Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Måndagen den 4 januari 2021 klockan 08.30-12:30, på distans via zoom.
Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna.
Lösningsskiss: Christian Forssén.

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Beräkna följande integraler:

   (a) $\int_0^\infty \delta(x+\pi/2)\sin(x)dx$

   (b) $\int_{-\infty}^\infty \delta(-2x)\cos(x)dx$

   (c) $\int_{-\infty}^\infty \delta'(2x+\pi)\cos(x)dx$, där δ' betecknar derivatan av deltafunktionen.

   (d) $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, där S är begränsningsytan till en sfär med radien a och mittpunkt i origo samt med normalriktning $\hat{\mathbf{e}}_r$, och vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F} = \frac{\vec{r}-\frac{a}{2}\hat{x}+\frac{3a}{4}\hat{y}-\frac{a}{4}\hat{z}}{|\vec{r}-\frac{a}{2}\hat{x}+\frac{3a}{4}\hat{y}-\frac{a}{4}\hat{z}|^3}$?

   (10 poäng totalt fördelat på 2 poäng vardera för deluppgift a och b samt 3 poäng vardera för deluppgift c och d.)

   Lösning:

   (a) $I_a = \int_0^\infty \delta(x+\pi/2)\sin(x)dx = 0$ ty $x+\pi/2 = 0$ i punkten $x = -\pi/2$ som ligger utanför integrationsintervallet.

   (b) $I_b = \int_{-\infty}^\infty \delta(-2x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}$ där vi gjort variabelsubstitutionen $y=-2x$ som ger
   $I_b = \frac{1}{-2}\int_\infty^{-\infty}\delta(y)\cos\left(-\frac{y}{2}\right)dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \delta(y)\cos\left(-\frac{y}{2}\right)dy.$

   (c) $I_c = \int_{-\infty}^\infty \delta'(2x+\pi)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty 2\delta'(y)\cos\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{2}\right)dy$ efter variabelsubstitution (notera att $d/dx = 2d/dy$). Med partiell integration får vi sedan
   $I_c = -\int_{-\infty}^\infty \delta(y)\cos'\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{2}\right)dy = \frac{1}{2}\sin(-\pi/2) = -\frac{1}{2}$ där vi noterar att $\cos'\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$.

   (d) $I_d = \int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = 4\pi$. Fältet motsvarar fältet från en punktkälla med styrkan 4π belägen i punkten $\vec{r}_0 = \frac{a}{2}\hat{x} - \frac{3a}{4}\hat{y} + \frac{a}{4}\hat{z}$. Vi använder Gauss sats och får $I_d = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV = \int_V 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)dV = 4\pi$ eftersom punkten $\vec{r}_0$ ligger på avståndet $\sqrt{14/16}a$ från origo, och därmed innanför begränsningsytan $S = \partial V$.

---

2. Tröghetsmatrisen $\mathbf{I}$ och rotationsvektorn $\vec{\omega}$ för en stel kropp ger dess kinetiska rotationsenergi

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \mathbf{I}\vec{\omega}.$$

Visa att denna kinetiska energi är en skalär givet att tröghetsmatrisen är en tensor av rank 2 och rotationsvektorn en tensor av rank 1 (dvs en vektor). *(10 poäng)*

Lösning:

Skriv sambandet med indexnotation:

$$T = \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j.$$

Betrakta transformationen till ett annat koordinatsystem $x'_i = L_{ij}x_j$ och utnyttja tensorernas transformationsegenskaper för att teckna T' i det nya systemet

$$T' = \frac{1}{2} I'_{ij}\omega'_i\omega'_j = \frac{1}{2} L_{ik}L_{jl}I_{kl}L_{im}\omega_m L_{jn}\omega_n.$$

Transformationsmatriserna har egenskapen $L_{ik}L_{im} = \delta_{km}$ (och analogt $L_{jl}L_{jn} = \delta_{ln}$) så att

$$T' = \frac{1}{2} I_{kl}\omega_k\omega_l = T,$$

vilket visar att T är en skalär.

