

Theoretische Physik I – Mechanik

Skript zur Vorlesung

von Prof. Dr. Schöll

Verfasser:

Franz- Josef Schmitt

Theorie: Mechanik

Klassische Mechanik im Gegensatz von Relativität, Quantenmechanik und statistischer Mechanik :

- beschreibt die Bewegung von Körpern
- ist deterministisch (aus AnfBed berechenbar)
- ist kausal (durch Kräfte verursacht)

Mechanik leistet

- einen Überblick über die physikalischen Grundbegriffe
- liefert das Paradigma einer physikalischen Theorie (als mathematisch- geometrische Struktur der Dynamik)

Die Mechanik soll nicht dargestellt sein als Mechanik von mechanischen Systemen aus Massepunkten mit Näherungen und Vernachlässigungen, die zu exakt lösbaren Problemen führen.

Mechanik soll heute den formalen Rahmen betonen

- Symmetrien und Invarianzprinzipien
- geometrische Strukturen
- Nichtlineare Theorie
- Grundlagen für andere Theorien

Die Mechanik soll verallgemeinert, kanonisch formuliert werden

- Lagrangeformalismus: Feldtheorien (E-Dynamik, Relativität)
- Hamiltonformalismus (Quantenmechanik und Statistische Mechanik)

Inhalt:

- Extremalprinzipien
- Differenzialprinzip: d'Álembertsches Prinzip
- Integralprinzip: Hamiltonsches Prinzip

- Hamiltonsche Gleichungen
- Mechanik des starren Körpers
- Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

Grundbegriffe

Kinematik und Dynamik von Systemen von Massepunkten ohne Zwangsbedingungen: Newtonsche Mechanik

Axiome Newtons

- kräftefrei = geradlinig und gleichförmig
- Beschleunigung: $\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} \propto \vec{F}$
- actio = reactio
- lineares Superpositionsprinzip (lineare Superposition von Kräften)

Bemerkungen

Körper = Massepunkt (empirisch motiviert)

Kraft = mechanische Auswirkung einer nicht näher zu spezifizierenden Wechselwirkung (Gravitation, schwach, elektromagnetisch, stark)

Theorie der Kraft ist Feldtheorie und damit nicht Gegenstand der Mechanik

Erledigt: Edynamik. Ziel: GUT

Die Definition von geradlinig und gleichförmig ist operativ. Geradlinig bestimmt den starren Maßstab und gleichförmig die absolute Zeit.(Uhr).

Dadurch werden Struktur von Raum und Zeit bestimmt.

Experimentell zeigte sich:

- Der Raum ist homogen und isotrop (3dimensional und euklidisch)
- Zeit ist universell (unendlich schnelle Signalgeschwindigkeit)

Ereignis:

Dynamische Variable: $\vec{r}(t)$ ist Bahnkurve, $\vec{v}(t) \doteq \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}$ ist Tangentialvektor

1. Newtonsches Axiom:

Es existiert ein Inertialsystem (operativ durch kräftefreie Bewegung definiert).

Galilei-Transformation leistet die generelle Trafo zwischen 2 Inertialsystemen

Bewege sich ein gestrichenes System mit v_o nach rechts und legen die Ursprünge zur Zeit t aufeinander, so gilt für die allgemeine Trafo zwischen 2 Inertialsystemen: $\{K, t\} \rightarrow \{K', t'\}$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{v}_o(t) \cdot t + \vec{s}_o$$

$$t' = t$$

Dabei bezeichnet \vec{s}_o den Koordinatenursprung des ungestrichenen Systems.

Sind die Koordinatensysteme gleichzeitig noch gegeneinander verdreht, so gilt:

$$\vec{r}(t) = \underline{\underline{R}} \vec{r}'(t) + \vec{v}_o(t) \cdot t + \vec{s}_o$$

$$t' = t$$

wobei $\underline{\underline{R}}$ die Drehmatrix bezeichnet.

Gegen diese Form der Transformation ist die Newtonsche Mechanik forminvariant: Galilei-Invarianz

2. Newtonsches Axiom

$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} \propto \vec{F}$, dabei existiert ein skalarer Faktor m , die träge Masse

man gewinnt die Bewegungsgleichung:

$$\vec{F}(\vec{r}, \frac{d}{dt}\vec{r}) = m \frac{d^2}{(dt)^2} \vec{r}$$

Dies ergibt 3 gekoppelte, nichtlineare Differenzialgleichungen

Es existiert jedoch eine eindeutige Lösung zu den Anfangsbedingungen $(t_o, \vec{r}_o) : \vec{r}(t; \vec{r}_o, t_o)$

Diese Lösung heißt Bahn oder auch Trajektorie oder Orbit.

3. Newtonsches Axiom

$$\vec{F}^{(12)} + \vec{F}^{(21)} = 0$$

Beispiel

Man betrachte 2 Massepunkte in einem Inertialsystem (ohne äußere Kräfte)

Aus Actio = Reactio folgt sofort die Impulserhaltung: (die erste Kraft wird von 2 auf 1 ausgeübt!)

$$\vec{F}^{(12)} = m^{(1)} \frac{d}{dt} \vec{v}^{(1)} = m^{(1)} \vec{a}^{(1)}$$

$$\vec{F}^{(21)} = m^{(2)} \frac{d}{dt} \vec{v}^{(2)} = m^{(2)} \vec{a}^{(2)}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(m^{(1)} \vec{v}^{(1)} + m^{(2)} \vec{v}^{(2)} \right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\vec{p}^{(1)} + \vec{p}^{(2)} \right) = 0$$

$$\rightarrow \vec{p}^{(1)} + \vec{p}^{(2)} = \text{const}$$

4. Newtonsches Axiom

Kräfte haben Vektorcharakter. Damit sind sie superpositionierbar.

Kräfte entsprechen Feldern. Die entstehenden Theorien sind damit dann lineare Feldtheorien.

Jedoch ist die Bewegungsgleichung

$$\vec{F}(\vec{r}, \frac{d}{dt} \vec{r}) = m \frac{d^2}{(dt)^2} \vec{r} \text{ im Allgemeinen nichtlinear (im Ort, in der Bahnkurve r)}$$

Die einzige Ausnahme bildet der harmonische Oszi

$$\vec{F}(\vec{r}, \frac{d}{dt} \vec{r}) \propto \vec{r}$$

Das Newtonsche Gravitationsgesetz (empirisch)

$$\vec{F}^{(12)} = -g n_s^{(1)} m_s^{(2)} \frac{\vec{r}^{(1)} - \vec{r}^{(2)}}{|\vec{r}^{(1)} - \vec{r}^{(2)}|^3}$$

Dabei ist die schwere Masse stets größer Null und gleich der trägen Masse (alle Körper fallen gleich schnell). Die schwere Masse ist Maß für die Kopplungsstärke der gravitativen Wechselwirkung. Die Träge Masse ist Maß für die Fähigkeit eines Körpers, sich dem Einfluss einer Kraft zu widersetzen, also maß für die Kopplungsstärke der Bewegung mit der wirkenden Kraft. Dass schwere und träge Masse gleich sind ist nur experimentelle Erfahrung

Wählt man schwere und träge Masse gleich

$$m_t^{(1)} = m_s^{(1)} \rightarrow g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Das d'Alembertsche Prinzip

Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Ein System von N Massepunkten hat 3N Freiheitsgrade, wenn keine Zwangsbedingungen vorliegen. Die Zahl der Freiheitsgrade wird verringert durch

Holonome (integrable) Zwangsbedingungen

Die Aufstellung der Zwangsbedingungen erfolgt derart, dass für eine Zwangsbedingung Lambda gilt:

$$f_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N) = 0 \quad l = 1, \dots, n$$

Betrachten wir als Beispiel einen Starren Körper aus 3 Teilchen, die jeweils den festen Abstand

l_{ij} einhalten, so erhalten wir 3 Zwangsbedingungen:

$$f_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l_{12} = 0$$

$$f_2 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| - l_{23} = 0$$

$$f_3 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| - l_{13} = 0$$

Die Zahl der Freiheitsgrade beträgt $f = 3N - n = 9 - 3 = 6$

Allgemein könnte man nun für einen beliebigen starren Körper aus N Teilchen annehmen:

$$f_I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N) = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| - l_{ij} = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

Jedoch sind diese Bedingungen nicht unabhängig. So gibt es für N=4 noch wie zu erwarten drei zusätzliche neue Einschränkungen. i,j kann von 1-4 laufen, 2 aus 4 sind gerade 6 Möglichkeiten und es gibt für N=4 auch genau 6 Zwangsbedingungen.

Für N=5 kommen jedoch nicht 4 neue Zwangsbedingungen hinzu, sondern lediglich drei. Hier greift die Abhängigkeit einer Zwangsbedingung mit den anderen und man kann eine Zwangsbedingung der 2 aus 5 Kombinationen weglassen. Wäre dies nicht der Fall, so würde sich die Zahl der Freiheitsgrade des starren Körpers ja auch gerade wieder reduzieren, was unsinnig scheint.

Es zeigt sich, dass für jeden Massepunkt ab N=4 genau drei neue Einschränkungen hinzukommen. Die Zahl der Freiheitsgrade bleibt ab N=3 konstant, nämlich 6.

Unabhängigkeit bedeutet, dass für alle $I = 1, \dots, n$ die Zwangsbedingungen ein linear unabhängiges Gleichungssystem bilden, also

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial f_I}{\partial r_i} \right) = n$$

Somit gibt es genau 3N-6 Freiheitsgrade für N größer/ gleich drei:

N	neue Einschränkungen	Zwangsbed (n)	Freiheitsgrade $f=3N-n$
1	0	0	3
2	1	1	5
3	2	3	6
4	3	6	6
5	3	9	6
...	3		
N>3	3	3N-6	6

Nun sucht man eine Lösung für die Bewegungsgleichung. Ohne Zwangsbedingung findet man für das i-te Teilchen eine Bahnkurve $\vec{r}_i(t)$. Alle Bahnen $\vec{r}_i(t)$ müssen nun jedoch die n unabhängigen Zwangsbedingungen erfüllen:

$$f_I(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t), \dots, \vec{r}_N(t), t) = 0 \quad I = 1, \dots, n \quad \text{für alle } t$$

Nichtholonome Zwangsbedingungen

Das totale Differenzial (längs der Bahn $\vec{r}_i(t)$) lässt sich schreiben:

$$\frac{df_I}{dt} = \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} f_I \cdot \vec{v}_i + \frac{\partial f_I}{\partial t} = 0 \quad I = 1, \dots, n$$

In differenzieller Schreibweise gewinnen wir das vollständige Differential:

$$df_I = \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} f_I \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial f_I}{\partial t} dt = 0 \quad I = 1, \dots, n$$

Nun sind jedoch Nichtholonome Zwangsbedingungen der Art:

$$\sum_{i=1}^N \vec{a}_{Ii}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \cdot d\vec{r}_i + \vec{a}_{I0}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) dt = 0 \quad I = 1, \dots, n$$

Dies ist eine Pfaffsche Differenzialform. Diese ist nicht integrierbar, was gleichbedeutend ist damit, dass kein integrierender Faktor g_I existiert, so dass

$$\sum_{i=1}^N g_I \vec{a}_{Ii}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \cdot d\vec{r}_i + g_I \vec{a}_{I0}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) dt = df_I \quad I = 1, \dots, n$$

Gleichbedeutend mit

$$g_I \vec{a}_{Ii} = \nabla_{r_i} f_I$$

$$g_I \vec{a}_{I0} = \frac{\partial f_I}{\partial t}$$

Dies kann man wieder so interpretieren, dass beliebige Positionen der Teilchen, also $\vec{r}_i(t)$ $i = 1 \dots N$ möglich sind, also $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ beliebig, jedoch ist die momentane Bewegungsrichtung eingeschränkt. Man sagt auch, die lokalen Bewegungen sind eingeschränkt (längs der Bahn $\vec{r}_i(t)$ $i = 1 \dots N$)

$$\sum_{i=1}^N \vec{a}_{Ii}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \cdot \vec{v}_i + \vec{a}_{I0}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad I = 1, \dots, n$$

Beispiel ist das Rangieren eines Autos auf einer freien Fläche. Jeder Punkt ist erreichbar, jedoch ist $d\vec{r}_i(t)$ durch die momentane Radrichtung bestimmt

Es ist weiter zu unterscheiden

Zeitabhängigkeit

- zeitabhängige Zwangsbedingungen heißen **rheonom**
- zeitunabhängige (nicht explizit zeitabhängige), starre, ZB heißen **skleronom**

Zwangsbedingungen als Ungleichungen

z.B. bei einem Gas in einem Behälter mit Wänden

Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} =: \vec{X}_i \quad i = 1 \dots N$$

diese Art ist bekannt. Auf der rechten Seite findet sich die Summe der Äußerer Kräfte, eine äußere Kraft auf das i-te Teilchen und die Summe über die inneren Kräfte durch Wechselwirkung mit den weiteren j Teilchen, die anwesend sind. Die Summe aller Kräfte nennt man "eingepreßte Kräfte".

Diese Bewegungsgleichungen sind nun jedoch unter den Nebenbedingungen

$$f_I(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N) = 0 \quad I = 1, \dots, n \quad (\text{holonom})$$

oder

$$\sum_{i=1}^N \vec{a}_{Ii}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \cdot \vec{v}_i + \vec{a}_{I0}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad I = 1, \dots, n \quad (\text{anholonom})$$

zu lösen.

Dazu soll die Beschreibung gewechselt werden.

Wir nehmen an, dass die Nebenbedingungen (Zwangsbedingungen) durch Zwangskräfte \vec{Z}_i erzwungen werden.

Damit folgt für unsere Bewegungsgleichung:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{Z}_i =: \vec{X}_i + \vec{Z}_i \quad i = 1 \dots N$$

Beim Beispiel der schiefen Ebene wirkt die Zwangskraft gerade der Normalkraft entgegen und verhindert somit das Fallen des Körpers durch die schiefe Ebene.

Es gilt:

$$\vec{Z} = mg \cos J \cdot \begin{pmatrix} \sin J \\ \cos J \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = -mg \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z} + \vec{F} = mg \sin J \cdot \begin{pmatrix} \cos J \\ -\sin J \end{pmatrix}$$

Virtuelle Verrückungen

Unter einer virtuellen Verrückung $\{\vec{dr}_i\}$ versteht man die infinitesimale Änderung der Koordinaten, die zu fester Zeit $\{dt = 0\}$ die holonomen, bzw. nicht holonomen Zwangsbedingungen erfüllen.

Damit ist der Unterschied zu einer reellen Verrückung klar, die als $d\vec{r}_i$ im Zeitintervall dt längs der Bahn geschieht.

Die Zwangsbedingungen lassen sich jedoch nicht virtuell verrücken.

Es gilt folglich

$$df_I = \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} f_I \cdot \vec{dr}_i = 0 \quad I = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{a}_{Ii}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \cdot \vec{dr}_i = 0 \quad I = 1, \dots, n$$

Die zeitabhängigen Anteile fallen raus, da ja nach Definition $\{dt = 0\}$.

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Massepunktes in einer Ebene:

$$\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o(t)) = 0$$

Dabei ist $\vec{r}_o(t)$ der Startpunkt des Teilchens, also ein fester Punkt in der Ebene und nicht notwendigerweise zeitunabhängig. \vec{a} charakterisiert den Normalenvektor auf der Ebene. Schließlich kann sich die Ebene bewegen, beispielsweise hoch und runter.

Formuliert man nun holonome Zwangsbedingungen für N Massepunkte, so gilt:

$$f(\vec{r}_i) = \vec{a} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_o(t)) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$df(\vec{r}_i) = \vec{a} \cdot (d\vec{r}_i - \vec{v}_o(t)dt) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \vec{v}_o(t) = \frac{d\vec{r}_o(t)}{dt}$$

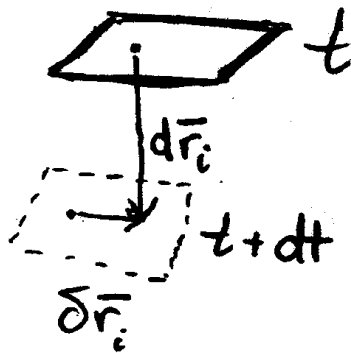
also gilt im Allgemeinen:

$$\vec{a} \cdot d\vec{r}_i = \vec{a} \cdot \vec{v}_o(t) dt \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \vec{v}_o(t) = \frac{d\vec{r}_o(t)}{dt}$$

aber:

$$d\vec{f} = \vec{a} \cdot d\vec{r}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \vec{v}_o(t) = \frac{d\vec{r}_o(t)}{dt}$$

Das heißt, die virtuellen Verrückungen geschehen alle bei festgehaltenem $\vec{r}_o(t)$. Es gilt: $d\vec{r}_i \perp \vec{a}$



1.3 D'Alembertsches Prinzip der virtuellen Arbeit

Gegeben sei ein System von N Massepunkten mit beliebigen (holonomen oder nicht holonomen) Zwangsbed.

Schreiben wir die Bewegungsgleichungen mit den Zwangskräften Z_i als:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) - \vec{X}_i = \vec{Z}_i \quad i = 1 \dots N$$

$$\rightarrow \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) - \vec{X}_i) d\vec{r}_i = \sum_i \vec{Z}_i d\vec{r}_i$$

Dabei versteht man

$$\sum_i \vec{X}_i d\vec{r}_i \text{ als virtuelle Arbeit der eingprägten Kräfte und } \sum_i \vec{Z}_i d\vec{r}_i \text{ als virtuelle Arbeit der Zwangskräfte}$$

Beispiel: Bewegung auf einer Fläche

$$f(\vec{r}_i, t) = 0$$

das ist auf der Ebene gerade durch die Normale auszudrücken:

$$\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o(t)) = 0$$

Annahme: Alle Zwangskräfte stehen senkrecht auf die Fläche:

$$\vec{Z}_i = \mathbf{I}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \nabla_{r_i} f$$

$$\nabla_{r_i} f \quad \text{z.B. } \vec{a} \text{ für Ebene}$$

Die Virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet nun:

$$\vec{Z}_i d\vec{r}_i = 0 = \mathbf{I}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \nabla_{r_i} f d\vec{r}_i = \mathbf{I}_i d\vec{f}$$

Begründung:

$\nabla_{r_i} f d\vec{r}_i$ ist als Variation der Zwangsbedingung zu verstehen:

$\nabla_{r_i} f$ ist ein Differenzial senkrecht auf die Fläche

$f d\vec{r}_i$ ein Differenzial parallel zur Fläche

Also folgt:

$$\sum_i \vec{Z}_i d\vec{r}_i = 0$$

Die reale Arbeit der Zwangskräfte verschwindet dagegen im Allgemeinen nicht:

$$\sum_i \vec{Z}_i d\vec{r}_i \neq 0$$

Beispiel: Starrer Körper

$$f_I = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| - l_{ij} := r_{ij} - l_{ij} = 0$$

Annahme: Die Zwangskräfte wirken in Richtung $\vec{r}_i - \vec{r}_j$

$$\vec{Z}_{ij} = \mathbf{l}_{ij} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}}$$

Das Vorgehen läßt sich also folgendermaßen schematisieren:

Bestimme die Richtung der Zwangskraft und multipliziere einen beliebigen skalaren Faktor mit dieser Richtung. Falls die Richtungen für verschiedene Zwangskräfte verschieden sind, so muss man diese indizieren (mit einem Index kenntlich machen). Die Zwangskräfte erhalten dann ebenso indizierte skalare Faktoren.

Mit Hilfe des 3. Newtonschen Axioms können wir weiter einschränken:

$$\vec{Z}_{ij} = -\vec{Z}_{ji} \Rightarrow \mathbf{l}_{ij} = \mathbf{l}_{ji}$$

Auf das Teilchen i wirkt also insgesamt die Zwangskraft:

$$\vec{Z}_i = \sum_{j \neq i} \vec{Z}_{ij} = \sum_j \mathbf{l}_{ij} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}}$$

$\vec{Z}_i d\vec{r}_i \neq 0$ im Allgemeinen. Es verschwindet also nicht die virtuelle Arbeit für jede Masse einzeln.

