FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

7 september 2021

Målet med föreläsningen är att lära oss beräkna linje-, yt- och volymintegraler genom parametrisering i kroklinjiga koordinater.

En linjeintegral är en integral där integranden beräknas längs en kurva. Linjeintegraler, även kallade kurvintegraler, är av stor betydelse i elektromagnetik och mekanik, till exempel om man vill beräkna energin som behövs för att flytta en kropp längs en viss bana, eller att beräkna arbetet som utförs av elektriska fält på laddningar i rörelse. Man använder linjeintegraler också om man vill beräkna magnetfältet från en strömgenomfluten ledare.

När en ytintegral ska beräknas, beräknas integranden på en geometrisk yta. Det är en typ av dubbelintegraler. Exempel på ytintegraler är flödesintegraler som används till exempel inom strömningsmekaniken där flöden av vätskor och gaser genom olika ytor behöver beräknas. Också inom elektromagnetiken är flöden av elektriska och magnetiska fält av stor betydelse.

Kapitel 3. Integraler

Låt ϕ vara ett kontinuerligt skalärt fält och $\mathbf{F}$ ett kontinuerligt vektorfält.

Linje- (kurv-) integraler. Vi ska beräkna integraler av typen

- t.ex. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, $\int_C \phi |d\mathbf{r}|$, $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$, $\int_C \phi d\mathbf{r}$, där $d\mathbf{r}$ är förskjutningsvektorn och C är en kurva över vilken vi integrerar. Dessa kallas med ett gemensamt namn linjeintegraler av $\mathbf{F}$ respektive ϕ längs C. Den första brukar kallas *tangentlinjeintegral*, eftersom det är fältets tangentialkomponent på kurvan som integreras.

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, $\int_C \phi |d\mathbf{r}|$ ger skalära resultat, $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$, $\int_C \phi d\mathbf{r}$ ger vektorer.

Exempel på fysikalisk tolkning av $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$: om $\mathbf{F}$ är ett kraftfält som påverkar en partikel, så är tangentlinjeintegralen det arbete som utvinns då partikeln förs utefter kurvan C.

Fysikalisk tolkning av $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$: Låt $\mathbf{F}$ vara ett magnetfält och C en strömförande ledning med strömmen 1. C påverkas då av magnetfältet med en kraft som är lika med $\int_C d\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, dvs minus $\int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$.

Ytintegraler. För en ytintegral har man ibland det skalära areaelementet dS, och ibland det vektoriella $d\mathbf{S} = \hat{n} dS$, där $\hat{n}$ är en normerad normalvektor till ytan S.

- t.ex. $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, $\int_S \phi dS$, $\int_S \mathbf{B} \times d\mathbf{S}$, $\int_S \phi d\mathbf{S}$

Dessa kallas med ett gemensamt namn ytintegraler av $\mathbf{F}$ respektive ϕ över S. Den första brukar kallas *normalytintegral*, eftersom det är fältets normalkomponent på ytan som integreras.

Återigen, de första två integralerna i listan ger skalärer, de sista två vektorer.

Integralen $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ tolkas som ett flöde. Om $\mathbf{F}$ är hastighetsfältet för en strömmande vätska, så betyder normalytintegralen den volym av vätskan, som per tidsenhet strömmar genom ytan S.

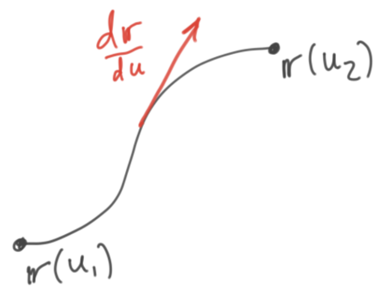
Integralen $\int_S \phi d\mathbf{S}$ kan också tolkas fysikaliskt: Om ϕ är trycket i en vätska, så betyder integralen $\int_S \phi d\mathbf{S}$ den totala kraft som trycket utövar på ytan S.

Volymintegraler.