3. Ett magnetfält i xy-planet ges av

$$\vec{B}(r,\theta) = \frac{B_0}{a}(-r\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + r\cos\theta\hat{\mathbf{y}}),$$

där B_0 och a är positiva konstanter. Bestäm ekvationen för den fältlinje $\vec{r}(\tau)$ som startar i punkten $\vec{r}(\tau = 0) = a\hat{\mathbf{y}}$.
OBS: (r,θ) är planpolära koordinater i xy-planet (dvs θ är vinkeln från x-axeln).

(10 poäng)

Lösning:

Fältlinjens ekvation ges av $d\vec{r}/d\tau = C\vec{B}$. Vi kan antingen arbeta med Cartesiska koordinater och inse att $\vec{B} = \frac{B_0}{a}(-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}})$, eller skriva i planpolära koordinater $\vec{B} = \frac{B_0}{a} r\hat{\theta}$. Det sistnämnda ger (med $C = a/B_0$;

glöm inte skalfaktorn i $d\vec{r} = dr\hat{\mathbf{e}}_r + rd\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$)

$$\frac{dr}{d\tau} = 0,$$
$$r\frac{d\theta}{d\tau} = r,$$

med lösningen $r(\tau) =$ konstant, $\theta(\tau) = \tau +$ konstant. Den sökta fältlinjen ges av $r(\tau) = a$ och $\theta(\tau) = \tau + \theta/2$ med kurvparametern $\tau \geq 0$ och startpunkt då $\tau = 0$.

Alternativt i Cartesiska koordinater fås ekvationerna

$$\frac{dx}{d\tau} = -y,$$
$$\frac{dy}{d\tau} = x,$$

med lösningar $x(\tau) = C\cos(\tau + \alpha)$ och $y(\tau) = C\sin(\tau + \alpha)$. Den sökta fältlinjen fås med $C = a$ och $\alpha = \pi/2$.

4. Paraboliska koordinater $uv\alpha$ definieras genom

$$x = uv\cos\alpha,$$
$$y = uv\sin\alpha,$$
$$z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),$$

där $u \geq 0$, $v \geq 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$. Beräkna basvektorerna till detta koordinatsystem. *(10 poäng)*

Lösning:

Beräknas enklast genom tangentvektorerna $\partial\vec{r}/\partial u$, $\partial\vec{r}/\partial v$, $\partial\vec{r}/\partial\alpha$. Glöm inte normaliseringen.

$$\hat{e}_u = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}\left(v\cos\alpha\hat{\mathbf{x}} + v\sin\alpha\hat{\mathbf{y}} + u\hat{\mathbf{z}}\right),$$
$$\hat{e}_v = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}\left(u\cos\alpha\hat{\mathbf{x}} + u\sin\alpha\hat{\mathbf{y}} - v\hat{\mathbf{z}}\right),$$
$$\hat{e}_\alpha = \left(-\sin\alpha\hat{\mathbf{x}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{y}}\right).$$

Notera för $\hat{e}_\alpha$ att normaliseringen $|uv| = uv$ då både u och v är positiva, reella tal.

5. En planet med radien R uppvärms av ett radioaktivt material i planetskorpan vars sönderfall avger effekten ρ_0 per volymsenhet. Det radioaktiva materialet förekommer enbart för $r > R/2$ vilket betyder att det inte finns någon värmekälla i planetens inre. Vidare gäller att värmeledningsförmågan är λ_0 för $r > R/2$ och $3\lambda_0$ för $r \leq R/2$ samt att planetens yta håller temperaturen 0 K. Beräkna den stationära temperaturfördelningen i planeten.
Ledning: Både temperatur och värmeström är kontinuerliga vid $r = R/2$. *(10 poäng)*

Lösning:

Temperaturfältet $T = T(r)$ pga rotationssymmetri. Vi har Laplaces ekvation för $r \leq R/2$ med lösningen $T(r) = Cr^{-1} + D$ och konstaterar att $C = 0$ eftersom vi inte har någon punktkälla i $r = 0$. Detta innebär att temperaturen $T(R_-/2) = D$ samt värmeströmmen $\vec{q}(R_-/2) = -3\lambda_0 \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{R_-/2} = 0$ på insidan av gränsytan.

