FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Istvan Pusztai, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

Okt 6, 2021

8. Potentialteori

Mål

Några viktiga vektorfält som förekommer i fysik är så kallade *konservativa fält*. Det betyder att de kan uttryckas som en gradient av en skalärt fält. Det är ofta mer bekvämt att beräkna potentialen istället av att beräkna fältet direkt.

Exempel på konservativa kraftfält är det elektrostatiska fältet och tyngdkraftsfältet. Potentialen för sådana fält kan beskrivas med partiella differentialekvationer som kallas Poissons och Laplaces ekvationer. Målet med den här lektionen är att beskriva dessa ekvationer och diskutera vilka sorts randvillkor är lämplig för dem.

Vi kommer också att visa att varje tillräckligt slätt vektorfält i tre dimensioner kan skrivas som en summa av ett konservativt vektorfält och ett divergensfritt vektorfält. Det här kallas vektoranalysens huvudsats eller Helmholtz sats. Som vi har visat i föreläsning 12, det divergensfria fältet kan uttryckas som rotationen av en vektorpotentialfält $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Poissons och Laplaces ekvationer

Konservativa vektorfält är rotationsfria (enligt identiteten $\nabla \times \nabla\phi = 0$), men i närvaro av källor har de en divergens som är skild från noll:

$$\rho(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{F}. \tag{1}$$

Kommentar

Låt oss använda superposition och deltafunktioner för att visa att $\nabla\cdot\mathbf{F} = \rho(\mathbf{r})$, om $\mathbf{F} = -\nabla\phi$, och potentialen ϕ från en laddningsfördelning $\rho(\mathbf{r})$ är given av

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}')dV'.$$

Notera nedan att ∇ opererar på $\mathbf{r}$ och inte $\mathbf{r}'$. Vi får:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')dV'.$$

Beräkna nu divergensen av ovanstående (notera att den opererar på $\mathbf{r}$), och identifiera deltafunktionen

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi}\int \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)\rho(\mathbf{r}')dV' = \frac{1}{4\pi}\int 4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')dV' = \rho(\mathbf{r}).$$

Med $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ får vi *Poissons ekvation*

$$\nabla\cdot\nabla\phi(\mathbf{r}) = \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}). \tag{2}$$

som ger potentialen i differentialform.

Specialfallet av denna ekvation utan källa, dvs om fältet är divergensfritt, ger *Laplaces ekvation*

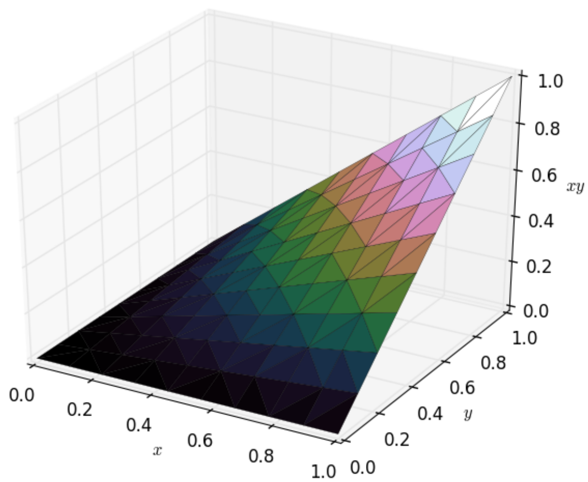
$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0. \tag{3}$$

Kom ihåg att Δ är Laplacianen och kan skrivas

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi, \tag{4}$$

i kartesiska koordinater. Det ser annorlunda ut i kroklinjiga koordinatsystem.

Lösningarna till Laplaces ekvation är så kallade *harmoniska* funktioner. Villkoret $\Delta\phi = 0$ ger att det inte finns några extrempunkter inuti området, dvs maximum och minimum måste ligga på randen. Två exempel på lösningar till Laplaces ekvation i ett område med givna randvillkor visas i figurerna 1 och 2.

