

Modelo matemático de un dron cuadracóptero y su controlador

Elmer Hernán Barquero Chaves¹, Andrés Mesén¹, Steven Zuñiga¹, Dylan Vargas¹

San Pedro, Montes de Oca

San José, Costa Rica

^aEscuela de Ingeniería Mecánica, Universidad de Costa Rica

Abstract

Este artículo aborda el modelado dinámico y el diseño de un sistema de control PID lineal para la estabilización de un dron cuadracóptero. Se derivan las ecuaciones generales de la dinámica del vehículo y se linealizan alrededor del punto de vuelo estacionario para obtener un modelo en espacio de estados. La estabilidad del sistema se analiza mediante las respuestas al escalón y al impulso en el dominio del tiempo, así como mediante los criterios de Bode y Nyquist en el dominio de la frecuencia. El modelo linealizado evidencia que el sistema es inestable en lazo abierto, con crecimiento divergente en posición y actitud, y que presenta una marcada sensibilidad ante variaciones en la masa. Finalmente, se diseña un controlador PID en cascada, cuya validación en simulación muestra que logra estabilizar el sistema y permitir el seguimiento preciso de trayectorias.

Keywords: Dron, cuadracóptero, control, PID, linealización, simulación.

1. Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados, en particular los cuadracópteros, han adquirido una importancia creciente en aplicaciones como la fotografía aérea, la inspección industrial y las misiones de búsqueda y rescate [1]. Aunque su estructura mecánica presenta una geometría simétrica relativamente simple, su dinámica es no lineal y bajo-actuada, lo que dificulta considerablemente el diseño de sistemas de control.

El control estable y preciso de un cuadracóptero requiere un modelo matemático que describa adecuadamente tanto su dinámica traslacional como rotacional. En lazo abierto, estos sistemas presentan inestabilidad y divergencia en posición y actitud, lo que motiva la necesidad de estrategias de control apropiadas.

En este trabajo se estudia la dinámica de un cuadracóptero y se desarrolla un esquema de control basado en técnicas clásicas. El estudio comprende:

1. la formulación del modelo dinámico no lineal y su linealización alrededor del punto de operación correspondiente al vuelo estacionario;
2. el análisis de estabilidad del sistema en lazo abierto en los dominios del tiempo y la frecuencia;
3. el diseño de un controlador PID en arquitectura en cascada para lograr la estabilización de la actitud y el seguimiento de trayectorias en posición.

La Figura 1 muestra una representación del dron estudiado en el documento.

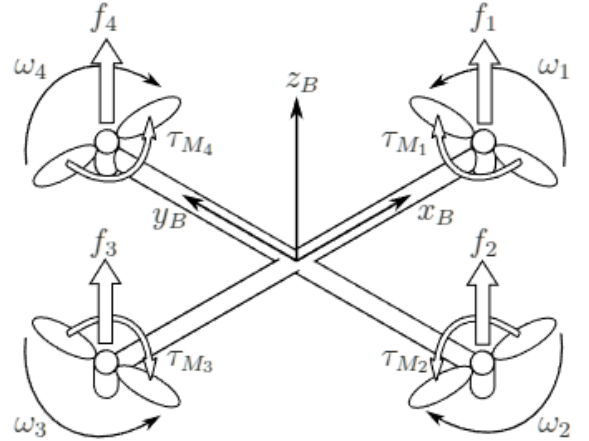


Figura 1: Representación del dron cuadracóptero.

2. Modelo Matemático

Para el análisis que se va a realizar a continuación se optará con la configuración de un dron cuadracóptero en forma de X (como el presentado en la Figura 1), donde se considerará lo siguiente:

- El dron es un cuerpo rígido.
- Hay fricción con el aire. Lineal para las traslación del dron y cuadrática para la rotación de las hélices.

Email addresses: elmer.barquero@ucr.ac.cr (Elmer Hernán Barquero Chaves), andres.mesen@ucr.ac.cr (Andrés Mesén), steven.zuniga@ucr.ac.cr (Steven Zuñiga), dylan.vargas@ucr.ac.cr (Dylan Vargas)

- El centro de masa del dron está en el centro geométrico de este y tiene simetría en el plano XY.
- Se consideran únicamente aspectos mecánicos del dron.

Una vez considerado lo anterior, es posible comenzar con el modelo matemático.

Las ecuaciones 1 y 2 son respectivamente el vector posición $\vec{\xi}$ y el vector orientación $\vec{\eta}$ en un marco de referencia inercial. De igual forma se concibe la ecuación 3 como una relación que permite transformar el vector posición de un marco de referencia inercial (θ_I) y a un marco de referencia no inercial (θ_B) y viceversa.

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\vec{r}' = R^{-1}\vec{r} + \vec{R} \Leftrightarrow \vec{r} = R(\vec{r}' - \vec{R}) \quad (3)$$

La ecuación 4 es la matriz de rotación 3D compuesta por las matrices de rotación de los ejes x-y-z, utilizando los ángulos de Tait-Bryan (Roll-Pich y Yaw). Las matrices de rotación por eje $R_x(\phi)$, $R_y(\theta)$ y $R_z(\psi)$ se muestran en las ecuaciones: 5, 6 y 7.

$$R = R_x(\phi) R_y(\theta) R_z(\psi) \quad (4)$$

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

La velocidad angular en las coordenadas del cuerpo, ω^B , mantiene una relación proporcional con el vector de orientación como muestra la ecuación 8, donde se observa la presencia de un operador matricial W (no ortogonal) que permite cambiar entre marcos de referencia. La ecuación 9, tiene como relación inversa de la ecuación 10.

$$\vec{\omega}^B = W\dot{\vec{\eta}} \Leftrightarrow \dot{\vec{\eta}} = W^{-1}\vec{\omega}^B \quad (8)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} kl(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ kl(-\omega_1^2 + \omega_4^2) \\ b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{rzz}(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)\omega_y^B + (I_{cyy} + 4I_{ryy})\frac{d}{dt}\omega_x^B + (-I_{cyy} + I_{czz} - 4I_{ryy} + 4I_{rzz})\omega_y^B\omega_z^B \\ I_{rzz}(-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4)\omega_x^B + (I_{cyy} + 4I_{ryy})\frac{d}{dt}\omega_y^B + (I_{cyy} - I_{czz} + 4I_{ryy} - 4I_{rzz})\omega_x^B\omega_z^B \\ I_{rzz}(\frac{d}{dt}\omega_1 - \frac{d}{dt}\omega_2 + \frac{d}{dt}\omega_3 - \frac{d}{dt}\omega_4) + (I_{czz} + 4I_{rzz})\frac{d}{dt}\omega_z^B \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi)\sec(\theta) & \cos(\phi)\sec(\theta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

La ecuación 11 permite ver las fuerzas de sustentación representadas como un vector columna, donde k es un coeficiente de sustentación y ω_i corresponde a la velocidad angular intrínseca del rotor [2]. Esto se puede integrar, junto a otras fuerzas como el peso del cuerpo y la resistencia con el aire (coeficiente de resistencia c_i), a la Segunda Ley de Newton (ecuación 12) para describir la dinámica traslacional del sistema.

