FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Istvan Pusztai, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

Okt 6, 2021

9. Lösningar av Poissons ekvation

Vi vet att Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}),$$

har entydiga lösningar om

$$\begin{aligned} \phi|_{\partial V} &= f(\mathbf{r}) && \text{Dirichlets randvillkor} \\ (\vec{\nabla}\phi)|_{\partial V}\cdot\hat{n} &= g(\mathbf{r}) && \text{Neumans randvillkor} \end{aligned}$$

där f och g är funktioner på randen ∂V.

Lösning av Poissons ekvation

Vi kommer att betrakta tre olika lösningsmetoder:

1. Variabelseparation. Kraftfull analytisk metod. Riktigt användbar i kombination med Fourieranalys.

2. Greensfunktionsmetoden. Generell metod, men det är ofta svårt att finna analytiska uttryck för Greensfunktionen.

3. Numeriska metoder.

- De två förstnämnda är analytiska metoder som vi introducerar för att ge en fysikalisk förståelse av lösningarna.
- De numeriska metoderna är viktigast för praktiska tillämpningar.
- De analytiska metoderna är ofta mycket användbara för att hitta effektiva numeriska metoder.

3. Variabelseparation

- Bygger på att man löser ekvationerna stegvis för en variabel i taget.
- Problemet skall *passa bra* ihop med ett visst koordinatsystem.

För att få en känsla för hur variabelseparation går till, vi kan först titta på Laplaces ekvation i kartesiska koordinater. Vi ska alltså lösa

$$\Delta\phi(x, y, z) = 0.$$

Vi ansätter lösningen

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

och skriver ut Laplaces ekvation

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0.$$

Vi dividerar med $\phi = XYZ$ och får

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0, \tag{1}$$

där varje term bara beror på en variabel. Vi får skriva om ekvationen som

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}.$$

Eftersom högerledet är oberoende av x, måste det vara lika med en konstant

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = c_1,$$

och på samma sätt

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = c_2,$$

och

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = c_3$$

Vi behöver alltså lösa dessa tre ekvationer med angivna randvillkor. Vi måste också ta hänsyn till att dessa konstanter är relaterade $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, enligt (1).

Exempel 1: Laplaces ekvation på en cirkelskiva med Dirichlet randvillkor

Med randvillkoret

$$\phi(a, \varphi) = h(\varphi),$$

ansätter vi lösningen $\phi(\varrho, \varphi) = f(\varrho)g(\varphi)$.

Laplacianen blir

$$\Delta\phi = \Delta\left(f(\varrho)g(\varphi)\right) = g(\varphi)\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}\right) + \frac{f(\varrho)}{\varrho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Detta ger den *separerade* ekvationen

$$\frac{f(\varrho)g(\varphi)}{\varrho^2}\left[\frac{\varrho^2}{f(\varrho)}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{g(\varphi)}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\right] = 0,$$

där den första termen i hakparentesen enbart beror på ϱ och den andra bara på φ. Därmed måste bägge vara konstanta (för att gälla för alla ϱ, φ). Vi sätter den första till $-\lambda$ och den andra till $+\lambda$.

Studera vinkelekvationen först

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} = \lambda g(\varphi),$$

dvs vi kan tolka g som en egenfunktion till $\partial^2/\partial\varphi^2$. Lösningen är

$$g(\varphi) = A\cos(m\varphi) + B\sin(m\varphi),$$

med *egenvärdet* $\lambda = -m^2$. Funktionen måste uppfylla randvillkoret $g(0) = g(2\pi)$ vilket ger att $m = 0, 1, 2, \ldots$ (notera att $m = 0$ är meningslös för sinus-termen, och negativ m skulle inte vara linjärt oberoende lösningar).

Den kvarvarande, radiella ekvationen blir nu

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}\right) - \frac{m^2}{\varrho^2}f(\varrho) = 0.$$

- $m = 0$, vilket innebär att $g(\varphi) = A$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho\frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho} = B \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho} = \frac{B}{\varrho}.$$

Med lösningen $f(\varrho) = A + B\ln(\varrho)$, där den andra termen motsvarar en punktkälla i två dimensioner (vi skippar denna, därför den är singulär i origo).