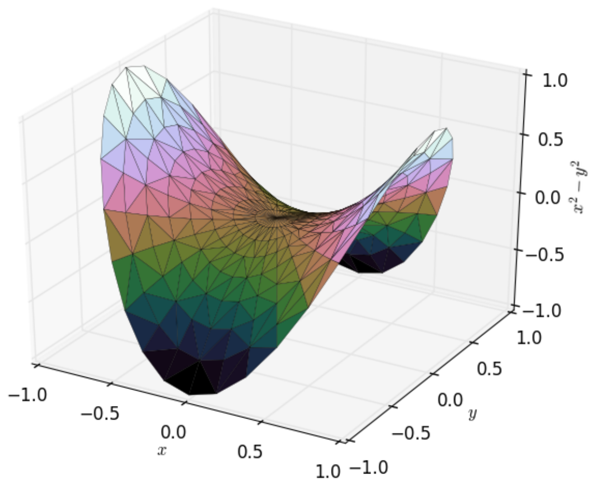


Figur 1: Lösningen ($\phi = xy$) till Laplaces ekvation i två dimensioner på ett kvadratiskt område med randvillkor enligt figuren.

Kommentar

Notera att $\mathbf{F} = -mg\hat{z}$ är divergensfritt och att potentialen $\phi = mgz$ uppfyller Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$. (Det är förenligt med att det inte finns någon källa för gravitationskraften $\mathbf{F}$ ovanför marken.)

Notera att Poissons och Laplaces ekvationer är exempel på *differentialekvationer*. För att lösa dessa i ett specifikt område behöver man också veta randvillkoren för fältet ϕ.



Figur 2: Lösningen ($\phi = x^2 - y^2$) till Laplaces ekvation i två dimensioner på ett cirkulärt område med vinkelberoende randvillkor enligt figuren.

Nästa vecka, i samband med värmeledningsföreläsningen kommer vi att se att (ett stationärt) temperaturfält uppfyller någon av dessa ekvationer (antingen Poissons ekvation om det finns värmekälla, eller Laplaces ekvation om det inte finns en värmekälla). För att t.ex. räkna ut temperaturfältet inuti ett värmeisolerande fönster behöver vi alltså veta randvillkor för fältet på glasets in- och utsida.

Olika tekniker för lösning av dessa ekvationer presenteras i kapitel 9 och vi kommer att gå igenom det under morgondagens föreläsning.

Integral- och differentialform för potentialen

Sammanfattningsvis kan vi beräkna potentialen $\phi(\mathbf{r})$ för ett konservativt fält på två olika sätt utgående från dess källtäthet $\rho(\mathbf{r})$.

- Dels på integralform enligt superpositionsprincipen

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') dV'.$$

- Dels på differentialform enligt Poissons ekvation

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}).$$

Vi kommer dock att behöva prata mer om *randvillkor*.

Randvärdesproblem

En lösning av t.ex. Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$ ger upphov till integrationskonstanter. För att entydigt bestämma lösningen ϕ behövs därför *randvillkor* för fältet.

Kommentar

Att ta reda på precis "hur mycket" villkor, och av vilket slag, man bör lägga på fältet på randen ∂V är ju ett matematiskt problem, men det matematiska svaret på frågan bör också vara ett svar inom fysik, så att en given fysikalisk förutsättning ger en unik lösning (fältkonfiguration).

- Vårt randvärdesproblem består av den partiella differentialekvationen $\Delta\phi = -\rho$ samt några randvillkor.
- Vilka randvillkor ger en *unik* lösning (för fältet)? Eller hur skall "bra" randvillkor formuleras?
- Antag att ϕ_1 och ϕ_2 båda är lösningar. Vi kommer att titta på vilka randvillkor behövs för att skillnaden mellan ϕ_1 och ϕ_2 är bara en konstant, alltså fältet är unikt.
- $\psi = \phi_1 - \phi_2$, uppfyller Laplaces ekvation, $\Delta\psi = 0$.
- En trivial lösning, $\psi =$ konstant, innebär att lösningen till Poissons ekvation är unik (dvs. motsvarande fältet $-\nabla\phi$ är unik). Men vad behövs för att det inte finnas andra lösningar?

