = \text{konstant}$.

**11.8.6**

Mellan två koncentriska, perfekt ledande sfärer med radierna a och b finns ett homogent, isotrop medium med ledningsförmågan $\sigma = \text{konstant}$. En likströmssgenerator som ger en konstant spänning V ansluts till den inre sfären och den yttre sfären jordas. Modellera potential- och strömtäthetsfälten ϕ respektive \vec{j} mellan sfärerna. Sambandet mellan dessa fält är $\vec{j} = -\sigma\vec{\nabla}\phi$.

Ledtråd. Strömmen är densamma genom alla sfärer $r = R$ $a \leq R \leq b$.

Svar. $\phi(r) = V \frac{ab}{b-a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$ för $a \leq r \leq b$,
 $\vec{j}(r) = \sigma V \frac{ab}{b-a} \frac{\hat{r}}{r^2}$ för $a \leq r \leq b$

11.8.7

Två koncentriska sfärer med radierna a och $2a$ har laddningarna $-2Q$ respektive Q , sfäriskt symmetriskt fördelade över respektive sfär. Bestäm den elektriska fältstyrkan och dess potential från denna laddningsfördelning överallt i rummet.

Svar. $E(r < a) = 0$
 $E(a < r < 2a) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$
 $E(r > 2a) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$
 $\phi(r < a) = -\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a}$
 $\phi(a < r < 2a) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}$
 $\phi(r > 2a) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

11.8.8

Bestäm \vec{E} -fältet överallt i rummet från en sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning bestående av två delar, nämligen en rymdladdning $\rho(r) = \rho_0$ för $r < a/2$ och $\rho = 0$ för $r > a/2$ och en ytladdning $\sigma = -\rho_0 a/24$ på sfären $r = a$.

Svar. $E(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r$ för $r < \frac{a}{2}$
 $E(r) = \frac{\rho_0}{24\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2}$ för $\frac{a}{2} < r < a$
 $E(r) = 0$ för $r > a$

11.8.9

Antag att sfären $r = a$ innehåller en rymdladdning Q fördelad med konstant täthet inuti sfären, samt att det sfäriska skalet mellan $r = a$ och $r = 2a$ har laddningen $-Q$, också fördelad som en rymdladdning med konstant täthet. Det hela befinner sig i vakuum, långt från andra laddningar. Bestäm den elektriska fältstyrkan överallt kring laddningarna.

Svar. $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r$ för $r < a$
 $E(r) = \frac{2Q}{7\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{8a^3} \right)$ för $a < r < 2a$
 $E(r) = 0$ för $r > 2a$

11.8.10

En sfäriskt symmetrisk rymdladdning i en sfär är koncentrerad mot centrum enligt

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \frac{a}{r} & \text{för } r < a \\ 0 & \text{för } r > a \end{cases}$$

Trots singulariteten i origo är den totala laddningen $Q = \int \rho(r)dV$ begränsad. Bestäm den elektriska fältstyrkan från denna laddning överallt i rummet. Kommentera speciellt dess uppförande i origo. Finns det en punktkälla där?

Svar. $E_r(r < a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2}$

$$E_r(r > a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

E -fältet är diskontinuerligt och ej deriverbart i origo eftersom det där har obestämd riktning och är $\neq 0$. Där finns ingen punktkälla.

11.8.11

I sfären $r = a$ finns en rymdladdning med tätheten $\rho = \rho_0(r/a)^2$ och på sfären gäller att potentialen är $\phi(a, \theta) = \phi_0 \cos \theta$. Bestäm ϕ i sfären.

Svar. $\phi(r, \theta) = -\frac{\rho_0}{20a^2} (r^4 - a^4) + \phi_0 \frac{r}{a} \cos \theta$

11.8.12

I sfären $r = a$ finns en rymdladdning med tätheten

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \left(\frac{r}{a} \right)^3 \sin \theta \cos \varphi,$$

och på sfären gäller att $\phi(a, \theta, \varphi) = \phi_0$. Bestäm den elektriska potentialen ϕ i sfären.

Svar. $\phi(r, \theta, \varphi) = \phi_0 + \frac{\rho_0 a}{28} \left(r - \frac{r^5}{a^4} \right) \sin \theta \cos \varphi$

11.8.13

Den elektrostatiska potentialen ϕ från en rymdladdning i ett dielektrikum i sfären $r = a$ uppfyller Poissons ekvation

$$\Delta\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 r}{\kappa\epsilon_0 a} \cos\theta, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Utanför sfären är det vakuum. På sfären gäller skarvningsvillkoret för potentialen: $\phi_+ = \phi_-$, $\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_+ = \kappa \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_-$. I oändligheten går ϕ mot noll. Bestäm ϕ överallt.

Svar. $\phi(r < a, \theta, \varphi) = \frac{\rho_0 a}{10\kappa\epsilon_0} \left(\frac{2+3\kappa}{2+\kappa} r - \frac{r^3}{a^2} \right) \cos\theta$
 $\phi(r > a, \theta, \varphi) = \frac{\rho_0 a^4}{5(2+\kappa)\epsilon_0} r^{-2} \cos\theta$

11.8.14

Antag att man på ytan S av en sfär med radien a och centrum i origo mäter upp det elektriska fältet \vec{E} och finner att

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)$$

för $r = a$, där ϵ_0 , ρ_0 , b och c är konstanter. Visa att denna information till sammans med en av Maxwells ekvationer är tillräcklig för att bestämma den totala laddningen Q inuti sfären. Beräkna Q .

Svar. $Q = \rho_0 \frac{4\pi a^3}{3} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} \right)$

11.8.15

I sfären med radien $r = a$ finns en rymdladdning $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \frac{r}{a} \sin\theta \cos\varphi$, och på sfären gäller att $\phi(a, \theta, \varphi) = \phi_0$. Bestäm den elektrostatiska potentialen ϕ och det elektriska fältet \vec{E} inuti sfären.

Svar. $\phi(r) = \phi_0 + \frac{1}{10} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} a \left(a - \frac{r^3}{a^2} \right) \sin\theta \cos\varphi$
 $\vec{E} = \frac{1}{10} \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} \left[-3 \frac{r^2}{a^2} \sin\theta \cos\varphi \hat{r} + \left(\frac{a}{r} - \frac{r^2}{a^2} \right) (\cos\theta \cos\varphi \hat{\theta} - \sin\varphi \hat{\varphi}) \right]$

11.8.16

Det elektriska fältet $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ som svarar mot en punktladdning i origo är källfritt för $r \neq 0$ och har en vektorpotential \vec{A} . Beräkna den *källfria* vektorpotentialen \vec{A} till fältet $\vec{E}(\vec{r})$ som i ett sfäriskt koordinatsystem har formen $\vec{A} = f(r, \theta, \varphi) \hat{\varphi}$, där $f(2, \pi/2, \varphi) = 3Q/8\pi\epsilon_0$. Ange de punkter där \vec{A} inte är definierad.

Svar. $\vec{A} = \left(3 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta\right) \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\varphi}$

11.8.17

Inuti en jordad metallsfära med radien a befinner sig en rymdladdning $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \cos \theta$. Bestäm potentialen i sfären. Bestäm också ytladningen på sfären.

Svar. $\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{\rho_0 r}{4\epsilon_0} (a - r) \cos \theta$
 $\sigma = -\frac{1}{4} \rho_0 a \cos \theta$

11.8.18

En elektrisk ström I flyter i en oändlig, rak metallisk cylindrisk tråd med radien R , och ger utanför tråden upphov till ett magnetfält \vec{B} som i cylinderkoordinater ges av uttrycket

$$\vec{B} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{\hat{\varphi}}{\varrho}, \quad \varrho > R,$$

där μ_0 är vakuumpermeabiliteten. a. Visa att \vec{B} har en vektorpotential. Undersök speciellt om det finns någon vektorpotential till \vec{B} av formen $\vec{A} = A_z(\varrho) \hat{z}$ med egenskapen $|\vec{A}| \rightarrow 0$ då $\varrho \rightarrow \infty$, och bestäm i så fall ett explicit uttryck för $A_z(\varrho)$.

b. Visa att $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ för $\varrho > R$ men att det ändå inte finns någon skalärpotential ϕ sådan att $\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi$ i området utanför tråden. Förklara varför!

Svar. $A_z(\varrho) = -\frac{I\mu_0}{2\pi} \log \varrho + C$

11.8.19

Tyngdkraftsaccelerationen \vec{g} kan skrivas som $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$, där potentialfunktionen ϕ uppfyller ekvationen $\Delta\phi = \gamma\rho$, där γ är en konstant och ρ

masstätheten. Beräkna tyngdkraftsfältet för jorden om denna beskrivs som en sfär med radien R och med konstant masstäthet ρ_0

Svar. $\vec{g}(r < R) = -\frac{\gamma\rho_0 r}{3}\hat{r}$
 $\vec{g}(r > R) = -\frac{\gamma\rho_0 R^3}{3r^2}\hat{r}$

11.8.20

En kondensator består av två koncentriska cirkulära metallcylinrar. Den inre har radien R_1 och potentialen ϕ_1 medan den yttre, vars radie är R_2 , har potentialen ϕ_2 . Potentialen ϕ satisfierar Laplaces ekvation i området mellan cylindrarna och är kontinuerlig vid cylinderytorna. Bestäm potentialen ϕ och det elektriska fältet $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ i detta område. (Ledning: Du kan helt försumma eventuella randeffekter från kondensatorns ändar, dvs betrakta kondensatorn som oändligt lång.)

Svar. $\phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\log(R_2/R_1)} \log \frac{r}{R_1} + \phi_1$
 $\vec{E} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\log(R_2/R_1)} \frac{\hat{r}}{r}$

11.8.21

(*)Visa att uttrycket (11.28) uppfyller den ekvation det skall uppfylla! Visa gärna att ett försök att härleda en Greensfunktion som har deltafunktionsstöd på ljuskonen inte fungerar.

11.8.22

(*)Skriv ned en “modifierad vågekvation” som bygger på differentialoperatorn i uppgift 9.4.16 istället för Laplaceoperatorn. Härled dispersionsrelationen för denna ekvation, Klein–Gordonekvationen.

11.8.23

(*)Designa ett ljudfilter som simulerar tvådimensionell musiklyssning.

I kapitel 5 introducerade vi indexnotation. En vektor \vec{v} representerades med sina Cartesiska komponenter v_i , $i = 1, 2, 3$ (eller $i = 1, \dots, D$ för allmän dimensionalitet). Vi införde också notationen för skalärprodukten $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$, där summation över det upprepade indexet är underförstådd (Einsteins summationskonvention). På samma sätt representerades en matris \mathbf{M} av sina matriselement M_{ij} , och matrismultiplikation kunde skrivas som $(\mathbf{M}\vec{v})_i = M_{ij}v_j$. Vi införde också ε -tensorn (Levi–Civita-tensorn) ε_{ijk} (i tre dimensioner), med vars hjälp kryssprodukt kan skrivas $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k$.

Nu skall vi förankra den här notationen litet bättre, definiera vad som menas med en tensor, och ta reda på vilka räkneregler man kan använda.

12.1 Skalärer och vektorer

Det enklaste exemplet på en tensor är en skalär. En skalär s kännetecknas av att den tar samma värde i alla koordinatsystem, dvs. $s' = s$. Det är viktigt att förstå att det är transformationsregeln som är det viktiga. Det räcker inte med att ” s är ett tal”. Sålunda är x -koordinaten för en punkt i \mathbb{R}^3 inte en skalär, men t.ex. temperaturen i en punkt är en skalär.

Det näst enklaste exemplet på en tensor är en vektor. När vi byter koordinater från ett Cartesiskt högersystem, med koordinater x_i , till ett annat (med origo i samma punkt), med koordinater x'_i , relateras komponenterna av ortvektorerna i de två systemen med multiplikation

med en ortogonal matris \mathbf{L} enligt

$$x'_i = L_{ij}x_j. \quad (12.1)$$

En vektor \vec{v} är en uppsättning tal som beter sig likadant som ortvektorns komponenter när vi byter system, dvs.

$$v'_i = L_{ij}v_j. \quad (12.2)$$

Det är denna transformationsregel som definierar vilka uppsättningar av tre (eller D) tal som får privilegiet att kallas vektor.

En ortogonal matris uppfyller $\mathbf{LL}^t = \mathbf{I} = \mathbf{L}^t\mathbf{L}$, där \mathbf{I} är enhetsmatrisen. Från detta följer direkt att $\det \mathbf{L} = \pm 1$. Om \mathbf{L} transformeras ett högersystem till ett högersystem gäller plustecknet, $\det \mathbf{L} = 1$. I indexnotation (som vi nu bör börja kalla tensornotation) lyder ortogonalitetsvillkoret på transformationsmatrisen

$$L_{ik}L_{jk} = \delta_{ij}. \quad (12.3)$$

Från detta följer $L_{ki}L_{kj} = \delta_{ij}$. Ett allmänt uttryck för determinanten av en (3×3) -matris är

$$\det \mathbf{M} = \varepsilon^{ijk}M_{1i}M_{2j}M_{3k} = \frac{1}{6}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmn}M_{il}M_{jm}M_{kn}. \quad (12.4)$$

Villkoret på determinanten kan skrivas

$$\frac{1}{6}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmn}L_{il}L_{jm}L_{kn} = 1. \quad (12.5)$$

Notera att vi genom att derivera ekv. (12.1) kan skriva matrisen \mathbf{L} som $L_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$. Eftersom matrisen är ortogonal gäller den inversa relationen $x_i = L_{ji}x'_j$, och vi har också $L_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$.

12.2 Tensorer

Nu är det rättframtid att gå vidare och definiera objekt, tensorer, som har fler än ett index. En matris kan, som vi redan sett, skrivas som en tensor med två index, T_{ij} . Men inget hindrar att man har ett godtyckligt antal, säg p . En tensor med p index (en tensor av rank p) skrivs $T_{i_1 i_2 \dots i_p}$. Transformationsregeln är att när man byter system skall varje index multipliceras med det andra indexet på matrisen L_{ij} . Man har då t.ex.

$T'_{ij} = L_{ik}L_{jl}T_{kl}$, och allmänt

$$T'_{i_1 \dots i_p} = L_{i_1 j_1} \dots L_{i_p j_p} T_{j_1 \dots j_p}. \quad (12.6)$$

Poängen med detta är att man kan multiplicera samman tensorer och vara säker på att resultatet blir en tensor. Tag t.ex. två vektorer. Om vi bildar $c_{ij} = a_i b_j$ följer det direkt att c_{ij} är en tensor. Man kan ”kontrahera” två index, såsom man bildar skalärprodukten, ett annat exempel på detta är multiplikation av en vektor med en matris: $u_i = M_{ij}v_j$. I det nya systemet har man då $M'_{ij}v'_j = L_{ik}L_{jl}M_{kl}L_{jm}v_m = L_{ik}\delta_{lm}M_{kl}v_m = L_{ik}M_{kl}v_l = L_{ik}u_k$ (där vi i första steget har använt att \mathbf{L} är ortogonal). Om M_{ij} och v_i är tensorer är alltså även u_i det. Det allmänna beviset går likadant (och innefattar förstås det faktum att skalärprodukten av två vektorer är en skalär).

Låt oss ta en extra titt på kryssprodukten. Det definieras $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k$. Vi har inte visat att den är en vektor (men i linjär algebrakurserna har ni säkert gjort det). Från räknereglerna ovan följer att om vi kan visa att ϵ_{ijk} är en tensor så ger kryssprodukten av två vektorer en vektor. Låt oss undersöka det. Notera att vi redan har bestämt vilka siffror som skall sitta i ϵ -tensorn, och att de skall vara samma i de två systemen. Transformationsreglerna säger

$$\epsilon'_{ijk} = L_{il}L_{jm}L_{kn}\epsilon_{lmn}. \quad (12.7)$$

Man kan försäkra sig att högerledet är totalt antisymmetriskt (dvs. att det byter tecken om vilka två som helst av indexen ijk byter plats). Gör gärna det. Då måste det vara proportionellt mot ϵ_{ijk} , och det räcker att kontrollera en permutation, t.ex. $ijk = 123$. Högerledet blir då $\epsilon_{lmn}L_{1l}L_{2m}L_{3n} = \det \mathbf{L} = 1 = \epsilon_{123}$. Så $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$, Levi–Civita-tensorn är en *invariant tensor*. Den enda andra invarianta tensorn är Kroneckers delta. Visa själv att $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$.