De igual forma el movimiento rotacional se contempla como una expresión derivada según la ecuación 13 (Conservación del Momentum Angular), a la cual se le entrega los torques que siente el sistema por medio de la ecuación 14, esto estará también en términos del coeficiente de sustentación y del coeficiente cuadrático de resistencia con el aire para la rotación b .

$$\vec{F}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\sum \vec{F} = M\ddot{\vec{\xi}} \quad (12)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (13)$$

$$\vec{N}^B = \begin{bmatrix} N_x^B \\ N_y^B \\ N_z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kl(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ kl(-\omega_1^2 + \omega_4^2) \\ b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Desarrollando la ecuación 13 en el marco de referencia inercial y con el objetivo de pasar dicha expresión desarrollada al marco de referencia no inercial, por lo conveniente que resulta, se obtiene la ecuación tipo Euler (ecuación 15) para la dinámica rotacional del sistema.

$$\begin{aligned} \vec{N}^B &= \vec{\omega}^B \times I_c^B \vec{\omega}^B + I_c^B \dot{\vec{\omega}}^B \dots \\ &\dots + \vec{\omega}^B \times I_H^B (4\vec{\omega}^B + \vec{\omega}_1^B + \vec{\omega}_2^B + \vec{\omega}_3^B + \vec{\omega}_4^B) + \dots \\ &\dots + I_H^B (4\dot{\vec{\omega}}^B + \dot{\vec{\omega}}_1^B + \dot{\vec{\omega}}_2^B + \dot{\vec{\omega}}_3^B + \dot{\vec{\omega}}_4^B) \end{aligned} \quad (15)$$

Desarrollando los términos de las ecuaciones dinámicas y representandolas como vectores columnas, se tiene 16 y 17:

$$\begin{bmatrix} M \frac{d^2}{dt^2} x \\ M \frac{d^2}{dt^2} y \\ M \frac{d^2}{dt^2} z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_x \frac{d}{dt} x + k (\sin(\phi) \sin(\psi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\psi)) (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ -c_y \frac{d}{dt} y + k (-\sin(\phi) \cos(\psi) + \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi)) (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ -Mg - c_z \frac{d}{dt} z + k (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Dada la gran complejidad que poseen estas ecuaciones, se plantean las siguientes sustituciones:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}) \quad (20)$$

Con el vector de estados dado por 21:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{M} & B &= \frac{c_x}{M} \\ C &= \frac{c_y}{M} & D &= \frac{c_z}{M} \\ \alpha &= \frac{-I_{cyy} + I_{czz} - 4I_{ryy} + 4I_{rzz}}{I_{cyy} + 4I_{ryy}} & \beta &= \frac{I_{rzz}}{I_{cxx} + 4I_{rxx}} \\ \delta &= \frac{I_{rzz}}{I_{czz} + 4I_{rzz}} & \epsilon &= \frac{1}{I_{czz} + 4I_{rzz}} \\ \gamma &= \frac{1}{I_{cyy} + 4I_{ryy}} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ v_x \\ y \\ v_y \\ z \\ v_z \\ \phi \\ \omega_x^B \\ \theta \\ \omega_y^B \\ \psi \\ \omega_z^B \end{bmatrix} \quad (21)$$

Dando como resultado 22:

Seguidamente, y de acuerdo a [3], [4] y [5], se desprecian los efectos giroscópicos y los cambios en la velocidad angular intrínseca de los rotores. Además, se incluye la ecuación 8 para completar las ecuaciones diferenciales de la dinámica rotacional y por último se despejan las aceleraciones de las ecuaciones de traslación y las aceleraciones angulares de la ecuación tipo Euler, obteniendo 19:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \omega_x^B \\ \frac{d}{dt} \omega_y^B \\ \frac{d}{dt} \omega_z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x^B \gamma - \alpha \omega_y^B \omega_z^B \\ N_y^B \gamma + \alpha \omega_x^B \omega_z^B \\ N_z^B \epsilon \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \phi \\ \frac{d}{dt} \theta \\ \frac{d}{dt} \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x^B + \omega_y^B \sin \phi \tan \theta + \omega_z^B \cos \phi \tan \theta \\ \omega_y^B \cos \phi - \omega_z^B \sin \phi \\ \frac{\omega_y^B \sin \phi + \omega_z^B \cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} x \\ \frac{d^2}{dt^2} y \\ \frac{d^2}{dt^2} z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AT^B (\sin \phi \sin \psi + \sin \theta \cos \phi \cos \psi) - B \frac{d}{dt} x \\ AT^B (-\sin \phi \cos \psi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi) - C \frac{d}{dt} y \\ AT^B \cos \phi \cos \theta - D \frac{d}{dt} z - g \end{bmatrix} \quad (19)$$

Posteriormente, se escribe el sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x \\ \frac{d}{dt} v_x \\ \frac{d}{dt} y \\ \frac{d}{dt} v_y \\ \frac{d}{dt} z \\ \frac{d}{dt} v_z \\ \frac{d}{dt} \phi \\ \frac{d}{dt} \omega_x^B \\ \frac{d}{dt} \theta \\ \frac{d}{dt} \omega_y^B \\ \frac{d}{dt} \psi \\ \frac{d}{dt} \omega_z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ AT^B (\sin(\phi) \sin(\psi) + \sin(\theta) \cos(\phi) \cos(\psi)) - B v_x \\ AT^B (-\sin(\phi) \cos(\psi) + \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi)) - C v_y \\ AT^B \cos(\phi) \cos(\theta) - D v_z - g \\ \omega_x^B + \omega_y^B \sin(\phi) \tan(\theta) + \omega_z^B \cos(\phi) \tan(\theta) \\ N_x^B \gamma - \alpha \omega_y^B \omega_z^B \\ \omega_y^B \cos(\phi) - \omega_z^B \sin(\phi) \\ N_y^B \gamma + \alpha \omega_x^B \omega_z^B \\ \frac{\omega_y^B \sin(\phi)}{\cos(\theta)} + \frac{\omega_z^B \cos(\phi)}{\cos(\theta)} \\ N_z^B \epsilon \end{bmatrix} \quad (22)$$

A partir de las ecuaciones 20 y 22, se plantea una linealización alrededor del punto de equilibrio descrito por las ecuaciones 23. Con ello, se utiliza la definición de ángulo pequeño para ϕ y θ y, todo esto, se realiza con el objetivo de reescribir el sistema de la forma 24:

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x \\ v_x \\ y \\ v_y \\ z \\ v_z \\ \phi \\ \omega_x^B \\ \theta \\ \omega_y^B \\ \psi \\ \omega_z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_0 = \begin{bmatrix} T^B \\ N_x^B \\ N_y^B \\ N_z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u} \quad (24)$$

Donde las matrices A y B se definen como 25 de acuerdo con [6]:

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\vec{x}_0, \vec{u}_0} \quad B_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{\vec{x}_0, \vec{u}_0} \quad (25)$$

Una vez realizado el proceso de linealización se obtiene la matriz A (26) y la matriz B (27). La matriz A es 12×12 debido a la cantidad de variables de estado presentes en el sistema y la matriz B es 12×4 debido a la posibilidad de que las 12 variables de estado sean afectadas por las 4 entradas del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad (27)$$

Finalmente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden linealizadas 28:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x \\ \frac{d}{dt}v_x \\ \frac{d}{dt}y \\ \frac{d}{dt}v_y \\ \frac{d}{dt}z \\ \frac{d}{dt}v_z \\ \frac{d}{dt}\phi \\ \frac{d}{dt}\omega_x^B \\ \frac{d}{dt}\theta \\ \frac{d}{dt}\omega_y^B \\ \frac{d}{dt}\psi \\ \frac{d}{dt}\omega_z^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ -Bv_x + g\theta \\ v_y \\ -Cv_y - g\phi \\ v_z \\ AT^B - Dv_z \\ \omega_x^B \\ N_x^B\gamma \\ \omega_y^B \\ N_y^B\gamma \\ \omega_z^B \\ N_z^B\epsilon \end{bmatrix} \quad (28)$$

Por otro lado, es necesario establecer cuales son las salidas de interés para el sistema del dron. En este caso, es conveniente plantear que se tendrán acceso a todas las variables de estado a través de dicha salida y no aparecerán afectadas por las entradas del sistema. Por lo que, al desear escribir las salidas de la forma 29, se obtiene que la matriz C es la matriz identidad 12×12 y la matriz D es una matriz 0.

$$\vec{y} = C\vec{x} + D\vec{u} \quad (29)$$

Por último, es preciso escribir la matriz de transferencia del sistema. Para esto se aprovechará la relación entre el sistema en variables de estado y su matriz de transferencia dada por la ecuación 30, dando como resultado 31.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (30)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma g}{Bs^3 + s^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma g}{Bs^2 + s^3} & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma g}{Cs^3 + s^4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma g}{Cs^2 + s^3} & 0 & 0 \\ \frac{A}{Ds + s^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{D + s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{s^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{s^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{s^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\epsilon}{s} \end{bmatrix} \quad (31)$$

3. Controlador

La definición del controlador requiere identificar los estados requeridos y presentes, que en este caso se representan en x_i^{ref} y x_i respectivamente y la relación de sustracción de ambos nos da una función dependiente del tiempo, como lo representa la ecuación 32 para el error del estado.

$$e_i(t) = x_i^{ref} - x_i \quad (32)$$

Una vez definida la ecuación del error de estado se puede buscar una representación tangible de la entrada del sistema de controlador, la cuál nos la da la ecuación 33. Esta ecuación incluye parámetros de ganancias proporcional, integral y derivada como lo son respectivamente las constantes K_{P-i} , K_{I-i} y K_{D-i} donde para efectos las ganancias proporcional y derivada se usan para el control del vehículo.

$$u_i(t) = K_{P-i}e(t) + K_{I-i} \int_0^t e_i(\tau) d\tau + K_{D-i} \dot{e}(t) \quad (33)$$

4. Resultados

4.1. Análisis en el dominio del tiempo

El análisis en el dominio del tiempo se enfoca en evaluar la dinámica intrínseca del sistema no compensado, definido por el modelo linealizado de 12 estados (Ecuación 24).

4.1.1. Respuesta al Escalón de Posición (X, Y, Z)

La Figura 2 muestra la respuesta de traslación ante la aplicación de una entrada de empuje (U_1) o de torque (U_2, U_3) constante.

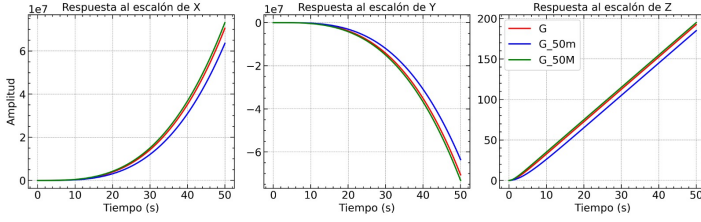


Figura 2: Respuesta al escalón de los canales de posición (X, Y, Z) con variación de masa. G es el modelo nominal.

El análisis revela un comportamiento inestable en todos los ejes:

- Inestabilidad en Altitud (Z): La altitud exhibe un crecimiento lineal con el tiempo, lo que indica que el comando de empuje constante provoca una velocidad vertical constante ($\dot{z} = cte \neq 0$). El dron nunca detiene su ascenso.
- Inestabilidad Crítica en Traslación (X, Y): Los canales de posición horizontal (X y Y) presentan un crecimiento cuadrático continuo, lo que es significativa una doble integración del comando de torque. El dron se aleja indefinidamente de su posición inicial.

4.1.2. Respuesta al Escalón de Actitud (ϕ, θ, ψ)

La Figura 3 muestra la respuesta angular.

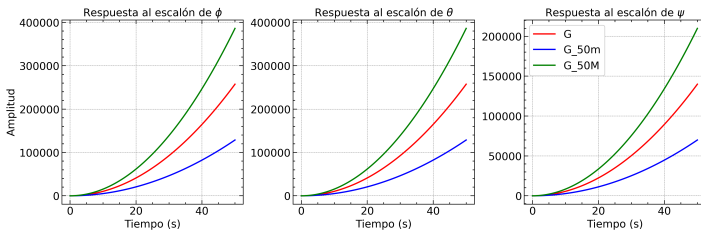


Figura 3: Respuesta al escalón de los canales de actitud (ϕ, θ, ψ).

Los tres ángulos (ϕ, θ, ψ) muestran un crecimiento cuadrático cóncavo hacia arriba. Esto indica una inestabilidad rotacional en la cual el torque constante aplicado causa una aceleración angular constante, acelerando la rotación continuamente.

4.1.3. Efecto de la Variación de Parámetros

El análisis de robustez se realiza comparando la respuesta del modelo nominal (G) con las variaciones de masa (modelo ligero G_{50m} y modelo pesado G_{50M}), como se observa en todas las figuras.

El cambio en la masa del dron afecta la inercia del sistema, lo que se traduce en un cambio en la tasa de divergencia de las respuestas:

- Masa Baja (G_{50m}): Presenta la mayor pendiente de crecimiento en todos los canales inestables. Un menor momento de inercia hace que el dron sea hipersensible y diverja más rápidamente ante el mismo comando de torque o empuje.
- Masa Alta (G_{50M}): Presenta la menor pendiente de crecimiento. El aumento de inercia frena la aceleración, haciendo que la divergencia sea más lenta.

Esta sensibilidad extrema confirma que el sistema de lazo abierto no es robusto ante variaciones de carga útil, lo cual es un requerimiento esencial para el controlador.

4.1.4. Respuesta al Impulso de Posición (Perturbación)

La Figura 4 muestra cómo una perturbación momentánea afecta la posición.