Jedoch gilt:

$$\sum_i \vec{Z}_i d\vec{r}_i = \sum_{i,j} \mathbf{l}_{ij} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathbf{l}_{ij} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathbf{l}_{ij} d r_{ij} = 0$$

Beweis:

$$d|\vec{r}| = d(\vec{r} \cdot \vec{r})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\vec{r} \cdot \vec{r})^{-\frac{1}{2}} 2\vec{r} d\vec{r} = \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r}$$

und

$$d r_{ij} = 0$$

Allgemein kann man fordern:

$$\sum_i \vec{Z}_i d\vec{r}_i = 0 \text{ für alle betrachteten Zwangskräfte.}$$

Das bedeutet: Gleitreibungskräfte längs einer Fläche sind als Zwangskräfte ausgeschlossen.

Somit folgt als d'Alembertsches Prinzip:

$$\sum_i \vec{Z}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{X}_i) \cdot d\vec{r}_i = 0$$

Das d'Alembertsche Prinzip gilt gleichermaßen für holonome und anholonome Zwangsbedingungen

Beispiel für ein Variationsprinzip:

Differentialprinzip: (für infinitesimal kleine Variationen):

Der wirklich angenommene Zustand eines Systems ist in Extremalzustand in dem Sinn, dass die gesamte virtuelle Arbeit Null ist. Dieser Zustand ist stabil gegen kleine Verrückungen der Bahn $\{d\vec{r}_i\}$.

Variationsprinzip mit Nebenbedingungen

Wir numerieren nun die Vektorkoordinaten um:

$$\vec{r} \rightarrow r_j (j=1 \dots 3)$$

$$\vec{X} \rightarrow X_j$$

$$\vec{a} \rightarrow b_j^n$$

Aus dem d'Alembertschen Prinzip gewinnen wir:

$$\sum_{i=1}^{3N} Z_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - X_i) \cdot d\vec{r}_i = 0$$

Nebenbedingung:

$$\sum_{i=1}^{3N} b_i^n d\vec{r}_i = 0 \quad n = 1, \dots, n$$

Nü charakterisiert auch hier die Zahl der Nebenbedingungen, der Index n steht für die n-te Nebenbedingung

Dies ist lösbar mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Denn: Wenn die Vektorkomponenten r_i frei variierbar wären, also $d\vec{r}_i$ beliebig, so müsste gelten:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - X_i = 0$$

Also wäre es sinnvoll, das lineare Gleichungssystem so umzuschreiben, dass ein Satz von Faktoren frei variierbar ist:

Zuerst addieren wir die Nebenbedingungen mit noch beliebigen Lagrangemultiplikatoren \vec{I}_n :

Wir erhalten:

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(m_j \ddot{r}_j - X_j - \sum_{n=1}^n \vec{I}_n b_j^n \right) d\vec{r}_j = 0$$

Nun sind $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_n$ aus den Nebenbedingungen zu eliminieren.

Die verbleibenden $d\vec{r}_{n+1}, \dots, d\vec{r}_{3N}$ sind nun frei variierbar.

Nun kann das Summenzeichen weggelassen werden, da die verbleibenden Vektorkomponenten frei variiert werden können und dementsprechend jeder Summand für sich Null sein muss:

Es lassen sich $\vec{I}_1, \dots, \vec{I}_n$ derart bestimmen, dass

$$m_j \ddot{r}_j - X_j - \sum_{n=1}^n \mathbf{I}_n b_j^n = 0 \quad j=1, \dots, n$$

Das heißt, wir suchen die $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_n$ aus diesem gegebenen linearen Gleichungssystem für die $\mathbf{I}_n(t)$ als Funktion der $\ddot{r}_j(t)$. Im stationären Fall ist dies direkt auflösbar.

$$\sum_{j=1}^{3N} \left(m_j \ddot{r}_j - X_j - \sum_{n=1}^n \mathbf{I}_n b_j^n \right) d\mathbf{r}_j = 0$$

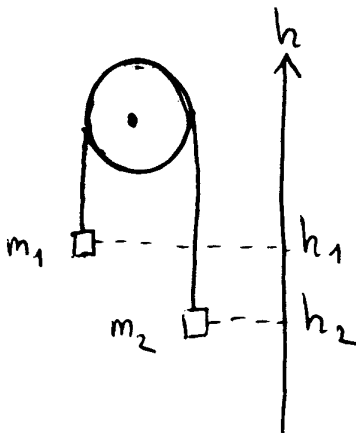
Da hier jedoch die $d\mathbf{r}_j$ frei variierbar sind, gilt:

$$m_j \ddot{r}_j - X_j - \sum_{n=1}^n \mathbf{I}_n b_j^n = 0$$

Die Lagrange- Gleichung der 1. Art

$\sum_{n=1}^n \mathbf{I}_n b_j^n$ kann als Zwangskraft interpretiert werden und taucht in der Statik als Lagrange- Parameter auf.

Beispiel Atwoodsche Fallmaschine



Aus der Schule bekannt ist die Kraft, die an m_1 angreift, nämlich $-m_1 g$ und die Kraft, die an m_2 angreift, nämlich $-m_2 g$.

Beginnen wir mit dem d'Alembertschen Prinzip:

$$\sum_i \vec{Z}_i d\vec{r}_i = \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{X}_i) d\vec{r}_i = 0$$

so folgt:

$$(m_1 \ddot{h}_1 - X_1) dh_1 + (m_2 \ddot{h}_2 - X_2) dh_2 = 0$$

Da der Aufbau nur ein Rädchen besitzt gilt ganz einfach:

$$h_1 + h_2 = \text{const.}$$

$$dh_1 = -dh_2$$

$$\ddot{h}_1 = -\ddot{h}_2$$

Also folgt:

$$(m_1 \ddot{h}_1 + m_1 g) dh_1 - (-m_2 \dot{h}_1 + m_2 g) dh_1 = 0$$

$$m_1 \ddot{h}_1 + m_1 g + m_2 \ddot{h}_1 - m_2 g = 0$$

$$\ddot{h}_1 = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} g$$

Also: Am bedeutendsten ist das d'Alembertsche Prinzip, welches sagt, dass die Summe über alle virtuellen Arbeiten der Zwangskräfte Null ist:

$$\sum_i \vec{Z}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{X}_i) \cdot d\vec{r}_i = 0$$

Generalisierte Koordinaten

Problematischerweise liegen bei holonomen Zwangsbedingungen

$$f_I(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t), \dots, \vec{r}_N(t), t) = 0 \quad I = 1, \dots, n \quad \text{für alle } t$$

gekoppelte Koordinaten vor (die Koordinaten sind in den Zwangsbedingungen gekoppelt).

Somit können die Punktkoordinaten

$\{\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t), \dots, \vec{r}_N(t)\}$ nicht unabhängig voneinander variiert werden.

Ziel:

Suche einen Satz von f unabhängigen generalisierten Koordinaten. Diese sind optimal angepasst, wenn so viele unabhängige Koordinaten wie Freiheitsgrade existieren:

$$\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)\} \quad f = 1, 2, \dots, 3N - n$$

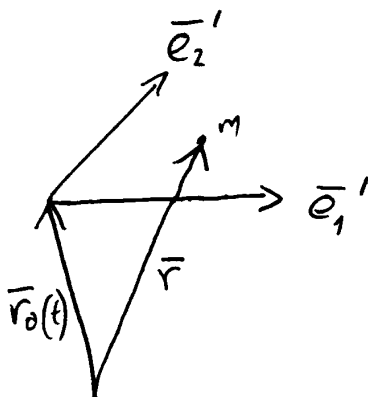
Anschließend können Bewegungsgleichungen für die $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)\} \quad f = 1, 2, \dots, 3N - n$ aus einfachen Extremalprinzipien ermittelt werden.

Wesentlich: Die $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)\} \quad f = 1, 2, \dots, 3N - n$ sind FREI variierbar! Wegen

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_f(t)) \quad f = 1, 2, \dots, 3N - n$ sind die Zwangsbedingungen identisch erfüllt.

Beispiel: Der Massenpunkt auf der bewegten Ebene:

$$\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_O(t)) = 0$$



Betrachten wir ein mitbewegtes Koordinatensystem \vec{e}_1', \vec{e}_2'

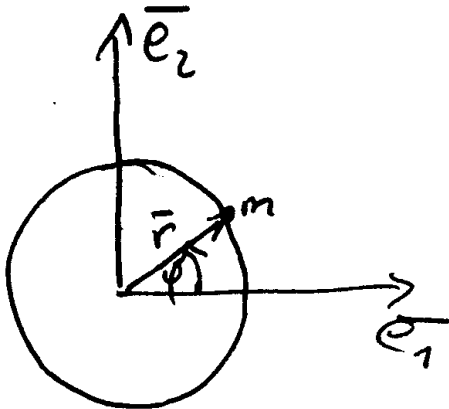
Für den Radiusvektor existiert dann eine Verallgemeinerung:

$$\vec{r} = \vec{r}_o(t) + q_1 \vec{e}'_1 + q_2 \vec{e}'_2$$

Somit existiert eine injektive Abbildung der Koordinaten und wir können als generalisierte Koordinaten bestimmen:

$$\{q_1, q_2\}, \quad f=2$$

Beispiel: Massepunkt auf Kreis mit Radius R:



$$\vec{r} = R(\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2)$$

$$q = \phi$$

$$f = 1$$

Virtuelle Verrückungen

müssen nun auch in den generalisierten Koordinaten ausgedrückt werden, also:

$d\vec{r}_i$ wird ausgedrückt durch dq_1, \dots, dq_f

$$\vec{r}_i(q_1, \dots, q_f, t) \rightarrow dt = 0 \rightarrow d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j \right)$$

Betrachten wir eine reale Verrückung (in der Zeit), so gilt:

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i$$

Daraus ergibt sich jedoch die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i \right] = \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$$

Mit diesen Gleichung kann die Virtuelle Arbeit der eingepprägten Kräfte gewonnen werden:

$$\sum_i \vec{X}_i d\vec{r}_i = \sum_j \left\{ \sum_i \vec{X}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right\} dq_j = \sum_{j=1}^f Q_j dq_j$$

Somit kann man als Ausdruck für die verallgemeinerte Kraft angeben:

$$Q_j = \sum_i \vec{X}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Sind die eingprägten Kräfte konservativ:

$$\vec{X}_i = -\nabla_{\vec{r}_i} V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

So folgt:

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_{\vec{r}_i} V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{X}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

Somit besitzen auch die verallgemeinerten Kräfte ein Potenzial, natürlich das physikalisch gleiche wie die eingprägten Kräfte !

1.5 Lagrangegleichungen 2. Art

Betrachten wir wieder das d'Alembertsche Prinzip:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i d\vec{r}_i = \sum_i \vec{X}_i d\vec{r}_i = \sum_j Q_j dq_j$$

Linke Seite:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i d\vec{r}_i = \sum_j \left(\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{r}_i \right) dq_j = \sum_j \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{r}_i \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \vec{r}_i \right) \right\} dq_j$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i \right] = \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$$

und

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i = \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{v}_i \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{v}_i$$

Beweis für die letzte Deduktion:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial t} \vec{r}_i \\ \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{v}_i &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left\{ \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i \right\} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial t} \vec{r}_i \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die linke Seite

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i d\vec{r}_i = \sum_j \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{v}_i \right) - m_i \vec{v}_i \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \vec{v}_i \right) \right\} d\vec{q}_j$$

Ziel ist es, diese Seite durch die gesamte KINETISCHE ENERGIE auszudrücken:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$$

$$m_i \vec{v}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right)$$

$$m_i \vec{v}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right)$$

Somit folgt:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{v}_i \right) - m_i \vec{v}_i \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \vec{v}_i \right) \right\} = \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_j} T \right) \right\}$$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i d\vec{r}_i = \sum_i \vec{X}_i d\vec{r}_i = \sum_j Q_j d\vec{q}_j$$

$$\Rightarrow \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_j} T \right) - Q_j \right\} d\vec{q}_j = 0$$

Der T-abhängige Ausdruck ist jedoch in qj völlig frei variierbar. Somit ist keine lineare Abhängigkeit der Variationen über verschiedene j gegeben.

Jedes qj ist für sich frei variierbar, so dass der Ausdruck auf der linken Seite für sich Null wird:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_j} T \right) - Q_j = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_k} T \right) = Q_k \quad k=1, \dots, f$$

Lagrange- Gleichungen 2. Art:

Die Lagrangegleichungen der zweiten Art können aus dem d'Alembertschen Prinzip nur für HOLONOME Zwangsbedingungen gewonnen werden (im Gegensatz zur Lagrangegleichung erster Art).

Dies liegt daran, dass nur für HOLONOME Zwangsbedingungen generalisierte Koordinaten definiert werden können:

Spezialfall konservative Kräfte:

$$-\frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j$$

$$V(q_1, \dots, q_f, t) = V(\vec{r}_1(q_1, \dots, q_f, t), \dots, \vec{r}_N(q_1, \dots, q_f, t))$$

Dies bedingt jedoch:

$$\frac{\partial V(q_1, \dots, q_f, t)}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Wir können uns die Lagrangefunktion derart definieren, dass:

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - V$$

Es folgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Die sagenumwobene Lagrange Gleichung 2. Art für konservative Kräfte !

Anmerkung:

- die genannte Lagrange Gleichung L ist nicht eindeutig festgelegt
- $L = T - V$ ist nur EINE mögliche Form

$$T(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

-

$$T(q_k, \dot{q}_k, t) = a + \sum_{k=1}^f b_k \dot{q}_k + \sum_{k,l=1}^f c_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

- Dabei ist die kinetische Energie nur für skleronome Zwangsbedingungen eine HOMOGENE Bilinearform in \dot{q}_k ($a = b_k = 0$)

Anwendungsschema für Lagrange Gleichungen zweiter Art:

Die Atwoodsche Fallmaschine

Generalisierte Koordinate: q

$$T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}^2$$

$$V(q, \dot{q}, t) = m_1 g q + m_2 (l - q) g$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = m_1 g - m_2 g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2) \dot{q}$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{q} + m_1 g - m_2 g = 0$$

Beispiel 2:

Eine Masse m rotiert mit Winkelgeschwindigkeit w an einem Faden der Länge R_o , welcher mit Geschwindigkeit c durch ein Loch gezogen wird (rheonome Zwangsbedingung).

Generalisierte Koordinate q ist der Winkel \mathbf{j} :

$$T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}mc^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}^2(R_o - ct)^2$$

$$V(q, \dot{q}, t) = 0$$

$$L = \frac{1}{2}mc^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}^2(R_o - ct)^2$$

Dahin kommt man im Übrigen aus:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$x = (R_o - ct)\cos \mathbf{j}$$

$$\dot{x} = -c\cos \mathbf{j} - (R_o - ct)\dot{\mathbf{j}} \sin \mathbf{j} = -c\cos q - (R_o - ct)\dot{q} \sin q$$

$$y = (R_o - ct)\sin \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}(R_o - ct)^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}(R_o - ct)^2 - 2cm\dot{q}(R_o - ct)$$

$$\Rightarrow \ddot{q}(R_o - ct) = 2c\dot{q}$$

Somit haben wir eine Bewegungsgleichung für die Winkelgeschwindigkeit gefunden:

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{2c}{R_o - ct}$$

$$\int \frac{dw}{w} = 2c \int \frac{dt}{R_o - ct}$$

$$\ln w = -2 \ln(R_o - ct) + \text{const}$$

$$\ln w = \ln \frac{\text{const}}{(R_o - ct)^2}$$

$$w = \frac{\text{const}}{(R_o - ct)^2}$$

Bestimmung der Konstanten aus den Anfangsbedingungen liefert:

Drehimpuls:

$$\vec{L} = m\vec{v} \times \vec{r}$$

$$\vec{L}_o = m\mathbf{w}_o R_o^2 \quad v_o = \mathbf{w}_o R_o \quad r_o = R_o$$

andererseits:

$$\mathbf{w}_o = \frac{con\tilde{s}}{(R_o)^2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{w} = \frac{con\tilde{s}}{(R_o - ct)^2} \Rightarrow con\tilde{s} = \frac{\vec{L}_o}{m}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\vec{L}_o}{m(R_o - ct)^2} = \dot{q}$$

Durch Integration gewinnt man:

$$q = q_o + \frac{\vec{L}_o}{cm(R_o - ct)}$$

Das heißt, wie zu erwarten war, die Masse dreht sich immer schneller, je kürzer der Faden wird (Drehimpulserhaltung !)

Normalschwingungen

Anwendung: Kleine Schwingungen eines Systems von Massepunkten m_i

Die Zwangsbedingungen seien holonom und skleronom.

Außerdem sei das Potenzial beliebig

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

es existiere lediglich eine stabile Ruhelage.

Dazu wähle man generalisierte Koordinaten (f Stück) mit der Ruhelage 0

Man kann an dieses Problem herangehen, indem die potenzielle Energie um die Ruhelage entwickelt wird:

$$V(q_1, \dots, q_f) = V(0, \dots, 0) + \sum_j \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots$$

Der erste Term kann gleich Null gesetzt werden (Skalenverschiebung bei Potenzialen). Dies entspricht einer Skalenverschiebung der Energie.

Im Zweiten Term tauchen jedoch die verallgemeinerten Kräfte (von außen) auf. Wenn diese nicht existieren, so ist dieser Term ebenfalls Null:

$$V(0, \dots, 0) = 0$$

$$\sum_j \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \right)_0 q_j = 0 \quad \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} \right)_0 = -Q_j = 0$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k$$

Für kleine Schwingungen hinreichend genau erhalten wir also in niedrigster Näherung grundsätzlich harmonische Schwingungen in einem q^2 - Potenzial :

Das Potenzial ergibt eine positiv definite quadratische Form (positiv definit, da Ruhelage stabil !)

$$V(q_1, \dots, q_f) \approx \frac{1}{2} \sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \geq 0 \quad V_{jk} = V_{kj}$$

Ansatz für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 \geq 0$$

$$\vec{v}_i = \sum_j \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\sum_{j,k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \geq 0$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$T_{jk} = T_{kj} \approx \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)_0 \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)_0$$

Die Auswertung der Ableitungen des Radiusvektor an der Ruhelage (0) gilt dann als niedrigste (quadratische) Näherung für kleine Schwingungen.

Auch die kinetische Energie ist in unserem Fall nun eine positiv definite quadratische Form.

Die Lagrangegleichung 2. Art ist somit vollständig bestimmt:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,k} T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{jk} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} (\dot{q}_j \dot{q}_k) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{jk} (\mathbf{d}_{jl} \dot{q}_k + \mathbf{d}_{kl} \dot{q}_j) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{lk} \dot{q}_k + T_{lj} \dot{q}_j = \sum_k T_{lk} \dot{q}_k \quad \text{mit } T_{jl} = T_{lj}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) = \sum_k T_{lk} \ddot{q}_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = - \sum_k V_{lk} q_k$$

Einschub: Transformation auf Kugelkoordinaten:

$$(r, \mathbf{J}, \mathbf{j}) = (q_1, q_2, q_3)$$

$$x = r \cos \mathbf{j} \sin \mathbf{J}$$

$$y = r \sin \mathbf{j} \sin \mathbf{J}$$

$$z = r \cos \mathbf{J}$$

$$\vec{v} = \sum_j \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j$$

In Komponenten ergibt sich somit:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial x}{\partial j} \dot{j} = \sin J \cos j \dot{r} + r \cos J \cos j \dot{J} - r \sin J \sin j \dot{j}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial y}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial y}{\partial j} \dot{j} = \sin J \sin j \dot{r} + r \cos J \sin j \dot{J} + r \sin J \cos j \dot{j}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial z}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial z}{\partial j} \dot{j} = \cos J \dot{r} - r \sin J \dot{J}$$

Es lässt sich eine Funktionalmatrix zusammenstellen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial J} & \frac{\partial x}{\partial j} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial J} & \frac{\partial y}{\partial j} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial J} & \frac{\partial z}{\partial j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin J \cos j & r \cos J \cos j & -r \sin J \sin j \\ \sin J \sin j & r \cos J \sin j & r \sin J \cos j \\ \cos J & -r \sin J & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$T_{jk} = T_{kj} \approx \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)_0 \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)_0$$

$$T_{jk} = m \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial q_k} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \right]$$

$$T_{11} = m (\sin^2 J \cos^2 j + \sin^2 J \sin^2 j + \cos^2 J) = m$$

$$T_{22} = mr^2 (\cos^2 J \cos^2 j + \cos^2 J \sin^2 j + \sin^2 J) = mr^2$$

$$T_{33} = mr^2 (\sin^2 J \sin^2 j + \sin^2 J \cos^2 j) = mr^2 \sin^2 J$$

Diese Werte hängen dabei von den gewählten Koordinaten, also den q_j ab.

