FFM234, Klassisk fysik och vektorfält - Föreläsningsanteckningar

István Pusztai, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

Föreläsning 5, 2021

Mål Målet är att lära sig Gauss och Stokes satser och använda dem i konkreta beräkningar och för teoretiska överlägganden; och att förstå och kunna härleda kontinuitetsekvationen.

4. Integralsatser

Minnesregel för strukturen på alla integralsatser

$$\int_{V_D} (\text{derivata av fält}) = \int_{(\partial V)_{D-1}} (\text{fält}), \tag{1}$$

där V_D är ett D-dimensionellt område, och $(\partial V)_{D-1}$ är dess rand.

Enkelt exempel: integration av funktion av en variabel:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a). \tag{2}$$

Randen av den endimensionella volymen $[a, b]$ är de två punkterna a och b, så tolkningen av högerledet i det schematiska uttrycket ovan blir en summa över dessa två punkter.

Gauss sats

Man kan alltid beräkna integraler enligt metoderna på förra föreläsningen, men i vissa fall kan man tillämpa integralsatser som förenklar beräkningarna.

Ett viktigt exempel på en sådan sats är Gauss sats.

Sats:

Antag att $\vec{F}$ är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält definierat i en volym V. $\partial V = S$ är den slutna ytan som bildar randen till V och $\mathrm{d}\vec{S} = \hat{n}\mathrm{d}S$ där $\hat{n}$ är den utåtriktade enhetsnormalen. Då gäller att

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{3}$$

En fysikalisk tolkning av Gauss sats är att högerledet representerar flödet ut genom en yta S och att vänsterledet representerar närvaror av källor till detta flöde innanför ytan. I detta sammanhang kan integranden $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ kallas för en källtäthet. Generellt kallar vi kvantiteten $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ för *divergensen* av $\vec{F}$, och ges i ett kartesiskt koordinatsystem av

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{4}$$

Om man tänker sig att $\vec{F}$ är hastigheten för en vätska, så kan man se $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\mathrm{d}V$ som ett mått på hur mycket vätska som strömmar ut från den infinitesimala volymen dV som omsluter punkten. Om divergensen (källan för hastighetsfältet) är negativ då flödar vätskan in i volymen och då det representerar sänkor.

Lägg märke till att volymen V i Gauss sats måste vara sammanhängande, och S kan mycket väl bestå av ett ändligt antal ytsegment, så länge som de bara tillsammans bildar en sluten yta (t.ex. en kub med sex platta ytor). Vidare kommer vi tills vidare att begränsa oss till hyfsat snälla fält. Mer om detta längre fram i kursen.

En skiss för beviset

- Dela upp hela volymen i konvexa delar, där randen för en delvolym består av två ytor som kan beskrivas som funktioner av två av de kartesiska koordinater, t.ex. dessa ytor är $z = f_1(x, y)$ och $z = f_2(x, y)$.

- Betrakta en term i högerleden av
$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\mathrm{d}V = \int (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{5}$$
T.ex. ta den sista termen (samma argument görs för de andra termer)
$$\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \mathrm{d}z\partial_z F_z = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y[F_z(x,y,f_2(x,y)) - F_z(x,y,f_1(x,y))]. \tag{6}$$

- Högerledet av Gauss sats har följande del som innehåller F_z
$$\int_{\partial V} F_z \mathrm{d}S_z. \tag{7}$$
Vi har sett att om en yta parametriseras av u och v över någon domän, så ges $d\vec{S} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}dudv$. Låt oss betrakta den övre randen, f_2. Här kan vi använda x och y som parametrar, och med $\vec{r} = \{x, y, f_2(x,y)\}$ finner vi att $\vec{S} = \{-\partial_x f_2, -\partial_y f_2, 1\}$, alltså
$$\int_{\partial V(\text{övre})} F_z \mathrm{d}S_z = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y F_z(x,y,f_2(x,y)). \tag{8}$$
På den nedre delen av randen måste vi ta hänsyn till att normalen är nedåtriktad, som leder till ett minustecken:
$$\int_{\partial V(\text{nedre})} F_z \mathrm{d}S_z = -\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y F_z(x,y,f_1(x,y)), \tag{9}$$
så vi finner att hela ytintegralen, bidragen från den övre och nedre delen sammansatt, som innehåller F_z, överensstämmer med (6).

- Samma argument görs för delarna som innehåller F_x och F_y.

Exempel: Gauss sats (tentamen 2011-08-25 variant)

Beräkna normalytintegralen
$$\int_S \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \tag{10}$$
där $\vec{F} = -F_0 z\hat{z}/a$ och S är ytan $x^2 + y^2 = (z-4a)^2$ och $0 \le z \le 4a$ med normalen snett uppåt (alltså positiv z-komponent).