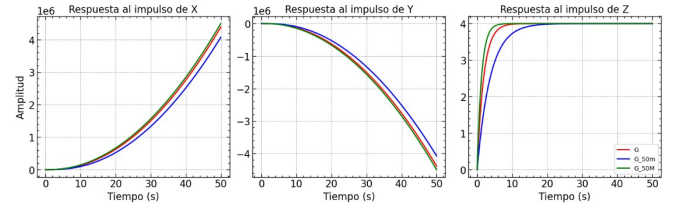


Figura 4: Respuesta al impulso de los canales de posición (X, Y, Z). Se confirma la divergencia continua tras una perturbación.

El impulso causa un cambio permanente en la velocidad o aceleración (X, Y, Z), confirmando que el sistema no puede rechazar perturbaciones y se aleja continuamente de la posición inicial. La estabilización en Altitud (Z) significa que el modelo linealizado posee suficiente amortiguamiento (coeficiente D o c_z de arrastre aerodinámico en la Ecuación 17) para disipar la energía del impulso. El sistema es intrínsecamente estable frente a una perturbación vertical momentánea.

4.1.5. Respuesta al Impulso de Actitud (Perturbación)

La Figura 5 muestra la respuesta angular ante un impulso de torque.

Los tres ángulos (ϕ, θ, ψ) muestran un crecimiento lineal tras el impulso, indicando que la velocidad angular se vuelve constante ($\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} = cte \neq 0$). Esto significa que una perturbación momentánea causa que el dron rote a una velocidad constante y no se detenga jamás.

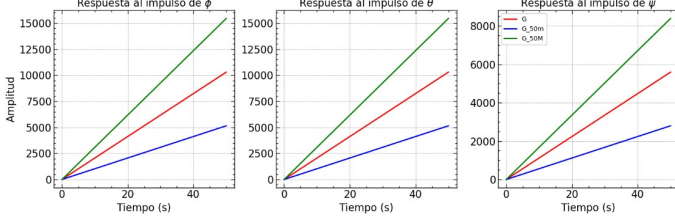


Figura 5: Respuesta al impulso de los canales de actitud (ϕ, θ, ψ). El crecimiento lineal indica una velocidad angular constante $\dot{\omega}_i \neq 0$.

4.1.6. Efecto en la Ubicación de Polos y Ceros

El análisis de la ubicación de los polos, que son los autovalores de la matriz de estados A , es crucial para justificar la inestabilidad y la falta de robustez observadas en las Figuras 2 y 3.

Ubicación de Polos en Ejes Inestables: La principal evidencia de la inestabilidad del sistema en lazo abierto reside en los polos ubicados en la frontera del plano s :

- Polos de Orientación (ϕ, θ, ψ): Se observa la presencia de un polo en el origen ($s = 0.0$) para los tres canales angulares. Este polo es la causa directa de la inestabilidad marginal y el crecimiento continuo (cuadrático/lineal) en la respuesta al escalón.
- Polos de Posición (X, Y, Z): La inestabilidad en estos canales es el resultado de la presencia de polos adicionales en el origen, necesarios para modelar la doble integración de posición y velocidad, lo cual se confirma por el crecimiento lineal y cuadrático observado.

Efecto de la Variación de Parámetros (Robustez): La Figura 6 ilustra el movimiento de los polos dominantes en el semiplano izquierdo debido a la variación de masa (robustez).

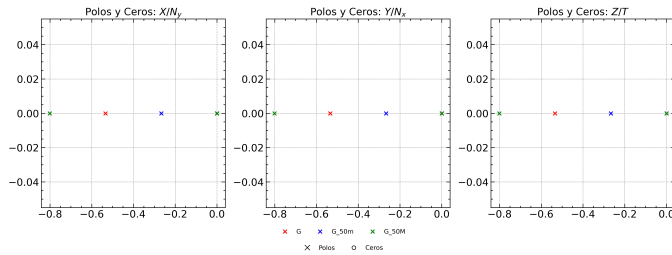


Figura 6: Ubicación de los polos dominantes en el plano s para las variaciones de masa G, G_{50m}, G_{50M} .

El análisis numérico de los polos dominantes en los canales de posición revela una alta sensibilidad:

- El polo del modelo ligero (G_{50m}) se ubica en $s = -0.25$, resultando en un tiempo característico τ de $4.0s$ (respuesta lenta).

- El polo del modelo pesado (G_{50M}) se ubica en $s = -0.80$, resultando en τ de $1.25s$ (respuesta rápida).

La gran variación en el tiempo característico (τ) demuestra que la ubicación de los polos es altamente sensible a la masa del dron. Esto confirma la falta de robustez del sistema y la necesidad de que el controlador mueva todos los polos a una región estable ($Re(s) \ll 0$) con un factor de amortiguamiento adecuado.

La principal conclusión de este análisis en el dominio del tiempo es que el dron es completamente inestable en todos sus ejes y requiere un controlador robusto para estabilizar y regular su desempeño.

4.2. Análisis en el dominio de la frecuencia

El análisis en el dominio de la frecuencia permite evaluar la estabilidad del sistema y predecir su respuesta ante señales periódicas [6]. Este análisis se basa en la Función de Transferencia de Lazo Abierto ($G(s)$) para los canales de posición y orientación.

4.2.1. Frecuencias de Resonancia

No se observan frecuencias de resonancia definidas en la banda de frecuencia analizada para la mayoría de los canales. La característica dominante es la alta ganancia a bajas frecuencias, causada por los polos en el origen ($s = 0$). Esto es una consecuencia directa de la inestabilidad en lazo abierto, lo que implica una ganancia infinita en corriente continua ($\omega \rightarrow 0$).

Los diagramas de Bode (Magnitud y Fase) para todos los canales de traslación y rotación se presentan en las Figuras 7 y 8, respectivamente.

4.2.2. Diagramas de Bode de Posición ($X/N_y, Y/N_x, Z/T$)

La Figura 7 muestra el comportamiento de la posición.

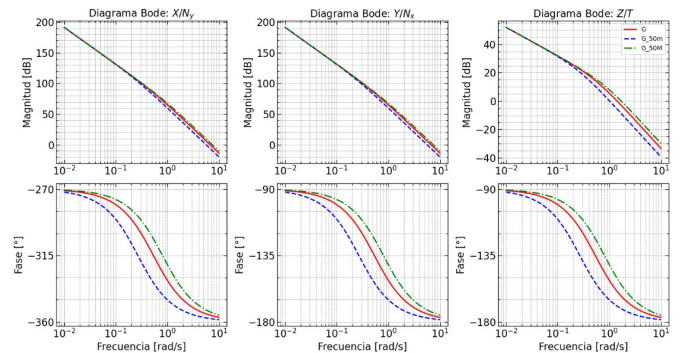


Figura 7: Diagramas de Bode para los canales de posición ($X/N_y, Y/N_x, Z/T$).