- $\int_V \mathbf{F} dV$ eller $\int_V \phi dV$

Parametrisering

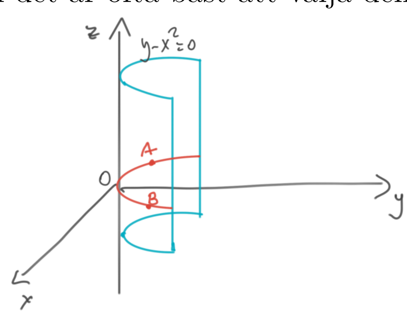
Integralerna kan i allmänhet lösas genom parametrisering. När vi tidigare studerade fältlinjer såg vi hur vi kan beskriva fältlinjen med en parameter, låt oss säga τ. Det gäller rent allmänt att vi kan beskriva varje kontinuerlig kurva med hjälp av en parameter.



Exempel: Parametrisera linjen $5x + 2y = 4$. Vi kan börja med att sätta $x = u$. Det följer då att $y = 2 - \frac{5}{2}u$. Dessa båda uttryck ($x = u$ och $y = 2 - \frac{5}{2}u$) ger en parametrisering av linjen för $-\infty < u < \infty$.

En viktig egenskap hos kurvan $\mathbf{r}(u)$ är att derivatan $d\mathbf{r}/du$ i varje punkt ger en tangentvektor till kurvan. Linjen $\mathbf{r}(u) = (u, 2 - 5u/2)$ har tangentvektorn $d\mathbf{r}/du = (1, -5/2)$ i varje punkt.

Exempel: Parametrisering av en kurva som är skärningen mellan ytorna $y - x^2 = 0$ och $z = 0$ från punkten B med koordinaterna $(1, 1, 0)$ till punkten A med koordinaterna $(-1, 1, 0)$. En parametrisering av kurvan innebär att vi finner en parameter som gör att ovanstående uppfylls på så sätt att en motsvarande ortsvektor pekar på kurvans punkter. Här finns många möjligheter men det är ofta bäst att välja den enklast möjliga.



Välj $u = x$. Substituering ger:

$$x = u \tag{1}$$
$$y = u^2 \tag{2}$$
$$z = 0 \tag{3}$$

så att ortsvektorn blir $\mathbf{r} = (u, u^2, 0)$.

Med den här parametriseringen kommer ortsvektorn peka på punkter på kurvan. Men vi måste också försäkra oss om att endast punkter mellan punkten $(1, 1, 0)$ till $(-1, 1, 0)$ berörs. Vi behöver därför specificera variationsområdet för parametern u. I punkten A gäller att $x = -1$ så $u_A = -1$ och i punkten B gäller $x = 1$ så $u_B = 1$. Eftersom kurvan är orienterad från B till A gäller att $u : 1 \to -1$.

Sammanfattningsvis så är parametriseringen:

$$\mathbf{r} = (u, u^2, 0)$$

med

$$u : 1 \to -1.$$

Linjeintegraler.

Man parametriserar kurvan C som $\mathbf{r}(u)$ med $u \in [u_1, u_2]$.

Då blir förskjutningsvektorn $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{du}du$ och vi kan skriva

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{u_1}^{u_2} \mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u, \tag{4}$$

och efter att ha beräknat skalärprodukten har vi en helt vanlig endimensionell integral.

I princip finns det oändligt många parametriseringar, och rent matematiskt spelar det ingen roll vilken man väljer, fast vissa parametriseringar ger snällare räkningar än andra!

Ibland är kurvan sluten, det vill säga kurvans start- och slutpunkt sammanfaller. Man skriver då integralen som (markeras med cirkel)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{5}$$

Linjeintegralen av ett vektorfält längs en sluten kurva brukar kallas cirkulationen (eller rotationen) av vektorfältet.

Exempel: linjeintegralen för $\mathbf{A} = x\hat{x}$ längs en parabel Låt oss ta vektorfältet $\mathbf{A} = x\hat{x}$ och beräkna integralen $\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, där L är parabeln som vi parametriserat ovan, men vägen är bara från punkten B $(1, 1, 0)$ till origo.

