Nicolás Valdés
RUT: 19.247.388-8
FI3104-1 2018B
4/10/18

Tarea 2

Problema 1

Introducción

La catenaria
Su ecuación está dada por

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right), \tag{1}$$

donde

Metodología

Escogemos $x_0 = 0$ por conveniencia. Por el enunciado sabemos que la diferencia de altura entre el punto medio y un extremo es $H = 7{,}5$ metros. La distancia horizontal entre estos dos puntos es $L = 10$ metros. Entonces tenemos la ecuación

$$y(L) - y(0) = H \implies F(a) = 0, \tag{2}$$

donde

$$F(a) \equiv a \cosh\left(\frac{L}{a}\right) - a - H. \tag{3}$$

Entonces para encontrar a, debemos encontrar raíces de la función F.

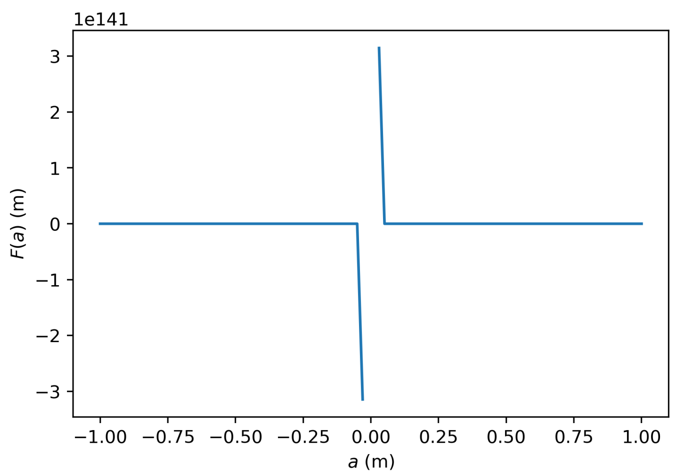

Figura 1: Gráfico de $F(a)$

Viendo el gráfico que hicimos de $F(a)$, está claro que el método de Newton no se debe usar. Se ve, primero, que diverge la función en $a = 0$, lo cuál podría causar problemas. Además, la derivada de la función es un número muy pequeño en la zona donde parece haber una raíz de la función. Dadas estas dos cosas, lo mejor parece ser utilizar el método de la bisección, comenzando con dos números positivos para evitar una posible raíz en el lado negativo, y para evitar la divergencia de F.

Resultados

El valor de a encontrado fue aproximadamente 7.667 m, y el largo ℓ necesario para la cuerda es 26.202 m.

$$a = \ell = \tag{4}$$

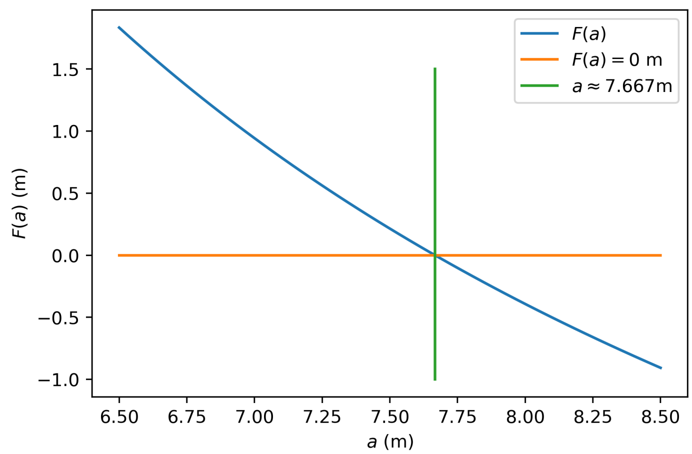

Figura 2: Cero de $F(a)$

Conclusiones

No usamos el método de Newton para encontrar raíces de F porque al tomar su derivada con respecto a a, notamos que $F'(a) = 0$ cuando

$$\tanh\left(\frac{L}{a}\right) = \frac{a}{L} \tag{5}$$

Entonces a pesar de que la convergencia del método de Newton es más rápida que la del método de bisección, este segundo método es más seguro en este caso.