Aus diesem Grund (um dies zu erreichen) wurden ja gerade die q_j so eingeführt.

$$T_{12} = T_{21} = mr (\sin J \cos j \cos J \cos j + \sin J \sin j \cos J \sin j - \sin J \cos J) = 0$$

$$T_{13} = T_{31} = 0$$

$$T_{23} = T_{32} = 0$$

$$T_{jk} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \sin^2 J \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{J}^2 + r^2 \sin^2 J \dot{j}^2)$$

Zurück:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,k} T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{jk} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} (\dot{q}_j \dot{q}_k) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{jk} (\mathbf{d}_{jl} \dot{q}_k + \mathbf{d}_{kl} \dot{q}_j) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{lk} \dot{q}_k + T_{lj} \dot{q}_j = \sum_k T_{lk} \dot{q}_k \quad \text{mit } T_{jl} = T_{lj}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) = \sum_k T_{lk} \ddot{q}_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = - \sum_k V_{lk} q_k$$

$$\Rightarrow \sum_k T_{lk} \ddot{q}_k + V_{lk} q_k = 0 \quad l = 1, \dots, f$$

Somit haben wir ein System von f linearen Differenzialgleichungen gegeben.
Bekanntlich eignet sich als Ansatz für die Lösung:

$$q_k(t) = A_k e^{i\omega t} \quad A_k \in \mathbb{C}$$

$$\sum_k (V_{lk} - \omega^2 T_{lk}) A_k = 0$$

Dies ist eine Eigenwertgleichung für ω^2

Bei gegebenen ω^2 liegt ein lineares Gleichungssystem für die A_k vor:

Eine nichttriviale Lösung existiert aber genau dann, wenn

$$\det(V_{lk} - \omega^2 T_{lk}) = 0$$

Dies ist die charakteristische Gleichung für ω^2 , die sogenannte Säkulargleichung, ein Polynom f-ten Grades.

V_{lk}, T_{lk} positiv definit $\Rightarrow \omega^2 > 0$ für alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Beweis:

$$\sum_k (V_{lk} - \omega^2 T_{lk}) A_k = 0 \quad \left| \cdot \sum_l A_l^* \right.$$

$$\sum_{l,k} V_{lk} A_l^* A_k - \omega^2 \sum_{l,k} T_{lk} A_l^* A_k = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\sum_{l,k} V_{lk} A_l^* A_k}{\sum_{l,k} T_{lk} A_l^* A_k}$$

$$\sum_{l,k} V_{lk} A_l^* A_k = \frac{1}{2} \sum_{l,k} V_{lk} A_l^* A_k + \frac{1}{2} \sum_{l,k} V_{kl} A_k^* A_l = \frac{1}{2} \sum_{l,k} V_{lk} (A_l^* A_k + A_k^* A_l) = \frac{1}{2} \sum_{l,k} V_{lk} 2 \cdot \operatorname{Re}(A_l^* A_k)$$

Also handelt es sich hierbei um eine reelle quadratische Form. Nun sind V_{lk} und T_{lk} positiv definite Matrizen.

Zähler und Nenner sind aber reelle quadratische Formen.

Was zur Folge hat, dass $\omega^2 > 0$

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$q_k(t) = A_k e^{i\omega t} \quad A_k \in \mathbb{C}$$

$$\sum_k (V_{lk} - \omega^2 T_{lk}) A_k = 0$$

sind die Eigenfrequenzen $\omega_a^2 \quad a = 1, \dots, f$

und die Eigenvektoren $A_k^{(a)} \quad a = 1, \dots, f$

Wobei die Eigenvektoren nur bis auf einen Normierungsfaktor bestimmt sind und reell gewählt werden können.

Die allgemeine Lösung für die verallgemeinerten Koordinaten lautet:

$$q_k(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{a=1}^f C_a A_k^{(a)} e^{i\omega_a t} \right\}$$

Die C_a werden durch die Anfangsbedingungen $q_k(0), \dot{q}_k(0)$ bestimmt

Normalkoordinaten

Ziel:

Transformiere auf neue generalisierte Koordinaten, so dass die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten entkoppeln.

Seien diese neuen Koordinaten Q_j so soll gelten:

$$\ddot{Q}_j + \omega_j^2 Q_j = 0 \quad j = 1, \dots, f$$

Dies wird bekanntlich erreicht durch eine Hauptachsentransformation der symmetrischen Matrizen V_{lk} und T_{lk} . Die Transformation ist das Diagonalisierungsverfahren. Dazu werden reell gewählte Eigenvektoren

$A_k^{(a)}$ eingesetzt. In diesen müssen sich dann die generalisierten Koordinaten mit den Normalkoordinaten als Entwicklungskoeffizienten darstellen lassen:

$$q_k(t) = \sum_{a=1}^f A_k^{(a)} Q_a$$

Die diagonalisierte Matrix kann die Koordinatentransformation als Abbildung vollständig darstellen:

$$\vec{q} = \vec{A} \vec{Q} \quad \text{mit } \vec{q}, \vec{Q} \in \mathbb{R}^f$$

Bleibt zu zeigen, dass V_{lk} und T_{lk} durch das gleiche System von Eigenvektoren diagonalisiert werden: Es gelten die Eigenwertgleichungen:

$$\sum_k (V_{lk} - \omega_a^2 T_{lk}) A_k^a = 0 \quad \left| \quad \sum_l A_l^b \right.$$

$$\sum_l (V_{kl} - \omega_b^2 T_{kl}) A_l^b = 0 \quad \left| \quad \sum_k A_k^b \right.$$

$$\sum_{k,l} A_l^b (V_{lk} - V_{kl}) A_k^a - A_l^b (\mathbf{w}_a^2 T_{lk} - \mathbf{w}_b^2 T_{kl}) A_k^a = 0$$

$$V_{lk} = V_{kl}$$

$$\sum_{k,l} (\mathbf{w}_a^2 - \mathbf{w}_b^2) A_l^b T_{kl} A_k^a = 0$$

Die Annahme lautet nun noch:

$\mathbf{w}_a^2 - \mathbf{w}_b^2 \neq 0$ Die Eigenwerte sind nicht entartet, natürlich für verschiedene a/b
Somit folgt jedoch

$$\sum_{k,l} A_l^b T_{kl} A_k^a = \mathbf{d}_{ab}$$

Im wesentlichen ist dieser Ausdruck (die transformierte kinetische Energie) Null für verschiedene a und b. Bei geeigneter Normierung kann er für a=b gleich 1 gesetzt werden.

Die Trafo ist also eine verallgemeinerte orthogonale Trafo.

Es folgt wegen

$$\sum_k (V_{lk} - \mathbf{w}_a^2 T_{lk}) A_k^a = 0 \quad \left| \quad \sum_l A_l^b \right.$$

dass

$$\sum_{k,l} (A_l^b V_{lk} - \mathbf{w}_a^2 A_l^b T_{lk}) A_k^a = 0$$

$$\sum_{k,l} (A_l^b V_{lk} A_k^a) = \sum_{k,l} \mathbf{w}_a^2 A_l^b T_{lk} A_k^a = \mathbf{w}_a^2 \mathbf{d}_{ab}$$

Also werden Tlk und Vlk durch das gleiche System von Eigenvektoren diagonalisiert.

Lagrangefunktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,k} T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \right)$$

$$L = \frac{1}{2} \left(\sum_{a,b} \left(\sum_{j,k} A_j^b T_{jk} A_k^a \dot{Q}_a \dot{Q}_b - \sum_{j,k} A_j^b V_{jk} A_k^a Q_a Q_b \right) \right)$$

$$\sum_{j,k} A_j^b T_{jk} A_k^a = \mathbf{d}_{ab}$$

$$\sum_{j,k} A_j^b V_{jk} A_k^a = \mathbf{w}_a^2 \mathbf{d}_{ab}$$

$$L = \frac{1}{2} \left(\sum_a (\dot{Q}_a^2 - \mathbf{w}_a^2 Q_a^2) \right)$$

In der tat entkoppeln nun die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{Q}_a + \mathbf{w}_a^2 Q_a = 0 \quad a = 1, \dots, f$$

Beispiel: Pendel

Leicht kann man sich an einer Skizze klar machen:

$$z = l(1 - \cos \mathbf{j})$$

Als verallgemeinerte Koordinate kann man die Bogenlänge wählen:

$$q = s = \mathbf{j} l$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

$$V = mgz = mgl(1 - \cos \mathbf{j}) \approx \frac{1}{2} mgl \mathbf{j}^2 = \frac{1}{2} \frac{g}{l} m q^2$$

Die Entwicklung des Potentials kann ausführlich gezeigt werden.

Nun seien zwei Pendel über eine Feder der Federkonstante k gekoppelt:

Zwei gekoppelte Pendel

Hier nehmen wir für beide Pendel generalisierte Koordinaten:

$$q_1 = s_1 = \mathbf{j}_1 l$$

$$q_2 = s_2 = \mathbf{j}_2 l$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

$$V = mgz_1 + mgz_2 + \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2 = mgl(1 - \cos \frac{q_1}{l}) + \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2 + mgl(1 - \cos \frac{q_2}{l})$$

$$V \approx \frac{1}{2} mgl \mathbf{j}_1^2 + \frac{1}{2} mgl \mathbf{j}_2^2 + \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{g}{l} m q_1^2 + \frac{1}{2} \frac{g}{l} m q_2^2 + \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2$$

Nun kann gefordert werden:

$$V \approx \frac{1}{2} \frac{g}{l} m q_1^2 + \frac{1}{2} \frac{g}{l} m q_2^2 + \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2 = \sum_{j,k=1}^2 V_{jk} q_j q_k \quad \text{Forderung!}$$

Dies läßt sich direkt über die mehrdimensionale Taylorreihe zeigen, Mit Hilfe der Multiindizes:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \right)_0 = m \frac{g}{l} + k$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right) = mg \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sin \frac{q_2}{l} \right) - k \frac{\partial}{\partial q_1} (q_1 - q_2) = -k$$

Somit läßt sich die kinetische Energie angeben:

Somit lassen sich kinetische Energie und Potential als Matrizen angeben:

$$T_{lk} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$V_{lk} = \begin{pmatrix} m \frac{g}{l} + k & -k \\ -k & m \frac{g}{l} + k \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

$$V \approx \frac{1}{2} m g l \mathbf{j}_1^2 + \frac{1}{2} m g l \mathbf{j}_2^2 + \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{g}{l} m q_1^2 + \frac{1}{2} \frac{g}{l} m q_2^2 + \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} \frac{g}{l} m q_1^2 - \frac{1}{2} \frac{g}{l} m q_2^2 - \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich als:

$$m \ddot{q}_1 + \frac{g}{l} m q_1 + k (q_1 - q_2) = 0$$

$$m \ddot{q}_2 + \frac{g}{l} m q_2 - k (q_1 - q_2) = 0$$

Auch hier haben wir ein System gekoppelter Differenzialgleichungen.

Als Loesungsansatz wählen wir:

$$q_k = A_k e^{i \omega t}$$

Die resultierende Eigenwertgleichung lautet:

$$\begin{pmatrix} m \frac{g}{l} + k - m \omega^2 & -k \\ -k & m \frac{g}{l} + k - m \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

Aus der charakteristischen Gleichung gewinnen wir das charakteristische Polynom

$$0 = \det(V_{lk} - \omega^2 T_{lk}) = m^2 \begin{vmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$0 = \omega^4 - 2 \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right) \omega^2 + \frac{g^2}{l^2} + 2 \frac{gk}{lm} = \omega^4 - 2 \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right) \omega^2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right)^2 - \left(\frac{k}{m} \right)^2$$

$$\omega_{1,2}^2 = \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l} \right) \pm \left(\frac{k}{m} \right) = \begin{cases} \frac{g}{l} \\ \frac{g}{l} + 2 \left(\frac{k}{m} \right) \end{cases}$$

Somit kennt das System die folgenden Eigenfrequenzen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} := \omega_0$$

ungestörte Pendelfrequenz

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m}} := \sqrt{\omega_0^2 + 2 \tilde{\omega}^2}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren lauten:

$$\left(m \frac{g}{l} + k - m \omega_a^2\right) A_1^a - k A_2^a = 0$$

Somit ergibt sich mit der ungestörten Pendelfrequenz ω_1 :

$$k A_1^1 - k A_2^1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_2^1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Eigenfrequenz ω_2 ergibt sich:

$$-k A_1^2 - k A_2^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^2 \\ A_2^2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In Normalkoordinaten gilt für die Lösung des Ortes:

$$q_k(t) = A_k^1 Q_1 + A_k^2 Q_2$$

Bis auf einen konstanten Faktor.

Die Umkehrung lautet:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Mit der zu oben transponierten Matrix (Umkehrung)

Die Eigenvektoren sind so zu normieren, dass:

$$\sum_{k,l} A_l^a T_{lk} A_k^a = m \sum_k |A_k^a|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_2^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1^2 \\ A_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es folgt für die Normalkoordinaten:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} (q_1 + q_2) \quad \text{Schwerpunktskoordinaten}$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} (q_1 - q_2) \quad \text{Relativkoordinaten}$$

An Normalschwingungen existiert somit:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m}}$$

Dabei stellt ersteres die gleichphasige Schwerpunktsschwingung dar, letzteres repräsentiert die gegenphasige Relativschwingung.

In Realität haben wir es mit einer beliebigen Überlagerung von Schwerpunktsschwingung und Relativschwingung zu tun.

Dabei treten Überlagerungszustände als Schwebung auf.

In Realität erhält man eine reine Schwerpunktschwingung, wenn die Anfangsbedingungen reine Lösung der Schwerpunktskoordinaten sind.

Eine Relativschwingung ergibt sich, wenn die Anfangsbedingung exakt eine Lösung der Relativkoordinaten repräsentieren.

Das Hamiltonsche Prinzip

Variationsprinzipien

Die bisher betrachteten Variationen waren differenziell. Derart wurden sie beim d'Alembertschen Prinzip angewendet.

Differenzielle Variation: $d\vec{r}_i$

Beim Hamiltonschen Prinzip dagegen wird die gesamte Bahn variiert:

$$\vec{r}_i(t)$$

Hat man also eine Bahn gefunden, so variiert man diese, indem eine beliebige, gänzlich von der ersten Bahn verschiedene Bahn betrachtet wird.

Lediglich Anfangs- und Endpunkt zu den Messzeiten t_1 und t_2 werden festgehalten.

Skizze

Grundidee des Hamiltonschen Prinzips ist, dass die wirklich angenommene Bahn eine bestimmte Größe, nämlich die sogenannte Wirkung der Bahn, extremal macht.

Fermatsches Prinzip

Dieses Phänomen ist bei der Lichtausbreitung als Fermatsches Prinzip bekannt.

In der geometrischen Optik gibt es die Möglichkeit, einen Lichtweg zu finden, indem das Fermatsche Prinzip berücksichtigt wird. Demnach sucht sich Licht immer den kürzesten Weg in einer Anordnung von Spiegeln und brechenden Gläsern mit Brechungsindex $n(r)$

Vorsicht! Das Licht sucht sich demnach den kürzesten optischen Weg, also den Weg, der in der kürzesten Dauer zurückgelegt werden kann (Das Licht bewegt sich entlang der lichtartigen Geodäten).

Sei der Brechungsindex $n(\vec{r}) = \frac{c}{c_0}$

So gilt:

$$\delta \int_1^2 ds n(\vec{r}) = 0$$

als Bedingung an den tatsächlich zwischen 1 und 2 angenommenen Weg.

Betrachten wir ein Teilchen im kräftefreien Fall, so gilt, dass die Bewegung auf Geodäten stattfindet. Dies sind die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten, bei Kugeln beispielsweise die Großkreise.

Gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie verzerren Masseansammlungen den Raum derartig (die Metrik des Raumes), dass alle Teilchenbahnen Geodäten werden. Unabhängig davon, ob Kräfte vorliegen oder nicht.

Allgemeine Aufgabe der Variationsrechnung

Sei $I : C^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional

Beispiel: $q(t) \rightarrow I[q] := \int_{t_1}^{t_2} dt F(q(t), \dot{q}(t), t)$

Die Funktion $q(t)$ sollte zweimal stetig differenzierbar und reell sein. (Bahnkurve mit existierender Geschwindigkeit und Beschleunigung).

Die Aufgabe lautet nun:

Suche ein $q(t)$ derart, dass $\delta I[q] = 0$

Das Funktional sollte also in $q(t)$ extremal werden. Sprich, Maximum, Minimum oder Sattelpunkt aufweisen.

Die Variierten Bahnen

Eine Variierte Bahn ist dann eine Bahn, die zu jeder Zeit t mit $t_1 < t < t_2$ (eigentlich kleiner gleich) dem Punkt $q(t)$ auf der reellen Bahn einen variierten Bezugspunkt $q'(t)$ auf der variierten Bahn zuordnet.

Dabei gilt:

1. $q'(t) \in C^2$ Die variierten Punkte stammen auch aus quadratintegrablen komplexen Funktionen
2. $\delta q(t) := q'(t) - q(t)$ differenzielle Variation. Die Zeit wird nicht variiert.
3. $\delta t = 0$
4. $q'(t_1) = q(t_1)$
 $q'(t_2) = q(t_2)$ Anfangs- und Endpunkt sind fest
5. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

Da die Variation der Integrationsgrenzen verschwindet kann Integration und Variation vertauscht werden:

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt F(q, \dot{q}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta F(q, \dot{q}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right]$$

Die letzte Identität gilt, da die Variation nicht auf die Zeit bezogen werden muss (Zeit wird nicht variiert).
Für die variierte Geschwindigkeit gilt:

$$\delta \dot{q}(t) := \dot{q}'(t) - \dot{q}(t) = \frac{d}{dt}(q'(t) - q(t)) = \frac{d}{dt} \delta q$$

Also folgt mit Hilfe partieller Integration

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial F}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q \right] + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Da jedoch die Variation an den Grenzen t_1 und t_2 verschwindet gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right] \delta q = 0$$

Da q jedoch völlig frei variierbar ist:

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0$$

Dies ist die verallgemeinerte Euler-Lagrange- Gleichung der Variationsrechnung

Diese Differenzialgleichung ist äquivalent zum Integralprinzip

$$\delta I[q] = 0$$

Neben der Einführung einer bijektiven Abbildung zwischen Bahnpunkten und variierten Punkten ergibt sich auch die leichte Möglichkeit der Ableitung durch Einführung eines Variationsparameters: \mathbf{a} :

$$q(t, \mathbf{a}) = q(t) + \mathbf{a} h(t)$$

Die konkurrierende Funktion wird durch den Parameter **a** bei festem **h(t)** parametrisiert.
 Weitere Möglichkeiten sind zu finden unter „direkte Methoden der Variationsrechnung)

Exkurs zur Variationsrechnung

1. Das Extremum einer Funktion $f(x)$ bei einer Variablen

$$df(x) = f(x + dx) - f(x) = \frac{d}{dx} f(x) dx = 0 \text{ für beliebige Variationen}$$

$$dx \neq 0$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0 \text{ an } x=x_0 \text{ (Nullstelle)}$$

2. Extremum einer Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ mehrerer Variablen

$$df = f(x_1 + dx_1, \dots) - f(x_1, \dots) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) dx_i = 0 \text{ für beliebige } dx_i \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i=1, \dots, N \text{ bei } x_i = x_{i0} \text{ (Nullstellen der Funktion)}$$

entsprechend:

3. Extremum eines Funktionals

$$f[x] = f[x(t)]$$

$$x_1, \dots, x_N \rightarrow x(t)$$

$$dx_1, \dots, dx_N \rightarrow dx(t)$$

$$df = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \rightarrow df = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{df}{dx(t)} dx(t)$$

Mit $\frac{df}{dx(t)}$ als Funktionalableitung

Beispiel : Integral als Funktional

$$\text{Sei } f[x] := \int_{t_1}^{t_2} dt F(x(t))$$

$$df = f[x(t) + dx(t)] - f[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \{F(x(t) + dx(t)) - F(x(t))\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dF(x)}{dx} dx(t) \rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = \frac{df}{dx(t)} \text{ wegen } df = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \rightarrow df = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{df}{dx(t)} dx(t)$$

$$df = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dF(x)}{dx} dx(t) = 0 \text{ für beliebige } dx(t) \text{ (Extremum)}$$

Somit folgt jedoch wegen der Beliebigkeit der variierten x :

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{df}{dx(t)} = 0 \text{ als Funktionalgleichung zur Berechnung von } x(t)$$

Bei Abhängigkeit von x, \dot{x} :

$$f[x, \dot{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt F(x(t), \dot{x}(t))$$

$$df = \int_{t_1}^{t_2} dt dF(x, \dot{x}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} d\dot{x} \right\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right\} dx(t)$$

Im Extremum gilt dies wieder für beliebige Variationen $dx(t)$.