Receptet:

1. parametrisera vägen
2. uttryck vektorfältet längs vägen
3. uttryck $d\mathbf{r}$ längs vägen
4. utför integrationen.

Vi följer receptet:

1. Vägen är parabeln som vi beskrivit ovan. Parametriseringen är $\mathbf{r} = (u, u^2, 0)$ med $u : 1 \to 0$.
2. Parametriseringen ger $x = u$ och $y = u^2$. Vi byter ut x och y för vektorfältet:
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u)) = x(u)\hat{x} = u\hat{x}$$
3. Vi använder nu ekvation 4 för att uttrycka $d\mathbf{r}$ längs vägen L
$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{du}du = \frac{d(u\hat{x} + u^2\hat{y})}{du}du = (\hat{x} + 2u\hat{y})du$$
4. Integralen kan nu beräknas
$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^0 (u\hat{x}) \cdot (\hat{x} + 2u\hat{y})du = \int_1^0 udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^0 = -\frac{1}{2}$$

Exempel: Kurvintegral cirkel 1 Beräkna integralen $\oint_C \phi dr$ där $\phi = \phi_0$ (konstant) och kurvan C beskriver en cirkel i xy-planet med radie a och centrum i origo som genomlöps medurs.

- Notera att svaret kommer att bli en skalär.
- Lite eftertanke ger att svaret borde bli $\phi_0 2\pi a$, dvs den konstanta potentialen gånger omkretsen på cirkeln.

- Parametrisera kurvan (notera riktningen): $\mathbf{r}(u) = x(u)\hat{x} + y(u)\hat{y} = a \sin u\hat{x} + a \cos u\hat{y}$ med $u \in [0, 2\pi]$.
- Bågelementet blir $dr = |d\mathbf{r}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 du^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 du^2} = adu$

Den parametriserade kurvintegralen blir

$$\oint_C \phi ds = \phi_0 a \oint_0^{2\pi} du = \phi_0 2\pi a \tag{6}$$

Exempel: Kurvintegral cirkel 2 Beräkna integralen $\oint_C \phi d\mathbf{r}$ där $\phi = \phi_0$ (konstant) och kurvan C beskriver en cirkel i xy-planet med radie a och centrum i origo som genomlöps medurs.

- Förskjutningsvektorn $d\mathbf{r} = \hat{x}\frac{dx}{du}du + \hat{y}\frac{dy}{du}du$.

Den parametriserade kurvintegralen blir

$$\oint_C \phi d\mathbf{r} = \phi_0 \oint_0^{2\pi} \left[\hat{x}a \cos u - \hat{y}a \sin u\right] du = 0 \tag{7}$$

Exempel: kraft på cirkulär strömslinga (kompendiet sid 28) En cirkulär strömslinga med radien r_0 genom vilken det löper en ström I ligger i xy-planet. Beräkna den kraft med vilken ett homogent magnetfält $B_0\hat{e}_z$ påverkar slingan.

Lösning: Ett element $d\mathbf{r}$ av slingan påverkas av en kraft $d\mathbf{F} = Id\mathbf{r} \times \mathbf{B}$, och alltså ges den totala kraften av $\mathbf{F} = \int_C Id\mathbf{r} \times \mathbf{B}$.

Anta att cirkelns centrum ligger i origo. Då får vi att $\hat{e}_\phi$ är en tangentvektor till cirkeln. Vi noterar nu att $Id\mathbf{r} \times \mathbf{B} = B_0 I(\hat{e}_\phi \times \hat{e}_z)ds = B_0 I(\hat{e}_\rho)ds$.

Lägg nu märke till att $\hat{e}_\rho$ har motsatt riktning i två diametralt motsatta punkter på cirkeln och därför kommer kraften från dessa båda punkter att ta ut varandra. Vi kan upprepa detta resonemang för alla punkter längs strömslingan, och alltså måste nettokraften på slingan vara noll.