Vi har Poissons ekvation för $r > R/2$ och finner lösningen $T(r) = -\frac{\rho_0}{6\lambda_0}r^2 + Ar^{-1} + B$, där vi också noterar att vi inte har någon term som blir singulär i området.

Matchning med randvillkoren (kontinuitet för både T samt $\vec{q}$ vid $r = R/2$ samt $T(R) = 0$) ger $A = -\frac{\rho_0}{6\lambda_0}\frac{R^3}{4}$, $B = \frac{\rho_0}{6\lambda_0}\frac{5R^2}{4}$ samt $D = \frac{\rho_0}{6\lambda_0}\frac{R^2}{2}$. Detta ger lösningen

$$T(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^2}{12\lambda_0} & r \leq \frac{R}{2} \\ \frac{\rho_0 R^2}{6\lambda_0}\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\frac{R}{r} - \frac{r^2}{R^2}\right) & r > \frac{R}{2} \end{cases}$$

där vi konstaterar att $[\rho_0/\lambda_0] = \mathrm{Wm^{-3}}/\left(\mathrm{WK^{-1}m^{-1}}\right) = \mathrm{Km^{-2}}$ så att dimensionen stämmer.

6. Betrakta fyra olika potentialer som uppfyller Laplaces ekvation inuti en sfär V med radie a och med centrum i origo. I samtliga fall gäller ett Dirichlet-randvillkor: $\phi(r = a) = \phi_0 g(\theta, \varphi)$. Skillnaden är dock den explicita formen på vinkelberoendet på randen:

   (a) $g(\theta, \varphi) = \cos\theta$,

   (b) $g(\theta, \varphi) = \sin\theta$,

   (c) $g(\theta, \varphi) = \cos\theta\cos\varphi$,

   (d) $g(\theta, \varphi) = 3\cos^2\theta - 1$.

   Visa för vilken eller vilka av dessa fall som variabelseparation med ansatsen $\phi = f(r)g(\theta, \varphi)$ fungerar bra som lösningsmetod (där $g(\theta, \varphi)$

alltså motsvarar det aktuella randvillkoret) och finn lösningarna för dessa. Notera att du alltså inte behöver försöka finna lösningarna för de fall där variabelseparation inte är en passande lösningsmetod. *(10 poäng)*

Lösning:

Laplaces ekvation i sfäriska koordinater med ansatsen $\phi = f(r)g(\theta, \varphi)$ kan skrivas

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 f'(r)\right)g(\theta,\varphi) + \frac{f(r)}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}g(\theta,\varphi),$$

där

$$\Delta_{\theta\varphi} \equiv \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2.$$

är vinkeldelen av Laplaceoperatorn. Det är enbart fall (a) och (d) som går att lösa med variabelseparation eftersom $g(\theta, \varphi)$ i dessa fall är en egenfunktion till $\Delta_{\theta\varphi}$. Närmare bestämt finner vi att $\Delta_{\theta\varphi}\cos\theta = -2\cos\theta$ samt att $\Delta_{\theta\varphi}(3\cos^2\theta - 1) = -6(3\cos^2\theta - 1)$, dvs egenvärdena är -2 respektive -6.

Med ansatsen $f(r) = Ar^p$, och insikten att negativa exponenter motsvarar singulära fält som inte kan vara lösningar givet att området är källfritt, finner vi att

(a) $\phi = \phi_0 \frac{r}{a}\cos\theta$,

(b) $g(\theta, \varphi) = \sin\theta$ är ingen egenfunktion, följdaktligen kan vi inte använda variabelseparation.

(c) $g(\theta, \varphi) = \cos\theta\cos\varphi$ är ingen egenfunktion, följdaktligen kan vi inte använda variabelseparation.

(d) $\phi = \phi_0 \frac{r^2}{a^2}(3\cos^2\theta - 1)$.