Nicolás Valdés
RUT: 19.247.388-8
FI3104-1 2018B
27/09/18

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea 1

Problema 1

Introducción

La definición usual de la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ involucra tomar un límite, que por su naturaleza es un proceso *continuo*. Claramente al calcular derivadas con un computador, esto no es factible. Una opción simple para aproximar una derivada es

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \equiv f_1'(x), \tag{1}$$

lo cual sale a partir de hacer una expansión de Taylor para f, y despejar $f'(x)$, truncando términos de orden h o mayor. La idea es tomar un h pequeño para que esta aproximación funcione. Si uno se queda con más términos en la serie de Taylor y evalúa series de la función en distintos puntos, puede llegar a una aproximación que trunca términos de orden h^4 o mayor:

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h} \equiv f_4'(x). \tag{2}$$

Este problema se trata de comparar estas dos aproximaciones.

Metodología

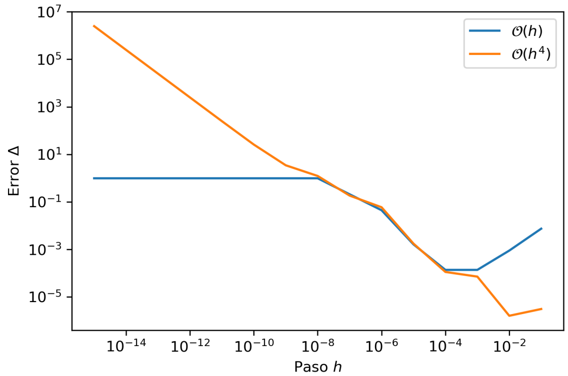
Para comparar las aproximaciones, la idea intuitiva es ver "cuán cerca" están a la derivada real de una función. Entonces hay que escoger una función y evaluar su derivada de tres maneras, en algún punto x_0. Debemos evaluar su derivada real, evaluar $f_1'(x_0)$, y evaluar $f_4'(x_0)$. Usamos $f(x) = -\cos(x)$. Sabemos, desde antes, que $f'(x_0) = \sin(x_0)$. Para ver "cuán buena" es una aproximación de $f'(x)$, calculamos $\Delta_i \equiv |f'(x_0) - f_i'(x_0)|$, donde $i \in \{1, 4\}$. Esto nos indica de alguna forma el error de un método de aproximación, y es nuestro criterio de comparación.

En el código,

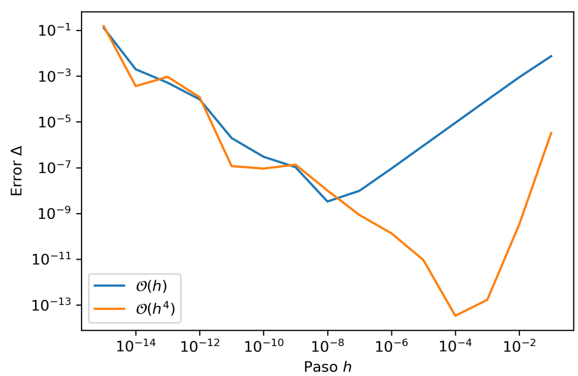
1. Definimos una función que calcula f_1'. Tiene tres argumentos: la función a derivar, el punto donde se evalúa la derivada, y el h usado en la ecuación (1). Hacemos lo mismo con f_4'.
2. Usamos $x_0 = 1.388$ (por mi RUT) y $h = (10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-15})$. Evaluamos las funciones del paso 1 en estos valores, y en la función $\cos(x)$.
3. Calculamos el error Δ_i restando las f_i del paso anterior, a la función $\sin(x_0)$ incluida en *numpy*.
4. Graficamos Δ_i como función de h, con escala logarítmica en ambos ejes.
5. Repetimos todo lo anterior, pero cambiando x_0 y h para que sean Float 32, o Float 128.

Resultados

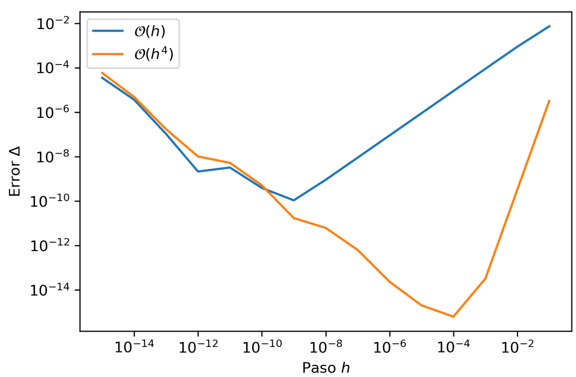
En la Figura 1 se encuentran los gráficos producidos para el error Δ, evaluado usando distintos h.



