FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

15 oktober 2021

Maxwells ekvationer

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

Hur går det med potentialerna? **B**-fältet är fortfarande divergensfritt, så vi kan ännu skriva $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. **E**-fältet är dock inte längre rotationsfritt, så den gamla relationen till en skalär potential fungerar inte.

Vi har dock

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

som man vi skriva (med $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) som

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$$

vilket gör att vi kan skriva $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$, så att vi har

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{5}$$

Notera att den här ekvationen uttrycker **E** i en rotationsfri del och en divergensfri del (om $\nabla \cdot \mathbf{A}$ väljs till 0), vilket alltid är möjligt, enligt Helmholtz sats.

Vågekvationen

I vakuum ($\rho = 0$ och $\mathbf{j} = 0$) blir Maxwells ekvationer

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{8}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{9}$$

Vi kan nu till exempel beräkna rotationen av Faradays lag, ekv (7)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{E} \right) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}. \tag{10}$$

Vi kan nu utnyttja att $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ och Ekv. (9)

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{11}$$

Eftersom $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ kan vi skriva detta

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0, \tag{12}$$

vilket är en *vågekvation*.

Exempel: Vågekvationen i $D = 1$ Betrakta fältet $\mathbf{E} = E(x,t)$ i en dimension och motsvarande vågekvation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(x,t) = 0. \tag{13}$$

Ekvationen har då lösningar på formerna $E_+ = E_0 \sin(kx - \omega t)$ och $E_- = E_0 \sin(kx + \omega t)$, vilka beskriver vågor och motiverar varför Ekv. (12) kallas för vågekvationen. Med denna ansatz (E_+) ger vågekvationen

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = c|k|,$$

vilket kallas för en dispersionsrelation.

Rita funktionen $E(x,t)$ med en x-axel och en t-axel. Illustrera våglängd och periodtid.

- Vid given tid t: samma fas då $x \mapsto x + \frac{2\pi}{k}$.
- Dvs *våglängden* λ relaterar till *vågtalet* k enligt $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.
- Vid givet x: samma fas då $t \mapsto t + \frac{2\pi}{\omega}$.
- Våghastigheten finner vi genom att notera att $x - \frac{\omega}{k}t = \text{konstant}$ beskriver punkter med samma fas. Detta ger

$$\mathrm{d}x - \frac{\omega}{k}\mathrm{d}t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k}$$

Hastigheten är alltså $v = \omega/k = c$. Ljushastigheten!

Nu när vi har bekantat oss med Maxwells ekvationer kan vi skriva upp alla ekvationer i klassisk fysik. Se tabellen nedan (hämtad ur Feynmans Lectures on Physics, vol 2). Kontinuitetsekvationen för laddning följer från Maxwells ekvationer, så tabellen är något redundant.

Classical Physics

Maxwell's equations

I.	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$	(Flux of $\boldsymbol{E}$ through a closed surface) $=$ (Charge inside)$/\epsilon_0$
II.	$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	(Line integral of $\boldsymbol{E}$ round a loop) $= -\dfrac{d}{dt}$(Flux of $\boldsymbol{B}$ through the loop)
III.	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$	(Flux of $\boldsymbol{B}$ through a closed surface) $= 0$
IV.	$c^2 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$	c^2(Integral of $\boldsymbol{B}$ around a loop) $=$ (Current through the loop)$/\epsilon_0$ $+\dfrac{d}{dt}$(Flux of $\boldsymbol{E}$ through the loop)

Conservation of charge

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(Flux of current through a closed surface) $= -\dfrac{d}{dt}$(Charge inside)

Force law

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Law of motion

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{F}, \quad \text{where } \boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(Newton's law, with Einstein's modification)

Gravitation

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

Repetition

Kapitel 1 Fält och derivator:

Fältbegreppet, derivering av fält. Nivåytor och fältlinjer för att visualisera fält.

Kapitel 2,3,4 Koordinater, integraler, integralsatser:

Kroklinjiga koordinater. Basvektorer, skalfaktorer. Kurv-, yt-, rymdintegraler. En varning som gäller ytintegraler - om ytnormalens riktning inte är givet, glöm inte plus-minus-tecknet i svaret.

Kapitel 5, 12 Indexnotation, tensorer:

Indexnotation erbjuder ett kraftfullt verktyg att härleda vektoridentiteter.

Kapitel 6, 7 Singulära fält, deltafunktioner:

Introducerar singulära fält (källor, virvlar) och ger verktyg för att hantera dessa matematiskt.

Kapitel 8, 9 Potentialteori, Laplaces och Poissons ekvationer:

Vi kommer fram till de generella differentialekvationerna som styr fysikaliska fält och diskuterar hur vi skall lösa dem.

- Symmetrier: Kan man inse att fältet bara beror på en koordinat? Då blir differentialekvationen mycket enklare och den går oftast att integrera direkt. Notera att detta ger integrationskonstanter vilka måste bestämmas (från randvillkor, existens av singulära källor, etc). Ett alternativ kan vara att använda Gauss sats för att få ett uttryck för vektorfältet.

- Vinkelberoende randvillkor: Gör en lösningsansats som kan uppfylla randvillkoret och som samtidigt är en egenfunktion till Laplacianen ($\cos\theta$, $\sin\theta$, konstant). Detta gör att differentialekvationen separeras i två delar som kan lösas var för sig. Metoden kallas för variabelseparation.

- Helt allmän metod: Greensfunktioner. Gör differentialekvationen till en integralekvation. Problemet blir att finna Greensfunktionen (och eventuellt att lösa integralen).

Kapitel 10, 11 Värmeledning, elektromagnetism: Tillämpningar