Exempel: Kraft och arbete En partikel rör sig längs en bana C, som ges av $\mathbf{r}(t)$, under inverkan av en kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Vi vill då beräkna arbetet som kraften utövar på partikeln. Mellan punkterna $\mathbf{r}$ och $\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}$ så är arbetet

$$\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{8}$$

Vi kan då beräkna arbetet längs hela kurvan genom att beräkna integralen

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{9}$$

Denna integral är ett exempel på en linjeintegral (kurvintegral). Vi kan skriva

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int P\mathrm{d}t, \tag{10}$$

där P är effekten.

Konservativa fält Om cirkulationen av vektorfältet är noll, dvs

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{11}$$

gäller för varje sluten kurva C, så säges fältet $\mathbf{F}$ vara konservativt. För ett konservativt fält $\mathbf{F}$ gäller att givet en fix startpunkt A och en fix slutpunkt B, så beror integralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{12}$$

inte på valet av kurvan C mellan dessa punkter.

Bevis Betrakta två kurvor C_1 och C_2 mellan A och B. Då kan vi skapa en sluten kurva C_0 genom att först följa kurvan C_1 från A till B, och sedan kurvan C_2 baklänges, det vill säga i negativ riktning, tillbaka till A. Integralen över C_0 måste då vara 0, fast den integralen kan vi också skriva som

$$\oint_{C_0} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0, \tag{13}$$

ty integralen byter tecken om vi följer kurvan i *motsatt* riktning. Nu följer det att

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{14}$$

Exempel: Konservativ kraft och arbete (från kompendiet sid 26-27)

En elektron rör sig längs banan $y = x^2/H$ från $(0,0)$ till $(L, L^2/H)$ under inverkan av en elektrostatisk kraft $\mathbf{F} = eE_0\hat{y}$. Beräkna det arbete som kraften utför på elektronen.

Lösning 1: Arbetet ges av integralen

$$\int_C eE_0\hat{y}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}, \tag{15}$$

där C är den kurva som elektronen följer. Vi kan nu använda koordinaten x för att parametrisera vår kurva (det är inte alls nödvändigt att kalla det u, det kan vara vilken bokstav som helst) och skriver kurvan som $\mathbf{r}(x) = (x, x^2/H)$. Då gäller att

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}x} = \left(1, \frac{2x}{H}\right). \tag{16}$$

Vi kan nu beräkna arbetet ur

$$\int_C eE_0\hat{y}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^L eE_0\hat{y}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_0^L eE_0\frac{2x}{H}\mathrm{d}x = \frac{eE_0}{H}\left[x^2\right]_0^L = \frac{eE_0L^2}{H}. \tag{17}$$

Notera: Elektrostatiska krafter är konservativa, så vi kan ersätta kurvan med två räta linjer, en C_1 som går från $(0,0)$ till $(L,0)$ och är parallell med x-axeln, och en kurva C_2 som går från $(L,0)$ till $(L, L^2/H)$ och är parallell med y-axeln. Arbetet kan nu skrivas som

$$\int_C eE_0\hat{y}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_1} eE_0\hat{y}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{C_2} eE_0\hat{y}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{18}$$

Eftersom kraften överallt är ortogonal mot kurvan C_1 följer att integralen längs med C_1 måste vara noll, så det återstår bara att beräkna

$$\int_{C_2} eE_0\hat{y}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_2} eE_0\hat{y}\cdot\hat{y}\mathrm{d}r = eE_0\int_{C_2}\mathrm{d}r. \tag{19}$$

Den sista integralen ger nu längden på kurvan C_2, vilken är L^2/H, så arbetet blir till slut

$$\frac{eE_0L^2}{H}. \tag{20}$$

Sammanfattning: linjeintegraler

- En linjeintegral definieras som en integral längs en specificerad bana. Integranden kan vara ett skalärfält eller ett vektorfält.
- En linjeintegral parametriseras ofta med hjälp av en parameter u så att kurvan C ges av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$. Linjeintegralen blir då
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \cdot (d\mathbf{r}/du)du$$
- Linjeintegralen av ett vektorfält längs en sluten kurva brukar kallas cirkulationen av vektorfältet.
- Då cirkulationen är noll för varje godtycklig sluten kurva benämns fältet konservativt.
- Om fältet är konservativt, så är linjeintegralen från en punkt A till en punkt B oberoende av vägen.