Lösning:

- Bestäm utseendet på ytan S och rita en tydlig figur.
- Undersök fältet $\vec{F}$. Singulariteter (senare i kursen)? Beräkna $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.
- Slut ytan S. Undvik singulariteter inuti den inneslutna volymen.
- Teckna Gauss sats och beräkna integralen.
- Har normalen rätt riktning?

Ytan är en kon med spetsen i $z = 4a$ och en öppning nedåt. Den är alltså inte sluten! Fältet är utan singulariteter och divergensen är $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -F_0/a$.

Vi kan sluta ytan genom att lägga till en bottenplatta, $S_{z=0}$, i xy-planet. Detta blir en cirkelskiva med $z = 0$ och radie $4a$. Normalvektorn blir $-\hat{z}$ för att peka ut från den inneslutna volymen. På den slutna ytan $S + S_{z=0}$ kan vi sedan tillämpa Gauss sats

$$\oint_{S+S_{z=0}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \mathrm{d}V = -\frac{F_0}{a} \int_V \mathrm{d}V = -\frac{F_0}{a} \frac{1}{3} \pi (4a)^2 4a. \quad (11)$$

Vi kan nu separat beräkna

$$\int_{S_{z=0}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0, \quad (12)$$

eftersom $\vec{F} = 0$ då $z = 0$. Slutligen har vi alltså

$$\int_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{64\pi}{3} F_0 a^2. \quad (13)$$

Kontinuitetsekvationen

Vi tänker oss ett fall med en strömmande fluid där vi antar att den totala massan är bevarad.

- Densitetsfält $\rho(\vec{r}, t)$ (massa/volym)
- Hastighetsfält $\vec{v}(\vec{r}, t)$ (längd/tid)
- Massflödestäthet $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$ (massa/(area · tid))

Definiera en yta $\mathrm{d}\vec{S}$ med normalriktning $\hat{n}$. Då blir $\vec{j} \cdot \hat{n} =$ [massa/(tidsenhet $\cdot$ areaenhet)] genom ytan.

Inne i en godtycklig volym V finns massan $m_V = \int_V \rho \mathrm{d}V$. Vi kan räkna ut $\mathrm{d}_t m_V$ på två sätt:

- Från integralen ovan:
$$\frac{\mathrm{d}m_V}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V.$$

- Hur mycket massa flödar in i volymen per tidsenhet

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}m_V}{\mathrm{d}t} &= -\{\text{det som flödar ut}\} = -\int_{\partial V} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \{\text{Gauss sats}\} = -\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{14}$$

Sammantaget så innebär det att $\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) \mathrm{d}V = 0$ för alla volymer V. Därför får vi kontinuitetsekvationen (som uttrycker en storhets bevarande)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \tag{15}$$

Om man byter massa till laddning i resonemanget ovan får man samma ekvation som beskriver laddningens bevarande (ρ är då laddningstäthet och j är strömtäthet). Här får man notera att det kan ibland vara vilseledande att kalla $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ en källtäthet för $\vec{j}$, eftersom det inte finns någon laddningskälla som kan skapa laddningar i en viss volym ur tomma intet, så att ström flyter ut från volymen. Istället minskar laddningstätheten i volymen med tid om en ström flödar ut.

Kontinuitetsekvationer dyker upp i fysik i olika sammanhang, även när storheten som beskrivs med ekvationen är inte bevarad, till skillnad från massa eller laddning. T.ex. värmetransporten kan beskrivas med följande kontinuitetsekvation

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = S_q, \tag{16}$$

där Q är den termiska energitätheten $\vec{q}$ är värmeflödet, och S_q är den volymetriska värmekällan (någonting som också kunde kallas *källtäthet* i det här sammahanget).

Stokes sats

Först given på skrivningen för Smiths pris i februari 1854 i Cambridge. (Bästa student J. C. Maxwell).

Sats:

Den slutna kurvan C är randen till ytan S. Då gäller för ett kontinuerligt deriverbart vektorfält $\vec{F}$ på S att

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \tag{17}$$

där $\partial S = C$ är randen till S och $\mathrm{d}\vec{S} = \hat{n}\mathrm{d}S$. Normalriktningen ($\hat{n}$) och randens riktning ($C$) är orienterade enligt högerhandsregeln. Notera att $\mathrm{d}\vec{r}$ inte är ortvektorn, utan en infinitesimal riktad linjeelement längs kurvan.

- Operatorn *rotation*, $\vec{\nabla}\times$, innehåller information om hur mycket vektorfältet roterar.