Somit gewinnt man die Euler-Lagrange- Gleichung zur Berechnung von $x(t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

Das Hamiltonsche Wirkungsprinzip

Voraussetzung:

- holonome (integrable) Zwangsbed. -> Bedingung fuer Existenz generalisierter Koordinaten (q_1, \dots, q_f)
- konservative Kräfte -> Bedingung für Existenz der Lagrange Gleichung / Lagrange Funktion
- $L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T - V$

Nehmen wir nun die Lgrange Gleichung als Funktional:

$$F = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = T - V$$

Nun ist auch das Variationsprinzip auf mehrere Variablen zu verallgemeinern:

Die entstehende Euler- Lagrange- Gleichung entspricht einer Lagrange Gleichung 2. Art
Integralprinzip entspricht dem Hamiltonschen Wirkungsprinzip

Somit erhalten wir bei Integration über die Zeit ein Wirkungsfunktional:

$$dW = 0$$

$$W := \int_{t_1}^{t_2} dt F = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt T - V$$

Bei Berechnung der Variation erhalten wir:

$$dW = 0$$

$$dW = d \int_{t_1}^{t_2} dt F = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} dq_k(t) \right\}$$

$$dW = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\} dq_k(t) = 0$$

Da auch hier wieder völlig frei in q variiert werden kann (gilt für beliebige $dq_k(t), k = 1, \dots, f$)
gilt als Lagrange Gleichung 2. Art:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Beispiel: eindimensionaler Oszi

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m \omega^2}{2} q^2$$

$$dW = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m \omega^2}{2} q^2 \right\}$$

Mit Hilfe:

$$d\dot{q}^2 = 2\dot{q}dq$$

ergibt sich:

$$dW = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ -\frac{d}{dt} m\dot{q} - m\omega^2 q \right\} dq = 0$$

$$m\ddot{q} - m\omega^2 q = 0$$

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Unterschiede zum d'Alembertschen Prinzip

Das Hamiltonsche Prinzip ist ein Integralprinzip. Das heißt, die integrierte Summe aller Variationen ist extremal, die tatsächliche Bahn (gesamte Bahn) wird also mit einer differenziell benachbarten Bahn verglichen).

Das Hamiltonsche Prinzip unterliegt dem teleologischen Prinzip. Es ist zweckgebunden. Der Zweck betrifft dabei die Eigenschaften der gesamten Bahn.

Außerdem ist das Hamiltonprinzip völlig unabhängig von der Koordinatenwahl.

Wirkung = Energie X Zeit

Wirkung = Impuls X Ort

Vergleiche dazu: Plancksches Wirkungsquantum !

Die Wirkung ist also quantisiert. Zwischen den Größen, die eine Wirkung bestimmen, entsteht eine Unschärfe. Somit ist die Wirkung quantisiert und sucht sich in der Natur ein Minimum.

Allgemein kann man das Hamiltonsche Wirkungsprinzip natürlich auch formulieren, wenn die Zwangsbedingungen beliebig (nicht holonom) sind und die eingprägten Kräfte nicht konservativ:

Seien die eingprägten Kräfte (nicht konservativer Art) von der Form:

$$\bar{X}_i$$

So gilt mit $dA = \sum_i \bar{X}_i d\bar{r}_i$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt (dT + dA) = 0$$

Eichtransformationen der Lagrangefunktion

Die Lagrangefunktion wird durch die Lagrangeleichung nicht eindeutig festgelegt.

Betrachten wir beispielsweise ein geladenes Teilchen im elektrischen Feld:

$$(q_1, q_2, q_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

e sei die Ladung

Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (q_1, q_2, q_3) = m \ddot{\vec{q}} = e \vec{E}(\vec{q}, t) + e \dot{\vec{q}} \times \vec{B}(\vec{q}, t)$$

Die Lorentzkraft ist typischerweise nicht konservativ

Die Darstellung des elektrischen und magnetischen Feldes erfolgt über die Potenziale:

$$\vec{E}(\vec{q}, t) = -\nabla \Phi(\vec{q}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{q}, t)$$

$$\vec{B}(\vec{q}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{q}, t)$$

Dabei ist Phi skalar und A ein Vektorpotenzial (MKSA- System)

Ziel: Suche eine Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t) = T - V$ in der Art, dass

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Die Bewegungsgleichung $m \frac{d^2}{dt^2} (q_1, q_2, q_3) = m \ddot{\vec{q}} = e \vec{E}(\vec{q}, t) + e \dot{\vec{q}} \times \vec{B}(\vec{q}, t)$ ergeben.

Ansatz:

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 + e \left(\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}(\vec{q}, t) - \Phi(\vec{q}, t) \right)$$

Probe:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \dot{q}_k + e A_k$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \ddot{q}_k + e \frac{d}{dt} A_k(\vec{q}(t), t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \ddot{q}_k + e \left(\frac{\partial}{\partial t} A_k + \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial q_l} \dot{q}_l \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \ddot{q}_k + e \left(\frac{\partial}{\partial t} A_k + (\dot{\vec{q}} \cdot \nabla) A_k \right)$$

Weiter:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = e \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}) - \frac{\partial}{\partial q_k} \Phi \right]$$

Somit:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m\ddot{q}_k + e \left(\frac{\partial}{\partial t} A_k + (\dot{\vec{q}} \cdot \nabla) A_k \right) - e \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}) - \frac{\partial}{\partial q_k} \Phi \right] \\
&= m\ddot{q}_k + e \left(\frac{\partial}{\partial t} A_k + \frac{\partial}{\partial q_k} \Phi \right) + e \left[-\frac{\partial}{\partial q_k} (\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}) + (\dot{\vec{q}} \cdot \nabla) A_k \right] \\
&= m\ddot{q}_k - eE_k - [e\dot{\vec{q}} \times (\nabla \times \vec{A})]_k \\
&= m\ddot{q}_k - eE_k - [e\dot{\vec{q}} \times \vec{B}]_k
\end{aligned}$$

Somit erfüllt unser Ansatz die Bewegungsgleichungen

Eichtransformationen

Die Potentiale lassen sich umeichen mit Hilfe der Eichfunktion \mathbf{C} :

$$\vec{A}(\vec{q}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{q}, t) = \vec{A}(\vec{q}, t) + \nabla \mathbf{C}(\vec{q}, t)$$

$$\Phi(\vec{q}, t) \rightarrow \Phi'(\vec{q}, t) = \Phi(\vec{q}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{C}(\vec{q}, t)$$

Durch Eisetzen sieht man schnell, dass sich die Felder nicht ändern:

$$\vec{E}'(\vec{q}, t) = -\nabla \Phi'(\vec{q}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}'(\vec{q}, t) = -\nabla \left(\Phi(\vec{q}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{C}(\vec{q}, t) \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A}(\vec{q}, t) + \nabla \mathbf{C}(\vec{q}, t)) = \vec{E}(\vec{q}, t)$$

$$\vec{B}'(\vec{q}, t) = \nabla \times \vec{A}'(\vec{q}, t) = \nabla \times (\vec{A}(\vec{q}, t) + \nabla \mathbf{C}(\vec{q}, t)) = \vec{B}(\vec{q}, t)$$

Betrachten wir die Lagrangefunktion, so ergibt sich:

$$L'(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 + e(\dot{\vec{q}} \vec{A}'(\vec{q}, t) - \Phi'(\vec{q}, t))$$

$$L'(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 + e(\dot{\vec{q}} \vec{A}(\vec{q}, t) + \dot{\vec{q}} \cdot \nabla \mathbf{C} - \Phi(\vec{q}, t) + \dot{\mathbf{C}})$$

$$L'(q, \dot{q}, t) = L + e(\dot{\mathbf{C}} + \dot{\vec{q}} \cdot \nabla \mathbf{C}) = L + \frac{d}{dt} (e\mathbf{C}(\vec{q}, t))$$

Einsetzen zeigt: L' führt zu denselben Lagrangeleichungen wie L .

Die Eichtransformation

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q, \dot{q}, t) = L + \frac{d}{dt} (M(\vec{q}, t))$$

Mit einer beliebigen Eichfunktion M (skalar) läßt die Lagrangeleichungen invariant.

Allgemein gilt:

Sei $M(\vec{q}, t) = M(q_1, \dots, q_f, t) \in C^3$ beliebig

$$L'(q, \dot{q}, t) = L + (\dot{M} + \dot{\vec{q}} \cdot \nabla M) = L + \frac{d}{dt} (M(\vec{q}, t))$$

und

$$L'(q, \dot{q}, t) = L + \sum_{k=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M}{\partial t}$$

dann erfüllen die

$\{q_k(t)\}$ das hamiltonsche Prinzip

Also:

$$\mathbf{d} \int L' dt = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d} \int L dt = 0$$

Das bedeutet, die Euler- Lagrangegleichungen sind invariant unter Transformationen der Art

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q, \dot{q}, t) = L + \frac{d}{dt}(M(\bar{q}, t))$$

mit $M(\bar{q}, t) = M(q_1, \dots, q_f, t) \in C^3$ beliebig.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial M}{\partial t} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial M}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{dM}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{l=1}^f \frac{\partial M}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial M}{\partial t} \right) = \frac{\partial M}{\partial q_k}$$

Einzigste Nebenbedingung:

$M(\bar{q}, t) = M(q_1, \dots, q_f, t) \in C^3$ darf nicht explizit von \dot{q}_k abhängen.

Beispiel: eindimensionaler Oszi

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

Beispielhafte Eichfunktion:

$$M(q) := \frac{m\omega^2}{2} q^2 \Rightarrow \frac{dM}{dt} = m\omega^2 q \dot{q}$$

$$L' = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} (q^2 - 2q\dot{q})$$

Die Lagrangegleichungen lauten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q} + m\omega^2 \dot{q}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_k} = -m\omega^2 q + m\omega^2 \dot{q}$$

Es folgt als Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Forminvarianz der Lagrangegleichung

Eine schwächere Form der Invarianz (als die Eichinvarianz) ist die Forminvarianz.

Dabei gilt als Forminvarianz:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial Q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = 0$$

Für welche Transformationen der generalisierten Koordinaten

$$F: \{q_k\} \rightarrow \{Q_k\}$$

sind nun die Lagrangegleichungen forminvariant?

Satz:

Sei $F: \{q_k\} \rightarrow \{Q_k\}$ ein C^2 -Diffeomorphismus,

also eine umkehrbare und eindeutige Abbildung und sind

F, F^{-1} beide zweimal stetig differenzierbar, dann ist

$\{Q_k(t)\}$ Lösung der Lagrangegleichung zur transformierten Lagrangefunktion:

$$\tilde{L}(Q_k, \dot{Q}_k, t) := L(f_k(Q_i, t), \sum_i \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t}, t)$$

mit

$$f_k(Q_i, t) = q_k$$

$$\sum_i \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} = \dot{q}_k$$

Diese Aussage ist äquivalent zur Aussage:

$\{q_k(t)\}$ sind Lösung der Lagrangegleichungen zu $L(q_k, \dot{q}_k, t)$

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_{l=1}^f \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_{l=1}^f \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \right) \text{ wegen}$$

$$f_k(Q_i, t) = q_k$$

$$\sum_i \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} = \dot{q}_k$$

Nun:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} &= \sum_{l=1}^f \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right] \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \right) \right\} \\ &= \sum_{l=1}^f \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right] \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial Q_k} \right) \right\} \end{aligned}$$

und auf der anderen Seite:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial Q_k} \right) \right)$$

Somit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} &= \sum_{l=1}^f \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right] \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial Q_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial Q_k} \right) \right) \right\} \\ &= \sum_{l=1}^f \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right] \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} - \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \right) \right\} = \sum_{l=1}^f \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right] - \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \right) \right\} \end{aligned}$$

Dabei bildet

$\frac{\partial q_l}{\partial Q_k}$ die Transformationsmatrix, die nichtsingulär sein muss, also $\det \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \neq 0$

Daher die Bedingung, dass

Sei $F : \{q_k\} \rightarrow \{Q_k\}$ ein C^2 -Diffeomorphismus,

also eine umkehrbare und eindeutige Abbildung und

F, F^{-1} beide zweimal stetig differenzierbar.

Nur dann ist $\{Q_k(t)\}$ Lösung der Lagrangegleichung zur transformierten Lagrangefunktion.

Denn diese Aussage ist äquivalent zu

$$Q_i = F_i(q_1, \dots, q_f, t)$$

$$q_k = f_k(Q_1, \dots, Q_f, t) \quad \text{mit} \quad \det \frac{\partial f_k}{\partial Q_i} \neq 0$$

Man sagt, die Variationsableitung

$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k}$ ist kovariant unter diffeomorphen Transformationen der generalisierten Koordinaten

Also gibt es auch unendlich viele äquivalente Sätze generalisierter Koordinaten.

Kontinuierliche Symmetrien und Erhaltungssätze

Betrachte kontinuierliche Transformationen, unter denen das physikalische System invariant ist.

In diesem Fall gibt es zu jeder kontinuierlichen Invarianz gegen infinitesimale Transformationen eine Erhaltungsgröße I (Integral der Bewegung oder auch Konstante der Bewegung), das heißt, in diesem Fall gilt:

$$\frac{dI}{dt} = 0 \text{ entlang der Bahn der angenommenen Bewegung (längs der Bahn).}$$

Dies ist die allgemeine Aussage des Theorems von Emmy Noether

Das Noether Theorem

Voraussetzung: **Autonomes**, das heißt, nicht explizit zeitabhängiges System mit f Freiheitsgraden und einer Lagrangefunktion

$$L(q_1, \dots, \dot{q}_1, \dots, t)$$

Theorem (E.Noether, 1882-1935)

Die Lagrangefunktion $L(q_1, \dots, \dot{q}_1, \dots, t)$ eines autonomen Systems sei unter der Transformation

$\bar{q} \rightarrow h^s(\bar{q})$ invariant. Dabei ist s ein eindimensionaler Parameter und $h^{s=0}(\bar{q}) = \bar{q}$ die Identität.

Dann gibt es ein Integral der Bewegung

$$I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{ds} h^s(q_i) \right)_{s=0}$$

Beweis:

Sei $\bar{q} = \bar{q}(t)$ eine Lösung der Lagrange Gleichung. Dann ist auch $\bar{q}(s, t) := h^s(\bar{q}, t)$ Lösung, das heißt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\bar{q}(s, t), \dot{\bar{q}}(s, t))}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L(\bar{q}(s, t), \dot{\bar{q}}(s, t))}{\partial q_i}$$

Invarianz der Lagrange Funktion für beliebige s:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L(\bar{q}(s, t), \dot{\bar{q}}(s, t)) &= \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \left(\frac{dq_i}{ds} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\dot{q}_i}{ds} \right) \right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) &= \sum_{i=1}^f \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{ds} h^s(q_i) \right) \right)_{s=0} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{dq_i}{ds} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{dq_i}{ds} \right) \right) \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dq_i}{ds} \right) &= \left(\frac{d\dot{q}_i}{ds} \right) \end{aligned}$$

und mit Hilfe von

$$\frac{d}{ds} L(\bar{q}(s, t), \dot{\bar{q}}(s, t)) = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \left(\frac{dq_i}{ds} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\dot{q}_i}{ds} \right) \right) = 0$$

folgt dann:

$$\frac{d}{dt} I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{d}{ds} L = 0$$

Räumliche Translationsinvarianz

Seien die Kräfte konservativ und seien keine Randbedingungen:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\bar{r}}_i^2 - V(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N)$$

Eine Translation in Richtung x ist damit eine Translation der Form:

$$h^s : \bar{r}_i \rightarrow \bar{r}_i + s \bar{e}_x \quad i = 1, \dots, N$$

Der Parameter s ist dabei beliebig.

Die Translationsinvarianz entlang der x- Achse bewirkt nun:

$$L(h^s(\bar{r}_i), \dot{\bar{r}}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\bar{r}}_i^2 - V(\bar{r}_1 + s \bar{e}_x, \dots, \bar{r}_N + s \bar{e}_x) = L(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i) \text{ Forderung!}$$

$$\frac{dL}{ds} = - \sum_{i=1}^N (\nabla_{\bar{r}_i} \cdot \bar{e}_x) V = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} V = 0 \text{ Forderung!}$$

Das bedeutet aber: es darf keine äußere Kraft in x- Richtung geben !

Für die Transformation gilt:

$$h^s(\bar{r}_i) = \bar{r}_i + s \bar{e}_x \quad i = 1, \dots, N$$

$$h^{s=0}(\bar{r}_i) = \bar{r}_i \text{ (Identität)}$$

$$\frac{d}{ds} h^s(\bar{r}_i) = \bar{e}_x$$

Für unser Integral der Bewegung gilt jedoch:

$$I = \sum_{i=1}^N \nabla_{\dot{r}_i} L \frac{dh^s}{ds} = \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot \bar{e}_x = \sum_i m_i \dot{x}_i = P_x$$

Fazit: die Translationsinvarianz in x- Richtung bestimmt die Erhaltung der x-Komponente des Gesamtimpulses. Dieser Zusammenhang ist leicht für die anderen Komponenten zu zeigen.

Dies kann auch umgekehrt betrachtet werden:

Wähle $q_1 = s$ als verallgemeinerte Koordinate:

Nun gilt die Transformation:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, \dots, q_f, t) = q_1 \bar{e}_x + \Delta \bar{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$$

mit

$q_1 \bar{e}_x$ als Schwerpunktskoordinate und

$\Delta \bar{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$ als Relativpositionen.

Es folgt:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \bar{r}_i = \bar{e}_x$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial}{\partial q_1} \bar{r}_i = \bar{e}_x \text{ wegen } \dot{\bar{r}}_i = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \bar{r}_i \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \bar{r}_i$$

Invarianz

Erhaltungssatz

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad \text{äquivalent zum Erhaltungssatz} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{const}$$

Allgemein heißt $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j$ der zur Koordinate q_j konjugierte verallgemeinerte Impuls.

Falls gilt dass $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0$, wenn also die Lagrangefunktion invariant gegen q_1 - Änderungen

ist, dann nennt man q_1 eine **zyklische** Koordinate. der zu q_1 konjugierte Impuls ist in diesem Fall eine **Erhaltungsgröße**.

