FFM234, Vektorfält och klassisk fysik - Föreläsningsanteckningar

Tünde Fülöp, Institutionen för fysik, Chalmers, Göteborg, Sverige

10 september 2021

Mål Målet med föreläsningen att härleda koordinatoberoende uttryck för divergens och rotation med hjälp av Gauss och Stokes satser på infinitesimala volymer och ytor.

Vi ska också fördjupa kunskaper inom integraler och integralsatser genom ytterligare exempel.

Repetition

Gauss sats

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V. \tag{1}$$

En fysikalisk tolkning av Gauss sats är att vänsterledet representerar flödet ut genom en yta S och att högerledet representerar närvaron av källor till detta flöde i den inneslutna volymen.

Exempel: Gauss lag En av Maxwells ekvationer är

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_c/\epsilon, \tag{2}$$

där $\mathbf{E}$ är den elektriska fältstyrkan, ρ_c är laddningstätheten (så att den totala laddningen är $Q = \int_V \rho_c dV$) och ϵ är dielektriska konstanten.

Man kan använda Gauss sats för att skriva upp integralformen av den här ekvationen:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

så att vi får från ekvation (2)

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho_c dV = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Flödet av det elektriska fältet genom en sluten yta är proportionell mot den totala inneslutna laddningen. Integralformen av ekvation (2) är alltså

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon} \tag{3}$$

och benämns också Gauss lag (till skillnad från Gauss sats).

Stokes sats relaterar linjeintegralen av ett vektorfält längs en sluten kurva till ytintegralen av fältets rotation:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{4}$$

Exempel: Ampères lag Den totala elektriska strömmen I som flyter genom en yta S är kopplad till strömtätheten $\mathbf{j}$ via formeln $I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$. Strömtätheten fås från en av Maxwells ekvationer som, i det stationära fallet, säger att rotationen av magnetfältet är proportionell mot $\mathbf{j}$:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Här har vi försummat förskjutningsströmmen (stationärtillstånd). Ekvationen ovan går under benämningen: differentialformen av Ampères lag. I många praktiska tillämpningar är emellertid den elektriska strömmen I som flyter genom en ledare känd och man vill beräkna det magnetiska fältet (t.ex. om man vill beräkna magnetfältet inuti en strömgenomfluten spole). Man vill helst undvika omvägen via strömtätheten.

Man kan använda Stokes sats för att härleda integralformen av Ampères lag.

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I,$$

där I är totala strömmen som genomflyter ytan S med randkurva L.

Divergens i kroklinjiga koordinater.

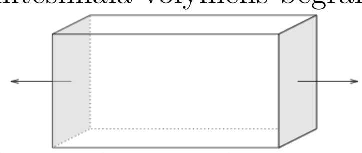
På den tredje föreläsningen härledde vi ett uttryck för gradienten av ett skalärt fält i allmänna kroklinjiga koordinater. Motsvarande beräkning för divergens och rotation är mer komlicerad. Istället tar vi en genväg via Gauss och Stokes satser.

Vi konstruerar en koordinatoberoende definition av divergensen i punkten P $(u_1 u_2 u_3)$ med hjälp av ytintegralen och Gauss sats.

Betrakta en volym δV runt P, som är så liten att $\nabla \cdot \mathbf{F}$ kan betraktas som konstant, och använd Gauss sats

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V \quad \Rightarrow \\ &= \lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \oint_{\partial(\delta V)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}, \end{aligned} \tag{5}$$

- $\partial(\delta V)$ är den infinitesimala volymens begränsningsyta.



- Dessa begränsningsytor väljs som koordinatytor för u_1, u_2, u_3
- Vi skriver $\mathbf{F} = F_1 \hat{e}_1 + F_2 \hat{e}_2 + F_3 \hat{e}_3$.

Betrakta först integralen över u_1-ytorna. Storleken på ytelementet blir $h_2 h_3 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3$ och riktningen blir $+\hat{e}_1$ och $-\hat{e}_1$ på de två sidorna. (Kom ihåg att skalfaktorerna $h_i = |\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}|$ är generellt beroende av koordinaterna.)

Produkten $\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ kommer därmed ha storleken $(F_1 h_2 h_3) \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3$ och vi får inte glömma att storheterna inom parentesen kan ha ett u_1-beroende

$$\begin{aligned} \int_{u_1-\text{ytorna}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \Big((F_1 h_2 h_3)_{u_1 + \mathrm{d}u_1} - (F_1 h_2 h_3)_{u_1} \Big) \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 \\ &= \frac{\partial (F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3. \end{aligned} \tag{6}$$

där i sista steget har vi bara använt definitionen av partiell derivata.