Betrakta nu identiteten

$$\nabla \cdot (\psi\nabla\psi) = \nabla\psi \cdot \nabla\psi + \psi\Delta\psi = \nabla\psi \cdot \nabla\psi = |\nabla\psi|^2,$$

som gäller när $\Delta\psi = 0$. Tillämpa nu Gauss sats på vektorfältet $\psi\nabla\psi$.

$$\int_{\partial V} \psi\nabla\psi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (\psi\nabla\psi) dV = \int_V |\nabla\psi|^2 dV.$$

- HL är positivt semidefinit, och noll endast om $\nabla\psi = 0$ överallt inom V $\Rightarrow \psi =$ konstant.

- Därför vi vill att randvillkoren väljas så att den ger

$$\int_{\partial V} \psi(\nabla\psi \cdot \hat{n}) dS = 0.$$

Två faktorer i integranden: ψ och $\nabla\psi \cdot \hat{n}$.

Kommentar: Den andra faktorn är "normalderivatan" vid randen, alltså riktningsderivatan i normalens riktning.

Kommentar: Lösningen till Laplaces ekvation är trivial (konstant) om den ena eller den andra är noll på randen.

Dirichlets randvillkor:

$$\psi = 0 \text{ på } \partial V \quad \Rightarrow \quad \psi = 0 \text{ i } V$$

($\nabla\psi = 0$ i V) Detta ger att lösningen $\phi_1 = \phi_2$ på randen, dvs

$$\phi|_{\partial V} = f,$$

där f är en funktion på randen.

Neumanns randvillkor:

$$(\nabla\psi) \cdot \hat{n} = 0 \text{ på } \partial V \quad \Rightarrow \quad \psi = \text{konstant i } V$$

Detta ger att $(\nabla\phi_1) \cdot \hat{n} = (\nabla\phi_2) \cdot \hat{n}$ på randen, dvs

$$(\nabla\phi)|_{\partial V} \cdot \hat{n} = g,$$

där g är en funktion på randen.

Sammanfattning: Poissons ekvation i volymen V med någon källfördelning ρ har en unik lösning (sånär som på en ointressant konstant) för dessa två typer av randvillkor.

Divergensfria fält

Vi har sett att skalärpotentialen kan beräknas från källtätheten med hjälp av Poissons ekvation. Vi ska nu bevisa att vektorpotetialen också uppfyller Poissons ekvation med virveltätheten i högerledet.

Men först lite repetition: Vi betraktar ett divergensfritt fält $\mathbf{G}$

$$\nabla \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}) = 0.$$

Divergensfriheten uppfylls om fältet kan skrivas i termer av en vektorpotential $\mathbf{A}$, som

$$\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{5}$$

Transformationen

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\Lambda(\mathbf{r}) \tag{6}$$

ändrar inte vektorfältet $\mathbf{G}(\mathbf{r})$, eftersom $\nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$, denna invariansen kallas för *gaugeinvarians*.

Kommentar

Ofta använder man gaugeinvariansen till att skapa en vektorpotential $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ som är divergensfri. Låt oss börja med en vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, för vilken $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \neq 0$. Enligt (6)

$$\nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \nabla\Lambda(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \Delta\Lambda(\mathbf{r})$$

Om man väljer Λ som lösningen till ekvationen $\Delta\Lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}$, får man alltså en divergensfri $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$.

Rotationen kallas ofta för virveltäthet

$$\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{j} \quad \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{j}.$$

Om vi nu använder sambandet $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$ får vi

$$\Delta\mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\mathbf{j}.$$

Genom att välja Gaugeparametern så att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ får vi Poissons ekvation för vektorpotentialen

$$\Delta\mathbf{A} = -\mathbf{j}. \tag{7}$$

Resultatet innebär att vektorpotentialen kan också ges i en integralform:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'.$$

Vektoranalysens huvudsats

Vi har betraktat konservativa och divergensfria fält, som två speciella typer av vektorfält, och lärt oss att beräkna dessa med olika metoder. Genom detta har vi en nästan fullständig bild av allmänna vektorfält, eftersom det går att visa att så gott som alla vektorfält kan konstrueras från dessa två typ av vektorfält.

