FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

21 september 2021 (slutar 14:45)

Mål Målet med föreläsningen är att förstå singulära fält, som punktkälla, linjekälla och ytkälla, det mostvarar kapitel 6.1-6.2 i kompendiet.

Singulära fält är viktiga i många tillämpningar. Exempelvis kan vektorfältet från en laddning representera det elektriska fältet från laddningar, eller gravitationsfältet från en kropp. Om man lägger ihop dem så kan man få det kollektiva fältet från många laddningar.

Vi ska anknyta till det som vi har studerat tidigare, dvs linje-, yt- och volymintegraler, Gauss och Stokes satser och dessutom begreppet potential, divergens och rotation.

Repetition: Integralsatser

- Gauss sats
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{1}$$
- Stokes sats
$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}, \tag{2}$$

Gäller för kontinuerligt deriverbara vektorfält.

Vad händer om fältet har en singularitet?

6. Singulära fält

Det finns tre viktiga typer av singulariteter, vilka dyker upp för speciella vektorfält:

- Punktkälla (6.1)
- Linjekälla och ytkälla (6.2)
- Virveltråd (6.3) – sparas till föreläsningen på fredag

Punktkällor

Kraften $\mathbf{F}$ mellan två objekt med massa m_1 och m_2 är Newtons berömda lag

$$\mathbf{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{e}_r.$$

Minustecknet (som ibland inte ens skrivs ut) innebär att kraften är attraherande, dvs den verkar så att avståndet mellan kropparna minskar. Det här fältet är singulärt vid $r = 0$.

Lagarna som styr elektriska fält är av liknande karaktär, de är också proportionella mot $1/r^2$, men har andra proportionalitetskonstanter, och kan vara både attraktiv och repulsiv

$$\mathbf{F} = C_1\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{e}_r.$$

Proportionalitetskonstanten är $C_1 = 1/(4\pi\epsilon_0)$. Om man ska räkna ut kraften på en enhetsladdning så får man ett kraftfält av formen

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{e}_r \tag{3}$$

där vi ignorerat den konstanta faktorn ϵ_0, men vi behåller 4π för sfärens area är $4\pi r^2$ och det blir snyggare resultat när vi integrerar.

Det här kraftfältet är elektriska fältet från en punktkälla med styrkan q. Med lämplig tolkning av "källan" q kan detta föreställa även gravitationsfältet från en massa i origo. Det är också samma form på värmeflödestätheten kring en punktformad värmekälla och hastighetsfältet i en vätskemängd där vätska tillförs genom ett smalt rör som mynnar i origo.

Detta fält är rotationsfritt (åtminstone för $r > 0$)

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r\sin\theta\hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Rotationsfriheten är ekvivalent med att fältet kan skrivas med hjälp av en skalär potential: $\mathbf{F} = -\nabla\phi$

$$\phi = \frac{q}{4\pi r}. \tag{5}$$

Potential är ett användbart koncept, (1) för att det kan förenkla beräkningar ibland och (2) för att det kan relateras till utfört arbete.

(1) Beroende på problemställning så kan det vara enklare att bestämma potentialen än att räkna ut fältet direkt. Om man har potentialen, så är det enkelt att beräkna fältstyrkan, det är bara att ta gradienten.

(2) Som vi har sett under föreläsning 4 (integraler): Arbetet som kraften utövar på partikel som rör sig längs en bana C, som ges av $\mathbf{r}(t)$, under inverkan av en kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ är

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{6}$$

Exempel: Linjeintegral av fältstyrka

Betrakta linjeintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, dvs den har en skalär potential:

- Det betyder att $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$.
- Kom ihåg att $\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi$.
- Alltså $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = \phi_1 - \phi_2$.

Dvs linjeintegralen av en fältstyrka är oberoende av vägen C utan beror bara på potentialens värden i start- och slutpunkterna.

Fält som har en skalär potential är alltid rotationsfria (och det motsatta gäller också), och därmed har också egenskapen att $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ gäller för varje sluten kurva C. Sådana fält kallar vi konservativa fält (se föreläsning 4). Vi har visat att för konservativa fält gäller att integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ inte beror på valet av kurvan C mellan dessa punkter.

Notera att fältet är rotationsfritt för alla krafter som endast beror på radien, inte bara för dem som är inverst proportionella mot r^2. Att elektriska fältet från en punktladdning är rotationsfritt beror helt och hållet på symmetrin och riktningen av fältet.

