Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Måndagen den 15 augusti 2022.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Tünde Fülöp (031–772 3180).
Jourhavande lärare:	Tünde Fülöp (031–772 3180).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Notation: Om inget annat anges används beteckningarna r, θ, φ för sfäriska koordinater (där θ är vinkeln från positiva z-axeln), medan ρ, φ, z betecknar cylindriska koordinater.

Lycka till!

---

1. Ett kroklinjigt koordinatsystem u, v, w definieras genom sambanden

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= (v^2 - w^2)/2 \\ z &= vw \end{aligned}$$

   (a) Härled basvektorerna och skalfaktorerna! *(5p)*

   (b) Uttryck divergensen av ett vektorfält i dessa koordinater! *(5p)*

2. Använd indexnotation och härled ett alternativt uttryck, utan kryssprodukter, av

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}).$$

   (10p)

3. Beräkna linjeintegralen

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

   där C är en cirkel med radien R i planet $2x+y+2z = 7$ och vektorfältet ges av $\mathbf{F} = (-z, x, y)$. Omloppsriktningen är godtycklig (så att man får två värden). *Ledning: notera att vektor* $(2, 1, 2)$ *är vinkelrät mot planet.*
   (10p)

4. Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = e^{xyz}(yz, xz, xy)$ är konservativt och beräkna sedan linjeintegralen från punkt (0,0,0) till punkt (1,1,1) av $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dvs

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(10p)

5. Vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F} = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\hat{\rho} + \rho\hat{\varphi} + z\hat{z}$$

i cylindriska koordinater. Bestäm normalytintegralen $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, där ytan S ges av ekvationen $\rho^2 + (z+1)^2 = 4$.
(10p)

6. Ett gasmoln i rymden har tätheten $\rho(r) = 6/r^5$, uttryckt i sfäriska koordinater och för $r > 1$. Gravitationsfältet har en potential som uppfyller Poissons ekvation

$$-\Delta U = \rho$$

Bestäm alla sfäriskt symmetriska lösningar $U = U(r)$ till denna ekvation för $r > 1$!
(10p)