- Betrakta ett fält med både källor och virvlar, dvs $\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho \neq 0$ och $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \neq 0$.
- Detta allmänna vektorfält kan vi dela upp i två delar $\mathbf{H} = \mathbf{F} + \mathbf{G}$ där

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho \qquad \nabla \cdot \mathbf{G} = 0 \tag{8}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{j} \tag{9}$$

- Dvs, fältet $\mathbf{H}$ kan skrivas som summan av ett rotationsfritt fält $\mathbf{F}$ och ett divergensfritt fält $\mathbf{G}$ som representeras av potentialerna ϕ och $\mathbf{A}$ (Helmholtz sats, eller *vektoranalysens huvudsats*):

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} + \mathbf{G} = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A},$$

vilket också är känt som Helmholtzuppdelningen. (Förutsättningen att att vektorfält ska kunna skrivas som summan av gradienten av ett skalärfält och rotationen av ett vektorfält (som ovan) är att $\mathbf{H}$, $\nabla\phi$ och $\nabla \times \mathbf{A}$ ska avta tillräckligt snabbt då $r \to \infty$. Vi kommer inte att gå djupare i detta under den här kursen.)

Kommentar: Ett godtyckligt vektorfält $\mathbf{H}$ har 3 frihetsgrader (en vektor) i varje punkt i rummet. Den rotationsfria delen $\mathbf{F}$ beskrivs fullt med en skalärfält ϕ, som alltså representerar 1 frihetsgrad i varje punkt. De tre komponenterna av divergensfria delen $\mathbf{G}$ är relaterade genom skalärekvationen $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$; det tar bort en frihetsgrad, alltså $\mathbf{G}$ representerar 2 frihetsgrader. Det betyder att $\mathbf{F}$ och $\mathbf{G}$ tillsammans innehåller nödvändig och tillräcklig information för att beskriva $\mathbf{H}$.

Standardexempel på käll- och virvelfördelningar

Vi avslutar med en snabb överblick av några standardexempel för käll och virvelfördelningar och motsvarande potentialer, innan vi går vidare med att diskutera praktiska lösningsmetoder för Poissons ekvation för mer komplicerade fördelningar på nästa lektion.

Punktkälla med styrkan q i origo.

- vektorfält
$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}.$$
- rotationsfritt, men med en källa $\rho = q\delta^3(\mathbf{r})$. Fältet har en potential
$$\phi = \frac{q}{4\pi r},$$

som uppfyller Poissons ekvation med källan $\rho = q\delta^3(\mathbf{r})$,
$$\Delta\phi = -q\delta^3(\mathbf{r}).$$

Linjekälla på z-axeln med konstant styrka k.

- vektorfält
$$\mathbf{F} = \frac{k}{2\pi\varrho}\hat{\varrho}$$
- Motsvarande potential är
$$\phi = -\frac{k}{2\pi}\log\frac{\varrho}{\varrho_0},$$
- Potentialen uppfyller Poissons ekvation:
$$\Delta\phi = -k\delta^2(\varrho).$$

Virveltråd på z-axeln med styrka J.

- fältet

$$\mathbf{G} = \frac{J}{2\pi\varrho}\hat{\varphi}.$$

- Vektorpotentialen är (t.ex., med tanke på gaugeinvarians)

$$\mathbf{A} = -\frac{J\hat{z}}{2\pi}\log\frac{\varrho}{\varrho_0},$$

(kontrollera; $\nabla \times \mathbf{A}$ i cylindriska koordinater)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\varrho}\begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \varrho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\varrho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{J}{2\pi}\log\varrho \end{vmatrix} = \frac{J}{2\pi\varrho}\hat{\varphi}.$$

- Notera att denna vektorpotential uppfyller $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, och därför ges virvelfördelningen av

$$\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{j} = -\Delta\mathbf{A}.$$

- Poissons ekvation,

$$\Delta\mathbf{A} = -J\hat{z}\delta^2(\varrho).$$