Vektorfältet $\mathbf{F}$ är också divergensfritt (för $r > 0$)

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{q}{4\pi r^2}\right) = 0, \quad r > 0. \tag{7}$$

Trots frånvaron av divergens får vi ett resultat skilt från noll om vi beräknar normalytintegralen av $\mathbf{F}$ över en yta som omsluter origo. Detta görs enklast genom att utföra integralen över en sfär med radien a.

Normalytintegralen för en yta (sfäriskt skal, radie a) som omsluter origo:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi a^2} 4\pi a^2 = q \tag{8}$$

medan Gauss sats skulle ge $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V = 0$!

Slutsats

Det vore fel att naivt tillämpa Gauss sats på en volym innehållande origo, trots att fältet ser divergensfritt ut. Det beror på att det är singulärt där. Med vår nuvarande kunskap får vi acceptera att vi måste undvika punkter där fält är singulära när vi använder integralsatser.

Mer allmänt:

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{om ytan inte omsluter origo.} \\ q & \text{om ytan omsluter origo.} \end{cases} \tag{9}$$

Anledningen till att vi inte kan använda Gauss sats är

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \infty & r = 0 \text{ (bättre definition kommer senare)} \end{cases} \tag{10}$$

Flöde från punktkälla genom allmän yta. En mer förfinad version av ekv. (8) för normalytintegralen av fältet från en punktkälla över en godtycklig yta S kan fås genom att projicera normalytelementet på r-, θ- och φ-ytor. Den relevanta projektionen är den på r-ytan eftersom fältet har den riktningen

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_r = \pm \hat{e}_r h_\theta h_\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \tag{11}$$

där tecknet beror på om normalen för S är utåtriktad (positiv) eller inåtriktad (negativ). Detta ger

$$\frac{q}{4\pi}\int_S \frac{\hat{e}_r \cdot d\mathbf{S}}{r^2} = \pm\frac{q}{4\pi}\iint \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = q\frac{\Omega}{4\pi} \tag{12}$$

där Ω är den rymdvinkel ytan S tar upp sedd från origo. Läs mer om begreppet rymdvinkel: http://mathworld.wolfram.com/SolidAngle.html

T.ex. blir rymdvinkeln för en yta som helt omsluter origo

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 4\pi. \tag{13}$$

Exempel: Punktkälla (sid 76 i kompendiet) Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{14}$$

där S är ytan

$$\rho = a - z, \;\; 0 \leq z \leq a \tag{15}$$

med en normal som pekar uppåt, och ett fält ges av

$$\mathbf{F} = F_0\left[\left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{r^2\cos^3\theta}{a^2}\right)\hat{e}_r - \frac{r^2\cos^2\theta\sin\theta}{a^2}\hat{e}_\theta\right]. \tag{16}$$

F_0 och a är konstanter.

Lösning. Vi börjar med att studera ytan S som är en kon med spetsen i $z = a$. Konen har sin öppna bottenyta vid $z = 0$.

Om vi tittar på fältet, så ser vi genast att det har en punktkälla i origo. För att tolka de övriga termerna så skriver vi om fältet som

$$\mathbf{F} = F_0\frac{a^2}{r^2}\hat{e}_r + F_0\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}\left(\cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta\right). \tag{17}$$

Uttrycket inom parentesen är basvektorn $\hat{z}$, och $r\cos\theta = z$. Vi kan därför dela upp fältet i två delar, en del som vi skriver i sfäriska koordinater, och som är singulär, och en andra del som vi skriver i kartesiska koordinater:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = F_0\left(\frac{a^2}{r^2}\hat{e}_r + \frac{z^2}{a^2}\hat{e}_z\right) \tag{18}$$

Ett sätt att lösa detta är att behandla normalytintegralerna av $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ separat. $\mathbf{F}_1$ är fältet från en punktkälla i origo med styrkan $4\pi F_0 a^2$, och ytan S tar upp rymdvinkeln 2π, så vi vet att $\int_S \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{S} = 2\pi F_0 a^2$. Sedan kan man ta divergensen av $\mathbf{F}_2$ och använda Gauss sats för att lösa integralen, eller lösa integralen direkt.

Ett annat sätt är att fortsätta räkna på det totala fältet $\mathbf{F}$. För att använda Gauss sats behöver vi dels isolera singulariteten i origo genom att lägga in en halvsfär, S_ϵ, med radien ϵ runt origo för $z > 0$ och med en normalvektor som pekar mot origo. Dessutom måste vi sluta konen, vilket vi gör genom att lägga till en cirkelskiva, S_1, med ytterradien a, ett litet hål med radie ϵ i mitten, och normalvektorn $-\hat{e}_z$ i xy-planet.

Divergensen av $\mathbf{F}$ blir

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}_2 = \frac{2F_0 z}{a^2}. \tag{19}$$

(Vi har sett tidigare att $\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = 0$ överallt utanför $r = 0$.)