Vi behöver också kunna derivera. Låt oss visa det litet triviala påståendet att gradienten av en skalär är en vektor. Vi har $(\vec{\nabla}\phi)'_i = \frac{\partial}{\partial x'_i}\phi' = \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = L_{ij} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} = L_{ij}(\vec{\nabla}\phi)_j$. Detta visar att ∂_i är en vektoroperator, och man kan sedan använda den för att konstruera andra derivator (divergens, rotation osv.). Samma regler gäller för ∂_i som för andra tensorer.

Detta är vad man behöver veta om Cartesiska tensorer. När man en gång har kollat att reglerna ovan producerar nya tensorer har man total kontroll, och behöver inte testa transformationsegenskaperna mer.

12.3 Tensorer i fysiken

Fysikaliska lagar bör formuleras som likhet mellan tensorer. Det gör ju att om vi vet att ett fysikaliskt samband är sant i ett koordinatsystem är det också det i alla andra, eftersom de två ledet transformentar likadant. Detta är förstås vad ni redan gjort när ni skrivit t.ex. " $\vec{F} = m\vec{a}$ ". Båda ledet är vektorer, och man behöver inte bekymra sig om att kontrollera giltigheten av denna lag i ett annat koordinatsystem. På ett litet djupare plan: Bakom detta ligger en symmetri. Det är just antagandet att fysikens lagar är invarianta under rotationer som tillåter oss att kräva att fysikaliska lagar skall ta samma form i ett koordinatsystem som är roterat i förhållande till det ursprungliga. Vi kodar in den invarianten i de fysikaliska lagarna genom att använda ett Cartesiskt tensorspråk. Har man en annan (större) symmetri är det lämpligt att konstruera tensorer med avseende på den. Exempel är speciell relativitetsteori (se den valfria kursen i trean), där man konstruerar tensorer som transformentar under Lorentztransformationer, och på så sätt leds till fyrdimensionella vektorer och tensorer (det bästa sättet att skriva bl.a. Maxwells ekvationer). I allmän relativitetsteori inför man tensorer under helt allmänna koordinattransformationer, för att försäkra sig om att beskrivningen av ett krökt rums geometri är oberoende av vilka koordinater man väljer.

12.4 Ohms lag

Ohms "lag" lyder $I = U/R$. Vi vill ha en regel som relaterar den lokala strömtätheten \vec{j} i ett material (mått i Am^{-2}) till den elektriska fältstyrkan \vec{E} (mått i Vm^{-1}). Det är naturligt att tänka sig att strömmen är proportionell mot fältstyrkan, så att t.ex. $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, där σ är konduktiviteten för materialet. (Konduktiviteten mäts i $\text{AV}^{-1}\text{m}^{-1} = \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Motståndet i en stav med längd L och tvärsnittsarea A blir $R = \frac{L}{\sigma A}$.) Men detta är inte den mest allmänna relationen. Man kan mycket väl tänka sig ett material som leder ström olika bra i olika riktningar. En sådan konduktivitet måste representeras av en konduktivitetstensor σ_{ij} och en relation $j_i = \sigma_{ij} E_j$. Om t.ex. materialet är "skiktat" så att konduktiviteten i x - och y -riktningarna är σ_1 , men i z -riktningen σ_2 , blir konduktivitetstensorn

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}. \quad (12.8)$$

Det är ingenting som säger att matrisen måste vara diagonal. I själva verket är diagonaliteten hos ekv. (12.8) en följd av att koordinatsystemet har valts så att basvektorerna är egenvektorer till σ , dvs. att ett fält i en koordinatriktnings ger upphov till en ström i samma riktning. Med andra koordinater blir samma konduktivitetstensor icke-diagonal. Ett material där $\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij}$ kallas isotrop, annars är det anisotrop. Mot-svarande resonemang som förts här om konduktivitet kan föras om t.ex. värmeförstånd, som vi redan behandlat i det homogena och isotropa fallet.

Ordlista: *Isotrop* = lika i alla riktningar; *Homogen* = lika i alla punkter.

Exempel

Ett material är homogen (m.a.p. elektrisk konduktivitet) om $\partial_i\sigma_{jk} = 0$.

Exempel

När man räknar på universums expansion brukar man göra antagandet (grundat på observationer) att universum är homogen och isotrop.

12.5 Tröghetstensorn

Ett annat klassiskt exempel är tröghetstensorn,

$$I_{ij} = \int_V dV \rho(r^2\delta_{ij} - x_i x_j),$$

som man räknade ut i stelkroppsdyynamik. Den relaterar rörelsemängdsmomentet till rotationsvektorn enligt $L_i = I_{ij}\omega_j$. I och med att den innehåller upprepade kryssprodukter är det enklare att härleda den i tensorformalism.

Ett litet volymelement dV av en stel kropp har massan $dm = \rho dV$, och om kroppen roterar med en rotationsvektor ω_i har det hastigheten $v_i = (\vec{\omega} \times \vec{r})_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k$. Dess rörelsemängd är $dp_i = dm v_i = dm \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k$. Bidraget till rörelsemängdsmomentet från volymelementet är

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}x_j p_k &= dm \varepsilon_{ijk} x_j \varepsilon_{klm} \omega_l x_m = dm(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})x_j x_m \omega_l \\ &= dm(r^2\omega_i - x_i x_j \omega_j) = dV \rho(r^2\delta_{ij} - x_i x_j)\omega_j.\end{aligned}\quad (12.9)$$

I kapitel 13 skall vi introducera kontinuumsmekanik, spänningar och deformationer av kroppar och deras samband, ett område där tensorformalism är till hjälp.

12.6 Uppgifter

12.6.1

Visa att om T_{ij} är en tensor så är T_{ii} en skalär.

12.6.2

Visa att $\mathbf{L}\mathbf{L}^t = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{L}^t\mathbf{L} = \mathbf{I}$.

12.6.3

Bevisa att δ_{ij} är en tensor.

12.6.4

Visa Gauss sats för en tensor T_{ij}

$$\int_V \partial_j T_{ij} dV = \oint_{\partial V} T_{ij} dS_j.$$

12.6.5

Försäkra dig om att uttrycket för determinanten av en matris i ekv. (12.4) är korrekt. Generalisera det gärna till D dimensioner. Visa gärna, med hjälp av produkten av två ε -tensorer, identiteten $\det \mathbf{M} = \frac{1}{3}\text{Tr}[\mathbf{M}]^3 - \frac{1}{2}\text{Tr}[\mathbf{M}]\text{Tr}[\mathbf{M}]^2 + \frac{1}{6}(\text{Tr}[\mathbf{M}])^3$, som gäller för (3×3) -matriser.

12.6.6

Ur fysikalisk synpunkt är det på generella grunder naturligt och önskvärt att två transformationer utförda efter varandra är en giltig transformation, och att varje transformation har en “invers”, som tar en tillbaka till utgångspunkten. Det är också naturligt att det är en giltig transformation, identitetstransformationen, att “göra ingenting”. Detta kan formaliseras matematiskt som axiom för en *grupp*. En grupp är en mängd G med en multiplikation, $g, h \in G \Rightarrow gh \in G$. Däremot behöver denna multiplikation inte vara kommutativ, dvs. elementen gh och hg kan vara olika. Det skall finnas ett enhetselement $I \in G : Ig = gI = g$. För varje $g \in G$ skall det finnas ett inverst element $g^{-1} \in G : gg^{-1} = g^{-1}g = I$. Dessutom kräver man att transformationer är associativa, dvs. $(gh)k = g(hk)$. Visa att ortogonala rotationer bildar en grupp.

12.6.7

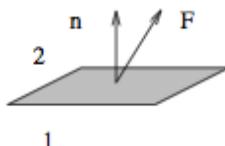
Visa att permutationer av n element bildar en grupp. Är denna grupp kommutativ, dvs. är $gh = hg$ för alla permutationer g och h ?

12.6.8

Visa att den kinetiska energin för en roterande stel kropp är $T = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j$.

13.1 Kraft och spänning

Vi skall börja titta på kontinuumsmekanik, som är mekanik för fasta kroppar, vätskor och gaser. Det första vi skall göra är att undersöka hur man kan beskriva krafter i ett material. Vi skall göra det genom att lägga in en tänkt yta i materialet och se hur krafterna kan skrivas.



Vi tänker oss ett litet ytelement dS med normal n_i . Ibland kan man skriva ett vektoriellt ytelement $dS_i = n_i dS$. Vi är intresserade av den kraft som verkar ”genom ytan”. Kalla sida 1 den sida dit inte normalen pekar, och sida 2 sidan dit normalen pekar. Med kraften dF_i menar vi den kraft som sida 2 påverkar sida 1 med genom ytan dS (vill vi veta hur sida 1 påverkar sida 2 gäller förstås Newtons tredje lag, så den kraften är $-dF_i$). Om det hade varit fråga om en gas, skulle kraften bara bero på trycket i gasen, och vara riktad längs normalen, $dF_i = -pn_i dS$ (minustecknet för att det är kraften på sida 1).



Men i en fast kropp behöver inte kraften vara riktad längs normalen. Det kan finnas skjukvrafter, dvs. krafter som verkar längs ytan. Titta på kroppen i figuren här intill. Det kommer absolut att finnas krafter längs den initiatade ytan, som man ser om t.ex. den lägre delen skall vara i jämvikt. Om vi vill uttrycka kraften per ytenhet till storlek och riktning bara med hjälp av normalen och "situationen i kroppen", dvs. spänningarna, verkar det naturligt att spänningarna skall sitta i en *spänningstensor* P_{ij} , och att

$$dF_i = P_{ij}n_j dS. \quad (13.1)$$

En gas skulle då (enligt ovan) ha en spänningstensor $P_{ij} = -p\delta_{ij}$.

Vi skall inledningsvis härleda ett par egenskaper för tensorn P_{ij} . Låt oss för tillfället försumma andra krafter som kan verka *inne i materialet*, t.ex. gravitationskrafter (notera att det inte betyder att vi utesluter krafter som verkar på kroppens yta; sådana kommer ju att förmedlas in i materialet via precis sådana krafter vi diskuterar). Vi antar också att materialet, dvs. varje delvolym av det, är i jämvikt (vila). Då kan vi lägga en tänkt yta kring en delvolym och kräva kraft- och momentjämvikt.

13.2 Jämviktsekvationer

Vi börjar med kraftjämvikt. Den totala kraften på en delvolym V fås genom ytintegration av kraften (13.1),

$$F_i = \int_{\partial V} dF_i = \int_{\partial V} P_{ij}n_j dS. \quad (13.2)$$

Nu kan vi tillämpa Gauss sats. Den lyder normalt $\int_{\partial V} G_i n_i dS = \int_V \partial_i G_i dV$. I vår ytintegral (13.2) har vi ett extra fritt index i som hänger och slänger. Gauss sats gäller förstås för varje komponent, så man har $\int_{\partial V} P_{ij}n_j dS = \int_V \partial_j P_{ij} dV$ (minnesregel: det index som kontraheras med indexet på n_j är det som "förvandlas" till en derivata, de andra står kvar som de är). I jämvikt skall den totala kraften på varje volym V vara noll, så integranden skall vara noll, dvs.

$$\partial_j P_{ij} = 0. \quad (13.3)$$

Om vi också hade haft en yttre krafttäthet f_i på materialet (t.ex. gravitation) hade man istället fått

$$\partial_j P_{ij} + f_i = 0. \quad (13.4)$$

Nu till momentjämvikt. Momentet på ytelementet dS är $dM_i = (\vec{r} \times d\vec{F})_i = \varepsilon_{ijk}x_j dF_k = \varepsilon_{ijk}x_j P_{kl}n_l dS$ (nu är det nog ganska uppenbart varför tensornotation är bra...). Det totala momentet får genom integration,

$$M_i = \int_{\partial V} \varepsilon_{ijk}x_j P_{kl}n_l dS. \quad (13.5)$$

Återigen tillämpar vi Gauss sats, och får på samma sätt som för kraften $0 = \partial_l(\varepsilon_{ijk}x_j P_{kl}) = \varepsilon_{ijk}P_{kj} + \varepsilon_{ijk}x_j \partial_l P_{kl}$. Den sista termen är noll på grund av kraftjämvikt, så vi måste ha $\varepsilon_{ijk}P_{jk} = 0$. Detta innebär att P_{ij} är symmetrisk.

En tensor (matris) med två index kan alltid skrivas som $T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}$, där S är symmetrisk och A antisymmetrisk. Ofta skriver man $S_{ij} = T_{(ij)} \equiv \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$, $A_{ij} = T_{[ij]} \equiv \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$.

Exempel

I en gas är som sagt $P_{ij} = -p\delta_{ij}$. Om vi tar med en gravitationskraft på gasen kan vi beräkna tryck som funktion av höjd. Ekvation (13.4) ger $-\partial_i p + f_i = 0$. Om $\vec{f} = -\rho g \hat{z}$ för konstant g och ρ , blir p oberoende av x och y , och $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, med lösningen $p = p_0 - \rho g(z - z_0)$. Den här modellen, med konstant densitet, gäller bättre för en vätska. Om, mer verklighetsanknutet för en gas, tryck och densitet är proportionella, $p = k\rho$ (tänk på allmänna gaslagen), får man $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{k}p$ med lösningen $p = p_0 e^{-\frac{g}{k}(z-z_0)}$. Spänningstensorn $P_{ij} = -p\delta_{ij}$ är redan symmetrisk, så den andra ekvationen är uppfylld. Gravitationskraften kan inte heller utöva något vridande moment (och gaser kan i allmänhet inte hålla emot, så det kan hur som helst inte finnas något).

13.3 Deformationer

Det vi nu skall göra är att undersöka hur man kan beskriva deformationer av ett material. Sedan vill vi (för små deformationer) modellera ett linjärt

samband mellan spänning och deformation. Ett sådant samband blir den lokala motsvarigheten till Hookes lag $F = -kx$ för en fjäder. Vi begränsar oss alltså till jämviktssituationer. Det går utmärkt att istället använda de krafter på delvolymer vi tittat på för att beskriva dynamiska förlopp, t.ex. vågutbredning, men vi väntar litet med det.

För att ta reda på hur deformationer bäst beskrivs, låt oss titta på ett litet volymelement och se vad som kan hända med det. Vi inför ett förskjutningsfält $\vec{\xi}(\vec{r})$, som beskriver hur mycket varje punkt har flyttats. För att vara precis, så tolkar vi argumentet \vec{r} som ortvektorn för en punkt i den odeformerade kroppen, och $\vec{r} + \vec{\xi}(\vec{r})$ ortvektorn för samma punkt efter deformation. I figur 13.1 visar den streckade linjen hela tiden formen (kvadrat) för den odeformerade volymen, och den heldragna för den deformerade. x -axeln är horisontell och y -axeln vertikal.

Om $\vec{\xi}$ är konstant över volymen (figur 13.1a) translateras den bara. Det kallas vi inte en deformation, och det ger definitivt inte heller upphov till några spänningar i materialet. För att volymen skall deformeras måste $\vec{\xi}$ variera, och det verkar därför bra att använda derivatan av $\vec{\xi}$. Så vi betraktar $\partial_i \xi_j$.

Om volymen trycks ihop eller dras ut i en riktning enligt figur 13.1b, så är $\vec{\xi} = (ax, 0, 0)$, och den enda nollskilda komponenten är $\partial_1 \xi_1 = a$. Om volymen "skjuvas" enligt figur 13.1c är $\vec{\xi} = (by, 0, 0)$, och man får endast $\partial_2 \xi_1$ nollskild. Från dessa exempel får vi en direkt bild av vad diagonalelement och avdiagonala element i $\partial_i \xi_j$ betyder.