- Traslación Horizontal (X/N_y y Y/N_x): La fase comienza en valores cercanos a -270° y cae hacia -360° . Esto indica un sistema de alto orden de integración Tipo 2 y la presencia de dinámicas acopladas que contribuyen a la inestabilidad en lazo cerrado.

- Altitud (Z/T): Fase asintótica a -180° , garantiza un tiempo de establecimiento largo y respuesta muy oscilatoria. Margen de Fase casi nulo, indicando que cualquier pequeña incertidumbre lo hará oscilar sin control y la separación de las líneas confirma que el desempeño empeora con las cargas.

4.2.3. Diagramas de Bode de Orientación (ϕ/N_x , θ/N_y , ψ/N_z)

La Figura 8 muestra el comportamiento de la actitud (orientación).

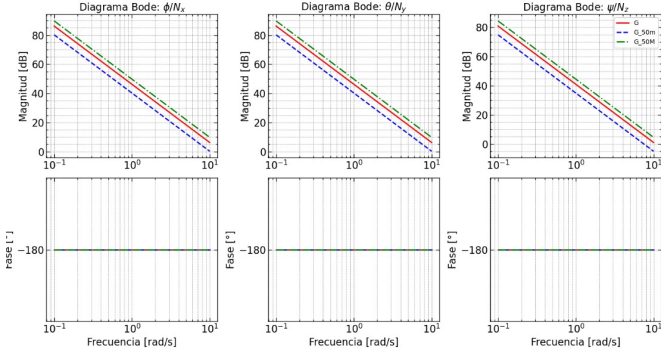


Figura 8: Diagramas de Bode para los canales de actitud (ϕ/N_x , θ/N_y , ψ/N_z).

Los tres canales de orientación (ϕ , θ , y ψ) exhiben un comportamiento idéntico, característico de un sistema de doble integrador ($\frac{1}{s^2}$):

- Magnitud: Presenta una pendiente constante de -40dB/dec a frecuencias bajas, lo cual confirma la relación de doble integración entre el torque y el ángulo.
- La fase se mantiene constante en -180° para la banda de frecuencia de interés.

Este comportamiento constante de fase implica una estabilidad marginal intrínseca, ya que el sistema se encuentra en el límite de la estabilidad en lazo cerrado. La naturaleza de doble integrador es una consecuencia directa de la dinámica de cuerpo rígido sin par de control que lo estabilice. Además, la separación de las curvas (G , G_{50m} , G_{50M}) demuestra que la variación de la masa/inercia modifica ligeramente la ganancia de cada lazo, lo que significa que la estabilidad marginal del sistema no es robusta.

4.2.4. Criterio de Estabilidad de Nyquist

El Criterio de Nyquist confirma la inestabilidad absoluta del sistema de lazo cerrado. La condición de estabilidad requiere que el número de polos inestables de lazo cerrado (Z) sea cero, es decir, $Z = N + P = 0$, donde P es el número de polos inestables de lazo abierto y N es el número de encerramientos del punto crítico $(-1, 0)$ [7].

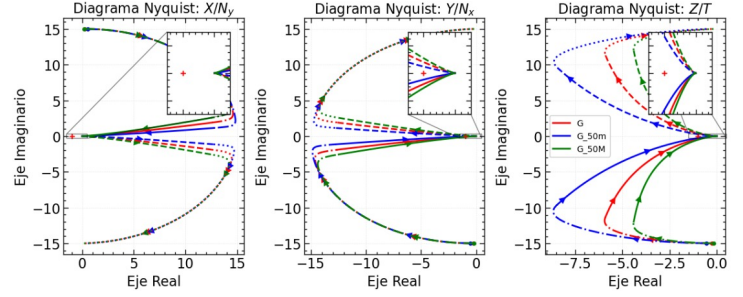


Figura 9: Diagramas de Nyquist para los canales de posición.

Diagramas de Nyquist de Posición (X/N_y , Y/N_x , Z/T): La Figura 9 presenta los diagramas de Nyquist para los canales de posición.

El análisis de los trazos revela que, dado que el sistema posee polos en el origen, es inestable en lazo abierto ($P > 0$).

- Para el canal X/N_y : El trazo encierra el punto crítico $(-1, 0)$ en sentido horario ($N < 0$). Dado que el número de encerramientos no compensa los polos inestables de lazo abierto, el sistema es inestable en lazo cerrado ($Z > 0$).
- Para los canales Y/N_x y Z/T : Los trazos no encierran el punto crítico ($N = 0$), lo que resulta en $Z = P$. Por lo tanto, el sistema es inestable en lazo cerrado.

Diagramas de Nyquist de Orientación (ϕ/N_x , θ/N_y , ψ/N_z): La Figura 10 presenta los diagramas de Nyquist para los canales de orientación.

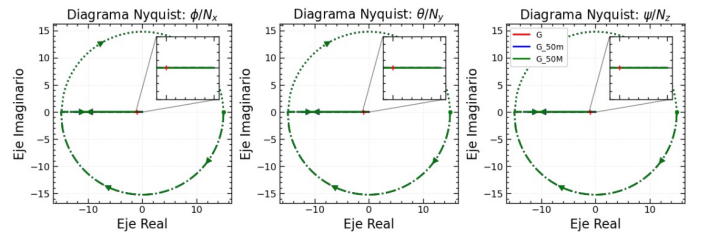


Figura 10: Diagramas de Nyquist para los canales de actitud

Para los canales de orientación, el trazo se superpone al eje real negativo (debido a la fase constante de -180° del doble integrador). La ausencia de encerramientos ($N = 0$) y la presencia de polos en el origen ($P > 0$) confirman que el sistema es inestable en lazo cerrado.

Conclusión del Criterio: Ambos conjuntos de diagramas confirman que el sistema en lazo abierto no es estable para lazo cerrado. La variación de los trazos (G , G_{50m} , G_{50M}) en torno al punto crítico $(-1, 0)$ refuerza la falta de robustez del sistema ante cambios de masa/inercia.

4.2.5. Márgenes de Ganancia y de Fase

Los márgenes de estabilidad confirman la inestabilidad del sistema y la necesidad de compensación.

- **Margen de Fase (MF):** El Margen de Fase es casi nulo (0°). Un *MF* tan bajo significa que el sistema no tiene capacidad para manejar ningún retraso o retardo adicional, y cualquier pequeña perturbación lo haría oscilar eternamente (lento e inaceptable).
- **Margen de Ganancia (MG):** El Margen de Ganancia es infinito, lo cual indica que el sistema no se vuelve inestable por un aumento de ganancia en esa banda de frecuencia crítica.

La separación de las curvas de Bode (G, G_{50m}, G_{50M}) en ambos juegos de gráficos es la prueba de la falta de robustez: los márgenes de estabilidad varían significativamente con el cambio de la masa.