Eftersom volymen $\delta V = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3$ blir det totalt

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \lim_{\delta V \to 0} \frac{\mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3}{h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(F_3 h_1 h_2) \right) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} F_i \right]. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Exempel: sfäriska koordinater

- Skalfaktorer $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r \sin\theta$.
- Ett vektorfält $\mathbf{F} = F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta + F_\varphi \hat{e}_\varphi$.

Divergensen blir

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\theta F_r \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin\theta F_\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r F_\varphi \right) \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 F_r \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta F_\theta \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Exempel: divergensen av $\hat{e}_\phi$ i ett sfäriskt koordinatsystem Beräkna divergensen av $\mathbf{A} = \hat{e}_\varphi$. Komponenterna är $A_r = 0$, $A_\theta = 0$ och $A_\phi = 1$. Vi använder ovanstående och får

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 A_r \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta A_\theta \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

Att fältet $\hat{e}_\phi$ verkligen är divergensfritt utgör inte en överraskning om det uppritas. Vi ser då att det cirkulerar runt z-axeln, men det divergerar inte.

Studentfråga: kan man integrera basvektorer? Svaret är ja. Som exempel kan vi beräkna $\int_0^{2\pi} \hat{e}_\phi d\phi$ i ett cylindriskt koordinatsystem.

$$\int_0^{2\pi} \hat{e}_\phi d\phi = \int_0^{2\pi} (-\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}) d\phi = 0$$

Eller vad blir $\int_0^2 \hat{e}_\rho dz$=? Basvektorn $\hat{e}_\rho$ beror av vinkeln ϕ. Integrationsvariabeln här är z, som $\hat{e}_\rho$ inte är beroende av. Här kan man alltså flytta $\hat{e}_\rho$ utanför integrationen

$$\int_0^2 \hat{e}_\rho dz = 2\hat{e}_\rho$$

Rotation i kroklinjiga koordinater.

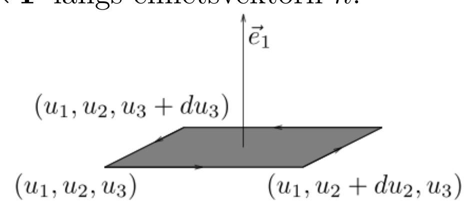
Med hjälp av en kurvintegral kan vi konstruera en koordinatoberoende definition av rotationen.

Tag en liten (infinitesimal) yta δS med normal $\hat{n}$ (när vi säger att ytan skall vara liten menar vi att normalriktningen är konstant över ytan).

För ett infinitesimalt litet ytelement $d\mathbf{S} = \hat{n} dS$ har vi enligt Stokes sats

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \lim_{\delta S \to 0} \frac{1}{\delta S} \int_{\delta S} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \quad \Rightarrow \\ &= \lim_{\delta S \to 0} \frac{1}{\delta S} \oint_{\partial(\delta S)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{9}$$

där δS är ett litet ytelement med normalen $\hat{n}$. Uttrycket ovan alltså ger komponenten av $\nabla \times \mathbf{F}$ längs enhetsvektorn $\hat{n}$.



För att få fram alla tre komponenter av $\nabla \times \mathbf{F}$ behöver vi alltså göra integraler över tre små ytor med normalvektorer $\hat{e}_i$.

Börja med u_1-komponenten av $\nabla \times \mathbf{F}$ genom att låta δS vara en u_1-yta. På liknande sätt som när vi härledde divergensen från Gauss sats är det förstås praktiskt att låta randen $\partial(\delta S)$ till δS bestå av koordinatlinjer för u_2 och u_3.

Vi börjar med att beräkna kurvintegralen längs de två sidor som är u_3-linjer, dvs. den främre och bakre i figuren. På dessa är $d\mathbf{r} = \hat{e}_2 h_2 du_2$. Den bakre linjen går i negativ u_2-riktning och kommer därför med minustecken.