Hier:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i^2 \right) = \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \dot{\bar{r}}_i$$

$$\text{mit } \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \dot{\bar{r}}_i = \bar{e}_x$$

$$p_1 = \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i \bar{e}_x = P_x$$

Verallgemeinerung auf Nichtkonservative Kräfte

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 = \sum_i \bar{X}_i \frac{\partial}{\partial q_1} \bar{r}_i = \bar{e}_x \sum_i \bar{X}_i$$

X_i kennzeichnet dabei die Kraft. Nun steht rechts also die resultierende Kraft in x- Richtung. Existiert keine resultierende Kraft in x- Richtung (Translationsinvarianz in x- Richtung), so gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 = \sum_i \bar{X}_i \frac{\partial}{\partial q_1} \bar{r}_i = \bar{e}_x \sum_i \bar{X}_i = 0$$

Invarianz sagt

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 0 \Leftrightarrow P_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = const$$

Nebenbedingung für das fehlen konservativer Kräfte (Falls Q_1 konservative Kraft ist)

$$Q_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_1} V(\bar{r}_1 + q_1 \bar{e}_x, \dots, \bar{r}_N + q_1 \bar{e}_x) = \sum_i \nabla_{r_i} V \frac{\partial}{\partial q_1} (q_1 \bar{e}_x) = \bar{e}_x \sum_i \nabla_{r_i} V = -\bar{e}_x \sum_i \bar{X}_i = 0$$

Beispiel: ein Teilchen im Potenzial $V=V(y,z)$

Das Potenzial hänge nicht von x ab: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\text{Daraus folgt: } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} = P_x = const$$

In diesem Fall existiert ein Integral der Bewegung:

$$I(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}} \cdot \frac{d\bar{h}^s}{ds} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = P_x = const$$

wegen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}} = \nabla_{\dot{\bar{r}}} L$$

$$\frac{dh^s}{ds} = \bar{e}_x$$

Beispiel: 2 Teilchen mit innerer Paarwechselwirkung

$V(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$ Das Potenzial kann auch anisotrop sein.

Es sollen keine äußeren Kräfte wirken, so dass das Potenzial unabhängig von den Schwerpunktskoordinaten wird.

Gleichzeitig soll Translationsinvarianz entlang x-, y- und z- Richtung vorliegen:

$$L(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\bar{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\bar{r}}_2^2 - V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

$$L(h^s(\bar{r}_1), h^s(\bar{r}_2), \dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{\bar{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\bar{r}}_2^2 - V((\bar{r}_1 - s\bar{e}_i) - (\bar{r}_2 - s\bar{e}_i)) = L(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dot{\bar{r}}_1, \dot{\bar{r}}_2)$$

für alle $i = x, y, z$

Somit existieren gleich drei Integrale der Bewegung:

$$I_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}_1} \bar{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}_2} \bar{e}_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = P_x = \text{const}$$

$$I_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}_1} \bar{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}_2} \bar{e}_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 = P_y = \text{const}$$

$$I_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}_1} \bar{e}_z + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}_2} \bar{e}_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} = m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2 = P_z = \text{const}$$

Dies ist, aufgrund des Fehlens äußerer Kräfte, gerade der Schwerpunkts- Erhaltungssatz:

$$M \ddot{\bar{R}} = \bar{P} = \text{const}$$

Mit den Schwerpunktskoordinaten

$$\bar{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 m_i \bar{r}_i$$

Und der Gesamtmasse

$$M := \sum_{i=1}^2 m_i$$

Räumliche Isotropie

Nebenbedingung: konservative Kräfte, keine Zwangsbedingungen

Es erfolgt eine Drehung des Bezugssystems um den Winkel $j = s$ um die z- Achse.

An einer Skizze kann man sich schnell verdeutlichen:

$$h^s : \bar{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \rightarrow \bar{r}_i' = (x_i', y_i', z_i')$$

Dabei gilt:

$$x_i' = x_i \cos s + y_i \sin s$$

$$y_i' = y_i \cos s - x_i \sin s$$

$$z_i' = z_i$$

Rotationsinvarianz für die Drehung um die z- Achse:

Betrachten wir infinitesimale Transformationen (Drehungen um die z- Achse mit kleinen Winkeln $dj = ds$

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \approx \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

Dabei gilt die rechtsseitige Taylorentwicklung für kleine Winkel. Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -s \bar{\bar{J}}_z$$

Mit $\bar{\bar{J}}_z$ als Erzeugende für infinitesimale Drehungen um die z- Achse.

Somit folgt:

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} y_i \\ -x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + s(\bar{r}_i \times \bar{e}_z)$$

Formal schreibt man:

$$\bar{r}_i' = h^s(\bar{r}_i)|_{s=0} + s \left(\frac{d}{ds} h^s(\bar{r}_i) \right)_{s=0} + O(s^2)$$

$$\text{mit } \left(\frac{d}{ds} h^s(\bar{r}_i) \right)_{s=0} = \bar{r}_i \times \bar{e}_z$$

Rotationsinvarianz der Lagrange-Funktion

$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i^2$ ist rotationsinvariant, da nur von $|\dot{\bar{r}}_i|$ abhängig und die Drehmatrix ändert die Abstände nicht.

(Drehungen sind orthogonale Transformationen).

$$L(\bar{r}_i' = h^s(\bar{r}_i), \dot{\bar{r}}_i) = L(\bar{r}_i, \dot{\bar{r}}_i)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial s} \right)_{s=0} = - \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_{s=0} = - \sum_{i=1}^N (\nabla_{\bar{r}_i} V) \left(\frac{d\bar{r}_i'}{ds} \right)_{s=0} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i (\bar{r}_i \times \bar{e}_z)$$

wegen:

$$(\nabla_{\bar{r}_i} V) = -\bar{F}_i$$

$$\left(\frac{d\bar{r}_i'}{ds} \right)_{s=0} = \left(\frac{dh^s}{ds} \right)_{s=0}$$

Als zyklische Permutation gilt dann jedoch:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial s} \right)_{s=0} = - \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_{s=0} = \bar{e}_z \cdot \sum_i (\bar{F}_i \times \bar{r}_i) = -\bar{e}_z \cdot \sum_i (\bar{r}_i \times \bar{F}_i)$$

Mit $\sum_i (\bar{r}_i \times \bar{F}_i)$ als gesamtes Drehmoment und der Tatsache, dass die z-Komponente des äußeren resultierenden

Drehmomentes verschwindet:

$$-\bar{e}_z \cdot \sum_i (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \left(\frac{\partial L}{\partial s} \right)_{s=0} = - \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_{s=0} = 0$$

Interpretation nach dem Noetherschen Theorem

$$I(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{r}}_i} \cdot \left(\frac{dh^s}{ds} \right)_{s=0} = \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i \cdot (\bar{r}_i \times \bar{e}_z) = -\bar{e}_z \cdot \sum_i (\bar{r}_i \times m_i \dot{\bar{r}}_i) = -\bar{e}_z \cdot \vec{l} = -l_z$$

Also: Rotationsinvarianz entspricht Drehimpulserhaltung

Andere Betrachtungsweise

Wähle $q_1 = \mathbf{j} = s$ als verallgemeinerte Koordinate

Trafo: $\bar{r}_i = \bar{r}_i(\mathbf{j}, q_2, \dots, q_f, t)$

$$\text{mit } \frac{\partial}{\partial q_1} \bar{r}_i = \left(\frac{d}{ds} h^s(\bar{r}_i) \right)_{s=0} = \bar{r}_i \times \bar{e}_z$$

Für infinitesimale Drehung um z-Achse.

Invarianz

Erhaltungssätze

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad \text{äquivalent zum Erhaltungssatz } p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{const}$$

Der Winkel ist also eine zyklische Variable.

Berechnet man den verallgemeinerten konjugierten Impuls zu $q_1 = \mathbf{j} = s$, so ergibt sich:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \dot{r}_i^2 = \sum_i m_i \dot{r}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \dot{r}_i = \sum_i m_i \dot{r}_i (\bar{r}_i \times \bar{e}_z) = -\bar{e}_z \sum_i (\bar{r}_i \times m_i \dot{r}_i) = -l_z$$

wegen

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \dot{r}_i = \frac{\partial}{\partial q_1} \bar{r}_i \quad \text{da} \quad \dot{r}_i = \sum_k \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

Es ergibt sich also wieder die z-Komponente des Drehimpulses als verallgemeinerter Impuls.

Nebenbedingung:

Wir betrachten hier eine passive Drehung des Koordinatensystems. Die Aktive Drehung des Koordinatensystems ist jedoch äquivalent. Das bedeutet, wir drehen aktiv alle Massenpunkte mit $\tilde{\mathbf{j}} = -\mathbf{j}$.

Dazu gehören dann die konjugierten Impulse +l_z

Beispiel:

N Teilchen mit einer inneren Paarwechselwirkung, die nur vom Abstand abhängt:

$$V(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N) = V(r_{12}, \dots, r_{ij}, \dots) \quad \text{mit } r_{ij} = |\bar{r}_i - \bar{r}_j|$$

Rotationsinvarianz gegen Drehung um **alle** Achsen:

$$\frac{\partial V(r_{12}, \dots, r_{ij}, \dots)}{\partial \mathbf{j}} = \sum_{i,j} \frac{\partial V}{\partial r_{ij}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} r_{ij} = 0 \quad \text{für beliebige Achsen, da}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} r_{ij} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} [(\bar{r}_i - \bar{r}_j)(\bar{r}_i - \bar{r}_j)]^{1/2} = \frac{1}{r_{ij}} (\bar{r}_i - \bar{r}_j) \frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} (\bar{r}_i - \bar{r}_j) = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{r_{ij}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} \bar{r}_i - \frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} \bar{r}_j \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} \bar{r}_i = \bar{r}_i \times \bar{e}_k$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{r_{ij}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} \bar{r}_i - \frac{\partial}{\partial \mathbf{j}} \bar{r}_j \right) = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_j}{r_{ij}} [(\bar{r}_i - \bar{r}_j) \times \bar{e}_k] = \frac{1}{r_{ij}} \bar{e}_k [(\bar{r}_i - \bar{r}_j) \times (\bar{r}_i - \bar{r}_j)] = 0$$

Also ist der resultierende Drehimpuls \tilde{l} eine Erhaltungsgröße

Erzeugende der infinitesimalen Drehung um z-Achse

Die infinitesimale Drehung läßt sich schreiben als:

$$\bar{r}_i' = h^s(\bar{r}_i) = (\bar{1} - s\bar{J}_z) \bar{r}_i$$

$$\text{Mit der Erzeugenden } \bar{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei einer Drehung um den endlichen Winkel \mathbf{j} gilt:

$$\bar{r}_i' = \bar{\bar{R}}_z(\mathbf{j}) \bar{r}_i = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{j} & \sin \mathbf{j} & 0 \\ -\sin \mathbf{j} & \cos \mathbf{j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{r}_i$$

Es gilt:

$$\bar{\bar{R}}_z(\mathbf{j}) = \exp(-\bar{\bar{J}}_z \mathbf{j})$$

mit Definition

$$\exp(-\bar{\bar{J}}_z \mathbf{j}) := \bar{1} + (-\bar{\bar{J}}_z \mathbf{j}) + \frac{1}{2}(-\bar{\bar{J}}_z \mathbf{j})^2 + \dots + \frac{1}{k!}(-\bar{\bar{J}}_z \mathbf{j})^k$$

Beweis:

Für

$$\bar{\bar{M}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{M}}^2 = -\bar{1}, \bar{\bar{M}}^3 = -\bar{\bar{M}}, \bar{\bar{M}}^4 = \bar{1}$$

$$\bar{\bar{M}}^{2n} = (-1)^n \bar{1}$$

$$\bar{\bar{M}}^{(2n+1)} = (-1)^n \bar{\bar{M}}$$

Mit Hilfe der Taylorreihen für Sinus und Cosinus folgt dann:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \mathbf{j} & \sin \mathbf{j} \\ -\sin \mathbf{j} & \cos \mathbf{j} \end{pmatrix} &= \bar{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathbf{j}^{2n} - \bar{\bar{M}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \mathbf{j}^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \bar{\bar{M}}^{2n} \mathbf{j}^{2n} - \bar{\bar{M}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \bar{\bar{M}}^{2n+1} \mathbf{j}^{2n+1} \\ &= \exp(-\bar{\bar{M}} \mathbf{j}) \end{aligned}$$

Analog behandelbar ist die Drehung um die x-Achse

Erzeugende:

$$\bar{\bar{J}}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnen wir die Drehmatrix:

$$\bar{\bar{R}}_x(\mathbf{j}) = \exp(-\bar{\bar{J}}_x \mathbf{j})$$

Bei der y- Achse gilt:

Erzeugende:

$$\bar{\bar{J}}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier gewinnen wir die Drehmatrix:

$$\bar{\bar{R}}_y(\mathbf{j}) = \exp(-\bar{\bar{J}}_y \mathbf{j})$$

Beliebige Drehungen um den Winkel \mathbf{j} mit der Drehachse \bar{n} :

$$\bar{\bar{R}}(\bar{\mathbf{j}}) = \exp\left(-\mathbf{j} \sum_{i=1}^3 n_i \bar{\bar{J}}_i\right)$$

mit $\bar{\mathbf{j}} := \mathbf{j} \bar{n}$

Die Drehmatrizen $\bar{\bar{R}}(\bar{\mathbf{j}}) = \exp\left(-\mathbf{j} \sum_{i=1}^3 n_i \bar{\bar{J}}_i\right)$ bilden nun eine 3-parametrische $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$, stetige,

diffbare $(in \mathbf{j})$ und orthogonale Gruppe.

Eine solche Gruppe heißt Lie-Gruppe oder kontinuierliche Gruppe in drei reellen Dimensionen $SO(3)$

$$SO(3) = \left\{ \bar{\bar{R}} : R^3 \rightarrow R^3 \text{ linear} \mid \bar{\bar{R}}^t \bar{\bar{R}} = 1 \mid \det \bar{\bar{R}} = 1 \right\}$$

Mit $\bar{\bar{R}}^t \bar{\bar{R}} = 1$ als Orthogonalitätsbedingung, so dass $|\bar{\bar{r}}| = |\bar{r}|$ und $\det \bar{\bar{R}} = 1$ zum Ausschluß von Raumspiegelungen.

Die Erzeugenden $\bar{\bar{J}}_i$ der Drehgruppe bilden eine Lie-Algebra mit dem Lieschen Produkt (=Kommutator):

$$[\bar{\bar{J}}_i, \bar{\bar{J}}_k] = \bar{\bar{J}}_i \bar{\bar{J}}_k - \bar{\bar{J}}_k \bar{\bar{J}}_i \quad i, k = x, y, z$$

Dabei vertauschen 2 Drehungen um unterschiedliche Achsen nicht. Das bedeutet, das Ergebnis hängt von der Reihenfolge ab !:

$$[\bar{\bar{J}}_x, \bar{\bar{J}}_y] = \bar{\bar{J}}_z$$

$$[\bar{\bar{J}}_z, \bar{\bar{J}}_x] = \bar{\bar{J}}_y \rightarrow \text{zyklische Permutation des Lieschen Produktes}$$

$$[\bar{\bar{J}}_y, \bar{\bar{J}}_z] = \bar{\bar{J}}_x$$

Zeitliche Translationsinvarianz

Die Zeit spielt in der klassischen Mechanik im Ggatz zur relativistischen Mechanik gegenüber dem Ort eine Sonderrolle.

Deshalb ist eine direkte Anwendung des Noether-Theorems nicht möglich.

Zeitliche Translationsinvarianz ist erfüllt, falls:

1. die Zwangsbedingungen die Zeit t nicht explizit enthalten:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, \dots, q_f)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{r}_i = 0 \Rightarrow \dot{\bar{r}}_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \bar{r}_i \dot{q}_j$$

Dabei ist $\frac{\partial}{\partial q_j} \bar{r}_i$ Funktion von $q_1 \dots q_f$

2. $\frac{\partial}{\partial t} L = 0$

3. Nebenbedingung: Aus der Existenz eines Potentials der eingepprägten Kräfte folgt **NICHT** automatisch die Erhaltung der Energie, da die Zwangsbedingungen die Zeit enthalten könnten.

Wenn die Zwangsbedingungen die Zeit enthalten, so ist die Energie nicht erhalten.

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k} T_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Mit

$$T_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \text{ ist abhängig von den } q_1 \dots q_f \text{ im Gegensatz zum Fall der kleinen Schwingungen,}$$

der eingangs behandelt wurde.

T ist eine homogene quadratische Funktion der $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_f$

$$\text{Also } T(\mathbf{I} \dot{q}_1, \dots, \mathbf{I} \dot{q}_f) = \mathbf{I}^2 T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$$

Nach \mathbf{I} wird partiell abgelitten, dann wird $\mathbf{I} = 1$ gesetzt.

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial T}{\partial (\mathbf{I} \dot{q}_k)} \right) \left(\frac{\partial (\mathbf{I} \dot{q}_k)}{\partial \mathbf{I}} \right) \Big|_{\mathbf{I}=1} = 2 \mathbf{I} T \Big|_{\mathbf{I}=1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial T}{\partial (\dot{q}_k)} \right) \dot{q}_k = 2T$$
$$\left(\frac{\partial (\mathbf{I} \dot{q}_k)}{\partial \mathbf{I}} \right) = \dot{q}_k$$

Obere Äquivalenz ist der sogenannte Eulersche Satz

Da V unabhängig von $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_f$ gilt auch:

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial (\dot{q}_k)} \right) \dot{q}_k = 2T$$

Zur totalen Zeitableitung von L:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \text{ und } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \text{ wegen 2. (oben)}$$

Somit:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = \frac{d}{dt} \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2 \frac{dT}{dt} \text{ wegen } \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial (\dot{q}_k)} \right) \dot{q}_k = 2T$$

Somit:

$$0 = \frac{d}{dt} (2T - L) = \frac{d}{dt} (T + V) \Rightarrow T + V = \text{konst}$$

Zeittranslationsinvarianz bedingt also Energieerhaltung !

$$\text{Oder: Skleronome Zwangsbedingungen: } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \text{ bedingen: } E = T + V = \text{constant}$$

Nebenbemerkung

Die Aussage folgt auch aus dem Noether-Theorem, wenn man noch den folgenden Trick anwendet: (Scheck, Aufgabe 2.17)

Mache t zu einer q-artigen Variablen durch eine parametrisierte Darstellung: $q_k = q_k(\mathbf{t}), t = t(\mathbf{t})$

Als Lagrangefunktion muss man sich definieren:

$$\bar{L}\left(q_k, t, \frac{dq_k}{dt}, \frac{dt}{dt}\right) = L\left(q_k, \left(\frac{dt}{dt}\right) \frac{dq_k}{dt}, t, \frac{dt}{dt}\right)$$

soll invariant unter Zeittranslationen sein:

$$h^s(\bar{q}, t) = (\bar{q}, t + s)$$

Dann gilt:

1. Hamiltonsches Prinzip auf \bar{L} angewandt:

$$0 = \mathbf{d} \int_{t_1}^{t_2} \bar{L} dt = \mathbf{d} \int_{t_1}^{t_2} L dt \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

2. Noethersches Theorem für \bar{L} :

Integral der Bewegung I:

$$I = \sum_{i=1}^{f+1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{ds} h^s(q_1, \dots, q_{f+1}) \right)_{s=0} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_{f+1}}$$

mit $\left(\frac{d}{ds} h^s(q_1, \dots, q_{f+1}) \right) = (0, \dots, 0, 1)$ f Nullen, 1 an Stelle $f+1$ mit $q_{f+1} = t$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_{f+1}} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \left(\frac{dt}{dt} \right)} = L + \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(- \frac{1}{\left(\frac{dt}{dt} \right)^2} \right) \frac{dq_k}{dt} \frac{dt}{dt} \\ &= L - \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial (\dot{q}_k)} \right) \dot{q}_k = T - V - 2T = -(T - V) \end{aligned}$$

Also Erhaltung der Energie durch zeitliche Translationsinvarianz

Das Zweikörperproblem

Hier werden die Erhaltungssätze zur Lösung der Bewegungsgleichung verwendet.

