Tentamen – Vektorfält och klassisk fysik (FFM234)

Tid och plats:	Lördagen den 23 oktober 2021 klockan 08.30-12:30.
Hjälpmedel:	Physics Handbook, Beta Mathematics Handbook, typgodkänd kalkylator, Olle Branders formelsamling.
Examinator:	Tünde Fülöp (031–772 3180).
Jourhavande lärare:	Tünde Fülöp (031–772 3180).

Tentamen består av sex uppgifter som kan ge maximalt 60 poäng totalt. För att bli godkänd med betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 krävs 36 poäng och för betyg 5 krävs 48 poäng.

Lycka till!

---

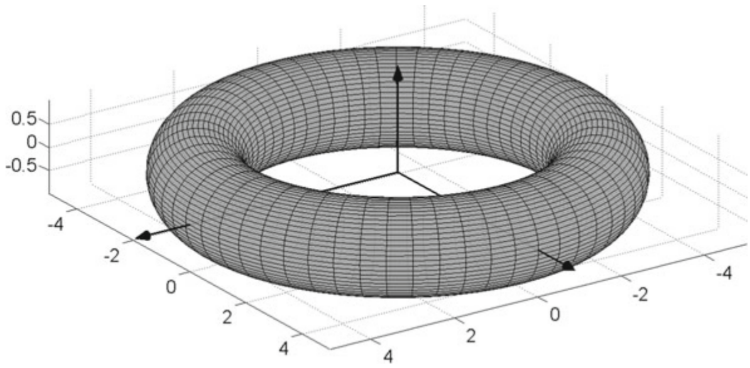
1. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater och med sfäriska basvektorer genom
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{a\cos\theta}{r^3}\hat{e}_r + \frac{b\sin\theta}{r^3}\hat{e}_\theta$$
där a och b är konstanter.
   (a) Bestäm förhållandet mellan konstanterna a och b som gör att vektorfältet blir virvelfritt (konservativt). *(2 poäng)*
   (b) Bestäm sedan en skalär potential till detta vektorfält! *(6 poäng)*
   (c) Vad är den fysikaliska tolkningen av vektorfältet? *(2 poäng)*

2. Två ledande plattor, båda parallella med xz-planet, befinner sig vid $y = 0$ och $y = d$. Plattan vid $y = 0$ har potentialen 0 och den vid $y = d$ har potentialen V_0. Området mellan plattorna är fyllt med laddningar, med volymladdningstätheten $\rho = -\rho_0 y/d$. Antag att kanteffekter kan försummas (alltså att plattorna kan antas ha oändlig utbredning i x och z). Bestäm potentialen och elektriska fältet mellan plattorna! Tips: lös Poissons ekvation med lämpliga randvillkor. *(10 poäng)*

3. Genom sambanden
$$x = (R + \xi\cos u)\sin w \tag{1}$$
$$y = (R + \xi\cos u)\cos w \tag{2}$$
$$z = \xi\sin u \tag{3}$$
där $u, w \in [0, 2\pi]$ och $\xi \in [0, R)$ definieras ett toroidalt koordinatsystem med den konstanta storradien R. En toroidal yta S med storradien $R = 4a$ och lillradien $a = 1$ m (se figur) kan beskrivas med koordinaterna $x = a(4 + \cos u)\sin w$, $y = a(4 + \cos u)\cos w$ och $z = a\sin u$.

Bestäm normalytintegralen $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ på ytan S, om vektorfältet är givet av

$$\mathbf{F} = -x\hat{x} + y\hat{y} + 6z\hat{z}.$$



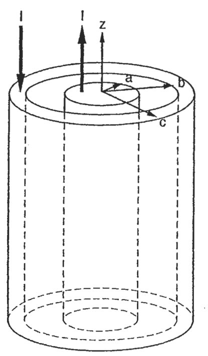
(10 poäng)

4. På en cirkelskiva med radien a, som ligger i xy-planet med centrum i origo, finns en ytkälla med ytkälltätheten

$$\sigma(\rho) = \frac{\rho^2}{a^2}\sigma_0$$

där σ_0 är konstant. Bestäm potentialen från ytkällan på z-axeln!
(10 poäng)

5. En oändligt lång koaxialkabels innerledare har radien a och dess ytterledare har innerradien b och ytterradien c (se figur). Strömmen I i innerledaren är i $\hat{z}$-riktningen och i ytterledaren flyter samma ström i motsatt riktning. Området mellan ledarna och utanför kabeln är vakuum.



Bestäm magnetfältet mellan ledarna $a < \rho < b$ och utanför ledaren $\rho > c$! (Tips: använd integralformen av Amperes lag (stationärtillstånd).)
(10 poäng)

6. Visa identiteten

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}$$

med hjälp av indexnotation!
(10 poäng)