Vi får bidraget till kurvintegralen

$$(h_2F_2)(u_1, u_2, u_3)du_2 - (h_2F_2)(u_1, u_2, u_3 + du_3)du_2 = -\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2F_2)du_2du_3.$$

De andra två linjerna (till vänster och höger) ger på samma sätt

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3F_3)du_2du_3.$$

Vi lägger ihop dessa bidrag, och dividerar med $\delta S = h_2h_3du_2du_3$, vilket ger

$$\hat{e}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \frac{1}{h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3F_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2F_2)].$$

Upprepa detta för u_2 och u_3 komponenterna. Slutresultatet blir

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} = \hat{e}_1 \frac{1}{h_2 h_3} &\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 F_2) \right] \\
+ \hat{e}_2 \frac{1}{h_3 h_1} &\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 F_3) \right] \\
+ \hat{e}_3 \frac{1}{h_1 h_2} &\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 F_1) \right] \\
= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} &\begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

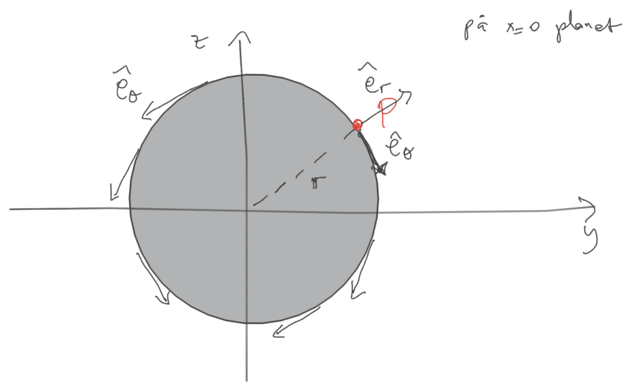
Exempel: rotation i sfäriska koordinater

$$
\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r\sin\theta \hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi \end{vmatrix} \qquad (11)
$$

Exempel: rotationen av $\hat{e}_\theta$ i ett sfäriskt koordinatsystem Komponenterna av $\mathbf{A} = \hat{e}_\theta$ i ett sfäriskt koordinatsystem blir $A_r = 0, A_\theta = 1, A_\phi = 0$. Vi får då

$$
\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r\sin\theta \hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \hat{e}_\phi \frac{\partial r}{\partial r} = \frac{\hat{e}_\phi}{r}
$$

Vektorfältet $\mathbf{A} = \hat{e}_\theta$ roterar alltså, med rotationsaxel $\hat{e}_\phi$.



Exempel: en term från vorticitetsekvationen (Navier-Stokes) Navier-Stokes ekvationer beskriver hur flöden av vätskor och gaser beter sig. Det är icke-linjära partiella differentialekvationer, som härleds från rörelsemängd- och mass-konservering för vätskor och används för att modellera väderfenomen, vatten- och luftflöden (till och med i videospel). De kan också generaliseras till att även beskriva rörelsen för vätskeelement i elektriskt laddade gaser, plasmor. De kan då användas exempelvis för att beskriva solens inre och för att förstå hur fusionskraftverk ska kunna konstrueras.

Virvlar är en sorts strömningsfenomen som är viktiga i många olika flöden. Om man introducerar vorticiteten $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ kan man skriva om Navier-Stokes ekvation till den sk vorticitetsekvationen som ger ett mått på hur mycket virvlar det finns.

Navier-Stokes ekv kan ni läsa om (ifall intresse finns) i kap 14, men det är överkurs. Men det som inte är överkurs är att kunna räkna på derivator och kryssprodukter i olika koordinatsystem.

Vi tar ett exempel från vorticitetsekvationen, som har en spännade ickelineär term som vi kan träna på:

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})]$$

där $\mathbf{v}$ är vätskeflödets hastighet. För en vätska som flödar genom ett cylindriskt rör i z-riktningen $\mathbf{v} = \hat{e}_z v(\rho)$.

Vi kan beräkna detta steg för steg

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho\hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & v(\rho) \end{vmatrix} = -\hat{e}_\phi \frac{\partial v}{\partial \rho} \tag{12}$$

$$\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & v \\ 0 & -\partial v/\partial\rho & 0 \end{vmatrix} = \hat{e}_\rho v(\rho) \frac{\partial v}{\partial \rho} \tag{13}$$

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})] = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho\hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ v\partial v/\partial\rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

Laplaceoperatorn i kroklinjiga koordinater.

Slutligen kan kan man använda uttrycken för gradient och divergens för att få Laplaceoperatorn på en skalär i kroklinjiga koordinater. Kom ihåg att gradienten är:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\hat{e}_3. \tag{15}$$

då blir Laplaceoperatorn:

$$\Delta\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\right). \tag{16}$$

Hur blir Laplaceoperatorn på ett fält? Vi väntar till kapitel 5 (nästa vecka) för att härleda det.