Gauss sats ger oss nu

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V. \tag{20}$$

Vi börjar med att beräkna volymsintegralen

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V = \int_V \frac{2\pi F_0 z}{a^2} \mathrm{d}V. \tag{21}$$

Vi noterar här att vad vi gör är att integrera över cirkelskivor med radien $a - z$, så vår integral kan skrivas

$$\int_0^a \frac{2F_0 z}{a^2} \pi (a-z)^2 \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi F_0}{a^2} \left[\frac{z^4}{4} - \frac{2}{3} a z^3 + \frac{a^2 z^2}{2} \right]_0^a = \frac{2\pi F_0}{a^2} \frac{a^4}{12} = \frac{\pi F_0 a^2}{6}. \tag{22}$$

Sedan betraktar vi integralen över S_ϵ (lägg märke till att $r = \epsilon$ på S_ϵ).

$$\int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_\epsilon} F_0 \left(\frac{a^2}{\epsilon^2} \hat{e}_r + \frac{\epsilon^2 \cos^2\theta}{a^2} \hat{e}_z \right) \cdot (-\hat{e}_r) \, \mathrm{d}S = -F_0 \left(\frac{a^2}{\epsilon^2} \int_{S_\epsilon} \mathrm{d}S + \frac{\epsilon^2}{a^2} \int_{S_\epsilon} \cos^3\theta \mathrm{d}S \right) =$$
$$- F_0 \left(\frac{a^2}{\epsilon^2} 2\pi\epsilon^2 + \frac{\epsilon^2}{a^2} \int_{S_\epsilon} \cos^3\theta \mathrm{d}S \right) \to -2\pi a^2 F_0 \quad \text{då} \epsilon \to 0. \tag{23}$$

Slutligen har vi integralen över S_1

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_1} F_0 \left(\frac{a^2}{r^2} \hat{e}_r + \frac{z^2}{a^2} \hat{e}_z \right) \cdot (-\hat{e}_z) \, \mathrm{d}S. \tag{24}$$

Tänk nu på att $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z = 0$ i xy-planet, och att $z = 0$ där. Därav följer att integralen är 0. Det följer nu att vår eftersökta integral blir

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\pi F_0 a^2}{6} + 2\pi F_0 a^2 = \frac{13\pi F_0 a^2}{6}. \tag{25}$$

Repetition: Punktkälla i origo. Fältet i punkten $\mathbf{r}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{e}_r, \tag{26}$$

vilket fås av potentialen

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi r}, \tag{27}$$

eftersom

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\hat{e}_r \partial_r \frac{q}{4\pi r} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{e}_r. \tag{28}$$

Punktkälla i punkten $\mathbf{r}'$. Givet att vi har en punktkälla med laddning q belägen i punkten $\mathbf{r}'$. Potentialen i punkten $\mathbf{r}$ blir då

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' \right|}. \tag{29}$$

Detta ger fältet

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) &= -\left(\hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z \right) \frac{q}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\
&= -\frac{q}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(x-x')\hat{x} + 2(y-y')\hat{y} + 2(z-z')\hat{z}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{3/2}} \\
&= \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' \right|^3}.
\end{aligned} \tag{30}$$

6.2 Linjekällor

Ett fält av typen

$$\mathbf{F} = \frac{k}{2\pi\rho}\hat{e}_\rho \tag{31}$$

är singulärt längs hela z-axeln, och är oberoende av z.

Det svarar fysikaliskt till exempel emot en laddning som är jämnt fördelad längs med en linje (i det här fallet z-axeln). Storheten k motsvarar då laddning/längdenhet. Linjekällan är då källan till ett fält som överallt pekar radiellt ut från z-axeln.

En linjekälla behöver inte ha konstant styrka och kan ligga på andra kurvor än en rak linje, men då är uttrycket för fältet mer komplicerad.

Fältet kan erhållas från potentialen

$$\phi = -\frac{k}{2\pi}\log\frac{\varrho}{\varrho_0} \tag{32}$$

Precis som fältet från en punktkälla är också det här fältet divergensfritt $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, förutom för $\varrho = 0$.

Fortsättning följer på fredag.

Ytkälla På motsvarande sätt kan vi tala om ytkällor i tre dimensioner. Fältet

$$\mathbf{F} = \frac{\sigma}{2}\mathrm{sign}(z)\hat{z} \tag{33}$$

motsvar en ytkälla i xy-planet (vid $z = 0$), där σ, i det elektrostatiska fallet, skulle kallas för en ytladdningstäthet (laddning per areaenhet).