Om vi vänder på rollerna för x - och y -koordinaterna i figur 13.1c får vi figur 13.1d, som har $\vec{\xi} = (0, bx, 0)$ och alltså endast ger $\partial_1 \xi_2 = b$. Men om vi tittar på de deformationer som uppkommit i figurerna 13.1c och 13.1d ser de väldigt lika ut. De två romberna skiljer sig endast åt på en rotation (kom ihåg att vi endast betraktar små deformationer, dvs. förflyttningarna är mycket mindre än sidlängderna). $\partial_1 \xi_2$ och $\partial_2 \xi_1$ beskriver samma deformation. Om vi ser (figur 13.1e) vad en rotation med en liten vinkel α runt z -axeln gör med ortvektorn får vi

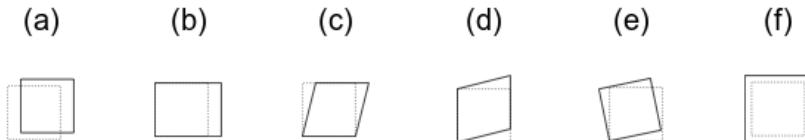
$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (13.6)$$

Matrisen i sista ledet är $\partial_i \xi_j$. En rotation ger en antisymmetrisk $\partial_i \xi_j$. Detta kan ses mer allmänt genom att bygga en liten rotationsvektor ω_i vars belopp är den lilla rotationsvinkeln, riktad längs rotationsaxeln. Då är $\xi_j = \varepsilon_{jkl} \omega_k x_l$ (jämför uttrycket för hastighet i en roterande kropp), och $\partial_i \xi_j = \varepsilon_{jki} \omega_k$ som är antisymmetriskt. De verkliga deformationerna

sitter i den symmetriska delen

$$E_{ij} \equiv \partial_{(i}\xi_{j)} = \frac{1}{2}(\partial_i\xi_j + \partial_j\xi_i). \quad (13.7)$$

Denna tensor kallas deformationstensorn (på engelska “strain tensor”). Vi ser nu att figurerna 13.1c och 13.1d beskrivs av samma deformationstensor, med $E_{12} = b/2$. En isotrop utvidgning eller sammantryckning representeras av $E_{ij} = c\delta_{ij}$ som i figur 13.1f.



Figur 13.1 Olika deformationer.

Deformationstensorn är dimensionslös, så man kan i absolut mening tala om att dess komponenter är små eller stora. När vi talar om små deformationer menar vi att varje komponent av E_{ij} är liten, $|E_{ij}| \ll 1$, och det betyder att förflyttningarna i figurerna är mycket mindre än sidlängderna.

Vi har tidigare tittat på derivator av vektorer, nämligen rotation, som ger en vektor, och divergens, som ger en skalär. Allmänt kan $\partial_i\xi_j$ delas upp i en symmetrisk och en antisymmetrisk del, $\partial_i\xi_j = \partial_{(i}\xi_{j)} + \partial_{[i}\xi_{j]}$, där den antisymmetriska innehåller rotationen, $\partial_{[i}\xi_{j]} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\vec{\nabla} \times \vec{\xi})_k$ (visa detta!). Den symmetriska delen innehåller förstås divergensen (som är dess spår), men också annat. Vi har alltså nu infört ett tredje sätt att derivera en vektor, som leder till en symmetrisk tensor.

13.4 Samband mellan spänning och deformation

Nu har vi sett att både spänning och deformation beskrivs av varsin symmetrisk tensor, och tiden är mogen att försöka skriva en modell för hur de relateras. Vi skall antaga ett linjärt samband, vilket är rimligt för små deformationer. Ett (alltför) naivt antagande skulle kunna vara direkt proportionalitet, $P_{ij} = kE_{ij}$. Vi skall strax se att det inte räcker av enkla fysikaliska skäl, men först skall vi se vad det mest allmänna

uttrycket vi kan skriva är. Man kan relatera de två tensorerna med en tensor med fyra index enligt

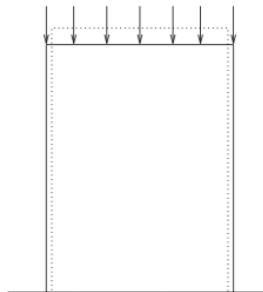
$$P_{ij} = k_{ijkl}E_{kl}. \quad (13.8)$$

Eftersom P och E är symmetriska är även k det, $k_{ijkl} = k_{(ij)(kl)}$. (Den är som en “ (6×6) -matris” som relaterar två “vektorer” med 6 komponenter, nämligen symmetriska matriser.) För att komma vidare måste vi göra något mer antagande om materialet. Vi skall begränsa oss till isotropa material. Då måste tensorn k_{ijkl} byggas av invarianta tensorer, δ_{ij} och ε_{ijk} . De två kombinationerna som kan komma ifråga är $\delta_{ij}\delta_{kl}$ och $\delta_{i(k}\delta_{l)j}$. Levi–Civita-tensorn kan inte vara med, för om den är med måste man ha två stycken för att få ett jämnt antal index, och minst ett index måste kontraheras mellan dem, vilket igen ger produkter av δ . De två kombinationerna insatta i ekv. (13.8) ger termer i högerledet proportionella mot $\delta_{ij}E_{kk}$ och E_{ij} . (Jämför med exemplet om konduktivitet: i allmänhet kan man ha $j_i = \sigma_{ij}E_j$, men i ett isotropt ledande material gäller $\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij}$.) Den mest allmänna relationen för ett isotropt material är

$$P_{ij} = \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij}. \quad (13.9)$$

De två parametrarna λ och μ är skalära materialkonstanter (vilket i och för sig inte utesluter att de kan variera i en kropp, men i ett homogent material är de konstanta) som kallas Lamés konstanter. De går att slå upp i tabeller. Notera att isotropi kan uttryckas som kravet att alla materialparametrar är skalärer.

Vi skall nu titta på ett exempel, som är både ett räkneexempel och en illustration hur Lamés konstanter relateras till mer “fysikaliska” parametrar, t.ex. elasticitetsmodul. Exemplet gör det också tydligt varför man behöver just två materialkonstanter.



Betrakta en kropp formad som ett homogent rätblock med höjden h , som står på ett fast och friktionsfritt underlag. På blockets översida verkar ett tryck p . Hur stor blir sammantryckningen $-\delta h/h$? Gravitationskraften är försumbar i sammanhanget.

Vi låter x -koordinaten vara vertikal, och kallar $|\delta h/h|$ för α . Vi har $E_{11} = -\alpha$. Men inget hindrar kroppen från att bli litet bredare när den trycks ihop, eftersom det inte finns några krafter från sidan. Vi sätter $E_{22} = E_{33} = \beta$. Alla avdiagonala element i deformationstensorn är noll. Alltså: $E_{ij} = \text{diag}(-\alpha, \beta, \beta)$.

Kvoten $\nu = \frac{\beta}{\alpha}$ kallas Poissons kvot, och är en materialkonstant. Vanliga material har $0 < \nu < 1/2$. Värdet $v = 1/2$ svarar mot ett inkompresibelt material, eftersom ändringen av volymen är $\delta V = V(1-\alpha)(1+\beta)^2 - V \approx V(2\beta - \alpha)$. (Allmänt gäller $V^{-1}\delta V = E_{ii}$.) En annan vanlig materialkonstant är elasticitetsmodulen E , sådan att $p = E\alpha$. När vi löser problemet får vi automatiskt uttryck för ν och E i termer av λ och μ . Eftersom olika material kan ge samma hoptryckning vid samma tryck, men expandera olika i sidled, är det uppenbart att man verkligen behöver de två termerna i ekv. (13.9).

Hur ser spänningstensorn ut? Det finns endast krafter i vertikal led, och kraften på en yta med horisontell normal är noll. Därför är $P_{11} = -p$ och övriga komponenter noll, $P_{ij} = \text{diag}(-p, 0, 0)$. Ekvation (13.9) säger nu

$$\begin{aligned} -p &= \lambda(2\beta - \alpha) - 2\mu\alpha = -(\lambda + 2\mu)\alpha + 2\lambda\beta, \\ 0 &= \lambda(2\beta - \alpha) + 2\mu\beta = -\lambda\alpha + 2(\lambda + \mu)\beta, \end{aligned} \quad (13.10)$$

där den första ekvationen är (11)-komponenten och den andra (22)- och (33)-komponenterna. Den andra ekvationen ger

$$\beta = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\alpha, \quad (13.11)$$

och insättning i den första resulterar i

$$p = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\alpha. \quad (13.12)$$

Från resultatet får vi direkt relationen mellan de alternativa materialkonstanterna E och ν

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Dessa kan om man vill inverteras till

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (13.14)$$

En liten varning för det inkompressibla fallet. Där är $\nu = \frac{1}{2}$, och vi ser att $\lambda(\nu, E)$ inte är väldefinierad (den blir oändlig). Detta hänger samman med att när volymen inte förändras är $E_{ii} = 0$, och den term i ekv. (13.9) som innehåller λ är inte närvarande. Ett nästan inkompressibelt material har ett mycket stort värde på λ/μ .

I exemplet ovan använde vi inte (direkt) jämviktsekvationen $\partial_j P_{ij} = 0$. Den uppfylls också automatiskt av ansatsen vi gjorde. Med hjälp av ekv. (13.9) kan den skrivas som en differentialekvation för förskjutningsvektorn. Med konstanta λ, μ gäller $\partial_j P_{ij} = \lambda \delta_{ij} \partial_j \partial_k \xi_k + \mu \partial_j (\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i) = (\lambda + \mu) \partial_i \partial_j \xi_j + \mu \partial_j \partial_j \xi_i$, och alltså

$$(\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}) + \mu \Delta \vec{\xi} = 0. \quad (13.15)$$

Detta uttryck innehåller Laplaceoperatorn, men också en term med $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi})$. Om vi minns relationen $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\xi}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}) - \Delta \vec{\xi}$ kan vi likaväl skriva den

$$(\lambda + \mu) \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\xi}) + (\lambda + 2\mu) \Delta \vec{\xi} = 0. \quad (13.16)$$

Exempel

En homogen boll utsätts för ett inåtriktat konstant tryck p på sin begänsningsyta. Hur stor blir sammantryckningen?

Lösning: Vi kan förutsätta att förskjutningsvektorn överallt är radieellt riktad och endast beror på r , $\vec{\xi} = -u(r)\hat{r}$. Ett sådant vektorfält är rotationsfritt, och jämviktsekvationen inne i bollen ger $\vec{\Delta}\vec{\xi} = 0$. Här är det viktigt att komma ihåg att Laplaceoperatorn på

en vektor i kroklinjiga koordinater inte fås som Laplaceoperatorn på komponenterna. Man får alltså *inte* ekvationen $\Delta u = 0$. Man kan tillämpa $\Delta \vec{\xi} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi})$ eller slå upp direkt i formelsamlingen,

$$\Delta(u(r)\hat{r}) = \left(\Delta u(r) - \frac{2}{r^2}u(r) \right) \hat{r} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2}u \right) \hat{r}.$$

En ansats $u = r^p$ ger $p(p+1) - 2 = 0$, med lösningarna $p = 1$ eller $p = -2$. Den senare är ofysikalisk, så vi får $\vec{\xi} = -k\hat{r}$. Från detta uttryck, $\vec{\xi} = -k(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$ är det uppenbart att Laplaceekvationen är uppfylld. (Försök gärna se samma sak för den ofysikaliska lösningen; där ser varje Cartesisk komponent ut som en dipolpotential.)

Vi har $\xi_i = -kx_i$ och därför $E_{ij} = -k\delta_{ij}$ och $E_{ii} = -3k$. Detta är en helt homogen och isotrop kompression. Relationen mellan spänning och deformation ger $P_{ij} = -(3\lambda + 2\mu)k\delta_{ij}$. Vid ytan får man $(3\lambda + 2\mu)k = p$, och lösningen blir

$$\vec{\xi} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} \vec{r} = -\frac{(1-2\nu)p}{E} \vec{r}.$$

Om bollens radie är R är alltså

$$\frac{\delta R}{R} = -\frac{(1-2\nu)p}{E}.$$

Notera att det inte bara är elasticitetsmodulen som kommer in när det inte längre finns någon extra riktning för kroppen att expandera i. Den "gör större motstånd", därför faktorn $1-2\nu$. För ett inkompressibelt material ($\nu = 1/2$) blir sammantryckningen förstås noll.

13.5 Dynamik för fasta material

Vi skall undersöka små rörelser i fasta material. Vi får med nödvändighet begränsa oss till små rörelser, eftersom vi redan har sagt att deformationstensorn är liten. Betrakta nu en situation där ett litet volymelement inte är i jämvikt, utan accelereras av kraften $dF_i = (\partial_j P_{ij} + f_i)dV$, där f_i representerar andra krafter än de som kommer från interna spänningar (t.ex. gravitation). Volymelementets förskjutning är $\xi_i(\vec{r}, t)$, och dess acceleration $\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2}$. Rörelseekvationen blir

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \partial_j P_{ij} + f_i . \quad (13.17)$$

Låt oss undersöka vibrationer. Vi tar andra krafter till noll. Med hjälp av uttrycket (13.15) för kraften i termer av deformationen har vi differentialekvationen för förskjutningsvektorn

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}) - \mu \Delta \vec{\xi} = 0 . \quad (13.18)$$

Vi kan prova en vågansats

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} . \quad (13.19)$$

Redan här kan man se att det kan vara skillnad på olika sorters vågor: en våg där \vec{A} är parallell med \vec{k} är longitudinell, medan en där \vec{A} är vinkelrät mot \vec{k} är transversell. Vi sätter in ansatsen och får

$$0 = -\rho \omega^2 \vec{A} + (\lambda + \mu) \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{A}) + \mu k^2 \vec{A} . \quad (13.20)$$

Amplitudvektorn \vec{A} är en egenvektor med egenvärde $\rho \omega^2$ till matrisen

$$K_{ij} = (\lambda + \mu) k_i k_j + \mu k^2 \delta_{ij} . \quad (13.21)$$

En vektor \vec{A}_{\parallel} parallell med \vec{k} har $M_{ij} A_{\parallel j} = (\lambda + 2\mu) k^2 A_{\parallel i}$, medan en vektor \vec{A}_{\perp} ortogonal mot \vec{k} har $M_{ij} A_{\perp j} = \mu k^2 A_{\perp i}$. Resultatet blir alltså att longitudinella vågor (tryckvågor) har farten $c_{\parallel} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, medan transversella vågor (skjuvvågor) har farten $c_{\perp} = \sqrt{\mu/\rho}$. Tryckvågorna går snabbare.

13.6 Uppgifter

13.6.1

Visa att villkoret $\varepsilon_{ijk} P_{jk} = 0$ är ekvivalent med att P_{ij} är symmetrisk, $P_{ij} = P_{ji}$.

13.6.2

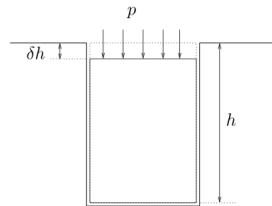
Visa att S och A är tensorer, dvs. att uppdelningen i symmetrisk och antisymmetrisk del inte förstörs av transformationerna.

13.6.3

I en vätska i vila är trycket på djupet d under ytan $p(d) = p_0 + \rho gd$, där p_0 är lufttrycket vid ytan. Visa Arkimedes princip.

13.6.4

Ett homogent rätblock av ett elastiskt material passar precis in i en motsvarande hålighet i ett annat material, som i praktiken kan betraktas som odeformerbart (se figuren). Det finns ingen friktion i kontaktytorna mellan rätblocket och det omgivande materialet. Bestäm den relativä längdförändringen $\delta h/h$ då den fria änden av rätblocket belastas med trycket p i termer av p och Lamés materialkonstanter λ och μ .



Svar. $\delta h/h = \frac{p}{(\lambda+2\mu)}$

13.6.5

En homogen cylinder utsätts för ett tryck p på cylinderytan. Den tillåts expandera fritt i axelns riktning. Bestäm den relativä förändringen av radien.

Svar. $\frac{\delta R}{R} = -\frac{\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)}p = -\frac{1-\nu}{E}p$

13.6.6

En homogen cylinder utsätts för ett tryck p på cylinderytan. Den tillåts inte expandera i axelns riktning. Bestäm den relativä förändringen av radien.

