Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats: Lördagen den 3 januari 2022 klockan 08.30-12:30.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, Olle Branders formelsamling.
Lösningsskiss: Tünde Fülöp

Detta är enbart en skiss av den fullständiga lösningen. Det kan innebära att vissa mellansteg i uträkningarna, som egentligen är nödvändiga för en komplett lösning, inte redovisas.

1. Ett tvådimensionellt potentialfält ϕ är givet av

$$\phi(x, y) = \phi_0 \left(\frac{x^2 + y^2}{ax} \right)$$

där ϕ_0 är konstant. Ta fram ekvationer för och skissa potentialens ekvipotentialytor och tillhörande fältlinjer.
(10 poäng)

Lösning:

Ekvipotentialkurvan $\phi/\phi_0 = 2C$ har ekvationen

$$\frac{x^2 + y^2}{ax} = 2C \rightarrow (x - aC)^2 + y^2 = a^2C^2$$

och är en cirkel genom origo med medelpunkten på x-axeln. Fältlinjerna är de ortogonala trajektorierna till dessa cirklar och kan tas fram ur ekvationen:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\nabla\phi = \frac{\phi_0}{a} \left(-1 + \frac{y^2}{x^2}, -2\frac{y}{x} \right)$$

Då har vi

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

som kan skrivas på formen

$$\left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) y' + 2\frac{x}{y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{y} + y \right) = 0.$$

Ekvationerna för fältlinjerna kan därför skrivas

$$\frac{x^2}{y} + y = 2aD \rightarrow x^2 + (y - aD)^2 = a^2D^2$$

där D är en konstant. Fältlinjerna är alltså cirklar genom origo med medelpunkt på y-axeln.

2. Genom sambanden

$$x = uv\cos\varphi \tag{1}$$
$$y = uv\sin\varphi \tag{2}$$
$$z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \tag{3}$$

och $u, v \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ definieras ett kroklinjigt koordinatsystem.

(a) Visa att koordinatsystemet är ortogonalt! (2p)

(b) Beräkna divergensen av vektorfältet

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{h_u}{u}\hat{e}_u + \frac{h_v}{v}\hat{e}_v + \frac{h_\varphi \varphi}{uv}\hat{e}_\varphi$$

där h_u, h_v och h_φ är skalfaktorerna i det kroklinjiga koordinatsystemet. (8p)

Lösning:

(a) Kontrollera ortogonaliteten

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (v\cos\varphi, v\sin\varphi, u) \tag{4}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (u\cos\varphi, u\sin\varphi, -v) \tag{5}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-uv\sin\varphi, uv\cos\varphi, 0) \tag{6}$$

Beräkna skalärprodukterna

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = 0$$

och konstatera att koordinatsystemet är ortogonalt.

(b) Skalfaktorer är $h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$ och $h_\varphi = uv$.
Divergensen blir

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{4}{u^2 + v^2} + \frac{1}{uv}$$

---

3. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{A} = (2y, 4x, 6z^2 + 17)$$

genom den del av enhetssfären runt origo som har $z \geq 0$. Observera att ytan inte är sluten. Normalriktningen väljs så att dess z-komponent är positiv.

Lösning:

Slut ytan med en cirkelskiva S_0 i xy-planet. Välj normalen på skivan som $-\hat{z}$. Tillämpa Gauss sats på den slutna ytan som består av cirkelskivan och halva enhetssfären S,

$$\begin{aligned}
\int_S \boldsymbol{A} \cdot \hat{n} dS &= \int_{S+S_0} \boldsymbol{A} \cdot \hat{n} dS - \int_{S_0} \boldsymbol{A} \cdot \hat{n} dS \\
&= \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV + \int_{S_0} A_z(z=0) dS \\
&= \int_V (12z) dV + \int_{S_0} 17 dS \\
&= 12 \int_0^1 \pi(1-z^2) z dz + 17\pi \\
&= 3\pi + 17\pi = 20\pi.
\end{aligned}$$

