



Asumiendo como positiva la dirección a favor del movimiento del sistema para cada objeto:

$$\text{m1: } \sum F_y = T_1 - m_1g - ky = m_1a$$

$$\text{m2: } \sum F_y = m_2g - T_2 = m_2a$$

$$\begin{aligned} \text{Polea: } \sum \tau &= \tau_2 - \tau_1 = I\alpha \\ &= T_2R - T_1R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \\ \therefore T_2 - T_1 &= \frac{Ma}{2} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow T_1 = m_1a + m_1g + ky$$

$$\hookrightarrow T_2 = m_2g - m_2a$$

$$\therefore m_2g - m_2a - m_1a - m_1g - ky = \frac{Ma}{2}$$

$$\hookrightarrow a = \frac{m_2g - m_1g - ky}{m_1 + m_2 + M/2}$$

Con esto, obtuvimos una expresión general para la aceleración del sistema. No obstante, veamos qué procedimiento debemos realizar si deseamos una ecuación para el desplazamiento del equilibrio del resorte, que representamos como  $y = y(t)$  en la ecuación anterior, considerando  $a = a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$ .

Para simplificar, sean  $\alpha = \frac{m_2g - m_1g}{m_1 + m_2 + M/2}$ ,  $\beta = \frac{k}{m_1 + m_2 + M/2}$ .

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{m_2g - m_1g - ky}{m_1 + m_2 + M/2} = \frac{m_2g - m_1g}{m_1 + m_2 + M/2} - \frac{k}{m_1 + m_2 + M/2} \cdot y = \alpha - \beta y$$

Para encontrar la función  $y(t)$  que satisface la ecuación diferencial obtenida ( $\ddot{y} = \alpha - \beta y$ ), empleamos la metodología dada por la Transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{y(t)\}$ , considerando  $y(0) = 0$  y  $\dot{y}(0) = 0$  debido a que el sistema se encuentra inicialmente en reposo.

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}\} = \mathcal{L}\{\alpha - \beta y\} \Rightarrow s^2 \cdot Y(s) - s \cdot \dot{y}(0) - y(0) = \frac{\alpha}{s} - \beta \cdot Y(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{\alpha}{s(s^2 + \beta)}$$

$$\frac{1}{s(s^2 + \beta)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + \beta} \Big|_{C=0}^{A=-B=\frac{1}{\beta}} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{s(s^2 + \beta)} \right\} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \beta} \right\}$$

$$\therefore y(t) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot [1 - \cos(\sqrt{\beta} \cdot t)]$$