Idee:

f Freiheitsgrade $\rightarrow f$ Differenzialgleichungen 2. Ordnung

\rightarrow 2f Integrationskonstanten nötig! (jeweils zweifaches Integrieren). (Anfangsbedingungen).

\rightarrow Also existieren auch 2f Integrale der Bewegung

Falls alle 2f Integrale der Bewegung bekannt wären:

Das Zweikörperproblem

Hier werden die Erhaltungssätze zur Lösung der Bewegungsgleichung verwendet.

Idee:

f Freiheitsgrade \rightarrow f Differenzialgleichungen 2. Ordnung

\rightarrow 2f Integrationskonstanten nötig! (jeweils zweifaches Integrieren). (Anfangsbedingungen).

\rightarrow Also existieren auch 2f Integrale der Bewegung

Falls alle 2f Integrale der Bewegung bekannt wären:

$$I_r(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) = c_r \quad r = 1, \dots, 2f$$

So wäre das Problem vollständig gelöst:

$$q_k = q_k(c_1, \dots, c_{2f}, t) \quad k = 1, \dots, f$$

Also ist es das Ziel, möglichst viele Integrale der Bewegung zu finden.

Beispiel: Zweikörperproblem

2 Massen, m_1 und m_2 unter dem Einfluss ihrer inneren Wechselwirkung: $V(|r_1 - r_2|)$ (Zentralpotenzial).

Beispiel: Sonne / Erde unter Gravitationswechselwirkung

Zahl der Freiheitsgrade: $f=6$

Also: es müssten 12 Integrale der Bewegung existieren

Erhaltungssätze

1. $V(|r_1 - r_2|)$ ist translationsinvariant.

Somit ist der Impuls: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$

Der Schwerpunkt: $\vec{R} = \frac{1}{M} \vec{P}t + \vec{R}_0$ bewegt sich gleichförmig und geradlinig.

Dies folgt aus: $M\dot{\vec{R}} = \vec{P} = \text{const}$

$M := m_1 + m_2$

Somit sind 6 Integrationskonstanten gefunden: \vec{P}, \vec{R}

2. $V(|r_1 - r_2|)$ ist rotationsinvariant:

Damit ist der Drehimpuls $\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = \text{const}$

Es sind drei weitere Integrationskonstanten \vec{L} gefunden.

3. Die zeitliche Translationsinvarianz bei konservativer Kraft:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \text{const}$$

Eine Integrationskonstante E

Insgesamt sind 10 Integrale der Bewegung gefunden. Es bleiben nur 2 Integrationskonstanten, nämlich der Nullpunkt der Zeit- und Winkelskala. Diese ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

Impuls- und Drehimpulserhaltung

Lagrange- Formulierung:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Verallgemeinerte Koordinaten: Schwerpunktskoordinaten:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} := \bar{R} = \frac{1}{M} (m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2) \quad \text{Schwerpunktskoordinate}$$

$$\begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} := \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 \quad \text{Relativkoordinate}$$

Die Umkehrung liefert dann die gesuchten Größen:

$$\bar{r}_1 = \bar{R} + \frac{m_2}{M} \bar{r} \quad \bar{r}_2 = \bar{R} - \frac{m_1}{M} \bar{r}$$

$$\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\bar{r}} \quad \dot{\bar{r}}_2 = \dot{\bar{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\bar{r}}$$

$$L = \frac{M}{2} \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 - V(r)$$

Dabei bezeichnet

$r := |\bar{r}|$ den Abstand und

$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ die relative Masse

$$L = \frac{M}{2} \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 - V(r)$$

\bar{R} ist zyklische Koordinate: $\frac{\partial L}{\partial R_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_k} = M \dot{R}_k = P_k = \text{const}$ mit $k = x, y, z$

$$\Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{M} \bar{P} t + \bar{R}_0$$

Verwende das Schwerpunktsystem als Inertialsystem:

o.B.d.A: $\bar{R} = \dot{\bar{R}} = 0$

Damit ergibt sich die vereinfachte Lagrange Gleichung

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 - V(r)$$

mit:

$$\bar{r}_1 = + \frac{m_2}{M} \bar{r} \quad \bar{r}_2 = - \frac{m_1}{M} \bar{r}$$

$$\dot{\bar{r}}_1 = + \frac{m_2}{M} \dot{\bar{r}} \quad \dot{\bar{r}}_2 = - \frac{m_1}{M} \dot{\bar{r}}$$

Der Drehimpuls berechnet sich gemäß:

$$\vec{l} = m_1 \bar{r}_1 \times \bar{v}_1 + m_2 \bar{r}_2 \times \bar{v}_2 = \left(\frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2} \right) \bar{r} \times \dot{\bar{r}} = m \bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \text{const} \quad (\text{Rotationsinvarianz})$$

Somit folgt aber auch (zyklische Vertauschbarkeit):

$$\vec{l} \cdot \vec{r} = \vec{l} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

Beide, Radiusvektor und Geschwindigkeitsvektor $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ liegen in der Ebene senkrecht zu \vec{l} (Im Schwerpunktsystem).

Übergang zu Polarkoordinaten. Wir legen das Koordinatensystem so, dass der Drehimpuls parallel zur z- Achse zeigt:

$$x = r \cos \mathbf{j} \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \mathbf{j} - r \dot{\mathbf{j}} \sin \mathbf{j}$$

$$y = r \sin \mathbf{j} \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \mathbf{j} + r \dot{\mathbf{j}} \cos \mathbf{j}$$

Somit:

$$\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dots = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\mathbf{j}}^2$$

Nun wählen wir neue verallgemeinerte Koordinaten statt x,y : (r, \mathbf{j})

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\mathbf{j}}^2) - V(r)$$

$$\mathbf{j} \text{ ist zyklische Koordinate: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{j}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{j}}} = m r^2 \dot{\mathbf{j}} = l = \text{const}$$

Hier: $l = l_z$, da $l_x = l_y = 0$

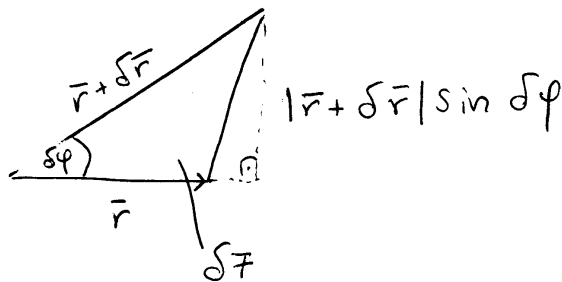
$$\text{Also: } m r^2 \dot{\mathbf{j}} = l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const}$$

Flächensatz: 2. keplersches Gesetz

Geometrische Interpretation von $m r^2 \dot{\mathbf{j}} = l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const}$:

Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Das heißt: Die Flächengeschwindigkeit ist konstant:



Für die Fläche gilt:

$$dF = \frac{1}{2} |\vec{r}| \cdot |\vec{r} + d\vec{r}| \sin d\mathbf{j} \approx \frac{1}{2} r^2 d\mathbf{j}$$

Dabei gilt die rechtsseitige Näherung für sehr kleine Änderungen in Radiusvektor und Winkel. Bleibt richtig für infinitesimale Betrachtung:

$$\frac{d}{dt} F = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{l}{2m} = \text{const}$$

Energieerhaltung und Bahngleichung

Bestimmen wir die Lagranggleichung 2. Art für den radius r:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\mathbf{j}}^2 - V'(r)$$

Somit gilt:

$$m\ddot{r} - m r \dot{\mathbf{j}}^2 + V'(r) = 0$$

Mit der Zentrifugalkraft $m r \dot{\mathbf{j}}^2$

Die Zeitableitung des Winkels können wir eliminieren durch die Bewegungskonstante l:

$$\dot{\mathbf{j}} = \frac{l}{m r^2}$$

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} + V'(r) = 0$$

1. Integral: Trick: Wir müssen die Gleichung auf zeitliche Änderung bringen. Zu diesem zweck multiplizieren wir alles mit \dot{r} :

$$m\ddot{r}\dot{r} - \frac{l^2}{m r^3} \dot{r} + \dot{r}V'(r) = 0$$

$$m\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{r}^2 \right)$$

$$\frac{l^2}{m r^3} \dot{r} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{l^2}{2 m r^2} \right)$$

$$\dot{r}V'(r) = \frac{d}{dt} V(r)$$

Somit können wir Integration über die zeit ausführen und es ergibt sich:

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2 m r^2} + V(r) = \text{const} = E \quad \text{Energieerhaltung mit } T = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2 r^2} \right) = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\mathbf{j}}^2 \right)$$

Andere Interpretation

Die Bewegung der beiden Körper ist ebenfalls als eindimensionale Bewegung in einem **effektiven Radialpotenzial**

$$\tilde{V}(r) := \frac{l^2}{2 m r^2} + V(r)$$

Dabei wird $\frac{l^2}{2 m r^2}$ als Zentrifugalbarriere bezeichnet.

$$\text{Es ergibt sich: } \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \tilde{V}(r) = \text{const} = E$$

Somit:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - \tilde{V}(r))} = \frac{dr}{dt}$$

Integration liefert:

$$\int_{r_o}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - \tilde{V}(r'))}} = \int_{t_o}^t dt'$$

Es sind somit $t(r)$ und $r(t)$ berechenbar.

Der Winkel folgt dann aus:

$$\dot{\mathbf{j}} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{l}{mr(t)^2} \text{ durch Einsetzen:}$$

$$\int_{j_o}^j d\mathbf{j}' = \int_{t_o}^t \frac{l}{mr^2(t')} dt'$$

Es ergibt sich also: $\mathbf{j}(t)$.

Die Bahngleichung wird gewonnen gemäß:

$$\frac{dr}{d\mathbf{j}} = \frac{\dot{r}}{\dot{\mathbf{j}}} = \frac{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - \tilde{V}(r))}}{l} = r^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} (E - \tilde{V}(r))}$$

Es folgt:

$$\int_{j_o}^j d\mathbf{j}' = \int_{r_o}^r dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} (E - \tilde{V}(r'))}}$$

Daraus erhält man als Bahngleichung $\mathbf{j}(r)$ bzw. $r(\mathbf{j})$.

Die Bahngleichung.

Planetenbewegung und Keplersche Gesetze

Betrachten wir speziell das Gravitationspotenzial als Wechselwirkung:

$$V(r) = - \frac{\mathbf{g} m_1 m_2}{r} \text{ mit } r = |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|$$

Somit ergibt sich ein effektives Radialpotenzial gemäß

$$\tilde{V}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad k := \mathbf{g} n_1 m > 0$$

Als Grenzwert folgt:

$$r \rightarrow 0: \tilde{V}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} \rightarrow \infty$$

$$r \rightarrow \infty: \tilde{V}(r) = -\frac{k}{r} \rightarrow 0$$

Differenziation findet ein Minimum:

$$\frac{d\tilde{V}(r)}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{l^2}{mr^3} = 0 \rightarrow r_o = \frac{l^2}{mk}$$

$$\tilde{V}(r_o) = \frac{-mk^2}{2l^2}$$

Wegen

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 = E - \tilde{V}(r) \text{ ist eine Bewegung nur f\"ur } E - \tilde{V}(r) \geq 0 \text{ m\"oglich. Also muss } E \geq \tilde{V}(r)$$

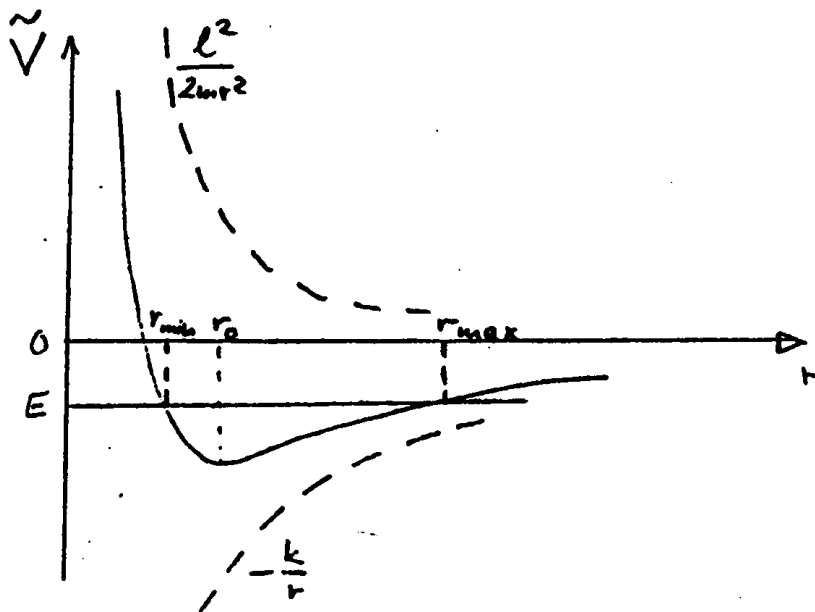
Es gilt:

$$0 > E \geq \tilde{V}(r_o) \Rightarrow 0 > E \geq \frac{-mk^2}{2l^2} : \text{Bahnen sind geschlossen (Ellipse, Spezialfall: Kreis)}$$

$E > 0$ Bahnen sind offen. (Hyperbeln)

Wir werden sehen, dass für $E=0$ eine Parabelbahn folgt.

Das Potenzial hat die folgende Gestalt:



$$\text{Für } 0 > E \geq \tilde{V}(r_o) \Rightarrow 0 > E \geq \frac{-mk^2}{2l^2}$$

$$\text{Sind die Umkehrpunkte durch } \tilde{V}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} = E$$

bestimmt (quadratisch Gleichung in r mit zwei Lösungen):

$$r_{\min/\max} = \frac{1}{2|E|} \left(k \mp \sqrt{k^2 - \frac{2l^2|E|}{m}} \right)$$

Für $E > 0$ gibt es nur noch eine Lösung für r , die positiv und damit physikalisch sinnvoll ist.

Aus

$$\tilde{V}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} = E \text{ gewinnt man den inneren Umkehrpunkt: } r_{\min} = \frac{1}{2E} \left(-k + \sqrt{k^2 + \frac{2l^2 E}{m}} \right)$$

Die Bahngleichung kann nun explizit berechnet werden:

$$\int_{j_o}^j dj' = j - j_o = \int_{r_o}^r dr' \frac{1}{r'^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} (E - \tilde{V}(r'))}} = \int_{r_o}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mk}{l^2 r'} - \frac{1}{r'^2}}}$$

Dieses Integral ist nicht leicht zu berechnen, jedoch lediglich ein mathematisches Problem. Es gelingt mit einer geschickten Substitution:

Zunächst soll der Ausdruck unter der Wurzel quadratisch ergänzt werden:

$$\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mk}{l^2 r'} - \frac{1}{r'^2} = -\left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right)^2 + \frac{m^2 k^2}{l^4} + \frac{2mE}{l^2}$$

mit

$$-\left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right)^2 + \frac{m^2 k^2}{l^4} + \frac{2mE}{l^2} := D \left[1 - \frac{1}{D} \left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right)^2 \right]$$

$$D := \frac{2m}{l^2} \left(\frac{mk^2}{2l^2} + E \right)$$

Dabei gilt:

$$\frac{mk^2}{2l^2} = \tilde{V}(r_o)$$

$$\Rightarrow D := \frac{2m}{l^2} \left(\frac{mk^2}{2l^2} + E \right) \geq 0$$

Substitution:

$$\cos J' := \frac{1}{\sqrt{D}} \left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right) \Rightarrow \frac{d \cos J}{dr'} = -\frac{1}{\sqrt{D}} \left(\frac{1}{r'^2} \right)$$

$$\frac{d \cos J}{dJ} = -\sin J' \Rightarrow -\sin J dJ = d \cos J$$

$$-\sin J' dJ = -\frac{1}{\sqrt{D}} \left(\frac{dr'}{r'^2} \right)$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{j} - \mathbf{j}_o &= \int_{r_o}^r \frac{dr'}{r'^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mk}{l^2 r'} - \frac{1}{r'^2}}} = \int_{r_o}^r \frac{dr'}{r'^2} \frac{1}{\sqrt{D \left[1 - \frac{1}{D} \left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right)^2 \right]}} = \int_{r_o}^r \frac{dr'}{r'^2} \frac{1}{\sqrt{D} \left[1 - \frac{1}{D} \left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right)^2 \right]} \\
\int_{r_o}^r \frac{dr'}{r'^2} \frac{1}{\sqrt{D} \left[1 - \frac{1}{D} \left(\frac{1}{r'} - \frac{mk}{l^2} \right)^2 \right]} &= \int_{J_0}^J dJ' \sin J' \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 J'}} = \int_{J_0}^J dJ' = J - J_0 \\
J - J_0 &= \arccos \frac{1}{\sqrt{D} \left(\frac{1}{r} - \frac{mk}{l^2} \right)} - \arccos \frac{1}{\sqrt{D} \left(\frac{1}{r_o} - \frac{mk}{l^2} \right)}
\end{aligned}$$

Also in Summary:

$$\mathbf{j} - \mathbf{j}_o = \arccos \frac{1}{\sqrt{D} \left(\frac{1}{r} - \frac{mk}{l^2} \right)} - \arccos \frac{1}{\sqrt{D} \left(\frac{1}{r_o} - \frac{mk}{l^2} \right)}$$

Eine der Integrationskonstanten,
 \mathbf{j}_o oder r_o kann frei eingesetzt werden.

Wir wählen den Winkel willkürlich:
Mit der vereinfachenden Wahl von

$$\mathbf{j}_o = \arccos \frac{1}{\sqrt{D} \left(\frac{1}{r_o} - \frac{mk}{l^2} \right)}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}(r) &= \arccos \frac{1}{\sqrt{D} \left(\frac{1}{r} - \frac{mk}{l^2} \right)} \\
\Rightarrow \frac{1}{r(\mathbf{j})} &= \frac{mk}{l^2} + \sqrt{D} \cos \mathbf{j} = \frac{mk}{l^2} (1 + \mathbf{e} \cos \mathbf{j}) \\
\text{mit } \mathbf{e} &:= \sqrt{D} \frac{l^2}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}
\end{aligned}$$

Wesentlich ist unsere Bahngleichung:

$$\frac{1}{r(\mathbf{j})} = \frac{mk}{l^2} + \sqrt{D} \cos \mathbf{j} = \frac{mk}{l^2} (1 + \mathbf{e} \cos \mathbf{j})$$

Dies ist nämlich, wie jedem Mathematiker bekannt ist, die Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten:

$\mathbf{e} > 1 \cong E > 0$ Hyperbel (offene Bahn)

$\mathbf{e} = 1 \cong E = 0$ Parabel (offene Bahn)

$\mathbf{e} < 1 \cong -\frac{mk^2}{2l^2} < E < 0$ Ellipse (geschlossene Bahn)

Für das zweidimensionale Problem ist die Umrechnung auf kartesische Koordinaten sehr einfach:

Dies ist nämlich, wie jedem Mathematiker bekannt ist, die Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten:

$$\cos \mathbf{j} = \frac{x}{r}$$

$$\sin \mathbf{j} = \frac{y}{r}$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Für $\mathbf{e} < 1$ folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{mk}{l^2} (1 + \mathbf{e} \cos \mathbf{j}) = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \mathbf{e} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \right)$$

$$1 = \frac{mk}{l^2} \left(\sqrt{(x^2 + y^2)} + \mathbf{e}x \right)$$

$$1 - \frac{mk}{l^2} \mathbf{e}x = \frac{mk}{l^2} \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$1 - \frac{2mk}{l^2} \mathbf{e}x + \frac{m^2 k^2}{l^4} \mathbf{e}^2 x^2 - \frac{m^2 k^2}{l^4} x^2 - \frac{m^2 k^2}{l^4} y^2 = 0$$

$$1 = \frac{2mk}{l^2} \mathbf{e}x + \frac{m^2 k^2}{l^4} (1 - \mathbf{e}^2) x^2 + \frac{m^2 k^2}{l^4} y^2$$

$$\left(\frac{mk}{l^2} \sqrt{1 - \mathbf{e}^2} x + \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{1 - \mathbf{e}^2}} \right)^2 - \frac{\mathbf{e}^2}{(1 - \mathbf{e}^2)} + \frac{m^2 k^2}{l^4} y^2 = 1$$

$$\left(\frac{mk}{l^2} \sqrt{1 - \mathbf{e}^2} x + \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{1 - \mathbf{e}^2}} \right)^2 + \frac{m^2 k^2}{l^4} y^2 = \frac{1}{(1 - \mathbf{e}^2)}$$

$$\left(\frac{mk}{l^2} (1 - \mathbf{e}^2) x + \mathbf{e} \right)^2 + \frac{m^2 k^2}{l^4} (1 - \mathbf{e}^2) y^2 = 1$$

$$\frac{m^2 k^2}{l^4} (1 - \mathbf{e}^2)^2 \left(x + \frac{l^2}{mk} \frac{\mathbf{e}}{(1 - \mathbf{e}^2)} \right)^2 + \frac{m^2 k^2}{l^4} (1 - \mathbf{e}^2) y^2 = 1$$

Dies kann vereinfacht werden zu:

$$\frac{(x + e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit der Exzentrizität

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit einem Brennpunkt im Ursprung.