Svar. $\frac{\delta R}{R} = -\frac{p}{\lambda+\mu} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}p$

Mekanik för fluider (vätskor och gaser) är naturligtvis helt annorlunda än för fasta kroppar. En fluid i vila kan inte bärta upp annat än tryck, dvs. spänningstensorn är då $P_{ij} = -p\delta_{ij}$. När olika delar av en fluid rör sig med olika hastigheter påverkar de däremot varandra — tänk t.ex. på två vattenlager med olika hastigheter; de kommer att ”häfta i” varandra och dra varandra med sig. Det finns ett mått på i hur hög grad fluider påverkas av att hastighetsfältet varierar, det kallas *viskositet*. Vi skall se hur det kommer in i spänningstensorn.

14.1 Tryck och spänning

För det första definierar vi vad vi menar med tryck. När $P_{ij} = -p\delta_{ij}$ är det klart, men för andra spänningstensorer har vi inte så mycket att välja på utom $p = -\frac{1}{3}P_{ii}$. Då kan vi skriva

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}, \quad (14.1)$$

där $d_{ii} = 0$ på grund av definitionen av p . Frågan är sedan hur d_{ij} kan relateras till hastighetsfältet $\vec{u}(\vec{r})$.

14.2 Hastighet och deformationshastighet

Vi kan genomföra ett resonemang som väldigt mycket liknar det vi gjorde för ett fast material. Nu kan som sagt inte spänningen bero på deformationen om den inte förändras med tiden. Men den kan bero på *deformationshastigheten*. Det är ganska naturligt, och betyder alltså att om en liten volym *häller på att* deformeras på något av de sätt som vi gick igenom i kapitel 13.3 (figurerna) så finns en spänning. En konstant deformation, däremot, ger ingen spänning. Detta stämmer bra med hur man tänker sig en fluid. Om vi nu definierar tensorn som innehåller deformationshastigheterna

$$e_{ij} = \partial_{(i} u_{j)} , \quad (14.2)$$

är det rimligt att tänka sig att tensorn d_{ij} i spänningen kan vara proportionell mot den.

14.3 Samband mellan spänning och deformationshastighet. Viskositet

Helt analogt med relationen mellan spänning och deformation i fasta material skulle en allmän ansats (under antagande om isotropi) lyda $d_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}$. Skillnaden är dock att $d_{ii} = 0$ och därför måste man ha $3\lambda + 2\mu = 0$. Det finns alltså bara en materialkonstant kvar. Vi skriver då

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{kk}) . \quad (14.3)$$

Parametern μ kallas *viskositeten*. Deformationshastigheten e_{ij} mäts i s^{-1} och P_{ij} i $N\text{ m}^{-2} = \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$, så enheten för viskositeten är $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Notera skillnaden i dimension mot Lamés konstanter λ, μ .

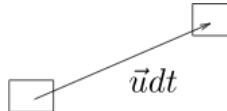
14.4 Kraft och acceleration. Navier–Stokes ekvation

När vi diskuterade deformationer av fasta material betraktade vi huvudsakligen jämviktssituationer (mest av tids-/utrymmesskäl). Det kan vi inte göra här (dvs. det tillför inget, det blir som att betrakta ett fast material, där det endast kan finnas ett tryck). Vi vill ju undersöka hur fluiden rör sig. Alltså får vi inte använda jämviktsekvationen $f_i = \partial_j P_{ij} + b_i = 0$

(b_i betecknar här ytter kraft per volymsenhet), utan måste undersöka hur denna krafttäthet accelererar ett litet volymelement. Krafttätheten är i vilket fall $f_i = b_i + \partial_j P_{ij} = b_i - \partial_i p + \mu \partial_j (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - \frac{2}{3} \mu \partial_i \partial_j u_j = b_i - \partial_i p + \mu (\partial_j \partial_i u_j + \frac{1}{3} \partial_i \partial_j u_j)$, dvs. kraften på ett litet volymelement dV är

$$\vec{f} dV = \left[\vec{b} - \vec{\nabla} p + \mu \left(\Delta \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right) \right] dV. \quad (14.4)$$

även om det matematiska tillvägagångssättet för att modellera krafter i fluider liknade det för krafter i fasta material finns en stor fysikalisk skillnad. De antaganden vi gjorde för fasta material svarar mot att materialet är elastiskt. Den energi som går åt till att åstadkomma en deformation lagras i materialet som potentiell energi, och kan återvinnas. I en fluid, däremot, har man krafter som är proportionella mot deformationshastigheten. Sådana krafter är dissipativa. Rörelseenergi kommer att omvandlas till värme. Så länge viskositetstermerna finns med finns det ingen bevarad mekanisk energi.



När vi undersöker hur denna kraft ändrar hastighetsfältet måste vi vara försiktiga. Man skulle kunna tro att den skulle vara lika med $\rho dV \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ (ρdV är massan av volymelementet), men detta är fel, eftersom vi då skulle betrakta hastighetsändringen i en och samma punkt, medan volymelementet under tiden hinner röra sig. Vi behöver ta hänsyn till att den lilla massan vi tittar på rör sig, och skriva $d\vec{u} = \vec{u}(\vec{r} + \vec{u} dt, t + dt) - \vec{u}(\vec{r}, t) = [\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}] dt$. Det lilla volymelementets acceleration är

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}. \quad (14.5)$$

(Denna typ av uttryck är så viktig och ofta återkommande att den har ett eget namn, Lie-derivata.)

Nu kan vi sätta samman den information vi har, uttrycken för acceleration och kraft, och får

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = \vec{b} - \vec{\nabla} p + \mu \left(\Delta \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right). \quad (14.6)$$

Detta är Navier–Stokes ekvation.

Vi kan härleda Navier–Stokes ekvation på ett ekvivalent, men upplysande, sätt genom att skriva kontinuitetsekvationer. Massa är bevarad. Dess täthet är ρ och masströmmen är $\rho\vec{u}$, så kontinuitetsekvationen (som vi härledde i kapitel 3) lyder

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) = 0. \quad (14.7)$$

Denna ekvation finns oberoende av Navier–Stokes, och talar om hur ρ ändras beroende av \vec{u} . Men vi kan också skriva ned en kontinuitetsekvation för rörelsemängden, som ju också är bevarad. Rörelsemängdstätheten är $\rho\vec{u}$ (dvs. samma uttryck som masströmmen, men nu tolkar vi den som en täthet av en vektor), eller i tensornotation ρu_i . Den transportereras naturligtvis också av hastighetsvektorn. Rörelsemängdsströmmen blir en tensor med två index, $\rho u_i u_j$. Kontinuitetsekvationen kommer att ha ett högerled f_i , och lyder

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \partial_j(\rho u_i u_j) = f_i. \quad (14.8)$$

Vi utvecklar: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \partial_j(\rho u_i u_j) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \partial_j(\rho u_j) + \rho u_j \partial_j u_i = u_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j(\rho u_j) \right) + \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \partial_j u_i \right) = \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right]_i$. Återigen får vi Navier–Stokes ekvation (14.6).

Navier–Stokes ekvation är komplicerad och har komplicerade lösningar. Att hitta exakta generella lösningar är inte att hoppas på. För att alls börja lösa ekvationerna behövs också mer information om fluiden. Förutom viskositeten som står explicit i ekvationen krävs någon information som talar om t.ex. hur trycket eller densiteten är i olika situationer. En möjlighet som ofta är approximativt riktig (för vätskor) är att betrakta densiteten som konstant, dvs. fluiden som inkompresibel. En annan kan vara att försumma viskositeten. Andra förenklingar kan fås genom att antaga egenskaper för lösningarna, snarare än för fluiden i sig. T.ex. (som vi skall se nedan) kan förenklas saker och ting om man antar att hastighetsfältet är rotationsfritt. Men flider har i allmänhet många intressanta och krångliga sätt att bete sig. Turbulens är ett område där mycket förståelse återstår.

14.5 Tryckvågor

I vissa situationer är det motiverat att linearisera ekvationerna. Låt oss betrakta ljudvågor i en stillastående fluid. Vi betraktar variationerna i densitet, tryck och hastighet som små:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t), \\ p &= p_0 + p_1(\vec{r}, t), \\ \vec{u} &= 0 + \vec{u}(\vec{r}, t).\end{aligned}\tag{14.9}$$

Vi försummar för stunden också viskositeten. Kontinuitetsekvationen och Navier–Stokes lineariserade ekvation lyder nu

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} p_1.\end{aligned}\tag{14.10}$$

Vi får också antaga ett konstitutivt samband mellan densitet och tryck, $p = p(\rho)$, så att $\vec{\nabla} p_1 = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_{\rho_0} \vec{\nabla} \rho_1$. Ytterligare en derivata på den första ekvationen ger $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\rho_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_{\rho_0} \Delta \rho_1$. Detta är vågekvationen

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho_1 = 0,\tag{14.11}$$

där ljudhastigheten ges av $c^2 = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_{\rho_0}$. Denna sorts vågor, tryckvågor, eller longitudinella vågor, är den enda typ som kan fortplanta sig i en fluid. I ett fast material kan man, som vi sett, ha både longitudinella vågor och skjuvvågor.

Om vi inte försummar viskositeten kan vi inte vänta oss våglösningar, eftersom viskositetskrafterna är dissipativa, de för bort kinetisk energi ur systemet. Däremot kan det tänkas förekomma dämpade svängningar. Låt oss undersöka saken. Vi genomför fortfarande samma linearisering som i ekv. (14.9). Enda skillnaden är att vi sparar viskositetstermen i Navier–Stokes ekvation, vars linearisering, tillsammans med kontinuitetsekvationen, är

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} p_1 + \mu(\Delta \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})), \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0.\end{aligned}\tag{14.12}$$

Antag att vi har en plan våg i x -riktningen, med $\vec{u} = u(x, t)\hat{x}$. Då är $\Delta\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\hat{x}$. Vi antar fortfarande samma samband mellan tryck och densitet, och låter $c^2 = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_{\rho_0}$. Eliminering av hastighetsfältet (som ovan) ger nu en ekvation för densiteten,

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho_1 - \frac{4\mu}{3\rho_0} \Delta \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0. \quad (14.13)$$

Nu är det lätt att bekräfta att det inte finns våglösningar $\rho_1(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$. En ansats med dämpning, $\rho_1(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)-t/t_0}$ ger däremot, insatt i ekv. (14.13), relationerna mellan parametrarna:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{3\rho_0}{2\mu k^2}, \\ \omega &= ck \sqrt{1 - \left(\frac{2\mu k}{3\rho_0 c}\right)^2}. \end{aligned} \quad (14.14)$$

Vi ser att dämpningstiden t_0 går mot ∞ då $\mu \rightarrow 0$. (En ytterligare kontroll, egentligen på tecknet på viskositetstermen i Navier–Stokes ekvation, är att amplituden avtar och inte ökar med tiden.) Vi ser också att dämpningstiden blir kortare ju större vågtalet är, dvs. ju mindre våglängden är, och att det finns ett värde på vågtalet då ω blir noll. Det svarar mot kritisk dämpning. Kortare våglängder ger ingen svängning, utan bara exponentiellt avtagande. Den kritiska våglängden är

$$\lambda_0 = \frac{4\pi\mu}{3\rho_0 c}. \quad (14.15)$$

Om vi använder värde för t.ex. vatten vid 20°C , med $\mu \approx 10^{-3}\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$ blir den kritiska våglängden ungefär 10^{-8}m , alldeles för liten för att spela roll i “normala” situationer. Tryckvågor i vatten kommer för ordinära våglängder att vara mycket svagt dämpade.

14.6 Virvlar, vorticitet

Virvlar är ett strömningsfenomen som är ganska komplicerat. Vi skall skriva om Navier–Stokes ekvation med hjälp av *vorticiteten* $\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{u}$, som är ett mått på just hur mycket virvlar det finns. En liten räkning, i stil med dem vi gjorde i kapitel 5, när vi införde tensornotationen, ger $[\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})]_i = \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j \partial_l u_m = u_j \partial_i u_j -$

$u_j \partial_j u_i = \frac{1}{2} \partial_i(u_j u_j) - u_j \partial_j u_i$. Detta ger

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}u^2 - \vec{u} \times \vec{\omega}. \quad (14.16)$$

Navier–Stokes ekvation kan då skrivas

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}u^2 - \vec{u} \times \vec{\omega} \right) = \vec{b} - \vec{\nabla}p + \mu \left(\Delta \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right). \quad (14.17)$$

14.7 Inkompressibelt flöde

Vi antar nu att fluiden är *inkompressibel*. Om ρ är konstant ger kontinuitetsekvationen att hastighetsfältet är källfritt, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Vi antar också att den yttre krafttätheten \vec{b} är konservativ, $\vec{\nabla} \times \vec{b} = 0$, så att \vec{b} har en potential Φ , $\vec{b} = -\vec{\nabla}\Phi$. Om vi tar rotationen av Navier–Stokes ekvation försvinner alla termer som är gradienten av något, och kvar blir en ekvation för vorticiteten,

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{\omega} \quad (14.18)$$

(detta hade inte fungerat utan antagandet om inkompressibilitet, eftersom vänsterledet då också hade innehållit termer $\vec{\nabla}\rho \times (\text{något})$). Denna ekvation kallas vorticitetsekvationen. Termen med två kryssprodukter kan förstås skrivas om med skalärprodukter, om man vill, så att man får

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{\omega} \quad (14.19)$$

Det är intressant att se att vorticitetsekvationen ser väldigt mycket ut som en diffusionsekvation. Vi skall inte gå närmare in på den än att konstatera att alla termerna innehåller $\vec{\omega}$, så för inkompressibel strömning är det konsistent att ha $\vec{\omega} = 0$.

14.8 Potentialströmning

Om man antar att vorticiteten är noll leds man till förenklingar. För att vara tydlig med logiken: Först begränsade vi oss till inkompressibel strömning. Detta är ett antagande om en egenskap hos fluiden (eller i

och för sig hos strömningen; om den inte är för "väldsam" trycks inte fluiden ihop särskilt mycket). Sedan såg vi att det med antagandet om inkompresibilitet är möjligt att hitta situationer där man inte har virvlar, dvs. där vorticiteten är noll.

Låt oss då undersöka virvelfri strömning. Om $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ finns det en potential ϕ sådan att $\vec{u} = -\vec{\nabla}\phi$ (men ϕ kan fortfarande bero även på tiden). Detta kallas potentialströmning eller potentialflöde. Potentialen uppfyller Laplaces ekvation, $\Delta\phi = 0$. Navier–Stokes ekvation säger

$$\rho \left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\phi + \frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{\nabla}\phi|^2 \right) = -\vec{\nabla}\Phi - \vec{\nabla}p, \quad (14.20)$$

dvs.

$$\vec{\nabla} \left(-\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho |\vec{\nabla}\phi|^2 + p + \Phi \right) = 0. \quad (14.21)$$

Märk att viskositetstermerna försvinner. Det beror på att när $u_i = -\partial_i\phi$, så är deformationshastigheten $e_{ij} = \partial_i\partial_j\phi$. Den uppfyller automatiskt $e_{ii} = 0$ när $\Delta\phi = 0$. Viskositetstermen, som kommer från $\partial_j P_{ij}$, är $2\mu\partial_j e_{ij} = 2\mu\partial_i\Delta\phi = 0$. Det visar att potentialflöde är ett ganska starkt villkor, när det betyder att vätskan strömmar på ett sätt som gör att det inte uppstår några inre krafter, förutom trycket. De dissipativa krafterna från viskositeten är borta.

Om vi speciellt betraktar stationärt potentialflöde, behöver vi bara lösa Laplaces ekvation $\Delta\phi(\vec{r}) = 0$ för potentialen. Från ekv. (14.21) fås ett uttryck för trycket i fluiden,

$$p + \Phi + \frac{1}{2} \rho u^2 = \text{konstant} \quad (14.22)$$

(Bernoullis ekvation), som säger att ju större farten är desto lägre är trycket.

Exempel

Bestäm det stationära potentialflödet kring en sfär med radien a i ett hastighetsfält som långt från sfären är $\vec{u}_0 = u_0\hat{z}$.