(a) Float32



(b) Float64



(c) Float128

Figura 1: Error Δ en función de h

Conclusiones

El comportamiento de Δ_i no es tan simple. Uno esperaría que el error disminuye a medida que h se hace más chico, dado que disminuye el efecto de despreciar términos de mayor orden en h. El problema es que el computador no tiene infinita precisión en los números que calcula. Por ejemplo, la precisión de float64 es del orden de 10^{-15}. Para números con muchos decimales, eventualmente el computador trunca el número. Entonces con cada método si restamos algo en el numerador, el resultado no va a ser “honesto”, va a ser algo con precisión truncada. Pero esto es dividido por un h muy pequeño, entonces este error chico se agranda. Esto se ve dramáticamente en la figura 1(a), donde el error del método $\mathcal{O}(h^4)$ alcanza 10^6. El error probablemente no aumenta más para el método $\mathcal{O}(h)$ en este caso porque el numerador simplemente arroja el valor 0, resultando en un error constante de orden 1.

Para h “grande” (i.e. $h \geq 10^{-7}$), la precisión del método $\mathcal{O}(h^4)$ suele ser mejor. Esto tiene sentido, dado que lo que hace este método es justamente despreciar menos potencias de h. Si h es “grande”, despreciar términos con h^2 ya puede tener efectos notorios, y la precisión del método $\mathcal{O}(h)$ disminuye sustancialmente. Con las figuras 1(b) y 1(c) se ve que la máxima precisión alcanzada por el método $\mathcal{O}(h)$ es en $h \approx 10^{-8}$. Esta misma precisión se alcanza con $\mathcal{O}(h^4)$ con $h \approx 10^{-2}$. Aquí se ve heurísticamente la forma en que (para h’s que el computador puede procesar) el método $\mathcal{O}(h^4)$ tiene más precisión que $\mathcal{O}(h)$. Aún si obtiene más precisión, este método es un poco más ineficiente al tener que evaluar la función en más puntos.

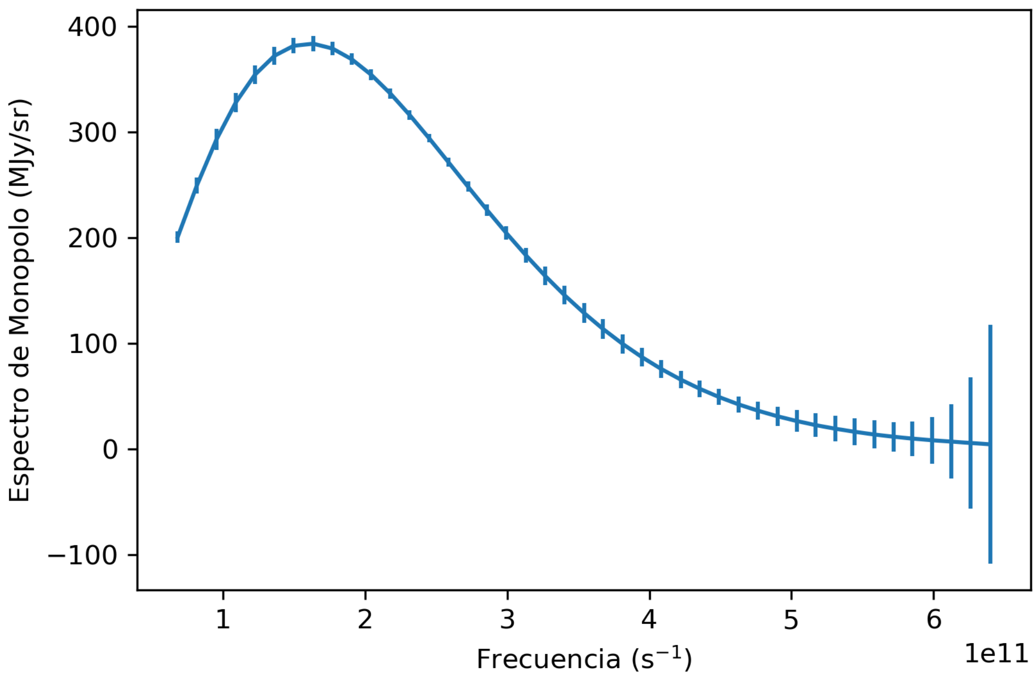


Figura 2: Espectro CMB (Barras de Error Magnificadas $\times 400$)

Problema 2

Introducción

Metodología

1. Parte 1

2. Para esta parte consideramos la integral

$$P = \frac{2h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \tag{3}$$

Como esto va a hasta infinito, no se puede hacer numéricamente de inmediato. Con un cambio de variable $y = \arctan(x)$, eso sí, traemos el infinito hacia $\pi/2$. Entonces lo que integraremos numéricamente es

$$P = \frac{2h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(y)}{\cos^5(y)(\exp(\tan(y)) - 1)} dy. \tag{4}$$

Resultados

Conclusiones