Die Hauptachsen lauten:

$$a = \frac{l^2}{mk(1 - \mathbf{e}^2)} = \frac{k}{2|E|}$$

$$b = \frac{l^2}{mk\sqrt{1 - \mathbf{e}^2}} = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}}$$

Die relative Exzentrizität:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

e , die absolute Exzentrizität ist der absolute Abstand zwischen Mittelpunkt der Ellipse und einem Brennpunkt.

1. Keplersches Gesetz

Folgt also aus der Bewegungsgleichung mit Gravitationspotenzial bei negativen Energien:

Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einen Brennpunkt die Sonne steht.

2. Keplersches Gesetz

$$T^2 \sim a^3$$

Beweis:

Für die Fläche einer Ellipse gilt:

$$F = \pi ab$$

Wenn wir das zweite Keplersche Gesetz verwenden (Flächensatz), so gilt:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{l}{2m} = \text{const}$$

Es ergibt sich der folgende Zusammenhang mit der Umlaufzeit:

$$\int_0^T dt \frac{dF}{dt} = \frac{l}{2m} T = F = \pi ab$$

Aus der Herleitung des ersten Keplerschen Gesetzes ist bekannt:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{l^2}{mk} \Rightarrow b = \frac{l}{\sqrt{mk}} \sqrt{a}$$

$$T = \frac{2\pi ab}{l} = \frac{2\sqrt{m} \pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

Die zweiten Potenzen der Umlaufdauer sind somit nicht exakt proportional zur dritten Potenz der großen Halbachsen, da auch die Masse des Planeten noch eingeht:

$$k = G m_1 m_2$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{m}{k} = \frac{1}{G(m_1 + m_2)}$$

Falls die Planeten jedoch deutlich leichter sind als die Zentralgestirne, so gilt:

$$\frac{m}{k} \approx \frac{1}{G m_2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} \approx \frac{4\pi^2}{G m_2}$$

Leitet man dies aus dem Kraftansatz ab, so steckt der Fehler der Vernachlässigung der Planetenmasse in der Annahme einer kreisförmigen Bewegung um das Zentralgestirn. Das Ergebnis ist ebenso fehlerbelastet.

Der Hamiltonsche Kanonische Formalismus

Motivation

Die Lagrange- Theorie benutzt als dynamische Variablen die verallgemeinerten Koordinaten q_k und deren Geschwindigkeiten:

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k=1, \dots, f$$

Wir erhalten f DGL 2. Ordnung für $q_k(t)$ im Lagrangeformalismus

Bei gewissen Problemstellungen, wenn es beispielsweise zyklische Variablen gibt:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const}$$

oder auch bei bestimmten Erweiterungen der Theorie (Quantenmechanik, statistische Mechanik)

ist es vorteilhaft, statt q_k und deren Geschwindigkeiten \dot{q}_k und die zu q_k konjugierten Impulse zu benutzen.

Die zu den verallgemeinerten Koordinaten konjugierten Impulse lauten:

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Die erforderliche Variablentransformation

$$(q_k, \dot{q}_k, t) \rightarrow (q_k, p_k, t)$$

leistet die sogenannte Legendre- Transformation.

Im Hamiltonformalismus ergeben sich nun $2f$ DGL 1. Ordnung für $q_k(t)$ und $p_k(t)$

Legendre- Transformation und Hamiltonfunktion

Mathematisches Problem:

Ausgehend von einer Funktion $y = f(x)$ wobei $f(x) \equiv L, x \equiv \dot{q}_k$

Soll statt x die Variable $u = \frac{d}{dx} f(x)$

verwendet werden.

Also die Steigung von $f(x)$ am Punkt x .

Das bedeutet, wir wollen eine Funktion, die nicht von bestimmten Koordinaten x abhängt sondern nur von der Steigung der Funktion selbst, die sie in Abhängigkeit von x an diesen Stellen hätte.

$$u = \frac{d}{dx} f(x) \Rightarrow x = \mathbf{j}(u)$$

Mit der Voraussetzung

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \neq 0 \text{ Ansonsten: } u = \frac{d}{dx} f(x) = \text{const. und damit nicht umkehrbar.}$$

Die Substitution in f führt dann auf:

$$y = f(x) = f(\mathbf{j}(u)) \doteq F(u)$$

Bei dieser Trafo geht jedoch Information verloren.

Das heißt: Aus

$y = F(u)$ ist $y = f(x)$ nicht mehr eindeutig rekonstruierbar, weil alle Funktionen

$y = f(x) + a$ mit beliebigem, konstanten a wegen

$$u = \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} (f(x) + a) = \frac{df}{dx}$$

dann auf die selbe Funktion $y = F(u)$ führen:

Alle Funktionen, die die gleiche Steigung u bei x haben, führen auf das selbe $F(u)$. $y = F(u)$ ist also nicht umkehrbar.

Auf das selbe $F(u)$ führt jeweils die gesamte lineare Kurvenschar aller Funktionen $f(x)$ zzgl. eines konstanten Parameters.

deshalb wird die Legendre- Transformation, eine andere, umkehrbare, Transformation, eingeführt:

$$x \rightarrow u$$

$$y \rightarrow z = xu - f(x) = j(u)u - f(j(u)) = g(u)$$

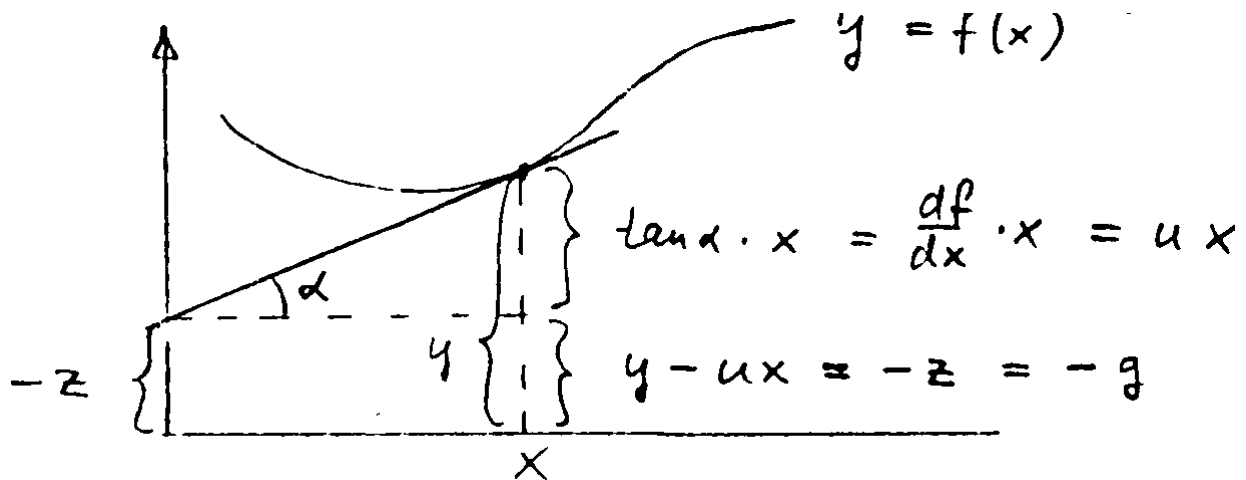
Statt der gerade genannten einfachen Variante

$$y = f(j(u))$$

Die Trafo

$$y(x) \rightarrow g(u) \text{ heißt LEGENDRE- TRANSFORMATION}$$

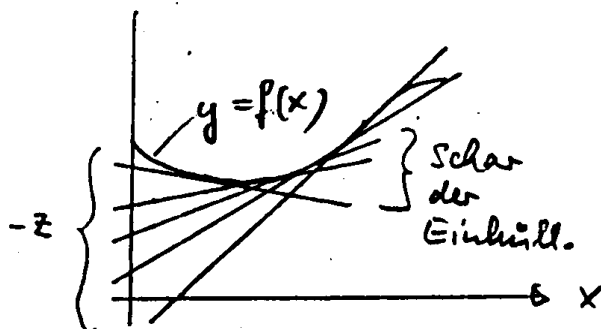
Graphische Veranschaulichung von $g(u) = x \frac{df}{dx} - f(x)$:



Das bedeutet: Die ursprüngliche Funktion $y=f(x)$ wird nach der Trafo $x \rightarrow u$ durch die Steigung u von $f(x)$ und den (negativen) Achsenabschnitt charakterisiert.

Da der Achsenabschnitt mit berücksichtigt ist, wird nicht mehr die gesamte Kurvenschar auf die gleiche $g(u)$ abgebildet. Die Abbildung ist bijektiv und damit eindeutig.

Die Werte $(u, -z)$ bestimmen die Schar der Einhüllenden von $y=f(x)$:



Man spricht deshalb von einer Legendre - oder auch Berührungstransformation.

Anwendung auf die Lagrangefunktion

$$y \equiv L$$

$$x \equiv \dot{q}$$

$$u \equiv p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$z \equiv \dot{q}p - L := H(q, p, t)$$

Die Legendretransformierte $H(q, p, t)$ heißt Hamiltonfunktion.

Die Variablen q und t werden nicht geändert.

Wichtig ist jedoch bei mehreren Variablen q_1, \dots, q_f :

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k p_k - L$$

Die mathematischen Voraussetzungen für diese Prozedur sind:

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) \in C^2$$

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} \neq 0 \quad \text{damit } p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \text{ nach } \dot{q}_k \text{ auflösbar}$$

Die Hamiltonschen Gleichungen

Ziel: Auch hier natürlich sollen Bewegungsgleichungen für die p_k, q_k gefunden werden.

Die Ableitung einer Bewegungsgleichung für q_k aus der Lagrange Gleichung 2. Art ist bereits bekannt:

Eine Variable:

Differenziale:

$$L = L(q, \dot{q}, t) : dL = \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$H = H(q, p, t) : dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$H = \dot{q}p - L \Rightarrow dH = \dot{q}dp + p d\dot{q} - dL = \dot{q}dp + p d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

wegen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$$

$$\Rightarrow dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Dies gilt fuer beliebige Differenziale in q, p und t . Somit kann die Gleichung nur erfüllt werden für

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Mit Hilfe der Lagrange Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p; \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\Rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$

Die Hamiltonschen Gleichungen sind also beide gefunden.

Es handelt sich um 2 DGLn 1. Ordnung für q und p statt 1 DGL 2. Ordnung für q(t)

Mehrere Variablen

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k p_k - L$$

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_k \dot{q}_k dp_k + \sum_k p_k d\dot{q}_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} p_k$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k; \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Somit folgen hier die Hamiltonschen Gleichungen (Kanonische Gleichungen)

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad k = 1, \dots, f$$

Der 2f- dimensionale Raum
 $\Gamma := \{q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f\}$

heißt Phasenraum.

Er findet besonders in der klassischen statistischen Mechanik Anwendung. Dabei betrachtet man Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf dem Phasenraum.

Physikalische Bedeutung der Ham- Funktion

- wegen $L = T - V$ bei holonomen Zwangsbed. und konservativen Kräften
- und wegen $p(d/dt q) = 2T$ folgt: $H = T + V$

Dies gilt bei zeitlicher Translationsinvarianz (skleronome Zwangsbed.):

$$\text{mit } \frac{\partial}{\partial t} \bar{r}_i(q_1, \dots, q_f) = 0 \text{ und } \frac{\partial}{\partial t} L = 0$$

Dann nämlich ist

$$\sum_{k=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T \quad (\text{nach dem Eulerschen Satz: } T \text{ ist quadratische, homogene Funktion der } \dot{q}_k).$$

Somit:

$$\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^f \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T - T + V = T + V$$

beschreibt die Gesamtenergie des Systems: Nur bei skleronomen Zwangsbedingungen und konservativen Kräften !

Nach dem Noether- Theorem, speziell unter dem Kapitel ZEITLICHE TRANSLATIONSINVARIANZ folgt dann Gesamtenergieerhaltung.

Dies läßt sich leicht nachweisen:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$$\text{wegen } \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Dies gilt also nur für skleronome Zwangsbedingungen. Bei rheonomen Zwangsbed. ist im Allgemeinen H nicht $T+V$!!

Beispiel: Perle an starrem rotierendem Draht:

Eine Perle der Masse m sei auf einem starren Draht, der in der $-y$ - Ebene rotiert (Reibung durch Erdpotenzial zu vernachlässigen): Generalisierte Koordinaten q ist der Abstand der Perle vom Mittelpunkt:

$$x = q \cos \omega t, \dot{x} = \dot{q} \cos \omega t - q \omega \sin \omega t$$

$$y = q \sin \omega t, \dot{y} = \dot{q} \sin \omega t + q \omega \cos \omega t$$

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + q^2 \omega^2)$$

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - q^2 \omega^2) \neq T$$

Man kann sich $H=T+V$ denken. Dabei gilt das effektive Potenzial mit $V = -mq^2 \omega^2$.

Aus $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ folgt dann ohnehin wieder ein Erhaltungssatz: $H = \text{const.}$

Typisches Anwendungsschema des Hamilton- Formalismus:

1. Zunächst sind die generalisierten Koordinaten zu wählen: $\bar{q} = (q_1, \dots, q_f)$
2. Transformation des Radiusvektors $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$
 $\dot{\bar{r}}_i = \dot{\bar{r}}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$
3. Aufstellung der Lagrange Gleichung: $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = T - V = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{\bar{r}}_i^2 - V$
4. Bestimmung der generalisierten Impulse: $p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Rightarrow p_k = p_k(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$
Umkehrung: $\dot{q}_k = \dot{q}_k(\bar{q}, \bar{p}, t)$
5. Anschließend Legendre Trafo: $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k p_k - L$
 $\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$
6. Aufstellung und Integration der kanonischen Gleichungen:
 $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad k = 1, \dots, f$

Beispiele:

1 Teilchen in Zylinderkoordinaten ganz ohne Zwangsbedingungen

1. $q_1 = r, q_2 = \phi, q_3 = z$
 $x = r \cos \phi, \dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi$
2. $y = r \sin \phi, \dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi$
 $z = z$
 $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$
3. $V = V(r, \phi, z)$
 $L = L(r, \phi, z, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$
4. Generalisierte Impulse:
 $p_r = m \dot{r}$
 $p_\phi = m r^2 \dot{\phi}$
 $p_z = m \dot{z}$

Radialimpuls, z-Komponente des Drehimpulses und z-Komponente des Impulses

$$H = m \dot{r}^2 + m r^2 \dot{\phi}^2 + m \dot{z}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + V$$

5. Aufstellung der Legendretrafo:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + V(r, \phi, z)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad k = 1, \dots, f$$

6. Kanonische Gleichungen:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad \dot{\mathbf{j}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{j}}} = \frac{p_{\mathbf{j}}}{mr^2}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_{\mathbf{j}}^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \dot{p}_{\mathbf{j}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{j}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{j}}, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Interessant ist das Ergebnis der Zentrifugalkraft (Scheinkraft):

$$F(\text{Zentrifugal}) = \frac{p_{\mathbf{j}}^2}{mr^3}, \text{ die den radialen Impuls ändert.}$$

Bekannt aus dem Keplerproblem ist uns bereits der Fall $V \propto 1/r$, ein Zentralpotenzial bei ebener Bewegung:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_{\mathbf{j}}^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \dot{p}_{\mathbf{j}} = 0, \quad \dot{p}_z = 0$$

Somit sind Drehimpuls in der Ebene und z-Impuls des Systems erhalten.

z, \mathbf{j} sind zyklische Variablen

$$p_z = \text{const.} = \text{o.B.d.A.} = 0$$

oBdA: ebene Bewegung, Drehimpulserhaltung in der Ebene

$$p_{\mathbf{j}} = \text{const.}$$

Beispiel: eindimensionaler harmonischer Oszilator:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 - \omega_o^2 q^2)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

$$H = m\dot{q} - L = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + \omega_o^2 q^2) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_o^2 q^2$$

Das System ist skleronom wegen $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, also folgt Energieerhaltung: $E = H = T + V$

$$\frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + \omega_o^2 q^2) = E = \frac{1}{2}m\left(\frac{p^2}{m^2} + \omega_o^2 q^2\right) \Rightarrow \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\left(\frac{2E}{m\omega_o^2}\right)} = 1$$

Also ist die Lösung der Phasenraumkurve eine Ellipse. Die Ellipsengröße variiert je nach Energie:

Die Halbachsen sind:

$$\sqrt{2mE} = a, b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_o^2}} \quad (\text{bestimmt durch 1. Integral}).$$

Als kanonische Gleichungen ergibt sich:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega_o^2 q$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

$$\ddot{q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega_o^2 q$$

Daraus folgt dann gerade die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} + \omega_o^2 q = 0$$

Diese definiert ein Richtungsfeld im Phasenraum

3. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld:

Aus dem Kapitel Eichtransformation der Lagrangefunktion ist das nötige Handwerkszeug bereits bekannt:

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = T - V = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{\bar{r}}_i^2 - V = \frac{m}{2} \dot{\bar{q}}^2 + e(\dot{\bar{q}} \cdot \bar{A}(\bar{q}, t) - \Phi(\bar{q}, t))$$

die kanonischen konjugierten Impulse lauten:

$$p_k = \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial \dot{q}_k} = m \dot{q}_k + e A_k(\bar{q}, t)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_k = \frac{1}{m} (p_k - e A_k)$$

$$H = \sum_{k=1}^3 p_k \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^3 p_k \frac{1}{m} (p_k - e A_k) - \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^3 (p_k - e A_k)^2 - \sum_{k=1}^3 \frac{e}{m} (p_k - e A_k) A_k + e \Phi$$

$$H(\bar{q}, \bar{p}, t) = \frac{1}{2m} (\bar{p} - e \bar{A}(\bar{q}, t))^2 + e \Phi(\bar{q}, t)$$

Dabei begegnen uns die feinen Unterschiede im Impuls, nämlich

$m \dot{\bar{q}} = \bar{p} - e \bar{A}$ als kinetischer Impuls (der auch tatsächlich mit der Geschwindigkeit verknüpft ist).

$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ist kanonischer Impuls

4.3 Kanonische Transformationen

Wir wissen bereits, dass die Wahl der verallgemeinerten Koordinaten nicht eindeutig ist (Kapitel 2.4: Forminvarianz der Lagrangegleichungen).