Lösning: Vi skall alltså lösa Laplaces ekvation för $r > a$. Randvillkoret vid $r = a$ är Neumanns homogena randvillkor, $\frac{\partial\phi}{\partial r}|_{r=a} = 0$, eftersom man inte har något flöde genom begränsningsytan. För stora r har man $-\vec{\nabla}\phi = u_0\hat{z}$, så där är potentialen $\phi \approx -u_0 z =$

$-u_0 r \cos \theta$. Vi ansätter en lösning (oberoende av vinkeln φ) $\phi(r, \theta) = f(r) + g(r) \cos \theta$. (Vi har tidigare sett, t.ex. i kapitel 9, att en sådan ansats fungerar bra om randvillkoren inte innehåller annat vinkelberoende; det beror på att funktionerna 1 och $\cos \theta$ båda är egenfunktioner till Laplaceoperatorn på sfären.)

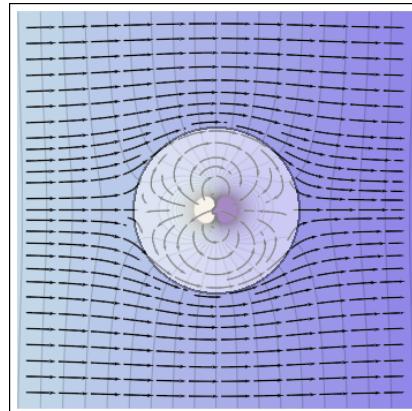
Ansatsen leder (liksom tidigare) till lösningen $f(r) = A + \frac{B}{r}$, $g(r) = Cr + \frac{D}{r^2}$. Konstanten A är irrelevant. Beteendet i $r = \infty$ bestämmer $C = -u_0$. Hastighetens radiella komponent ges av $-u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{B}{r^2} + (C - \frac{2D}{r^3}) \cos \theta$, och randvillkoren vid $r = a$ ger $B = 0$, $C - \frac{2D}{a^3} = 0$, dvs. $D = -\frac{1}{2}u_0 a^3$.

Potentialen är

$$\phi = -u_0 \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta = -u_0 z \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right),$$

vilket ger hastighetsfältet

$$\vec{u} = u_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \hat{r} - u_0 \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta \hat{\theta}.$$



Även om en sådan lösning kan ge en god bild av ett flöde vid låga strömningshastigheter, ger den en i vissa stycken ofullständig bild av vad som händer. Flödeshastigheten vid sfärens yta är $\frac{3}{2}u_0 \sin \theta \hat{\theta}$. Farten är densamma för vinkeln $\pi - \theta$ som för vinkeln θ . Bernoullis ekvation säger att trycket är detsamma på fram- och baksidan av

sfären, som följaktligen inte påverkas av någon nettokraft^a. Så är det ju inte på riktigt, men ett så ”trivialt” fenomen som att en kropp påverkas av en kraft från fluiden som strömmar runt den kan alltså slarvas bort i de approximationer och antaganden vi gjort...

^aDetta är kraften som kommer från trycktermen i spänningstensorn. Om fluiden har en viskositet får man kontrollera även viskositetstermen i spänningstensorn på randen; även om den försvinner ur Navier–Stokes ekvation då volymelementen är i jämvikt kan det ju finnas effekter på sfärens yta. Det visar sig dock att integralen av krafttätheten är noll. Vi går inte igenom detta här.

14.9 Uppgifter

14.9.1

Använd idealas gaslagen för att uppskatta ljudhastigheten i luft.

14.9.2

Gör en dimensionkontroll av uttrycken i ekv. (14.14).

14.9.3

I en fluid har man hastighetsfältet

$$\vec{u} = \Omega_0 \left(\varrho \hat{\theta} + \frac{\varrho}{1 + \frac{\varrho}{a}} \hat{\varphi} + \varrho \sqrt{1 + \frac{z}{a}} \hat{z} \right),$$

där Ω_0 och a är konstanter. Man kan sedan definiera en vorticitet $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ för detta hastighetsfält. Bestäm var i fluiden som z -komponenten av vorticiteten har sitt maximum.

Svar. I $\varrho = 0$.

14.9.4

Bestäm hastighetsfältet för stationärt potentialflöde runt en oändligt lång cylinder med radien R och z -axeln som symmetriaxel, då hastighetsfältet långt från cylindern är $\vec{u} = u_0 \hat{x}$.

Svar. $\vec{u} = -\vec{\nabla}\phi = u_0 \left[\hat{\varrho} \left(1 - \frac{R^2}{\varrho^2} \right) \cos \varphi - \hat{\varphi} \left(1 + \frac{R^2}{\varrho^2} \right) \sin \varphi \right]$

14.9.5

(*) Bestäm potential och hastighetsfält för stationärt potentialflöde i två dimensioner i några olika geometrier med hjälp av konform avbildning.

Visualisering av fält med Matlab och Python

A

När det gäller att visualisera fält kan man ha stor nytta av olika funktioner för interpreterande programspråk som **Matlab** eller **Python**. Vi diskuterar några av dessa speciella funktioner nedan.

Medan **Matlab** är en kommersiell produkt baseras **Python** helt på öppen källkod. Tillsammans med modulen **numpy**, för matematiska funktioner, och **matplotlib**, för visualisering med matlab-liknande syntax, erbjuder detta ett väldigt kraftfullt alternativ för tekniska tillämpningar. Alla exempel nedan måste inledas med att ladda dessa två moduler.

```
# Python code
# Import modules.
# pylab contains matplotlib
import numpy as np
import pylab as p
```

Att följa andras exempel är ofta en bra start. Se gärna Matplotlib recipes¹.

Inläsning av data. Man ställs ofta inför situationen att hantera fält som har sparats numeriskt. Datafiler läses enkelt in med **Matlab**-funktionen **load**²

```
% Matlab code
% Read data
p = load('skalarfalt.dat');
u = load('vektorfalt_x.dat');
v = load('vektorfalt_y.dat');
```

¹ <https://matplotlib.org/users/recipes.html>

² <http://se.mathworks.com/help/matlab/ref/load.html>

eller med Python/numpy-funktionen `loadtxt`³

```
# Python code
# Read data
P = np.loadtxt('skalarfalt.dat')
u = np.loadtxt('vektorfalt_x.dat')
v = np.loadtxt('vektorfalt_y.dat')
```

Rutsystem med rumskoordinater. För att skapa ett rutsystem med koordinater använder vi t.ex. kolon-notationen i Matlab

```
% Matlab code
x = -3:0.1:3;
y = -3:0.1:3;
```

eller funktionen `linspace` som finns både i Python/numpy och i Matlab.

```
# Python code
x = np.linspace(-3,3,61)
y = np.linspace(-3,3,61)
```

(Det finns förstås motsvarande varianter för t.ex. logaritmiska steglängder).

För inmatning till vissa funktioner måste koordinaterna sparas i ett multidimensionellt rutsystem. För att skapa ett sådant rutsystem från givna (endimensionella) koordinatvektorer finns kommandot `ndgrid`⁴ (Matlab) och `meshgrid`⁵ (Python/numpy). Man kan också skapa det multidimensionella rutsystem direkt utan mellansteget med individuella koordinatvektorer. Se t.ex. funktionen `mgrid`⁶ i Python/numpy.

Som ett exempel skapar vi ett tvådimensionellt hastighetsfält (med x-komponent U och y-komponent V) samt det motsvarande skalärfältet $speed$ som ger farten i varje punkt. Vi använder ett rutsystem med 100 punkter i varje led på intervallet $[-3, 3]$.

```
% Matlab code
[X,Y] = ndgrid(linspace(-3,3,100),linspace(-3,3,100));
U = -1 - X.^2 + Y;
V = 1 + X - Y.^2;
speed = sqrt(U.*U + V.*V);
```

```
# Python code
Y, X = np.mgrid[-3:3:100j, -3:3:100j]
U = -1 - X**2 + Y
V = 1 + X - Y**2
speed = np.sqrt(U*U + V*V)
```

³ <http://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.loadtxt.html>

⁴ <http://se.mathworks.com/help/matlab/ref/ndgrid.html>

⁵ <https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.meshgrid.html>

⁶ <https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.mgrid.html>

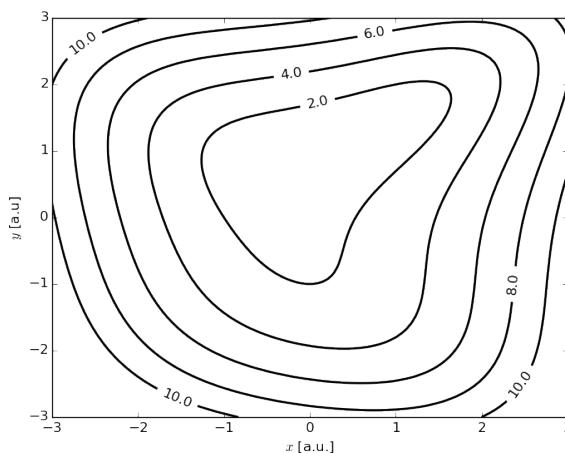
Nivåkurvor, visualisering av skalärfält. För att rita nivåkurvor finns funktionen `contour` i både Matlab och Python/matplotlib

Med skalärfältet *speed* som vi skapade ovan kan vi göra en visualisering av nivåkurvorna.

```
% Matlab code
[C,H] = contour(X, Y, speed)
H.LineWidth=2; H.LineColor='k';
clabel(C,H,[2,6,0],'FontSize',14);
xlabel('x [a.u.]');
ylabel('y [a.u.]');
```

Figuren som visas nedan kommer från Python implementationen där vi har lagt ner lite extra arbete att formatera figuren och att välja vilka nivåkurvor som ritas.

```
# Python code
p.figure()
CS = p.contour(X, Y, speed, colors='k', linewidths=2, levels=[2,4,6,8,10])
fig_c = p.clabel(CS, inline=1, fontsize=12, fmt='%.2f')
p.xlabel('$x$ [a.u.]')
p.ylabel('$y$ [a.u.]')
p.show()
```



Figur A.1 Nivåkurvor för ett skalärfält (nivåerna visar absolutbeloppet av ett hastighetsfält i dimensionslösa enheter).

Fältlinjer, visualisering av vektorfält. Vektorfält kan representeras med en finit uppsättning av vektorer. För detta ändamål finns funktionen `quiver` i både Matlab och Python/matplotlib.

Allra mest användbart är dock funktionerna **streamline**⁷ (Matlab) och **streamplot**⁸ (Python/matplotlib) för att rita fältlinjer.

Vi ritar fältlinjer för vektorfältet (U, V) som vi skapade ovan. För Matlab och **streamline** behöver vi specificera vilka fältlinjer som skall ritas ut och detta görs genom att specificera en uppsättning randpunkter där fältlinjerna skall starta. Vi behöver också vara speciellt försiktiga med att skilja på rad- och kolumnvektorer. Notera att **streamline** inte visar riktningar på fältlinjerna.

```
% Matlab code
startX = -3:0.5:3;
startY = ones(size(startX))*3;
streamline(X', Y', U', V', startX,startY)
```

För Python och **streamplot** kan man istället variera densiteten av fältlinjer genom det valfria argumentet **density**. I exemplet nedan låter vi dock funktionen själv bestämma en lagom densitet. Istället färglägger vi fältlinjerna så att färgskalan indikerar storleken på fältet (dvs absolutbeloppet av hastigheten i varje punkt). Notera valet av färgkarta som bör göras så att figuren är läsbar även i gråskala.

```
# Python code
p.figure()
p.streamplot(X, Y, U, V, color=speed, linewidth=2, \
    cmap=p.cm.cubehelix_r)
cb=p.colorbar()
cb.set_label('speed [a.u.]')
p.xlabel('$x$ [a.u.]')
p.ylabel('$y$ [a.u.]')
p.show()
```

Vidare finns funktionerna **divergence** och **curl** i Matlab för att räkna ut olika derivator på ett vektorfält. För att lära sig mer om de olika funktionerna och deras argument kan man läsa hjälpmanualerna. I Matlab skriver man t.ex. **help streamline** medan motsvarande anrop i Python är **help(p.streamplot)**.

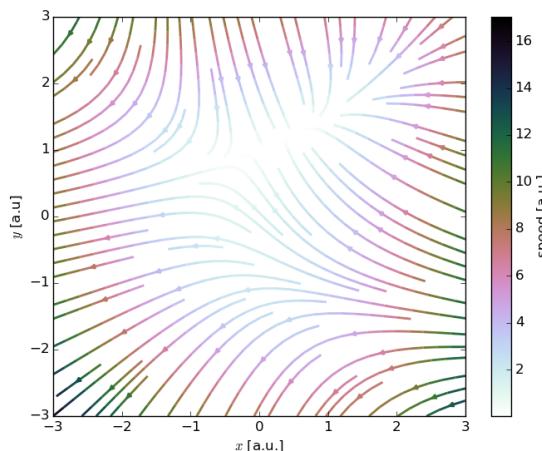
Slutligen skapar vi en fältbild (dvs både nivåkurvor och fältlinjer) för ett vektorfält med motsvarande skalära potential. Vårt exempel är (det rotationsfria) hastighetsfältet som ges av potentialen

$$\phi(x, y) = \frac{A}{2}(x^2 - y^2),$$

där A är en positiv konstant. Hastighetsfältet blir

⁷ <http://se.mathworks.com/help/matlab/ref/streamline.html>

⁸ http://matplotlib.org/api/pyplot_api.html#matplotlib.pyplot.streamplot



Figur A.2 Fältlinjer för ett tvådimensionellt hastighetsfält.

$$\vec{v} = -\nabla\phi \quad \Rightarrow \begin{cases} v_x = -Ax \\ v_y = Ay \end{cases}$$

Vi noterar att detta fält också är divergensfritt. Fältbilden visas nedan. Med funktionen `streamline` i Matlab visas ej riktningar på fältlinjer. I exemplet nedan kombinerar vi `streamline` med funktionen `quiver`.

```
% Matlab code

% Make an x,y grid
[X,Y] = ndgrid(linspace(-3,3,100),linspace(-3,3,100));
% and the 2D scalar potential field
A=1; % constant, [A] = 1/time
phi = A * (X.^2 - Y.^2)/2;

% Contour plot
hold on
ctrf=contourf(X,Y,phi,[-6:1:6]);
[C,H] = contour(X, Y, phi);
H.LineWidth=2; H.LineColor='b';
xlabel('x [a.u.]');
ylabel('y [a.u.]');

% Plot streamlines for corresponding vector field
v_x = - A * X;
v_y = A * Y;
start_y1=-3:0.5:3;
start_y=[start_y1, start_y1];
start_x=[ones(size(start_y1))*(-3),ones(size(start_y1))*3];
```

```

strm=streamline(X', Y', v_x', v_y', start_x, start_y);
set(strm,'LineWidth',2,'Color','k')

% Matlab streamlines have no arrows. Combine with quiver.
[Xc,Yc] = ndgrid(linspace(-3,3,10),linspace(-3,3,10));
v_xc = - A * Xc;
v_yc = A * Yc;
qvr=quiver(Xc', Yc', v_xc', v_yc','Color','k');

```

Fältlinjer med riktningar är faktiskt enklare att visualisera med Python och **streamplot**. Figuren nedan är skapad med följande kod. Här illustrerar vi också hur man kan skapa figuren och utföra ritkommandon och samtidigt skapa pekare (**handles**). Dessa kan vi sedan använda för att ge ytterligare kommandon som t.ex. att sätta rubriker på axlarna.

```

# Python code
import numpy as np
import pylab as p

# Make an x,y grid
Y, X = np.mgrid[-3:3:100j, -3:3:100j]
# and the 2D scalar potential field
A=1 # constant, [A] = 1/time
phi = A * (X**2 - Y**2)/2

# Contour plot
fig0, ax0 = p.subplots()
cntrf = ax0.contourf(X, Y, phi, cmap=p.cm.cubehelix_r,\n                      levels=np.arange(-6,7))
cb=p.colorbar(cntrf)
cb.set_label('$\phi$ [a.u.]')
cntr = ax0.contour(X, Y, phi, colors='b', linewidths=2,\n                    levels=np.arange(-4,5,2))

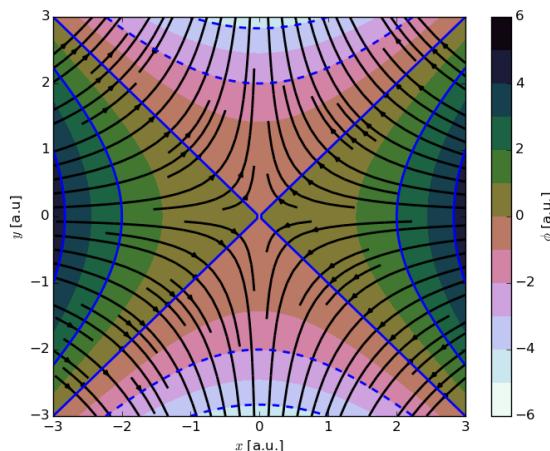
# Plot streamlines for corresponding vector field
v_x = - A * X
v_y = A * Y

strm = ax0.streamplot(X, Y, v_x, v_y, color='k', linewidth=2)
ax0.set_xlabel('$x$ [a.u.]')
ax0.set_ylabel('$y$ [a.u.]')

# Save figure
p.savefig('stagnation_fieldplot.png')

```

Vi avslutar med en kort kommentar kring den fysikaliska tolkningen av detta hastighetsfält som kallas för en stagnationsström. Notera att det finns områden där hastigheten är noll. Dessa kallas stagnationspunkter. Vi noterar också att fältlinjerna blir parallella med x - och y -axlarna när vi kommer tillräckligt nära. Vi kan därför tänka oss dessa som fasta



Figur A.3 Fältbild för stagnationsströmmen från en rotationsfri potential.

väggar och att vårt hastighetsfält beskriver strömmen vid ett hörn. I verkligheten kommer dock friktionen nära väggen att skapa virvlar, och vår rotationsfria approximation ger en sämre beskrivning.