5. Controlador PID de trayectoria basado en simulaciones

En esta sección se presentan dos enfoques de simulación del controlador PID de trayectoria, estos se realizan de forma complementaria con el objetivo de probar diferentes metodologías para enfrentarse al problema que representan los vehículos aéreos no tripulados. Primero, se estudió un modelo simplificado, implementado en MATLAB/Simulink, inspirado en aproximaciones lineales habituales en (author?) [8, 2]. Posteriormente, se analiza el comportamiento del controlador en el modelo lineal completo del cuadricóptero, implementado en Python, siguiendo estructuras de modelado similares a las de [3, 5] y siguiendo el planteamiento realizado en este texto.

5.1. Simulaciones en MATLAB/Simulink: modelo lineal 1D

Para iniciar la implementación del controlador, se planteó un modelo simplificado en MATLAB/Simulink, donde la dinámica de la posición se aproxima mediante un doble integrador,

$$G(s) = \frac{1}{s^2},$$

en línea con modelos lineales utilizados para análisis preliminares en [8, 2]. El objetivo es estudiar el efecto de las ganancias K_p , K_i y K_d de forma más directa, siguiendo los criterios clásicos de diseño de control expuestos en [9].

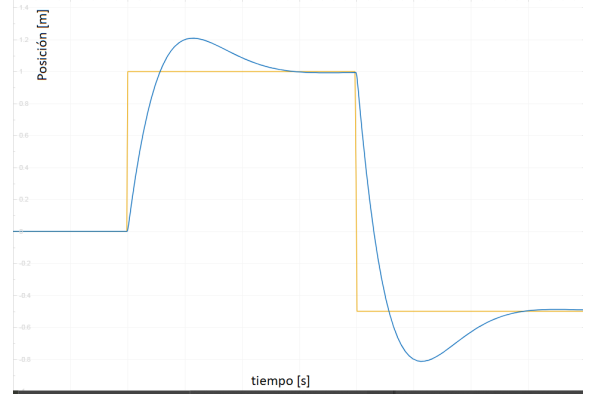


Figura 11: Respuesta del sistema en Simulink con controlador PID.

En la Figura 11 se muestra la posición del sistema frente a una referencia por tramos. Se aprecia un sobreimpulso moderado en el escalón positivo y una respuesta amortiguada ante el cambio a valor negativo, con error estacionario prácticamente nulo. Este comportamiento es consistente con el efecto combinado de las acciones proporcional, integral y derivativa descritas en [9].

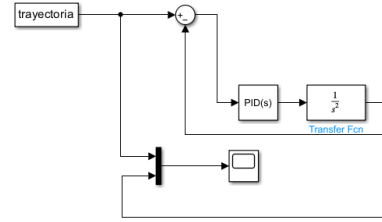


Figura 12: Diagrama de bloques del controlador PID en Simulink.

La Figura 12 presenta el esquema de Simulink empleado. La referencia se toma desde un bloque From Workspace, se resta la salida de la planta en el sumador, el controlador PID genera la acción de control y esta se aplica al bloque de planta modelado como $1/s^2$, cerrando el lazo de realimentación.

5.2. Simulaciones en Python: modelo lineal completo

El modelo dinámico utilizado en Python integra las ecuaciones de Newton-Euler y la representación por ángulos de Euler para el cuadricóptero, realizado en este texto y en concordancia con [2] y [10]. El controlador PID opera en un esquema jerárquico: el lazo externo regula la posición (x, y, z) y genera referencias de actitud, mientras que los lazos internos regulan roll, pitch y yaw con control PID clásico [3].

Al probar esta metodología de control, se utilizaron los valores presentes en la Tabla 1 de los parámetros físicos presentes en la ecuación 28.

Los controladores PID utilizados para manejar el movimiento del dron fueron implementados con los valores presentados a continuación (Tabla 2):

Tabla 1: Valores numéricos del modelo dinámico del dron.

Parámetro	Valor
A	2.1368
B	0.5342
C	0.5342
D	0.5342
g	9.81
γ	205.9251
ϵ	111.9159

Tabla 2: Ganancias y límites de los controladores PID/PD del dron.

Controlador	K_p	K_i	K_d	Límite
PID_x	1.0	0.02	0.5	integ_lim = 2.0
PID_y	1.0	0.02	0.5	integ_lim = 2.0
PID_z	6.0	0.8	2.0	integ_lim = 5.0
PID_ϕ	9.0	0.0	4.0	out_lim = 40.0
PID_θ	9.0	0.0	4.0	out_lim = 40.0
PID_ψ	2.0	0.0	2.0	out_lim = 40.0

Los límites tipo integ_lim son para limitar la cantidad de error en la integración del PID (anti-windup por saturación) y los límites out_lim, son un límite simétrico en la salida del controlador.

Para probar el algoritmo de control se consideran dos trayectorias de referencia:

- una trayectoria helicoidal (espiral ascendente);
- una trayectoria circular en un plano horizontal.

Los criterios de desempeño incluyen errores de seguimiento del orden de milímetros, señales de control suaves y ángulos de roll y pitch dentro de aproximadamente $\pm 15^\circ$.

5.2.1. Resultados para la trayectoria helicoidal (espiral)

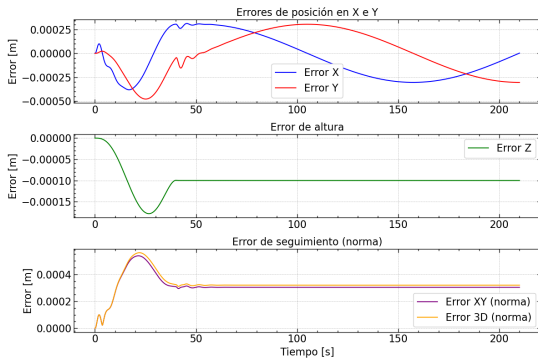


Figura 13: Errores de posición para la trayectoria espiral.

En la Figura 13 se muestran los errores de seguimiento en x , y y z . Tras el transitorio inicial, los errores se mantienen del orden de 10^{-4} m, lo que indica un seguimiento de trayectoria muy preciso. El error en altura presenta un pequeño desvío mientras el dron asciende, pero se estabiliza rápidamente.

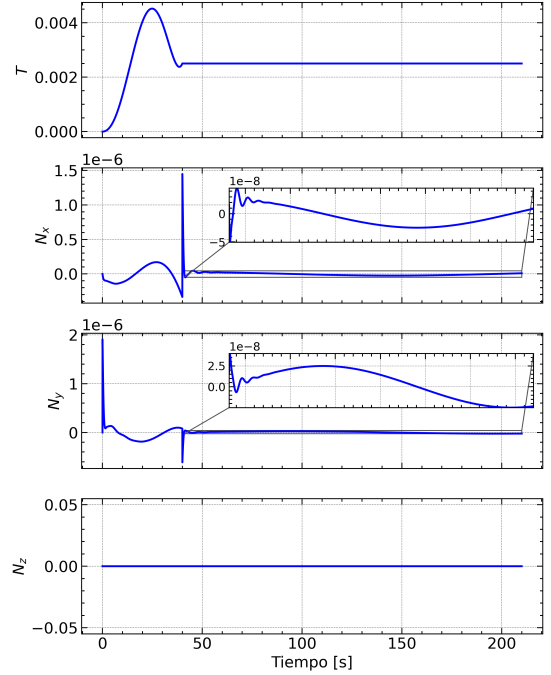


Figura 14: Entradas de control para la espiral.