- Rotation har viktiga tillämpningar inom strömningsmekaniken; rotationen av en hastighetsfält kallas för vorticitet, och mäter vätskors och gasers tendens att bilda virvlar.

- Tänk om hastigtehsfältet $\vec{v} = y\hat{x}$, dess rotation är $\partial_z y\hat{y} - \partial_y y\hat{z} = -\hat{z}$. Trots att fältet inte roterar i geometrisk mening, har det en nollskild rotation. Tänk att man lägger en tunn ring på ytan (som flyter) av en vätska som har detta hastighetsfält. Ringen börjar snurra med rotationsvektorn riktad som $-\hat{z}$. Snurrandet beror på skjuvspänningen på ringens yta, dess verkan är (i början) proportionell mot $\oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$ runt ringen.

- Rotation har också en viktig roll i elektromagnetismen, där till exempel ett magnetostatiskt fält $\vec{B}$ uppfyller ekvationen $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j}$, och rotation också dyker upp i relation till vektorpotentialen, som ska diskuteras senare i kursen.

En viktig observation är att man kan välja olika ytor S som alla har samma rand. Integralen i vänsterledet är alltså oberoende av vilken yta man väljer. Tag två ytor S_1 och S_2 med samma rand och samma orientering. Ifall integralen $\oint(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ över S_1 och S_2 gav olika värde; då skulle följande uttryck vara nollskilt:

$$\left(\int_{S_1} - \int_{S_2}\right)(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{18}$$

Genom att sätta samman ytorna S_1 och S_2, och vända riktning på normalen till S_2 får vi en sluten yta S. Uttrycket (18) är då lika med integralen $\oint_S(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$. Eftersom ytan S är sluten kan vi använda Gauss sats, som säger att detta skall vara lika med $\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})\mathrm{d}V$ där $\partial V = S$. Integranden här är identiskt noll genom följande identitet

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \tag{19}$$

Att vänsterledet i Stokes sats är oberoende av vilken yta man väljer kan alltså, via Gauss sats, ses som en konsekvens av vektoranalysidentiteten ovan.

Exempel (Stokes sats): Tentamen 2003-08-18

Beräkna integralen

$$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \tag{20}$$

där kurvan C ges av skärningen mellan ytorna

$$r^2 \sin^2\theta \left(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 4a^2, \tag{21}$$

och

$$z = 0. \tag{22}$$

Kurvan omsluts i moturs riktning sett ovanifrån (d.v.s. högerorienterad relativt z-axeln). Vidare ges fältet $\vec{F}$ av

$$\vec{F} = F_0 \left[\left(\frac{a}{r} + \frac{r}{2a}\sin^2\theta \sin 2\varphi\right)\hat{r} + \left(\frac{a}{r}\cot\theta + \frac{r}{4a}\sin 2\theta \sin 2\varphi\right)\hat{e}_\theta - \frac{r}{a}\sin\theta \sin^2\varphi \hat{e}_\varphi\right]. \tag{23}$$

F_0 och a är konstanter.

Lösning: Strategi:

- Bestäm kurvan C och rita en tydlig figur

- Undersök fältet $\vec{F}$, singulariteter? Räkna ut $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, singulariteter?
- Slut kurvan C och bestäm ytan S (ofta flera möjligheter). Undvik singulariteter på ytan.
- Teckna Stokes sats och beräkna de integraler som uppträder
- Kontrollera en gång till att delkurvorna och ytan S har konsistenta riktningar.

Vi följer lösningsstrategin

- Bestäm kurvan C och rita en tydlig figur

Formen på denna kurva tolkas kanske enklast i kartesiska koordinater

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{24}$$

Vi börjar alltså med att skriva om

$$r^2 \sin^2\theta \left(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 4a^2 \tag{25}$$

i kartesiska koordinater

$$4x^2 + y^2 = 4a^2, \tag{26}$$

vilket är mantelytan till en elliptisk cylinder med halvaxlarna a och $2a$. Skärningen med $z = 0$ planet blir då en ellips i xy-planet med mittpunkt i origo och med halvaxlarna a och $2a$.

- Undersök fältet $\vec{F}$, singulariteter? Räkna ut $\vec{\nabla} \times \vec{F}$, singulariteter?