Ledningar och lösningar till utvalda uppgifter

B

Uppgift 2.3.8

Ledtråd. Fältlinjer är de kurvor som följer ett vektorfält på så sätt att de i varje punkt har vektorfältet som sin tangentvektor. Fältlinjer kan parametriseras $\vec{r} = \vec{r}(\tau)$ och differentialekvationerna för att bestämma dem är

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = C\vec{E},$$

där C är en godtycklig konstant vilken ju inte påverkar tangentriktningen.

Med cartesiska koordinater gäller ju att förskjutningsvektorn $d\vec{r}$ kan skrivas $d\vec{r} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$ och vektorekvationen ovan ger tre differentialekvationer (en för varje riktning \hat{x} , \hat{y} , \hat{z}):

$$\begin{cases} x : \frac{dx}{d\tau} = CE_x \\ y : \frac{dy}{d\tau} = CE_y \\ z : \frac{dz}{d\tau} = CE_z. \end{cases}$$

Men om fältet är mycket enklare att uttrycka i kroklinjiga koordinater är det fördelaktigt att teckna differentialekvationerna i dessa riktningarna istället. Men då får man komma ihåg att förskjutningsvektorn blir

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{u}_i du_i,$$

där h_i är koordinatsystemets skalfaktorer.

Uppgift 2.3.14

Lösning. Enhetsvektorer ges av

$$\vec{e}_i = h_i \nabla u_i.$$

Här är u, v, w en funktion av sfäriska koordinater, så vi använder den sfäriska gradienten

$$\begin{aligned}\hat{u} &\propto \nabla u = \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) u \\ &= (1 - \cos \theta) \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}, \\ \hat{v} &\propto \nabla v = (1 + \cos \theta) \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}, \\ \hat{w} &\propto \nabla w = \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta}.\end{aligned}$$

Det är lättast att kontrollera om ett nytt system är *ortogonal* om vi har dess basvektorer uttryckta i ett annat, mer välkänt, system. Därför låter vi här $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ fortsätta vara en funktion av sfäriska koordinater och basvektorer, och räknar ut skalärprodukterna mellan dem. Vi ser direkt att $\hat{u} \cdot \hat{w} = \hat{v} \cdot \hat{w} = 0$. För \hat{u} och \hat{v} :

$$\begin{aligned}\hat{u} \cdot \hat{v} &\propto (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) - \sin^2 \theta \\ &= 1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0.\end{aligned}$$

Alltså är u, v, w -systemet ortogonal.

Från ekvation (B) inser vi att *skalfaktorerna* h_i är inversen av $|\nabla u_i|$. För enkelhetens skull fortsätter vi räkna i termer av sfäriska koordinater, och översätter till u, v, w i slutet. Notera att $u + v = 2r$. Vi får

$$\begin{aligned}h_u &= \left((1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \right)^{-1/2} = (2 - 2 \cos \theta)^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{u+v}{4u}}, \\ h_v &= \left((1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \right)^{-1/2} = (2 + 2 \cos \theta)^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{u+v}{4v}}, \\ h_w &= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{r^2 (1 - \cos^2 \theta)} = \sqrt{uv}.\end{aligned}$$

Kombinerar vi skalfaktorerna (i sfäriska koordinater) och de onormerade enhetsvektorerna uträknade ovan så får vi *enhetsvektorerna*

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{1 - \cos \theta}{\sqrt{2 - 2 \cos \theta}} \hat{r} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2 - 2 \cos \theta}} \hat{\theta}, \\ \hat{v} &= \frac{1 + \cos \theta}{\sqrt{2 + 2 \cos \theta}} \hat{r} - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2 + 2 \cos \theta}} \hat{\theta}, \\ \hat{w} &= \hat{\varphi}.\end{aligned}$$

För ortogonalala koordinatsystem gäller att

$$\nabla \phi = \sum_i \vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u_i},$$

där ϕ är ett godtyckligt skalärfält. I vårt u, v, w -system blir detta

$$\nabla \phi = \hat{u} \frac{1}{h_u} \frac{\partial \phi}{\partial u} + \hat{v} \frac{1}{h_v} \frac{\partial \phi}{\partial v} + \hat{w} \frac{1}{h_w} \frac{\partial \phi}{\partial w}.$$

Sätter vi in skalfaktorerna vi beräknat ovan är det lätt att identifiera *gradientoperatorn*

$$\nabla = \hat{u} \sqrt{\frac{4u}{u+v}} \frac{\partial}{\partial u} + \hat{v} \sqrt{\frac{4v}{u+v}} \frac{\partial}{\partial v} + \hat{w} \frac{1}{\sqrt{uv}} \frac{\partial}{\partial w}.$$

Notera att den inversa skalfaktorn alltid kommer före partialderivatan! Skriver man dem i fel ordning ska plötsligt även skalfaktorn deriveras, och det blir fel.

I sfäriska koordinater är *ortsvektorn*

$$\vec{r} = r \hat{r}.$$

Vi har redan noterat att $r = (u+v)/2$; vi behöver nu också uttrycka \hat{r} som en funktion av $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$.

En smart linjärkombination av enhetsvektorerna:

$$\sqrt{2 - 2 \cos \theta} \hat{u} + \sqrt{2 + 2 \cos \theta} \hat{v} = 2 \hat{r},$$

som översatt till nya koordinater betyder att

$$\hat{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_u} \hat{u} + \frac{1}{h_v} \hat{v} \right) = \sqrt{\frac{u}{u+v}} \hat{u} + \sqrt{\frac{v}{u+v}} \hat{v}.$$

Vi får alltså ortsvektorn

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= r\hat{r} \\
 &= \frac{u+v}{2} \left(\sqrt{\frac{u}{u+v}} \hat{u} + \sqrt{\frac{v}{u+v}} \hat{v} \right) \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{u+v} (\sqrt{u}\hat{u} + \sqrt{v}\hat{v}).
 \end{aligned}$$

Uppgift 6.6.6

Ledtråd.

- Ytan motsvarar en kon utan bottenplatta.
- Skriv om fältet i sfäriska koordinater.
- Den första termen av \vec{F} motsvarar en punktkälla belägen i origo.
 - Ytintegralen för denna term kan räknas ut genom att beräkna vilken rymdvinkel som konen upptar sedd från punktkällan.
 - Alternativt kan man sluta ytan genom en halvsfärs område som inkluderar punktkällan inne i volymen.
 - ... eller en yta som gör att punktkällan hamnar utanför.
- Den andra termen av \vec{F} är en rymdkälla med en källtäthet, $\nabla \cdot \vec{F}_2$ som är enkel att räkna ut.
 - Här blir det enkelt att använda Gauss sats. Men kom ihåg att sluta ytan på lämpligt sätt.

Lösning. Det vi ska räkna ut är normalytintegralen över S_1 , dvs

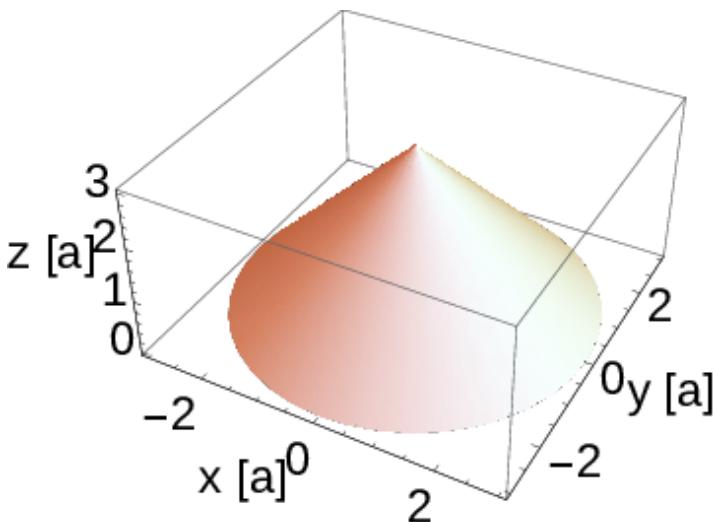
$$\int_{S_1} d\vec{S} \cdot \vec{F} \quad (\text{B.1})$$

Detta kan så klart lösas genom att hitta en normalvektor till ytan, sedan hitta en parametrisering till konen och utföra den resulterande integralen. Man ska dock ha i ryggraden att man kan använda Gauss sats istället, det finns ingen garanti att det blir enklare men det är ofta värt att tänka på det.

Vi använder oss därför av den generella lösningsstrategin för Gauss sats:

1. Bestäm utseendet på ytan S och rita en tydlig figur.
2. Undersök fältet \vec{F} . Singulariteter? Beräkna $\nabla \cdot \vec{F}$.
3. Slut ytan S . Undvik singulariteter inuti den inneslutna volymen.
4. Teckna Gauss sats och beräkna integralen.
5. Har normalen rätt riktning?

Vi känner igen ytan S_1 som en kon. Här kan man tänka på konen som sammansatt av många cirklar vars radie bestäms av var i z -led man befinner sig. I $z = 3a$ ser man att radien på cirkeln blir noll, detta är således spetsen av konen. I $z = 0$ ser vi att cirkeln har radien $3a$. Vi börjar med att rita upp ytan S_1 , den visas i figur B.1.



Figur B.1 Ytan S_1 uppritad.

- Undersök fältet \vec{F} . Singulariteter? Beräkna $\nabla \cdot \vec{F}$.

Ska man använda Gauss sats så är det viktigt att man behandlar singulära delar av fältet korrekt, dvs identifiera *källtermer* som är inneslutna innanför ytan. När man separerat de singulära delarna av fältet så kan man sen beräkna divergensen och utföra volymsintegralen. Vi skriver fältet \vec{F} som två olika fält

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (\text{B.2})$$

där

$$\vec{F}_1 = F_0 \frac{a^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z) = F_0 a^2 \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\vec{F}_2 = F_0 \frac{z}{a} \hat{z} \quad (\text{B.4})$$

För att skriva om fältet \vec{F}_1 till sfäriska kordinater har vi använt oss av att

$$x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r\hat{r} \quad (\text{B.5})$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \quad (\text{B.6})$$

Vi känner nu igen fältet \vec{F}_1 som fältet från en punktkälla i origo. Styrkan hos punktkällan är $4\pi F_0 a^2$.

Fältet \vec{F}_2 motsvarar en rymdkälla med konstant källtäthet

$$\nabla \cdot \vec{F}_2 = F_0 \partial_z \frac{z}{a} = \frac{F_0}{a}. \quad (\text{B.7})$$

- Slut ytan S . Undvik singulariteter inuti den inneslutna volymen.

Gauss sats lyder

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad (\text{B.8})$$

och det är viktigt att tänka på att $S = \partial V$, dvs ytan S är randen till volymen V . Det betyder att S måste vara en sluten yta (hur kan den annars vara randen till en volym?). Det betyder att för att kunna använda Gauss sats för denna uppgiften måste vi sluta konen. Det mest uppenbara sättet att sluta ytan är att lägga till en bottenplatta till konen.
¹

Bottenplattan motsvarar alltså cirkeln som konen ligger på i x, y planet. Vi kallar denna ytan S_2 och skriver den som $S_2 : x^2 + y^2 \leq (3a)^2$.

Vi har dock ett litet problem nu: Punktkällan ligger mitt i bottenplattan, dvs på ytan. Hur ska man tänka nu? Vi kommer att illustrera *tre* olika sätt att hantera denna punktkälla.

1. Slut istället ytan på ett annat sätt så att punktkällan hamnar helt utanför.
2. Slut istället ytan på ett annat sätt så att punktkällan hamnar helt innanför.
3. Beräkna bidraget från punktkällan genom att räkna ut rymdvinkeln som konen upptar.

Alla tre metoderna kommer givetvis att ge samma svar.

¹ Vi kan såklart sluta yan med något annat än en bottenplatta om vi vill. Tex kunde vi ta en halsvsfär och Gauss sats fungerar. Men för att det ska vara lönt att använda Gauss sats är det viktigt att den ytan vi lägger till är enklare att integrera över än originalytan.

För att följa alt. 1 inför vi en halvsfärs upp i det övre halvplanet med centrum i origo. Halvsärens radie kallas ϵ och låter denna vara liten så att halvsärens yta inte skär konens mantelyta. Denna nya yta kallas vi S_ϵ^+ . Tillsammans med S_1 och den modifierade bottenplattan $S_{2-\epsilon}$ bildas en sluten yta som *inte* kommer att innesluta punktkällan i volymen.

För att följa alt. 2 så sluter vi t.ex. ytan med en halvsärs ned i det nedre halvplanet med centrum i origo. Här kan vi låta radien vara lika med $3a$ så att vi direkt får en sluten yta av $S_1 + S_{3a}^-$ som omsluter punktkällan, där S_{3a}^- är den införda halvsärens yta.

För att följa alt. 3 handlar det bara om att beräkna hur stor rymdvinkel som konen upptar sedd från punktkällan. Se mer nedan.

- Teckna Gauss sats och beräkna integralen.

Vi börjar med det oproblematiska bidraget från \vec{F}_2 med den sökta ytintegralen

$$I_2 \equiv \int_{S_1} \vec{F}_2 \cdot d\vec{S} \quad (\text{B.9})$$

Vi använder den slutna ytan $S_1 + S_2$ som vi kan använda i Gauss sats

$$\int_{S_1+S_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}_2 dV \quad (\text{B.10})$$

Vi bollar över integralen över S_2 till andra sidan av likheten och får

$$\int_{S_1} \vec{F}_2 \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F}_2 dV - \int_{S_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{S} \quad (\text{B.11})$$

där den ytintegral som uppgiften ber oss beräkna nu står i vänsterledet. Vi ser att det var viktigt att sluta ytan då vi nu har en extra term att dra bort från värdet av volymsintegralen. Nyttan med Gauss sats är som störst när divergensen är simpel och normalytintegralen över bottenplattan (eller vilken annan del man slutit sin yta med) är simpel.

Divergensen för \vec{F}_2 räknade vi ut ovan och vi får

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F}_2 dV = \frac{F_0}{a} \int_V dV = F_0 \pi (3a)^2 \quad (\text{B.12})$$

där vi i det sista steget använt att volymen av en kon är $V = \pi r^2 h / 3$ där r är basradien och h är höjden.