4. Bestäm kurvintegralen

$$\oint_L \frac{1}{r} \hat{e}_\varphi \cdot d\boldsymbol{r}$$

där kurvan L definieras av $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ och $z = 0$.
(10 poäng)

Lösning:

Kurvan är en enhetscirkel i xy-planet som inte omsluter singulariteten i origo. Stokes sats kan tillämpas och

$$\oint_L \frac{1}{r} \hat{e}_\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \nabla \times \left(\frac{1}{r} \hat{e}_\varphi \right) \cdot \hat{e}_z dS$$

där C är det område i xy-planet som innesluts av $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$. Eftersom

$$\nabla \times \left(\frac{1}{r} \hat{e}_\varphi \right) = \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \hat{e}_r$$

i xy-planet ($\theta = \pi/2$) är 0, blir integralen också noll.

5. Tyngdkraftsaccelerationen $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ satisfierar ekvationen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{G} = -k\rho$$

där k är en konstant och $\rho(\boldsymbol{r})$ är masstätheten. Beräkna $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ när $\rho = 0$ överallt utom i rymden mellan två sfäriska ytor med radierna R och $2R$, där är $\rho = \rho_0 =$ konstant. *Ledning: Behandla de tre intervallen* $0 < r < R$, $R < r < 2R$, $r > 2R$ *var för sig, och använd Gauss' sats. (10 poäng)*

Lösning:

Problemet har sfärisk symmetri och vi kan därför skriva

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = G(r)\hat{e}_r$$

Vi använder Gauss' sats och i volymsintegralen integrerar $\nabla \cdot \boldsymbol{G} = -\Delta\Phi = -k\rho$ över en sfär med radien r, där r är en variabel.

Eftersom $G(r)$ är konstant på en sfäryta blir ytintegralen

$$\oint G \cdot d\boldsymbol{S} = \oint G(r)\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r dS = G(r) \oint dS = G(r)4\pi r^2$$

$0 < r < R_1$: $\rho(r) = 0$, så vi har $\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{G} dV = 0$.

$R_1 < r < R_2$: $\rho(r) = \rho_0$, så vi har

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{G} dV = -\int_R^r k\rho_0 r'^2 dr' \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -4\pi k\rho_0 \frac{1}{3}(r^3 - R^3)$$

$r > R_2$: $\rho(r) = 0$, så vi har

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{G} dV = -\int_R^{2R} k\rho_0 r'^2 dr' \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -4\pi k\rho_0 \frac{1}{3}((2R)^3 - R^3)$$

Om vi nu jämför med ytintegralen ovan får vi

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = G(r)\hat{e}_r = \begin{cases} 0 & r < R \\ -\hat{e}_r \frac{k\rho_0}{3}\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) & R < r < 2R \\ -\hat{e}_r \frac{k\rho_0}{3}\left(\frac{(2R)^3 - R^3}{r^2}\right) & r > 2R \end{cases}$$

6. Skalärfältet Φ ges av uttrycket

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r}),$$

där $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är konstanta vektorer och $\boldsymbol{r}$ är ortsvektorn. Beräkna och förenkla gradienten $\nabla\Phi$ så långt som möjligt med hjälp av indexräkning.
(10 poäng)

Lösning:
Indexräkning ger

$$\Phi = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r}) = a_i(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r})_i = a_i \epsilon_{ijk} b_j x_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j x_k$$

och gradienten blir

$$\begin{aligned}[\nabla\Phi]_l = [\nabla[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r})]]_l = \partial_l \epsilon_{ijk} a_i b_j x_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j \partial_l x_k = \\ \epsilon_{ijk} a_i b_j \delta_{kl} = \epsilon_{ijl} a_i b_j = \epsilon_{lij} a_i b_j = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_l,\end{aligned}$$

vilket betyder att $\nabla\Phi = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.