La Figura 14 muestra la evolución de las entradas de control. El empuje total presenta el típico transitorio de despegue y luego se ajusta de manera suave al perfil de altura. Los torques N_x y N_y se mantienen en el orden de 10^{-6} Nm, con oscilaciones muy pequeñas, mientras que N_z es prácticamente nulo, al no requerirse grandes variaciones de yaw.

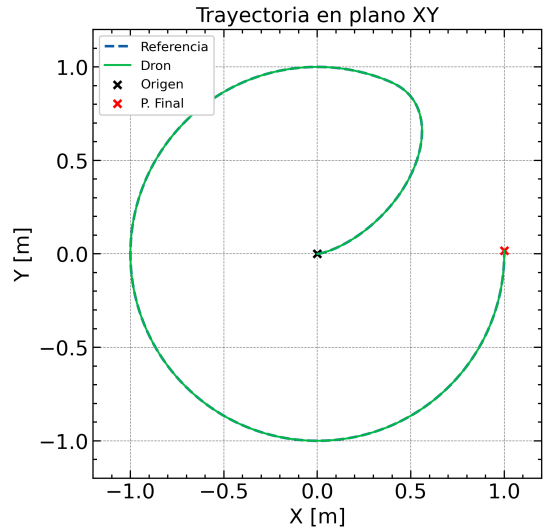


Figura 15: Trayectoria en el plano XY para la espiral.

En la Figura 15 se comparan la trayectoria de referencia y la salida del dron en el plano XY. Las dos curvas se superponen, de forma que las diferencias no son observables directamente.

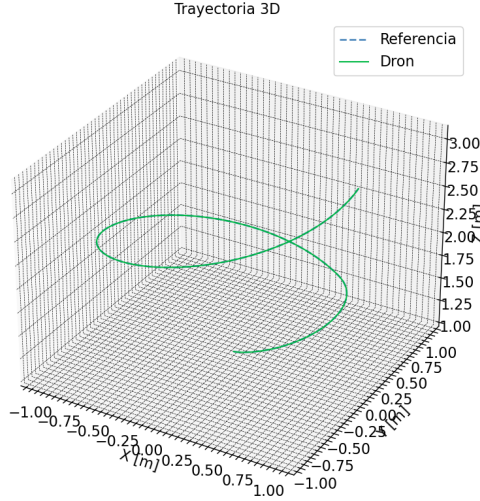


Figura 16: Trayectoria 3D para la espiral.

La Figura 16 representa la trayectoria en el espacio tridimensional. Se observa claramente el movimiento circular en XY combinado con el incremento de altura Z , confirmando que el controlador sigue adecuadamente una trayectoria tridimensional.

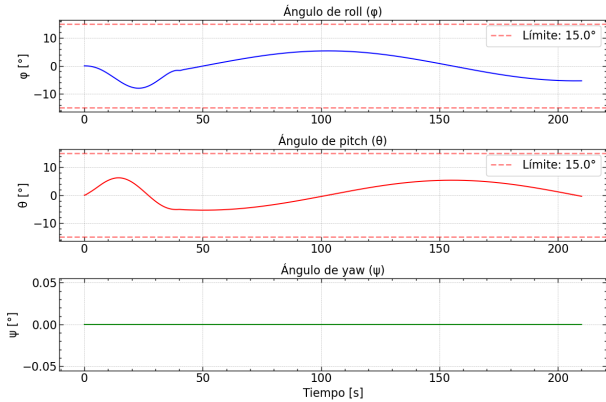


Figura 17: Ángulos de actitud durante la espiral.

En la Figura 17 se aprecian los ángulos de roll, pitch y yaw. Roll y pitch se mantienen dentro del límite operativo de aproximadamente $\pm 15^\circ$, tal como recomiendan estudios de estabilidad para cuadricópteros [3]. El ángulo de yaw permanece casi constante, ya que la espiral se realiza principalmente mediante inclinaciones controladas.

5.2.2. Resultados para la trayectoria circular

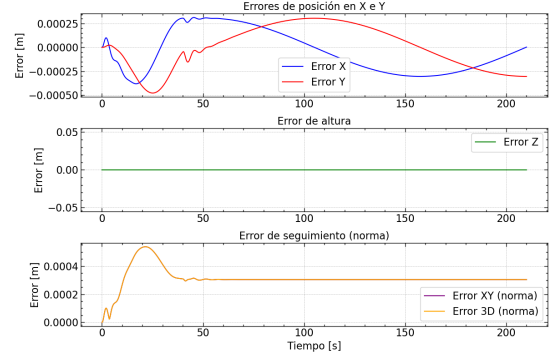


Figura 18: Errores de posición para la trayectoria circular.

En la Figura 18 se observa que, al tratarse de una altura constante, el error en z es aproximadamente cero. Los errores en x e y se mantienen del orden de 10^{-4} m, con un sobreimpulso pequeño y una convergencia rápida.

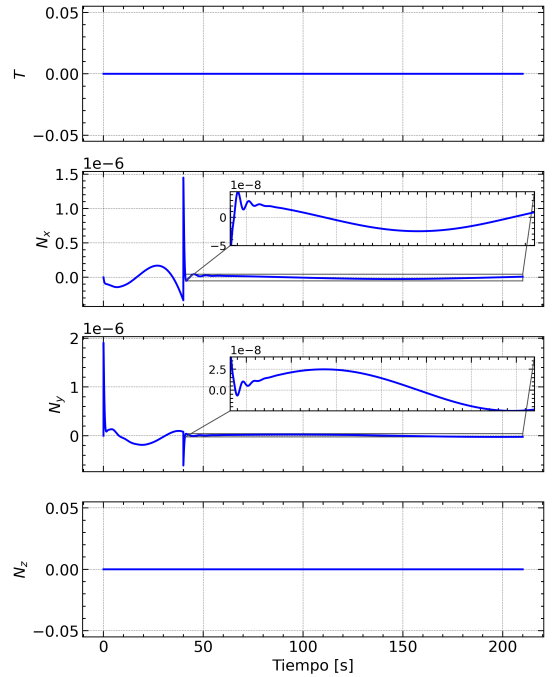


Figura 19: Entradas de control para la trayectoria circular.

La Figura 19 muestra que, a diferencia de la espiral, el empuje total es casi constante y los torques son aún más pequeños, lo que refleja un esfuerzo de control menor para una trayectoria menos exigente.