Alltså är $\phi(\mathbf{r}) = A$ (konstant) en lösning om randvillkoret är $h(\varphi) = A$ (konstant). (Vi förväntade detta, eftersom lösningar för Laplaces ekvation måste anta sina extrema på randet.)

- $m > 0$, ansätt lösning $f(\varrho) = C\varrho^p$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\varrho^p\right) - \frac{m^2}{\varrho^2}\varrho^p = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2\varrho^{p-2} - m^2\varrho^{p-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \pm m$$

Med lösningen $f(\varrho) = A\varrho^m + \frac{B}{\varrho^m}$, där den andra termen är singulär i origo (vi skippar denna).

Med randvillkoret från ovan $g(\varphi) = \cos m\varphi$, $f(a) = \phi_0$ (eller helt enkelt $\phi(r = 0, \varphi) = \phi_0 \cos m\varphi$) får vi lösningen

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0 \left(\frac{\varrho}{a}\right)^m \cos m\varphi,$$

som ovan.

Exempel 2: Laplaces ekvation i sfäriska koordinater; specialfall

Bestäm p och l så att

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0 \left(\frac{r}{a}\right)^p \sin^l(\theta)\cos(m\varphi) \tag{2}$$

är en lösning till Laplaces ekvation i området $r < a$.

I sfäriska koordinater Laplaces ekvation är

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{3}$$

För att lösa problemet med variabelseparation antar vi följande form för ϕ

$$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Genom att multiplicera ekvation (3) med $r^2\sin^2\theta/(R\Theta\Phi)$, den φ-beroende delen blir separerad

$$\frac{r^2\sin^2\theta}{r^2 R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0. \tag{4}$$

Det innebär att den φ-beroende delen måste vara konstant

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2,$$

med lösningen

$$\Phi = A_1\sin(m\varphi) + A_2\cos(m\varphi).$$

I (2) vi har $\cos(m\varphi)$. För att separera den radiella delen dividerar vi (4) med $\sin^2\theta$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\sin\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0. \tag{5}$$

Notera att de två sista termerna nu inte är inte separerad (båda beror på θ), men eftersom den radiella delen är separerad finner vi att

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\lambda, \tag{6}$$

och

$$\frac{1}{\sin\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=\lambda. \tag{7}$$

Enligt (2), har den θ-beroende delen av lösningen formen $\Theta = \sin^l(\theta)$, så vi har

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\sin^l(\theta)}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\sin^l(\theta)=\lambda\sin^l(\theta). \tag{8}$$

Efter direkt derivering med avseende på θ, och förenkling i första termen, får vi

$$\left[-l(l+1)+\frac{l^2}{\sin^2\theta}\right]\sin^l(\theta)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\sin^l(\theta)=\lambda\sin^l(\theta). \tag{9}$$

Den är uppfylld om $l = m$ och $\lambda = -l(l+1)$. Den radiella delen återstår, där vi stoppar in $\lambda = -l(l+1)$ och multiplicerar med $R = r^p$ enligt (2).

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dr^p}{dr}\right)-\frac{l(l-1)}{r^2}r^p=0. \tag{10}$$

Detta ger $p = l$, eller $p = -l-1$. Den senare är singulär, så vi väljer den förra. Funktionen $R\Theta\Phi = r^l\sin^l(\theta)\cos(l\varphi)$ är alltså en lösning till Laplaces ekvation. Det betyder att i (2) är $p = l$ och $m = l$. Eftersom Laplaces ekvation är linjär i ϕ, är också ekvation (2) $= R\Theta\Phi\phi_0/a^p$ en lösning.

1. Greensfunktionsmetoden

Vi tecknar Poissons ekvation i hela $\mathbb{R}^3$,

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}).$$

En lösningsstrategi som vi har betraktat tidigare är att:

- Beräkna bidraget till potentialen i punkten $\mathbf{r}$ givet en punktladdningen med styrkan $q = 1$ belägen i punkten $\mathbf{r}'$.
- Superpositionsprincipen ger potentialen som en summa/integral över källtätheten gånger ovanstående “Greensfunktion”.