Problema 2

Introducción

Las funciones de interés en este problema son

$$F_1(x, y) = x^4 + y^4 - 15 \tag{6}$$
$$F_2(x, y) = x^3y - xy^3 - y/2 - 1{,}388 \tag{7}$$

Metodología

Como indica el enunciado y como se ve en la Figura 3, el nivel cero de la función F_1 es una curva cerrada. Entonces para encontrar los ceros simultáneos de las funciones, basta con recorrer esta curva y ver en qué puntos F_2 se hace cero.

Nicolás Valdés
RUT: 19.247.388-8
FI3104-1 2018B
4/10/18

Una forma paramétrica de expresar la curva $F_1(x, y) = 0$ es

$$x(t) = \operatorname{sgn}(\sin(t)) \sqrt[4]{15 \sin^2(t))} \tag{8}$$

$$y(t) = \operatorname{sgn}(\cos(t)) \sqrt[4]{15 \cos^2(t)}, \tag{9}$$

donde el $x(t)$ está indicado en el enunciado, y el $y(t)$ se puede deducir por la identidad trigonométrica fundamental. El factor de $\sqrt[4]{15}$ es para cancelar el -15 al final de la función. Se puede verificar fácilmente entonces que al reemplazar esta curva en $F_1(x, y)$, se obtiene 0. Aquí el parámetro $t \in [0, 2\pi]$.

Entonces la idea es reemplazar estos valores de $x(t)$, $y(t)$ en $F_2(x, y)$, para evaluar la función solamente en la curva para la cual F_1 es cero. Al encontrar los t donde se anula F_2, podemos reemplazar éstos en $x(t)$, $y(t)$ para tener los puntos explícitos.

Usamos el método de la bisección para hacer esto. Notamos de la figura 3 que hay 8 ceros relevantes, entonces hay que tener cuidado con los valores iniciales a y b en la búsqueda de ceros.

Resultados

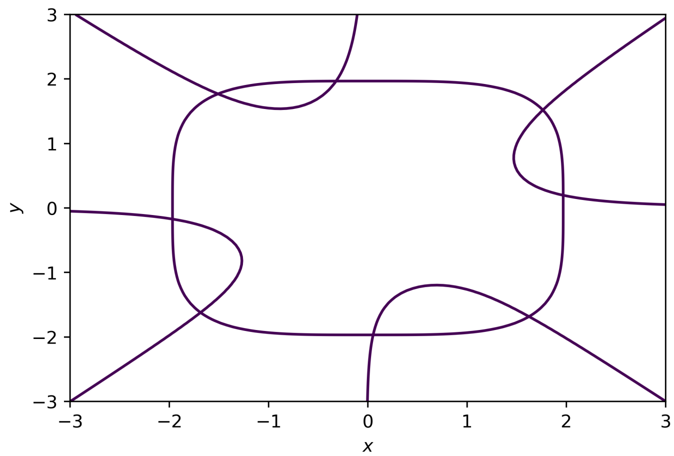

Figura 3: Ceros de $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$

En la Tabla 1 se encuentran las coordenadas (x, y) de las distintas raíces simultáneas de F_1 y F_2. Se colocan con solo 3 decimales de precisión; para mayor precisión se pueden ver los resultados del código.

Raíz	x	y
1	1.76	1.52
2	1.97	0.20
3	1.62	−1.68
4	0.05	−1.97
5	−1.69	−1.62
6	−1.97	−0.17
7	−1.51	1.77
8	−0.32	1.97

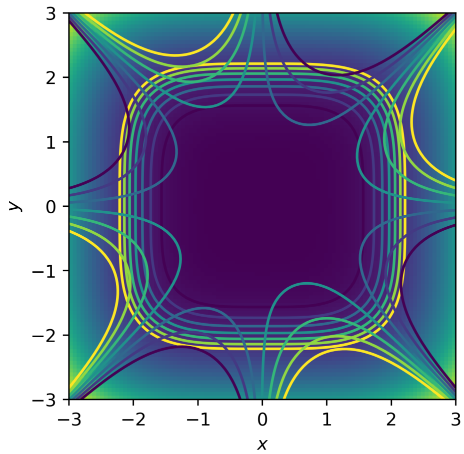

Figura 4: Gráfico de Contorno de las Funciones

Conclusiones

Mensaje Secreto

"In the beginning the Universe was created. This has made a lot of people very angry and been widely regarded as a bad move."

– Douglas Adams.

Esto lo encontré en GitHub Desktop, metiéndome a History y buscando en los distintos commits si había un mensaje secreto.