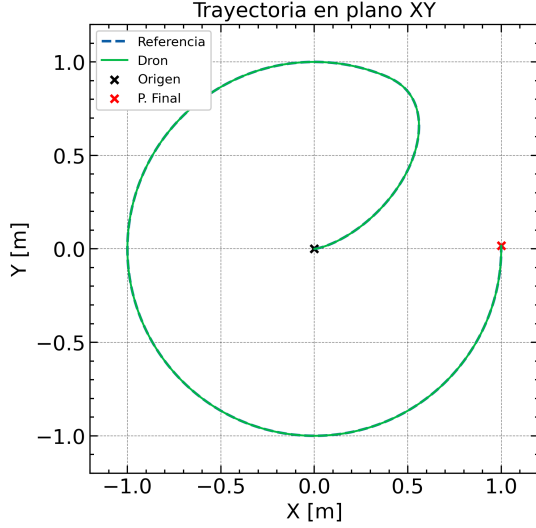


Figura 20: Trayectoria XY para la trayectoria circular.

En la Figura 20 se aprecia que la trayectoria seguida por el dron se superpone con la referencia circular, lo cual confirma el buen desempeño del controlador en el plano horizontal.

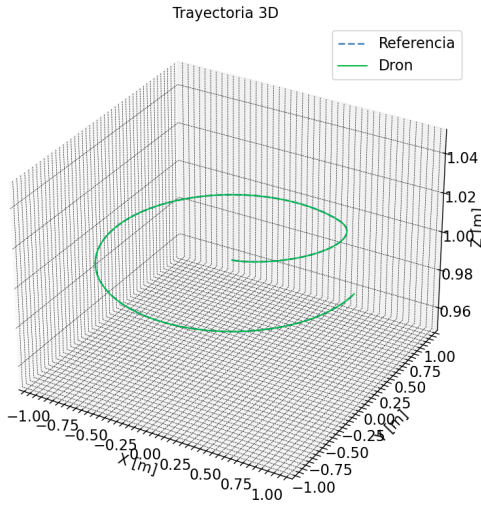


Figura 21: Trayectoria 3D para la trayectoria circular.

La Figura 21 muestra la misma trayectoria en 3D, donde se confirma que el movimiento se realiza en un plano horizontal.

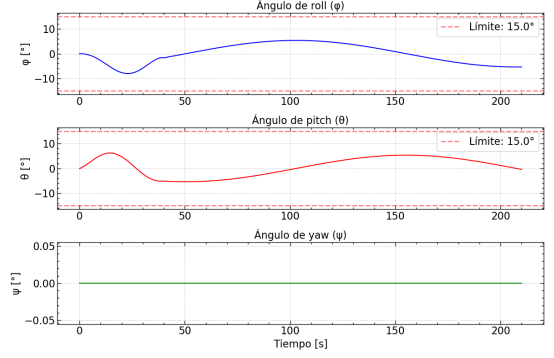


Figura 22: Ángulos de actitud para la trayectoria circular.

La Figura 22 presenta los ángulos de roll, pitch y yaw en la trayectoria circular. Las variaciones en roll y pitch son suaves y menores que en la espiral, mientras que yaw se mantiene estable, coherente con el tipo de maniobra.

5.3. Comparación de ambos enfoques

El modelo resuelto en Python permite evaluar el comportamiento del cuadricóptero incluyendo acoplamientos y limitaciones físicas, tal como recomiendan estudios recientes sobre control de trayectoria [5]. El controlador PID demuestra un seguimiento preciso de trayectorias tridimensionales, manteniendo los ángulos de actitud y las entradas de control dentro de rangos seguros.

El modelo lineal en Simulink ofrece una herramienta sencilla para estudiar de forma más visual el efecto de las ganancias K_p , K_i y K_d , reproduciendo los fenómenos clásicos de sobreimpulso, amortiguamiento y eliminación del error estacionario descritos en [9].

En conjunto, ambos enfoques son complementarios: las simulaciones en Python validan el desempeño del controlador en casos más realistas de la dinámica del cuadricóptero, mientras que las simulaciones en Simulink facilitan la comprensión del diseño del PID y la sensibilidad del sistema a las ganancias.

6. Conclusiones

La dinámica de un dron cuadricóptero presenta una complejidad significativa debido a su carácter no lineal y acoplado, así como a la presencia de más grados de libertad que actuadores disponibles. Estas características complican tanto su análisis como el diseño de estrategias de control adecuadas.

La linealización alrededor del punto de operación correspondiente al vuelo estacionario permitió obtener un modelo manejable para el estudio del sistema y para el diseño de controladores en un régimen cercano al equilibrio. Aunque esta aproximación no captura todos los efectos no lineales, resultó suficiente para describir el comportamiento esencial del dron en las condiciones consideradas.

El esquema de control en cascada desarrollado mostró un desempeño estable y permitió el seguimiento adecuado

de las trayectorias definidas, compensando las inestabilidades identificadas en el análisis del sistema en lazo abierto. Estos resultados indican que el modelo y la metodología empleada fueron apropiados para abordar el problema planteado.

7. Futuro del proyecto

El proyecto llamado “quadcopter”, es un proyecto actualmente perteneciente al club universitario “Physics in Silico” y como tal permanecerá tanto el código fuente como documentación, página web y cualquier otro producto oficial ligado a dicha herramienta en los repositorios del club y será administrado por el mismo. Se permite la modificación para uso individual del código fuente. No obstante, se recomienda que para proyectos universitarios o de otra índole que involucren a “quadcopter”, se pongan en contacto con los miembros del club y se opte por integrarse al mismo.

Repositorio del proyecto: GitHub

- Correo institucional: Physicsinsilico@ucr.ac.cr
- GitHub

Referencias

- [1] O. O. Patrick, E. O. Nnadi, H. C. Ajaelu, Effective use of quadcopter drones for safety and security monitoring in a building construction sites: Case study enugu metropolis nigeria, *Journal of Engineering and Technology Research* 12 (1) (2020) 37–46.
- [2] T. Luukkonen, Modelling and control of quadcopter, *Independent research project in applied mathematics*, Espoo 22 (22) (2011) 1–24.
- [3] A. Alkamachi, E. Erçelebi, Modelling and genetic algorithm based-pid control of h-shaped racing quadcopter, *Arabian Journal for Science and Engineering* 42 (7) (2017) 2777–2786.
- [4] H. Cengiz, Quadcopter modeling and linear quadratic regulator design using simulink (2024).
- [5] A. Abdulkareem, V. Oguntosin, O. M. Popoola, A. A. Idowu, Modeling and nonlinear control of a quadcopter for stabilization and trajectory tracking, *Journal of Engineering* 2022 (1) (2022) 2449901.
- [6] J. Bechhoefer, *Control theory for physicists*, Cambridge University Press, 2021.
- [7] K. J. Åström, R. Murray, *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*, Princeton university press, 2021.
- [8] M. Ononiwu, B. Prabha, Dynamic modeling and simulation of quadrotor for different flight conditions, *European Journal of Science and Technology* (18) (2019) 1–10.
- [9] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 7th Edition, Wiley, 2015.
- [10] O. Köse, T. Oktay, Dynamic modeling and simulation of quadrotor for different flight conditions, *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi* (2019).