Vi behöver nu ytintegralen över bottenlattan kvar enligt ekv. (B.11). Det är viktigt att notera att bottenplattans normalvektor pekar ut från den inneslutna volymen, dvs nedåt. Vi ska alltså beräkna

$$\int_{S_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{S} = - \int_{S_2} \vec{F}_2 \cdot \hat{z} dS = - \int_{S_2} F_0 \frac{z}{a} \hat{z} \cdot \hat{z} dS \quad (\text{B.13})$$

eftersom $z = 0$ på S_2 så integralen över \vec{F}_2 på bottenplattan är noll. Vi har alltså att

$$I_2 = F_0 \pi (3a)^2 \quad (\text{B.14})$$

Återstår integralen över \vec{F}_1 . Enligt alt. 1 blir

$$I_1 = \int_{S_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{V_1} \nabla \cdot \vec{F}_1 dV - \int_{S_{2-\epsilon}} \vec{F}_1 \cdot d\vec{S} - \int_{S_\epsilon^+} \vec{F}_1 \cdot d\vec{S}. \quad (\text{B.15})$$

Volymsintegralen görs här över en volym som inte inkluderar punktkällan. Den blir därför noll (divergensen $\nabla \cdot \vec{F}_1 = 0$ i hela denna volym). Ytintegralen över bottenplattan $S_{2-\epsilon}$ blir också noll eftersom fältets riktning \hat{r} är vinkelrät mot ytans normalriktning. På denna yta ligger ju \hat{r} alltid i xy planet. Slutligen har vi integralen över halvsfären. Normalen måste här vara riktad i negativ \hat{r} -led för att peka ut från volymen

$$\int_{S_\epsilon^+} \vec{F}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{S_\epsilon^+} F_0 a^2 \frac{\hat{r}}{\epsilon^2} \cdot (-\hat{r}) \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi = -F_0 a^2 2\pi \quad (\text{B.16})$$

Slutligen får vi alltså $I_1 = 0 - 0 - (-F_0 a^2 2\pi) = F_0 a^2 2\pi$.

Med alt. 2 har vi att

$$I_1 = \int_{S_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{V_2} \nabla \cdot \vec{F}_1 dV - \int_{S_{3a}^-} \vec{F}_1 \cdot d\vec{S}. \quad (\text{B.17})$$

Nu kommer volymen V_2 att innesluta punktkällan och bidraget från denna term blir lika med punktkällans styrka: $F_0 a^2 4\pi$. Ytintegralen över S_{3a}^- göra på precis samma sätt som ovan, men vi skall nu notera att normalriktningen pekar i positiv \hat{r} -led för att peka ut från volymen. Bidraget blir $F_0 a^2 2\pi$. Slutligen ger alltså denna metod att $I_1 = F_0 a^2 4\pi - F_0 a^2 2\pi = F_0 a^2 2\pi$, precis som alt. 1 ovan.

Enligt alt. 3 hade vi direkt kunnat räkna ut ytintegralen över konens mantelyta med ekv. (6.7). Sett från punktkällan i origo upptar konens mantelyta en rymdvinkel 2π . Det totala bidraget blir därför $(2\pi)/(4\pi) = 1/2$ av punktkällans styrka. Dvs vi får $I_1 = (F_0 a^2 4\pi)/2 = F_0 a^2 2\pi$. Givetvis samma resultat som med alt. 1 och 2.

Nu kombinerar vi ihop våra delresultat

$$\int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = I_1 + I_2 = F_0 a^2 2\pi + F_0 \pi (3a)^2 = F_0 \pi 11a^2 \quad (\text{B.18})$$

- Har normalen rätt riktning?

Kontrollera gärna en gång till att ytnormalerna i de ytintegraler som ger nollskilda bidrag har rätt bidrag. Detta gäller i synnerhet de två halvsärer som vi införde för att räkna ut I_1 enligt alt. 1 och alt. 2.

Svaret på uppgiften är alltså $11\pi F_0 a^2$.

Kontrollera också dimensionen på svaret. Vårt fält har dimensionen $[F_0]$ och ytintegralen skall därför ha dimensionen $[F_0]^* \text{area}$, vilket verkar stämma.

Kommentarer. Uppgiften illustrerar olika sätt att hantera en singularitet som hamnar på randen till en volym.

Det är värt att notera att den här uppgiften innehåller ett icke-standard moment som utgörs av att punktkällan ligger på den bottnyta som är naturlig att sluta ytan med.

Notera att vi i slutändan fick precis halva styrkan av punktkällan som bidrag oavsett vilken metod vi använde för att hantera den. Det betyder att det kanske enklaste sättet att se detta på är att punktkällan strålar halva sitt bidrag in mot konen S_1 i detta fallet, dvs man tänker som i metod 3.

Uppgift 7.5.1

Ledtråd.

- Varje given deltafunktions-approximation kan integreras och ger då en motsvarande stegfunktions-approximation.
- Utför integralen först och låt sedan $\epsilon \rightarrow 0$. Glöm inte att skissa funktionerna.
- I fallet med den Gaussiska deltafunktions-approximationen får man en primitiv funktion som innehåller den s.k. felfunktionen $\text{erf}(x)$.

Lösning. Stegfunktionen kan definieras som [se ekvation (7.18)]

$$H(x) = \int_{-\infty}^x dt \delta(t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}. \quad (\text{B.19})$$

Exakt vilket värde $H(0)$ antar varierar i litteraturen. Vanligt är att $H(0)$ är odefinierat eller lika med $1/2$.

Varje given deltafunktions-approximation kan alltså integreras enligt ekvation (B.19) och ger då en motsvarande stegfunktions-approximation. Till exempel kan

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 1/\epsilon & |x| < \epsilon/2 \\ 0 & |x| > \epsilon/2 \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

integreras trivialt till (med eget val av integrationskonstant)

$$H(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & x < -\epsilon/2 \\ \frac{x}{\epsilon} + \frac{1}{2} & -\epsilon/2 < x < \epsilon/2 \\ 1 & x > \epsilon/2 \end{cases}. \quad (\text{B.21})$$

För den Gaussiska deltafunktions-approximationen $h_\epsilon(x) = \exp[-x^2/\epsilon^2]/\epsilon\sqrt{\pi}$ får vi stegfunktionen (med eget val av integrationskonstant)

$$H(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right]. \quad (\text{B.22})$$

Här är felfunktionen

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}. \quad (\text{B.23})$$

Slutligen har vi den Lorentzianska approximationen $h_\epsilon(x) = \epsilon\pi^{-1}(x^2 + \epsilon^2)^{-1}$, som även den är rättfram att integrera. Resultatet är (med eget val av integrationskonstant)

$$H(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right]. \quad (\text{B.24})$$

Utseendet på dessa funktioner skissas i figurerna B.2 och B.3 för några olika värden på ϵ .

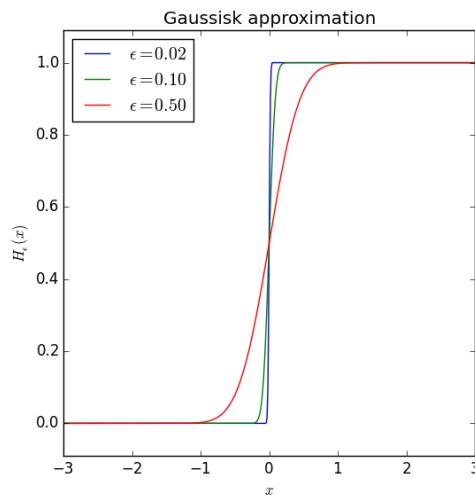
Kommentarer. Uppgiften illustrerar hur en stegfunktion resulterar som en primitiv funktion till en deltafunktion. Vi undersöker olika distributioner för vilka integralen kan utföras analytiskt och studerar sedan gränsen då $\epsilon \rightarrow 0$.

Uppgift 7.5.2

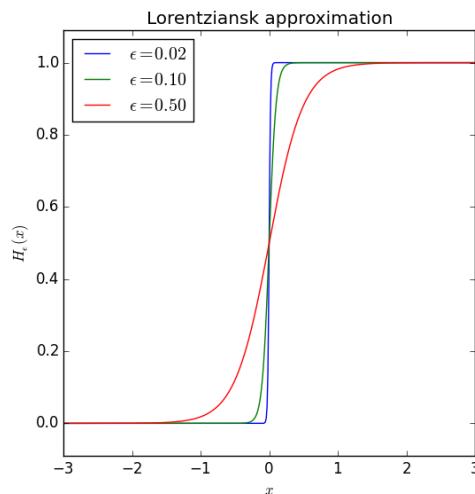
Ledtråd. Det är instruktivt att lösa uppgiften på två sätt:

1. Att använda de explicita uttrycken för olika ordningars derivator av de givna distributionerna och utföra integralerna.

- Gör först en Taylorexpansion av funktionen $f(x)$ runt $x = 0$.



Figur B.2 Primitiva funktionen till den Gaussiska approximationen av deltafunktionen i gränsen $\epsilon \rightarrow 0$.



Figur B.3 Primitiva funktionen till den Lorentziska approximationen av deltafunktionen i gränsen $\epsilon \rightarrow 0$.

- Notera att distributionerna är jämma funktioner så att integraler över dessa gånger udda funktioner måste bli noll för ett symmetriskt intervall.

- Se formelsamling för analytiska uttryck för de relevanta integralerna.
2. Studera även de skissade funktionerna och derivaatorna. Vad får man om man multiplicerar dessa med en funktion $f(x)$ och utför integralen i gränsen $\epsilon \rightarrow 0$?
- Jämför med uttrycken för olika ordningars derivaotor av en funktion $f(x)$ i termer av finita differenser.

Lösning. Rättfram derivering ger

$$h_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\epsilon^2}, \quad (\text{B.25})$$

$$h'_\epsilon(x) = -\frac{2x}{\epsilon^2} h_\epsilon(x), \quad (\text{B.26})$$

$$h''_\epsilon(x) = \frac{4x^2 - 2\epsilon^2}{\epsilon^4} h_\epsilon(x), \quad (\text{B.27})$$

$$h'''_\epsilon(x) = -\frac{8x^3 - 12x\epsilon^2}{\epsilon^6} h_\epsilon(x), \quad (\text{B.28})$$

och

$$h_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)}, \quad (\text{B.29})$$

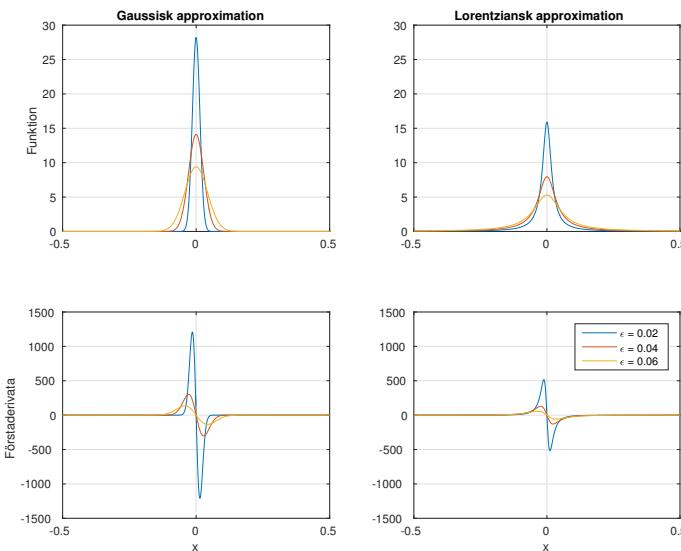
$$h'_\epsilon(x) = -\frac{2x}{x^2 + \epsilon^2} h_\epsilon(x), \quad (\text{B.30})$$

$$h''_\epsilon(x) = \frac{6x^2 - 2\epsilon^2}{(x^2 + \epsilon^2)^2} h_\epsilon(x), \quad (\text{B.31})$$

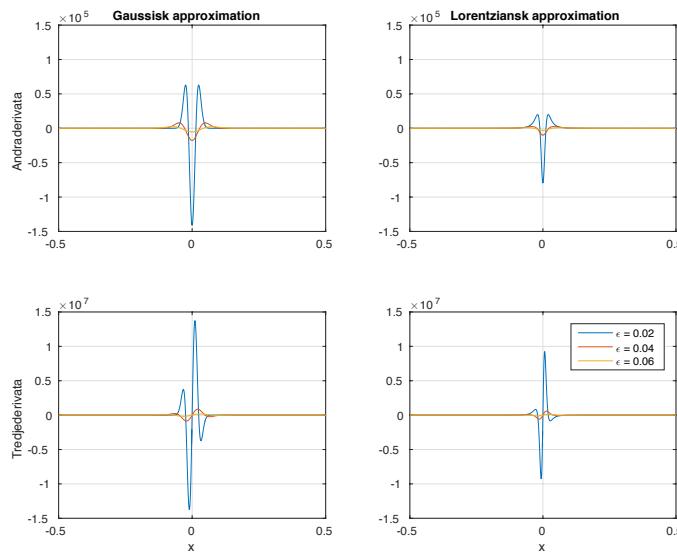
$$h'''_\epsilon(x) = -\frac{24x^3 - 24x\epsilon^2}{(x^2 + \epsilon^2)^3} h_\epsilon(x). \quad (\text{B.32})$$

Dessa funktioner och derivaotor är skisserade för $\epsilon = 0.02, 0.04, 0.06$ i figur B.4 och B.5.

Deltafunktionens derivaotor ska gå att partialintegrera [se diskussionen av ekvation (7.17)]. Det vill säga (alla integraler går över hela \mathbb{R} , så alla randtermer är lika med noll):



Figur B.4 Två distributioner och deras förstaderivator i gränsen $\epsilon \rightarrow 0$.



Figur B.5 Andra- och tredjederivator av två distributioner i gränsen $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\int dx \delta'(x)f(x) = - \int dx \delta(x)f'(x) = -f'(0), \quad (\text{B.33})$$

$$\int dx \delta''(x)f(x) = \int dx \delta(x)f''(x) = f''(0), \quad (\text{B.34})$$

$$\int dx \delta'''(x)f(x) = - \int dx \delta(x)f'''(x) = -f'''(0). \quad (\text{B.35})$$

Låt oss visa detta **explicit** för de två distributionerna som betraktas här. För en godtycklig slät funktion $f(x)$ kan vi Taylorutveckla:

$$f(\epsilon) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \dots \quad (\text{B.36})$$

I båda fallen ovan är $h_\epsilon(x)$ en jämn funktion, så alla termer av typen $x^{2n+1}h_\epsilon(x)$, $n \in \mathbb{Z}$ integreras till noll.

Vi börjar titta på den Gaussiska approximationen. Inför notationen $f^{(n)}(0) \equiv f_0^{(n)}$. För förstaderivatan får vi följande genom att utföra integralerna (se formelsamling) eller genom att partialintegrera upprepade gånger,

$$\begin{aligned} \int dx f(x)h'_\epsilon(x) &\approx -\frac{2}{\epsilon^2} \int dx x h_\epsilon(x) \left[f'_0 x + \frac{1}{6} f'''_0 x^3 + \dots \right] \\ &= -f'_0 - \frac{1}{4} f'''_0 \epsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Man kan inse att alla termer som innehåller högre ordningens derivator av $f(x)$ kommer vara proportionella mot ϵ , och gå mot noll. Kvar finns bara den väntade $-f'(0)$.

På samma sätt studerar vi integralen över andraderivatan:

$$\begin{aligned} \int dx f(x)h''_\epsilon(x) &\approx \int dx \frac{4x^2 - 2\epsilon^2}{\epsilon^4} h_\epsilon(x) \left[f_0 + \frac{1}{2} f''_0 x^2 + \dots \right] \\ &= \frac{2-2}{\epsilon^2} f(0) + \frac{3-1}{2} f''_0 + \epsilon^2 [\dots]. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

De högre ordningens termer kommer återigen vara proportionella mot ϵ , och försätts när gränsvärdet tas, vilket resulterar i att bara $f''(0)$ finns kvar.

Vi övergår nu till att studera den Lorentzianska approximationen. På samma sätt som ovan får vi för förstaderivatan

$$\begin{aligned} \int dx f(x)h'_\epsilon(x) &\approx - \int dx \frac{2x}{x^2 + \epsilon^2} h_\epsilon(x) \left[f'_0 x + \frac{1}{6} f'''_0 x^3 + \dots \right] \\ &= -f'_0 - \frac{\epsilon}{3\pi} \left[x + \frac{\epsilon^2 x}{2\epsilon^2 + 2x^2} - \frac{3\epsilon}{2} \tan^{-1} \frac{x}{\epsilon} \right]_{-\infty}^{\infty} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Eftersom att x här är en integrationsvariabel har den inget konstigt för sig, utan går linjärt mot oändligheten. I gränsen $\epsilon \rightarrow 0$ går därför de högre ordningens termer mot noll, och vi får igen det väntade resultatet.