Exempel: Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r^2\sin\theta}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{r^2\sin\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\right]\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \end{aligned}\tag{17}$$

Analoga satser till Gauss och Stokes satser

Från Gauss och Stokes satser kan man härleda en rad varianter som brukar kallas analoga satser. Några av dessa finns i övningsuppgifterna 4.5.19 och 4.5.22. Sättet man härleder dessa är att i integralsatserna låta vektorfältet vara $\mathbf{F} = \mathbf{a}f$ eller $\mathbf{F} = \mathbf{a}\times\mathbf{v}$ där $\mathbf{a}$ är en konstant vektor.

Exempel: första satsen i uppgift 4.5.19

$$\int_V \nabla f dV = \int_{\delta V} f d\mathbf{S} \tag{18}$$

Vi vill göra en omformning så att Gauss sats kan användas. En skalärprodukt får vi på ett enkelt sätt genom att multiplicera med en kartesisk basvektor, exempelvis $\hat{x}$. Eftersom $\hat{x}$ är en konstant kan vi flytta in den i integralen så att en flödesintegral över ett vektorfält uppstår.

$$\hat{x}\cdot\int_{\delta V} f d\mathbf{S} = \int_{\delta V} f\hat{x}\cdot d\mathbf{S}$$

Använd nu Gauss sats:

$$\int_{\delta V} f\hat{x}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot(f\hat{x})dV$$

och

$$\nabla \cdot (f\hat{x}) = (\nabla f) \cdot x + f \nabla \cdot \hat{x}$$

för att få

$$\hat{x} \cdot \int_{\delta V} f d\mathbf{S} = \int_V (\nabla f) \cdot x dV = \hat{x} \cdot \int_V \nabla f dV$$

där vi har använt att $\nabla \cdot \hat{x} = 0$. Nu har vi visat satsen för x-komponenten. Eftersom motsvarande resultat för de andra komponenterna fås om vi stället hade multiplicerat med $\hat{y}$ och $\hat{z}$ kan vi dra slutsatsen att ekvation 18 är sant.

Exempel 2.4.3

Sambandet mellan ko- och kontravarianta basvektorer är

$$\nabla u_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} = \delta_{ij}$$

där δ_{ij} är Kroneckers delta. Rent formellt kan man skriva att

$$u_i = u_i(\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3))$$

dvs u_i är en sammansatt funktion av alla tre variablerna u_1, u_2, u_3. Men detta formella samband är samma som att säga $u_i = u_i$. Deriverar vi den sammansatta funktionen med avseende på u_j fås alltså 1 om $i = j$ och 0 annars, dvs δ_{ij}.

Alltså fås med kedjeregeln för derivering av en sammansatt funktion att

$$\delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial u_j}\left[u_i(\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3))\right] = \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_i} + \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_i} + \frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_i}$$

Men högerledet är skalärprodukten mellan en ko- och en kontravariant basvektor, varför vi härmed visat sambandet som vi önskade.

Samma härledning, men lite mer detaljerat: Låt oss ta två koordinatsystem: (u_1, u_2, u_3) och (v_1, v_2, v_3), som inte behöver ha ortogonala basvektorer. Vi kan transformera från det ena till det andra

$$\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3)$$

och inverstransformera

$$\mathbf{r}^{-1}(v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3)$$

Vi har då

$$\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)) = (u_1, u_2, u_3)$$

Det betyder att

$$\frac{d(\mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{r})}{d\mathbf{u}} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

där I är identitetsmatrisen ($I_{ij} = \delta_{ij}$) och notationen $(f \circ g)(\mathbf{u}) = f(g(\mathbf{u}))$ har använts för en sammansatt funktion.

Om man tar ut i, j-komponenten av ovanstående matris har vi

$$\left[\frac{d(\mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{r})}{d\mathbf{u}}\right]_{ij} = \frac{\partial}{\partial u_j}\left[u_i(\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3))\right]$$

så

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left[u_i(\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3))\right] = \delta_{ij}$$

Om vi däremot utför derivatan med kedjeregeln

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_j}\left[u_i(\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3))\right] &= \frac{\partial u_i}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial u_i} + \frac{\partial u_i}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_i} + \frac{\partial u_i}{\partial v_3}\frac{\partial v_3}{\partial u_i} \\ &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial v_1}, \frac{\partial u_i}{\partial v_2}, \frac{\partial u_i}{\partial v_3}\right) \cdot \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_i}, \frac{\partial v_2}{\partial u_i}, \frac{\partial v_3}{\partial u_i}\right) \\ &= \nabla u_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} \qquad (19) \end{aligned}$$

vilket är sambandet vi önskade visa.