Situación: Cilindro con distribución de masa no-uniforme en un plano inclinado

Tenemos un cilindro de radio R en un plano inclinado de angulo θ respecto a la horizontal, la distribución de masa para esta simulación fué la de un cilindro homogeneo de masa M pero con una masa puntual m; a un radio de distancia del centro geométrico a un angulo ϕ respecto a la horizontal. Para esta situación están involucradas la fuerza de gravedad, la fuerza normal y la fricción, así como el torque gravitatorio principalmente generado por la masa puntual y el torque de la fricción. A continuación se describe la dinámica y las ecuaciones de movimiento a resolver computacionalmente:

$$\sum F_x = \vec{\omega_x} - \vec{f_k} - \tau_{g/d} = (M+m)a \tag{1}$$

$$\Rightarrow (M+m)g\sin\theta - \mu_k(M+m)g\cos\theta - (\mu+m)g\sin\phi = (M+m)a \tag{2}$$

Esta es la ecuación de movimiento en la dirección x del plano inclinado, para que el cilindro suba por el plano se debe cumplir:

$$\text{condicion: } a < 0$$
$$\Rightarrow \sin\theta < \mu_k\cos\theta + \sin\phi$$

además es importante considerar la ecuación de movimiento angular descrita por los torques del sistema

$$\sum \tau = \tau_g - \tau_{f_k} = I\alpha \tag{3}$$

$$\Rightarrow (M+m)gd\sin\phi - \mu_k(M+m)g\cos\theta R = I\alpha \tag{4}$$

donde d es la distancia entre el centro geométrico del cilindro y la posición del centro de masa, para resolver estas ecuaciones de movimiento se tomó en cuenta que el momento de inercia del sistema es:

$$I = I_{cil} + I_m = 1/2(M+m)R^2 + md^2 \tag{5}$$

La solución fué ejecutada con el metodo Runge-Kutta de orden 4, bastante conocido y descrito por:

$$y_{n+1} \to y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{6}$$

donde

$$k_1 = hf(t, y) \tag{7}$$

$$k_2 - hf(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}) \tag{8}$$

$$k_3 = hf(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}) \tag{9}$$

$$k_4 - hf(t + h, y + k_3) \tag{10}$$