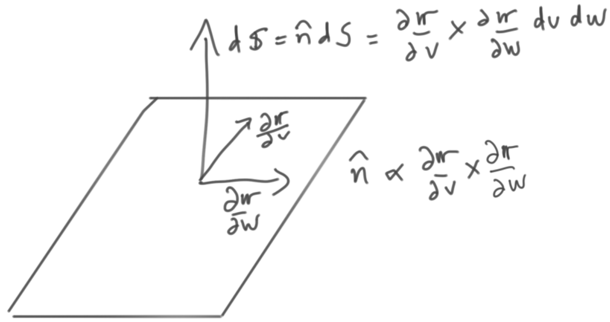
Ytintegraler:

Precis som man kan beräkna linjeintegralerna genom att parametrisera linjen längs vilken man integrerar kan man beräkna ytintegralerna genom att parametrisera ytan över vilken man integrerar. Skillnaden är att genom att ytan är två-dimensionell så behöver man två parametrar. Antag att ortsvektorerna för punkterna på ytan kan skrivas som $\mathbf{r}(v, w)$ där v och w är våra parametrar. Vi kan då bilda två tangentvektorer till ytan

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}. \tag{21}$$

Förutsatt att dessa tangentvektorer inte är parallella (annars måste vi finna en ny parametrisering) kan vi bilda en normalvektor till ytan

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}. \tag{22}$$



Analogt med hur vi tidigare uttryckte linjeintegralen med hjälp av vår parameter kan vi nu skriva ytintegralen som

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \mathrm{d}v \mathrm{d}w, \tag{23}$$

där $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{n}\mathrm{d}S = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\mathrm{d}v\mathrm{d}w$ är ytan på det parallellogram som spänns upp av de två tangentvektorerna. Normalvektorn uppfyller $|\hat{n}| = 1$.

Jämför gärna denna parametrisering med våra tidigare uttryck för ytelement i kroklinjiga koordinater. Kan vi välja ett koordinatsystem så att det sökta ytelementet ligger på u_1-ytan så blir $d\mathbf{S} = d\mathbf{S}_1 = \hat{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3$, vilket man t.ex. ser från $d\mathbf{S}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_2 du_3 = \hat{e}_1 h_2 h_3 du_2 du_3$

Exempel: Cylinderyta (kompendiet sid 30-31) Beräkna ytintegralen av fältet $\mathbf{u} = (x, z, -y)$ över cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ mellan $z = 0$ och $z = 1$ med normalen pekandes bort från z-axeln.

Integrationsytan motsvarar en ρ-yta i cylindriska koordinater. Detta ger direkt att

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\rho} h_\varphi h_z \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = \{h_z = 1, h_\varphi = \rho = 1\} = \hat{\rho}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z. \tag{24}$$

Vi kan sedan beräkna integralen som

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos\varphi, z, -\sin\varphi) \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\varphi + z\sin\varphi\right) \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + z\sin\varphi\right) \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - z\cos\varphi\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}z = \int_0^1 \pi \mathrm{d}z = \pi.
\end{aligned} \tag{25}$$

En komplikation med att beskriva arean av ett ytelement som en vektor är att en yta i allmänhet har två motsatta normalvektorer, och man måste därför ange vilken riktning som är positiv. Ytterligare en komplikation är att det finns ytor för vilka man inte kan definiera normalvektorn på ett kontinuerligt sätt över hela ytan, till exempel Möbius-bandet. Vi skall inte befatta oss med sådana ytor här, utan begränsa oss till orienterbara ytor, ytor som har en insida och en utsida.