Vi skriver om fältet genom att gruppera termerna enligt gemensam förfaktor. Sedan noterar vi att de två termerna blir väldigt enkla om de uttrycks i varsitt koordinatsystem

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= F_0 \left[\left(\frac{a}{r} + \frac{r}{2a} \sin^2\theta \sin 2\varphi \right) \hat{e}_r + \left(\frac{a}{r} \cot\theta + \frac{r}{4a} \sin 2\theta \sin 2\varphi \right) \hat{e}_\theta - \frac{r}{a} \sin\theta \sin^2\varphi \hat{e}_\varphi \right] \\
&= F_0 \left[\frac{a}{r \sin\theta} (\sin\theta \hat{e}_r + \cos\theta \hat{e}_\theta) + \frac{r}{a} \sin\theta \sin\varphi \left(\sin\theta \cos\varphi \hat{e}_r + \cos\theta \cos\varphi \hat{e}_\theta - \sin\varphi \hat{e}_\varphi \right) \right] \\
&= F_0 \left(\frac{a}{\rho} \hat{e}_\rho + \frac{y}{a} \hat{x} \right). \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Där vi alltså har använt att projektionen på xy-planet är $\rho = r\sin\theta$ och att $\hat{e}_\rho = \sin\theta\hat{e}_r + \cos\theta\hat{e}_\theta$ och $\hat{x} = \cos\varphi\hat{e}_\rho - \sin\varphi\hat{e}_\varphi$.

Notera att vi har skrivit $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ där vi uttryckt de två termerna i olika koordinatsystem. Den första termen är uttryckt i ett cylindriskt koordinatsystem och den andra i ett kartesiskt.

Vi konstaterar nu att $\vec{F}$ är singulär för $\rho = 0$ (genom $\vec{F}_1$-termen).

Sedan beräknar vi rotationen. Det är inget problem att vi har skrivit vektorn som summan av två termer eftersom $\vec{\nabla} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{\nabla} \times \vec{F}_1 + \vec{\nabla} \times \vec{F}_2$. Kom bara ihåg att använda rätt uttryck för rotationsoperatorn för de olika koordinatsystemen.

$$
\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (F_\rho \hat{e}_\rho + F_x \hat{x}) = 0 + \vec{\nabla} \times F_x \hat{x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(F_0 \frac{y}{a} \right) \hat{z} = -\frac{F_0}{a} \hat{z}. \qquad (28)
$$

Vi noterar att denna ej beror på ρ och ej är singulär. Faktum är att det var ganska uppenbart att den första termen skulle ha noll rotation (skissa gärna fältlinjerna).

- Slut kurvan C och bestäm ytan S (ofta flera möjligheter). Undvik singulariteter på ytan.

Kurvan C omsluter redan en yta, men singulariteten gör det svårt att applicera Stokes sats. Notera att det faktum att singulariteten sitter längs hela z-axeln (en sk linjesingularitet) gör det omöjligt att konstruera en yta utan singularitet med bara C som rand.

Istället inför vi en inre rand för att kunna använda Stokes sats. Omge z-axeln med en liten cirkel, C_ϵ med radien ϵ. Lägg märke till att medan vi följer C i moturs riktning, så måste vi följa C_ϵ i medurs riktning.

Kommentar 1: Högerhandsregeln. Stå på ytan med tummen upp i normalens riktning och titta på randen. Fingrarna ger riktningen.

- Teckna Stokes sats och beräkna de integraler som uppträder

Stokes sats ger oss att

$$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \oint_{C_\epsilon} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{S_\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \tag{29}$$

där S_ϵ är en yta som har C och C_ϵ till rand. Denna yta har normalvektorn $\hat{z}$. I gränsen $\epsilon \to 0$ kommer $S_\epsilon \to S$.

Ytintegralen, i gränsen $\epsilon \to 0$, blir då

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{F_0}{a} \int_S \mathrm{d}S = -\frac{F_0}{a} \pi(a)(2a) = -2\pi F_0 a. \tag{30}$$

För att räkna ut integralen över C_ϵ parametriserar vi kurvan med vinkeln φ. Eftersom vi skall gå medurs längs en cirkel med radien ϵ, och $\hat{e}_\phi$ pekar moturs, inser vi att $\mathrm{d}\vec{r} = -\epsilon \hat{e}_\varphi \mathrm{d}\varphi$ så att integralen blir

$$\begin{aligned} \int_{C_\epsilon} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^{2\pi} F_0 \left(\frac{a}{\rho} \hat{e}_\rho + \frac{y}{a} \hat{x} \right) \cdot (-\hat{e}_\varphi)\, \epsilon \mathrm{d}\varphi \\ &= F_0 \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon \sin\varphi}{a} \sin\varphi\, \epsilon \mathrm{d}\varphi \propto \epsilon^2 \to 0 \quad \text{då} \quad \epsilon \to 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Alltså följer det att

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C + C_\epsilon} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -2\pi F_0 a. \tag{32}$$

- Kontrollera en gång till att delkurvorna och ytan S har konsistenta riktningar. Det är även en god idé att kontrollera enheten, som skall vara enheten på F_0 gånger längd (eftersom vi utfört en kurvintegral).