Vi har redan visat att

$$G_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{r},\mathbf{r}\,') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|},$$

där vi förtydligar att detta gäller på $\mathbb{R}^3$. Eftersom en punktkälla i punkten $\mathbf{r}=\mathbf{r}\,'$ med styrkan $q=1$ beskrivs av källtätheten $\rho(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}\,')$, inser vi att Greensfunktionen löser följande differentialekvation

$$\Delta G_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{r},\mathbf{r}\,') = -\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'), \tag{11}$$

på hela $\mathbb{R}^3$.

Kommentar 1: Notera att Laplaceoperatorn verkar på variabeln $\mathbf{r}$ (inte $\mathbf{r}\,'$). Dvs., $\Delta = \Delta_{\mathbf{r}} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

Lösningen till Poissons ekvation i $\mathbb{R}^3$ med en allmän källa ρ blir en superposition

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}V' \, \frac{\rho(\mathbf{r}\,')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|}.$$

Exempel: linjekälla

Betrakta en linjekälla, $\rho(\mathbf{r}) = k\delta^2(\hat{\rho})$, i $\mathbb{R}^3$.

Vi skall integrera över linjekällan och introducerar koordinaten

$$\mathbf{r}\,' = \hat{\rho}\,' + z'\hat{z}' = \rho'\hat{\rho}' + z'\hat{z}.$$

Vi sätter in i

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}\,')G_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{r},\mathbf{r}\,')\mathrm{d}V' = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{\mathbb{R}^2} dS' \frac{k\delta^2(\rho\,')}{4\pi|\mathbf{r}-(\rho'\hat{\rho}'+z'\hat{z})|}.$$

Integralen $\int dS'$ över x' och y' kan enkelt utföras tack vare deltafunktionen. Resultatet:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{k}{4\pi|\mathbf{r}-z'\hat{z}|}$$

som är identiskt med den direkta konstruktionen från kap. 6.

Greensfunktioner för en begränsad volym med randvillkor. Låt oss göra denna metod mer generell. Studera Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}).$$

- ... inuti en (begränsad) volym V.
- ... med homogena randvillkor, dvs. $f = 0$ eller $g = 0$ på randen ∂V.
- ... för en allmän källtäthet $\rho(\mathbf{r})$.

Lösningen kan skrivas

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{V'} \mathrm{d}V'\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,')\rho(\mathbf{r}\,'),$$

där Greensfunktionen löser Ekv. (11) *inuti volymen* V och med det *givna randvillkoret.*

Att detta är en lösning visas genom insättning:

$$\begin{aligned}\Delta\phi(\mathbf{r}) &= \Delta \int_{V'} \mathrm{d}V'\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,')\rho(\mathbf{r}\,') = \int_{V'} \mathrm{d}V'\, \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,')\rho(\mathbf{r}\,') \\ &= -\int_{V'} \mathrm{d}V'\, \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}\,')\rho(\mathbf{r}\,') = -\rho(\mathbf{r}). \qquad (12)\end{aligned}$$

- Notera att **r**-beroendet bara sitter i Greensfunktionen.
- Notera att Greensfunktionen G på ett område V bestäms av formen på området och av randvillkoren på ∂V.
- Genom att $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,')$ uppfyller det homogena randvillkoret kommer ovanstående superposition också att uppfylla det.

Mer om randvillkor Vi kan notera att om man använde

$$G_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'|},$$

som Greensfunktion i en begränsad volym, skulle randvillkoret inte uppfyllas (t.ex. om vi har randvillkoret $\phi = 0$, medan $G_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,')$ är nollskilt överallt, bortsett från oändligt lång bort).

I detta sammanhang är det praktiskt att påpeka att om funktionen $\phi = \phi_1$ är en lösning till Poissons ekvation $\Delta\phi = -\rho$ inuti en volym, och ϕ_2 löser

Laplaces ekvation $\Delta\phi_2 = 0$ i samma volym, så är $\phi = \phi_1 + \phi_2$ också en lösning till $\Delta\phi = -\rho$. Det kan komma till nytta vid konstruktionen av Greensfunktionen, genom att använda $G_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,')$ som en del av Greensfunktionen $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,')$, och lägga till funktioner som löser Laplaces ekvation inom området, så att randvillkoret är också uppfyllt.