Om ytan S är sluten så skriver man

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{26}$$

För slutna ytor definierar man den positiva riktningen som den som ges av en vektor som pekar ut från den inneslutna volymen.

Exempel: Flöde genom yta (kompendiet sid 29-30) En vätska med densiteten ρ och hastigheten $\mathbf{u}$ strömmar parallellt genom ett rör med tvärsnittsarean A. Flödet av vätska genom röret (det vill säga kg vätska som per sekund strömmar genom röret är då $\rho u A$.

Vad händer då om vätskans hastighet $\mathbf{u}$ beror på avståndet r från rörets symmetriaxel? I så fall får vi definiera en flödestäthet $\rho u(r)$ så att flödet genom ett ytelement dS blir $\rho u(r) dS$. Om vi tar dS som en ring med centrum i symmetriaxeln och med en tjocklek dr så är d$A = 2\pi r dr$ och det totala flödet genom röret blir

$$\int \rho u(r) dS = \int_0^R \rho u(r) 2\pi r dr, \tag{27}$$

där R är rörets radie.

För att nu ytterligare komplicera det hela och verkligen blanda in vektorerna så antar vi att vätskan strömmar genom en tvärsnittsarea dS, vilken inte är vinkelrät mot vätskans strömningshastighet $\mathbf{u}$. Vi antar att vinkeln mellan normalvektorn $\mathbf{n}$ till ytan dS och vätskans hastighet $\mathbf{u}$ är θ. Då blir flödet genom ytan dS

$$\rho u dS \cos\theta. \tag{28}$$

Om vi nu väljer att definiera en vektor $d\mathbf{S}$ för ett ytelement med storleken dS och riktningen $\mathbf{n}$, så ser vi att vi kan skriva flödet som

$$\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}, \tag{29}$$

där $\rho\mathbf{u}$ kan kallas för en massflödestäthet (jämför med en strömtäthet för flöde av elektrisk laddning).

Vi kan nu skriva vätskeflödet genom en godtycklig yta A som

$$\int_A \rho\mathbf{u}\cdot d\mathbf{S}, \tag{30}$$

vilket är ett typiskt exempel på en ytintegral.

Volymintegraler.

Det finns bara två möjliga sätt att volymintegrera ett fält. Med (det skalära) volymelementet $\mathrm{d}V$

$$\int_V \phi \mathrm{d}V, \quad \int_V \mathbf{F}\mathrm{d}V. \tag{31}$$

En parametrisering med (u, v, w) ger att volymselementet blir volymen av parallellepipeden med sidorna $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\mathrm{d}u$, $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\mathrm{d}v$, $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}\mathrm{d}w$ (som då måste vara linjärt oberoende). Denna volym är

$$\mathrm{d}V = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}\right)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{32}$$

Kommentar i förbigående: Det kan vara bra att veta att det så kallade "skalärtrippelprodukten", $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, kan räknas ut från determinanten:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{33}$$

Man kan inse detta genom att skriva ut $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ i determinantform, och sedan inse att om man tar skalärprodukten med $\mathbf{A}$ byter man enhetsvektorn $\hat{x}$ mot A_x, och på samma sätt för $\hat{y}$ och $\hat{z}$.

Integration med ortogonala kroklinjiga koordinater

Med ett vektorfält $\mathbf{F}$ som tecknas i det kroklinjiga koordinatsystemet $\mathbf{F} = F_1\hat{e}_1 + F_2\hat{e}_2 + F_3\hat{e}_3$ får vi t.ex.

$$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} F_1 h_1 du_1 \tag{34}$$

$$\int_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{S_1} F_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \tag{35}$$

$$\int_V \mathbf{F}dV = \int_V \mathbf{F}h_1 h_2 h_3 du_a du_2 du_3, \tag{36}$$

där C_1 är en kurva längs u_1-riktningen och S_1 är en u_1-yta.