För andraderivatan får vi

$$\begin{aligned} \int dx f(x) h''_\epsilon(x) &\approx \int dx \frac{6x^2 - 2\epsilon^2}{(x^2 + \epsilon^2)^2} h_\epsilon(x) \left[f_0 + \frac{1}{2} f''_0 x^2 + \dots \right] \\ &= \frac{3-3}{4\epsilon^2} f(0) + \frac{9-1}{8} f''_0 + \epsilon[\dots] \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

där alltså högre ordningens termer är proportionella mot ϵ .

Att bevisa ekvation (B.35) för de båda fallen av $h_\epsilon(x)$ lämnas som en övning.

Vi kan också **resonera** utgående från figurerna B.4 och B.4 varför vi får dessa resultat. För att göra detta drar vi oss först till minnes uttrycken för olika ordningars derivator i termer av finita differenser:

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon/2) - f(x - \epsilon/2)}{\epsilon} \quad (\text{B.41})$$

$$f''(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - 2f(x) + f(x - \epsilon)}{\epsilon^2} \quad (\text{B.42})$$

$$f'''(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + 3\epsilon/2) - 3f(x + \epsilon/2) + 3f(x - \epsilon/2) - f(x - 3\epsilon/2)}{\epsilon^3}. \quad (\text{B.43})$$

Det är inte svårt att föreställa sig att förstaderivatorna som ritats upp i den andra raden av figur B.4 kommer att plocka upp $-f(0 + \epsilon/2)$ och $+f(0 - \epsilon/2)$. Notera också att amplituden på de två topparna är lika stor och växer som $1/\epsilon$. Resultatet motsvarar alltså den finita differensen som definierar förstaderivatan av en funktion $f(x)$ i punkten $x = 0$, fast med motsatt tecken.

På liknande sätt kan vi resonera kring de högre ordningarnas derivator och jämföra figurerna med uttryckena från finita differenser. Notera speciellt den relativas storleken på de olika topparna och att amplituderna blir högre för andraderivatorna ($\sim 1/\epsilon^2$) och ännu högre för tredjederivatorna ($\sim 1/\epsilon^3$).

Uppgift 9.4.10

Ledtråd.

- Betrakta punkter $\vec{r} = z\hat{z}$, dvs längs symmetriaxeln.
- Teckna Greensfunktionen $G(\vec{r}, \vec{r}') = (4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|)^{-1}$ och fundera på hur avståndet kan uttryckas när $\vec{r} = z\hat{z}$.
- Ytkällan motsvarar en laddningsfördelning $\rho(\vec{r}) = \sigma_0 \cos \theta \delta(r - a)$.

- Resultatet blir en ganska krånglig integral där variabelsubstitutionen $t = z^2 + a^2 - 2za \cos \theta'$ kan komma väl till pass.
- Notera sedan att man får olika fall beroende på tecknen på $(z + a)$ och $(z - a)$.

Lösning. Eftersom att punkten \vec{r} befinner sig på ytkällans symmetriaxel, kan vi definiera ett kartesiskt koordinatsystem så att denna symmetriaxel sammanfaller med z -axeln. Då blir θ samma vinkel som den vi normalt kallar θ i sfäriska koordinater, och $\vec{r} = z\hat{z}$.

Vektorfältet $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$, där potentialen $\phi(\vec{r})$ ges av

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'. \quad (\text{B.44})$$

Eftersom att vi är i tre dimensioner är Greensfunktionen $G(\vec{r}, \vec{r}') = [4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|]^{-1}$. Den angivna laddningstätheten är en ytkälla, så $\rho(\vec{r}') = \delta(r' - a)\sigma_0 \cos \theta'$. Vi betraktar $\vec{r} = z\hat{z}$ och får alltså

$$\phi(z\hat{z}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(r' - a)\sigma_0 \cos \theta'}{4\pi\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos \theta'}} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' \quad (\text{B.45})$$

$$= \frac{\sigma_0 a^2}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta'}{\sqrt{z^2 + a^2 - 2za \cos \theta'}} d\theta'. \quad (\text{B.46})$$

Vi gör nu variabelsubstitutionen

$$\begin{aligned} t &= z^2 + a^2 - 2za \cos \theta', \\ dt &= 2za \sin \theta' d\theta', \\ \theta' &= 0 \rightarrow t = (z - a)^2, \\ \theta' &= \pi \rightarrow t = (z + a)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Nämnden i integranden blir nu \sqrt{t} , och $\sin \theta'$ i täljaren blir en del av dt . Det kvarvarande $\cos \theta'$ i täljaren får vi genom att lösa ut $\cos \theta'$ ur definitionen av t .

Integralen är nu

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{4z^2} \int_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \frac{z^2 + a^2 - t}{2\sqrt{t}} dt \quad (\text{B.48})$$

$$= \frac{\sigma_0}{4z^2} \left[(z^2 + a^2) \int_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt - \int_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \frac{\sqrt{t}}{2} dt \right] \quad (\text{B.49})$$

$$= \frac{\sigma_0}{4z^2} \left[(z^2 + a^2) \left[\sqrt{t} \right]_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} - \frac{1}{3} \left[t^{3/2} \right]_{(z-a)^2}^{(z+a)^2} \right] \quad (\text{B.50})$$

$$= \frac{\sigma_0}{4z^2} \left[(z^2 + a^2) \left[|z+a| - |z-a| \right] - \frac{1}{3} \left[|z+a|^3 - |z-a|^3 \right] \right]. \quad (\text{B.51})$$

Kom ihåg att för alla reella tal x så är $\sqrt{x^2} = |x|$. Vi får alltså fyra fall – $|z| > a$ och $|z| < a$ kombinerat med $z > 0$ och $z < 0$ – som måste behandlas var för sig.

Inuti sfären: Eftersom att $a > z$ så är $|z+a| = z+a$ och $|z-a| = a-z$, oavsett om z är positiv eller negativ. Två av de fyra fallen kan alltså studeras samtidigt.

Insättning av absolutbeloppen ovan i ekvation (B.51) ger, efter en smula algebra, att $\phi(\vec{r}) = \sigma_0 z / 3$. Vektorfältet blir då

$$\vec{F} = -\hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\sigma_0}{3} \hat{z}. \quad (\text{B.52})$$

Utanför sfären: Här måste positiva och negativa z studeras var för sig.

När $z > a > 0$ är $|z+a| = z+a$ och $|r-a| = r-a$. Substitution i (B.51) och förenkling av resultatet ger att $\phi(\vec{r}) = \sigma_0 a^3 / 3z^2$. Vektorfältet blir

$$\vec{F} = -\hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{2\sigma_0 a^3}{3z^3} \hat{z}, \quad z > 0. \quad (\text{B.53})$$

När $|z| > a$ men $z < 0$ så blir $|z+a| = -(z+a)$ och $|z-a| = -(z-a)$. Den här gången blir $\phi(\vec{r}) = -\sigma_0 a^3 / 3z^2$ och

$$\vec{F} = -\hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{2\sigma_0 a^3}{3z^3} \hat{z}, \quad z < 0. \quad (\text{B.54})$$

Notera att alla kvantiteter utom z i (B.53) och (B.54) är konstanter; de ändrar alltså aldrig tecken. Därför kan vi kombinera dessa två ekvationer, och uttrycka fältet överallt utanför sfären som

$$\vec{F} = -\hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{2\sigma_0 a^3}{3|z|^3} \hat{z}. \quad (\text{B.55})$$

Kontroll: ytlastning. Notera att vårt fält, betraktat längs symmetriaxeln, har en diskontinuitet vid $z = \pm a$. Denna motsvarar ytlastningen. T.ex., vid $\theta = 0$ (dvs $z = +a$) har vi enligt uppgiftsformuleringen en ytlastning med styrkan σ_0 . Detta kan vi verifiera genom att räkna ut

$$\hat{z} \cdot (\vec{F}_+ - \vec{F}_-)_{z=a} = \frac{2\sigma_0}{3} - \frac{-\sigma_0}{3} = \sigma_0. \quad (\text{B.56})$$

Uppgift 10.3.3

Ledtråd.

- Inget tidsberoende, dvs man är ute efter en stationär lösning $\partial T / \partial t = 0$. Det finns dessutom ingen värmekälla inuti skalet och värmeförädlingsekvationen blir alltså ganska enkel.
- Värmeeffekten W_0 har enheten $\text{W}=\text{J/s}$. Från detta kan man räkna ut vad värmeströmtätheten genom den inre ytan skall vara. Vi har alltså ett Neumann randvillkor. Värmeströmtätheten (som är proportionell mot negativa temperaturgradienten) är radiellt riktad och konstant (men inte noll!).
- Newtons avkylningslag säger att flödet av värmeenergi är $\alpha(T - T_0)$, där α och T_0 är konstanter (den sista representerar temperaturen utanför ytan) och T är temperaturen på randen. Enheten för detta är W/m^2 .
- Slutligen kan ni notera att energin skall vara bevarad. Strömmar det kontinuerligt in värmeenergi i området så måste samma mängd strömma ut.

Kommentar. Uppgiften illustrerar lösningen av värmeförädlingsekvationen. Svårigheten är att förstå sig på randvillkoren och att utnyttja energins bevarande.

Uppgift 11.8.8

Ledtråd.

- Utnyttja den sfäriska symmetrin i problemet som gör att $\vec{E} = E_r \hat{r}$.
- Använd Maxwells första ekvation som säger att $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, där ρ är laddningstätheten.
- En volymsintegral av laddningstätheten (t.ex. över en sfär med radien r) ger den inneslutna laddningen.

- Motsvarande volymsintegral över VL av Maxwells första ekv (dvs över divergensen av \vec{E} -fältet) kan skrivas om med Gauss sats.
- En ytladdning har enheten laddning/area. Dvs den totala laddningen på det yttre skalet fås genom att integrera över ytan.

Kommentar. Uppgiften illustrerar användandet av Maxwells ekvationer och hur vi kan utnyttja en integralsats.

Sakregister

- allmän relativitetsteori, 16, 178
antisymmetri, 71, 187
arbete, 30, 119
areaelement, 13, 33
associativitet, 181

bågelement, 13
basvektorer, 12
Bernoullis ekvation, 202

Cartesiskt koordinatsystem, 1
cylindriska koordinater, 11

d'Alembert-operatorn, 161
deformation, 186
deformationshastighet, 196
deformationstensorn, 187
deltafunktion, 106, 130, 149
densitet, 49
determinant, 176
dielektricitetskonstant, 155
diffeomorfism, 17
differentialgeometri, 55, 75
diffusion, 145

diffusionsekvationen, 147
dipol, 91
dipolmoment, 92
Diracs deltafunktion, 106
Dirichlets randvillkor, 125, 130, 133
dispersionsrelation, 162
dissipativ kraft, 119, 197
distribution, 107
divergens, 5, 44, 56, 72
divergensfritt fält, 120

effekt, 30
egenfunktion, 135
Einsteins summationskonvention,
 70, 175
ekvipotentialytör, 3
elasticitetsmodul, 189
elektrisk laddning, 50, 155
elektrisk spänning, 158
elektrisk ström, 156
elektriskt fält, 80, 125, 155
elektromagnetiska vågor, 161
energi, 50
enhetsmatrisen, 70

- error function, 151
fält, 1
fältlinje, 3, 44
fältstyrka, 2
förskjutningsfält, 186
Faradays lag, 158
flöde, 33, 44, 49
flödestähet, 33
fluid, 195
Fourieranalys, 135, 163
Fouriertransform, 114
fritt index, 69

gas, 49
gaugeinvarians, 121
Gauss sats, 43, 56, 80, 121, 184
generaliserade koordinater, 11
gradient, 2, 15, 72
gravitationsfält, 80
Greens formel, 52
Greensfunktion, 89, 130, 148
grupp, 181

högersystem, 13
harmoniskt fält, 120
hastighetsfält, 6, 49
homogena randvillkor, 130
homogenitet, 146, 179
Hooke's lag, 186

index, 70
indexnotation, 69
induktion, 158
inkompressibel fluid, 201
integralsatser, 43
integration, 43
invers, 181
isotropi, 146, 179, 188

källa, 44
källfordelning, 120
källfritt fält, 120
kinetisk energi, 119
klotytfunktioner, 102, 136
kommutativitet, 181
konduktivitet, 178
konduktivitetstensor, 178
konform avbildning, 129
konservativ kraft, 119
konservativt kraftfält, 119
konservering, 50
kontinuitetsekvationen, 50, 146, 159, 160, 198, 201
konvektion, 145
koordinater, 11
koordinatlinje, 12
koordinatyta, 12
kroklinjiga koordinater, 11, 56
Kroneckers delta, 13, 70, 177
kryssprodukt, 70, 71, 177
kurvintegral, 30
kvadrupol, 92, 99

laddningskonservering, 159
Lamés konstanter, 188
Laplaceoperatorn, 5, 16, 58, 73, 74, 120
Laplaces ekvation, 120, 202
Levi-Civita-tensorn, 71, 175, 177
Lie-derivata, 197
linjeelement, 30
linjeintegral, 30
linjekälla, 83, 123, 131
ljudvågor, 199
ljushastigheten, 156, 162
longitudinella vågor, 192, 199
Lorentztransformation, 168
Lorentztransformationer, 160

Möbiusband, 33
magnetisk permeabilitet, 156

- magnetiskt fält, 121, 156
magnetiskt flöde, 158
massflödestäthet, 49
matris, 70
Maxwells ekvationer, 159
modersmjölken, 160
multipoler, 92
- Navier–Stokes ekvation, 197, 201
Neumanns randvillkor, 125, 130, 133, 202
nivåtor, 3
normalvektor, 33
normalytintegral, 33
- orienterbar, 33
ortogonal matris, 1, 176
ortonormerat system, 1
- parametrisering, 30
partiell derivata, 1
periodtid, 162
Plancks konstant, 168
Poissons ekvation, 120, 122, 130, 147
Poissons kvot, 189
potential, 2, 119, 155
potentialströmning, 202
potentiell energi, 119
punktkälla, 80, 122
Pythagoras sats, 13
- rörelsemängdsmoment, 179
rand, 43, 55
randvärdet, 124
randvillkor, 124, 130
rank, 176
Riemannsk geometri, 16
riktningsderivata, 2, 6
rotation, 5, 51, 57, 73
rotationsfritt fält, 120
- rotationsvektor, 179
rymdvinkel, 81
- sannolikhet, 50
Schrödingerekvationen, 150, 168
sfäriska koordinater, 11, 58
skalär, 175
skalär trippelprodukt, 72
skalärprodukt, 70
skalärt fält, 1
skalfaktorer, 12, 13
skjuvkraft, 184
skjuvvågor, 192
skruvregeln, 50
spänningstensor, 184
spår, 70
speciell relativitetsteori, 70, 160, 168, 178
speglingsmetoden, 133
stationärt potentialflöde, 202
stegfunktion, 111, 151
stel kropp, 179
Stokes sats, 50, 57, 113, 120, 158
summationsindex, 70
superpositionsprincipen, 130
svag och stark växelverkan, 121
symmetri, 178
symmetrisk, 187
symmetrisk tensor, 187
- temperatur, 146
tensor, 71, 175
tensorfält, 1
tensornotation, 176
tröghetsstensorn, 179
transformationsmatris, 176
transversella vågor, 192
tryck, 185, 195
tryckvågor, 192, 199
- värmeenergi, 146

värmekälla, 147
värmekärna, 150
värmekapacititet, 146
värmceledningsekvationen, 146
väteatomen, 59
vätska, 49
vågekvationen, 150
våglängd, 162
vågoperatorn, 161
vågtal, 162
vågvektor, 162
Variabelseparation, 134
vektor, 1, 69, 175
vektorfält, 1
vektorpotential, 121, 156
vinkelfrekvens, 162
virvel, 51
virvelfri strömning, 202
virvelfritt fält, 120
virveltäthet, 51
virveltråd, 86, 114, 123
viskositet, 196
volymelement, 13, 37
volymintegral, 37
vorticitet, 200
vorticitetsekvationen, 201

ytintegral, 33
ytkälla, 84, 131
ytkälltäthet, 84