Dabei haben wir gesehen, dass die Lagrangegleichungen 2. Art forminvariant bleiben unter beliebigen diffeomorphen Transformationen der Koordinaten:

$$\bar{q} = (q_1, \dots, q_f) \rightarrow \bar{Q} = (Q_1, \dots, Q_f)$$

Dabei gilt dann:

$$\bar{L}(\bar{Q}, \dot{\bar{Q}}, t) = L(\bar{q}(\bar{Q}, t), \dot{\bar{q}}(\bar{Q}, \dot{\bar{Q}}, t), t)$$

Nun kann man sich fragen, unter welchen Transformationen $(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P})$

die Hamiltonfunktionen forminvariant sind, also:

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} & \dot{P}_k &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \\ \text{mit} & & \text{soll auch} & & \text{gelten!} \\ \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} & \dot{Q}_k &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \end{aligned}$$

Nebenbemerkungen:

- die Klasse der erlaubten Transformationen muss größer sein als beim Lagrangeformalismus, da jetzt die p_k neben den q_k als UNABHÄNGIGE Variablen betrachtet werden, die ebenfalls und vor allem völlig unabhängig transformiert werden können.
- Die neuen Q_k und P_k haben unter Umständen gar nicht mehr den Charakter von Orts- und Impulsvariablen.

In den Lagrangegleichungen der 2. Art heißt q_i zyklisch, wenn:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j = 0 \Rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const}$$

Allerdings ist damit keine Aussage über \dot{q}_j gemacht. Diese muss natürlich weiter als Variable behandelt werden.

Hamilton-Gleichungen:

In $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$ heißt q_j zyklisch, wenn

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} p_j = 0 \Rightarrow p_j := \mathbf{a}_j = \text{const}$$

Das bedeutet nun, dass q_j in H gar nicht auftritt. p_j kann dagegen durch die Bewegungskonstante

\mathbf{a}_j ersetzt werden:

$$H(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_f, p_1, \dots, p_{j-1}, \mathbf{a}_j, p_{j+1}, \dots, p_f, t)$$

Damit jedoch hat das kanonische System nur noch $f-1$ Freiheitsgrade.

Idee ist es nun, die Hamiltongleichungen zu lösen, indem man Schritt für Schritt zyklische Variablen durch geeignete Trafos der $(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P})$ einführt, bis alle \bar{Q} zyklisch sind:

$$H = H(P_1, \dots, P_f, t) \text{ mit } P_k = \mathbf{a}_k = \text{const.}$$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} =: v_k(t)$$

$$\Rightarrow Q_k = \int_{t_0}^t v_k(t') dt' + \mathbf{b}_k$$

Insgesamt finden sich $2f$ Konstanten der Bewegung:

$$\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k \quad k=1, \dots, f$$

Als Beispiel (Vergl. Kapitel 3.5) betrachten wir das reduzierte 2-Körper-Problem in der Ebene senkrecht zum Drehimpuls l :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\mathbf{j}}^2)$$

$$V = V(r)$$

$$L = L(r, \dot{r}, \dot{\mathbf{j}}, \mathbf{j}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\mathbf{j}}^2) - V$$

$$\mathbf{j} \text{ ist zyklisch: } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{j}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \mathbf{j}} = m r^2 \dot{\mathbf{j}} = l = \text{const}$$

Die Hamiltonschen Gleichungen lauten:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad k = 1, \dots, f$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_{\mathbf{j}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{j}}} = m r^2 \dot{\mathbf{j}} \Rightarrow \dot{\mathbf{j}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathbf{j}}} = \frac{p_{\mathbf{j}}}{m r^2}$$

$$H = p_r \dot{r} + p_j \dot{j} - L = m\dot{r}^2 + mr^2 \dot{j}^2 - L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{j}^2) + V(r)$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_j^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\frac{\partial H}{\partial j} = 0 \Rightarrow p_j = a_j = l = \text{const}$$

Somit lässt sich die Hamiltonfunktion von f=2 auf f=1 Freiheitsgrade reduzieren:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

Definition der kanonischen Transformationen

Kanonische Transformationen sind diffeomorphe Transformationen (umkehrbar eindeutig und zweimal stetig diffbar): $(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P})$

$H(\bar{q}, \bar{p}, t) \rightarrow \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t)$, die die Hamilton- Gleichungen forminvariant lassen.

Bedingung für eine kanonische Transformation:

Die Hamiltonschen Gleichungen folgen aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$dW = 0$$

$$dW = d \int_{t_1}^{t_2} dt L = d \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k(t) - H(\bar{q}, \bar{p}, t) \right\} \quad (\text{Legendre Trafo})$$

Ganz entsprechend muss für das System $(\bar{Q}, \bar{P}, \bar{H})$ gelten:

$$dW = 0$$

$$dW = d \int_{t_1}^{t_2} dt L = d \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k(t) - \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t) \right\} = 0$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass diese beiden Forderungen äquivalent sind, falls:

$$\sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k(t) - H(\bar{q}, \bar{p}, t) = \sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k(t) - \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t) + \frac{d}{dt} M_1$$

Mit einer beliebigen Funktion

$M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t)$, die "Erzeugende der kanonischen Trafo" genannt wird.

M1 ist dabei eine Verallgemeinerung der Eichfunktion $M(\bar{q}, t)$ aus dem Kapitel Eichtrafo der Lagrangefunktion (2.3)

Beweis:

$$\frac{d}{dt} M_1 = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_k} \dot{q}_k(t) + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k(t) \right) + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

Es folgt dann aus

$$\sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k(t) - H(\bar{q}, \bar{p}, t) = \sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k(t) - \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t) + \frac{d}{dt} M_1, \text{ dass}$$

$$\sum_{k=1}^f \left(p_k - \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k(t) = \sum_{k=1}^f \left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \right) \dot{Q}_k(t) + H(\bar{q}, \bar{p}, t) - \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t) + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

Da aber \bar{q} und \bar{Q} unabhängige Variablen sind kann obige Gleichung nur für alle denkbaren unabhängigen Variablen erfüllt werden, falls

$$p_k = \frac{\partial M_1}{\partial q_k}$$

$$P_k = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_k}$$

$$\bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t) = H(\bar{q}, \bar{p}, t) + \frac{\partial M_1}{\partial t}$$

Das bedeutet jedoch, dass die kanonische Transformation durch $M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t)$ eindeutig bestimmt ist:

$$p_k = \frac{\partial M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t)}{\partial q_k} \Rightarrow Q_j(\bar{q}, \bar{p}, t)$$

$$\text{Bedingung : } \det \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial q_k \partial Q_j} \right) \neq 0$$

$$P_k = -\frac{\partial M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t)}{\partial Q_k} = -\frac{\partial M_1(\bar{q}, \bar{Q}(\bar{q}, \bar{p}, t), t)}{\partial Q_k} = P_k(\bar{q}, \bar{p}, t)$$

Somit kann der Impuls durch die alten Koordinaten Ort, Impuls und Zeit ausgedrückt werden und die Abhängigkeit von Zeitabhängigkeiten verschwindet. (Der Ausdruck von Q durch q, p und t ist als Umkehrung der Bestimmung von p zu sehen).

Für die gesamte Umkehrtrafo gilt: $P_j = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_j}$ in $p_k = \frac{\partial M_1}{\partial q_k}$ liefert

$$q_k(\bar{Q}, \bar{P}, t) \text{ aus } P_j = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_j}$$

und

$$p_j(\bar{Q}, \bar{P}, t) \text{ aus } p_k = \frac{\partial M_1}{\partial q_k}$$

Äquivalenzrelation:

$$dW = d \int_{t_1}^{t_2} dt L = d \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k(t) - H(\bar{q}, \bar{p}, t) \right\} = 0 \text{ (Legendre Trafo)}$$

$$\Leftrightarrow dW = d \int_{t_1}^{t_2} dt L = d \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k(t) - \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t) \right\} = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{d} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{k=1}^f P_k \dot{q}_k(t) - H(\bar{Q}, \bar{P}, t) \right\} = 0 \\
& \Leftrightarrow \mathbf{d} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k(t) - \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t) + \frac{d}{dt} M_1 \right\} = 0 \\
& = \mathbf{d} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k(t) - \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t) \right\} + \mathbf{d} \{M_1(q(t_2), Q(t_2), t_2) - M_1(q(t_1), Q(t_1), t_1)\}
\end{aligned}$$

Dabei gelten die Relationen:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{d} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{k=1}^f P_k \dot{Q}_k(t) - \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t) \right\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{k=1}^f \mathbf{d} P_k \dot{Q}_k(t) + P_k \mathbf{d} \dot{Q}_k(t) - \frac{\partial \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t)}{\partial Q_k} \mathbf{d} Q_k - \frac{\partial \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t)}{\partial P_k} \mathbf{d} P_k \right\} \\
& \mathbf{d} \{M_1(q(t_2), Q(t_2), t_2) - M_1(q(t_1), Q(t_1), t_1)\} = \sum_k \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_k} \mathbf{d} q_k \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \mathbf{d} Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \frac{\partial M_1}{\partial q_k} \mathbf{d} q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \mathbf{d} Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} \neq 0$$

Außerdem:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt P_k \mathbf{d} \dot{Q}_k(t) = P_k \mathbf{d} Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{P}_k \mathbf{d} Q_k$$

Nebenbemerkung: Für die Variation gilt bekanntlich: $\mathbf{d}\bar{q}(t_1) = \mathbf{d}\bar{q}(t_2) = 0$. Jedoch sind $p(t_1)$ und $p(t_2)$ beliebig.

Dadurch können sich nun insbesondere die Randbedingungen für $Q(\bar{q}, \bar{p}, t)$ ändern.

Unter Beachtung der obigen Relationen gilt nun:

$$0 = \mathbf{d} \int_{t_1}^{t_2} dt L = \sum_{k=1}^f \left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \right) \mathbf{d} Q_k \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^f \left\{ \left(\dot{Q}_k(t) - \frac{\partial \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t)}{\partial P_k} \right) \mathbf{d} P_k - \left(\dot{P}_k(t) + \frac{\partial \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t)}{\partial Q_k} \right) \mathbf{d} Q_k \right\}$$

Aus den obigen Relationen ist bekannt:

$$\left(P_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} \right) = 0$$

Gleichzeitig sind jedoch P_i und Q_i unabhängig und können demnach unabhängig variiert werden. Das bedeutet, dass $\mathbf{d}P_k$ und $\mathbf{d}Q_k$ unabhängig sind.

Somit muss jeweils für sich gelten:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\dot{Q}_k(t) - \frac{\partial \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t)}{\partial P_k} \right) \\
0 &= \left(\dot{P}_k(t) + \frac{\partial \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}, t)}{\partial Q_k} \right)
\end{aligned}$$

und es sind die Hamiltonschen Gleichungen äquivalent in den neuen Koordinaten, was zu beweisen war.

Äquivalente Formen der erzeugenden Funktion

Eine Legendre- Transformation von M_1 liefert:

$$M_2(\bar{q}(t), \bar{P}(t), t) = M_1(\bar{q}(t), \bar{Q}(t), t) - \sum_{k=1}^f \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} Q_k$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial Q_k} = -P_k$$

Aus dem vorigen Beweis ist bekannt:

$$\sum_{k=1}^f (p_k \dot{q}_k - P_k \dot{Q}_k) - (H - \bar{H}) = \frac{d}{dt} M_1$$

Außerdem gilt:

$$\frac{d}{dt} M_1 = \frac{d}{dt} \left(M_2(\bar{q}(t), \bar{P}(t), t) - \sum_k P_k Q_k \right) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial M_2}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial M_2}{\partial P_k} \dot{P}_k - \dot{P}_k Q_k - P_k \dot{Q}_k \right) + \frac{\partial M_2}{\partial t}$$

So dass folgt:

$$\sum_{k=1}^f \left(p_k - \frac{\partial M_2}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \left(Q_k - \frac{\partial M_2}{\partial P_k} \right) \dot{P}_k + (P_k - P_k) \dot{Q}_k = (H - \bar{H}) + \frac{\partial M_2}{\partial t}$$

Da dies für beliebige \dot{q}_k, \dot{P}_k gilt, kann die Summe nur allgemein identisch sein, wenn gilt:

$$\left(p_k - \frac{\partial M_2}{\partial q_k} \right) = 0 \Rightarrow p_k = \frac{\partial M_2}{\partial q_k}$$

$$Q_k = \frac{\partial M_2}{\partial P_k}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial M_2}{\partial t}$$

Analog kann gezeigt werden, dass für

$$M_3(\bar{p}, \bar{Q}, t) = M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t) - \sum_{k=1}^f \frac{\partial M_1}{\partial q_k} q_k$$

Hier folgt (Übungsaufgabe):

$$\left(q_k + \frac{\partial M_3}{\partial p_k} \right) = 0 \Rightarrow q_k = -\frac{\partial M_3}{\partial p_k}$$

$$P_k = -\frac{\partial M_3}{\partial Q_k}$$

oder

$$M_4(\bar{p}, \bar{P}, t) = M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t) - \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial M_1}{\partial q_k} q_k + \frac{\partial M_1}{\partial Q_k} Q_k \right)$$

$$\Rightarrow \left(q_k + \frac{\partial M_4}{\partial p_k} \right) = 0 \Rightarrow q_k = -\frac{\partial M_4}{\partial p_k}$$

$$Q_k = -\frac{\partial M_4}{\partial P_k}$$

Beispiele für kanonische Transformationen

Erzeugende sei:

$$M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t) = \sum_{j=1}^f q_j Q_j$$

$$\Rightarrow p_j = \frac{\partial M_1}{\partial q_j} = -Q_j$$

$$P_j = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_j} = q_j$$

$$(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (\bar{P}, -\bar{Q})$$

Bei dieser Trafo werden also Ort und Impuls vertauscht.

Beispiel 2:

$$M_2(\bar{q}, \bar{P}, t) = \sum_{j=1}^f q_j P_j$$

$$\Rightarrow p_j = \frac{\partial M_2}{\partial q_j} = P_j$$

$$Q_j = \frac{\partial M_2}{\partial P_j} = q_j$$

$$(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P})$$

Dies ist also die identische Transformation

Beispiel: Harmonischer Oszillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

$$M_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial M_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$$

$$P = -\frac{\partial M_1}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q}$$

$$q = \left(\frac{2}{m\omega} P \right)^{\frac{1}{2}} \sin Q$$

$$p = (2m\omega P)^{\frac{1}{2}} \cos Q$$

$$H = \bar{H} \quad \left(\frac{\partial M_1}{\partial t} \right) = 0$$

$$H = \frac{2m\omega P \cos^2 Q}{2m} + \frac{m\omega^2 2P}{2m\omega} \sin^2 Q = \omega P$$

Die Variable Q ist also zyklisch.

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \mathbf{a} = \text{const}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \mathbf{w} \Rightarrow Q = \mathbf{w}t + \mathbf{b}$$

Somit kann q(t) durch Integration (2 Integrationskonstanten !!) gefunden werden:

$$q(t) = \left(\frac{2\mathbf{a}}{m\mathbf{w}} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\mathbf{w}t + \mathbf{b})$$

Dabei beschreibt \mathbf{a} die Amplitude und \mathbf{b} die Phase.

Symplektische Struktur des Phasenraums

Da die kanonischen Transformationen generalisierte Koordinaten und Impulse ineinander transformieren können, sollten q und p nicht gegeneinander ausgezeichnet sein. Um diese Symmetrie des kanonischen Formalismus auszuzeichnen, wird eine neue Notation eingeführt.

Sei zunächst f= 1

$$\bar{x} := \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \text{ ist Vektor im Phasenraum}$$

$$H_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \text{ ist Ableitungsvektor}$$

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist Metrik im Phasenraum (metrischer Tensor)}$$

In diesem Fall lassen sich die kanonischen Gleichungen vereinfacht schreiben als:

$$\dot{\bar{x}} := JH_{,x} \Leftrightarrow -J\dot{\bar{x}} = H_{,x} \Leftrightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Leicht läßt sich zeigen:

$$J^2 = -1$$

$$J^{-1} = J^T = -J$$

Verallgemeinerung auf mehr Freiheitsgrade

$$\bar{x} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_f \\ p_1 \\ \dots \\ p_f \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \ddots \\ \frac{\partial H}{\partial q_f} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \ddots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \end{pmatrix} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1_f \\ -1_f & 0 \end{pmatrix}$$

Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{\bar{x}} := JH_x \Leftrightarrow -J\dot{\bar{x}} = H_x$$

Beispiel ist ein lineares autonomes System in einer Dimension, also der verallgemeinerte eindimensionale harmonische Oszillator:

$$\dot{\bar{x}} := A\bar{x} = JH_x$$

Diese Gleichung ist abzuleiten aus der Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2}(aq^2 + 2bqp + cp^2) \quad z.B. a = \omega_0^2, b = 0, c = 1$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{x}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bq + cp \\ -aq - bp \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich eine Einschränkung an die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} b & c \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = 0$$

Dies gilt für Hamiltonsche Systeme ! (Einschränkung an die Dynamik im Phasenraum)

Kanonische Transformationen in kompakter Notation

Aus den 4 Äquivalenten Formen der Erzeugenden für kanonische Transformationen folgt:

$$\begin{aligned} & M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t) : \\ & \Rightarrow p_j = \frac{\partial M_1}{\partial q_j} \\ \text{A)} \quad & P_j = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_j} \\ & \Rightarrow \frac{\partial p_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial Q_k \partial q_j} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_j} \\ \\ & M_2(\bar{q}, \bar{P}, t) = M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t) - \sum_{j=1}^f \frac{\partial M_1}{\partial Q_j} Q_j \\ & \Rightarrow p_j = \frac{\partial M_2}{\partial q_j} \\ \text{B)} \quad & Q_j = \frac{\partial M_2}{\partial P_j} \\ & \Rightarrow \frac{\partial p_j}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 M_2}{\partial P_k \partial q_j} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \\ \\ & M_3(\bar{p}, \bar{Q}, t) = M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t) - \sum_{j=1}^f \frac{\partial M_1}{\partial q_j} q_j \\ & \Rightarrow q_j = \frac{\partial M_3}{\partial p_j} \\ \text{C)} \quad & P_j = -\frac{\partial M_3}{\partial Q_j} \\ & \Rightarrow \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} = -\frac{\partial^2 M_3}{\partial Q_k \partial p_j} = \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \end{aligned}$$

$$M_4(\bar{p}, \bar{P}, t) = M_1(\bar{q}, \bar{Q}, t) - \sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial M_1}{\partial Q_j} Q_j + \frac{\partial M_1}{\partial q_j} q_j \right)$$

$$\Rightarrow q_j = -\frac{\partial M_4}{\partial p_j}$$

D)

$$Q_j = \frac{\partial M_1}{\partial P_j} = q_j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_j}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial P_k \partial p_j} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_j}$$

Dabei sind:

$$\bar{x} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_f \\ p_1 \\ \dots \\ p_f \end{pmatrix} \quad \bar{y} := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \dots \\ Q_f \\ P_1 \\ \dots \\ P_f \end{pmatrix}$$

$$M_{ab} = \frac{\partial x_a}{\partial y_b}$$

$$(M^{-1})_{ab} := \frac{\partial y_a}{\partial x_b} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} = 1, \dots, 2f$$

Beweis:

$$\sum_{g=1}^{2f} M_{ag} (M^{-1})_{gb} = \sum_{g=1}^{2f} \frac{\partial x_a}{\partial y_g} \frac{\partial y_g}{\partial x_b} = \frac{\partial x_a}{\partial x_b} = \mathbf{d}_{ab}$$

Damit lässt sich eine einheitliche Schreibweise finden für die Relationen aller Erzeugenden:

$$M_{ab} = \sum_{m,n=1}^{2f} J_{am} J_{bn} (M^{-1})_{mn}$$

Beweis:

In Matrixform lautet diese Gleichung:

$$M = J(JM^{-1})^T$$

Die linke Seite (M) lautet:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}$$

Die rechte Seite lautet:

$$\begin{aligned}
J(JM^{-1})^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \\ -\frac{\partial Q}{\partial q} & -\frac{\partial Q}{\partial p} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T \\ \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^T & -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^T \\ -\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^T \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Matrixform für die Erzeugenden läßt sich folgendermaßen äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}
M &= J(JM^{-1})^T \\
\Rightarrow JM &= -(JM^{-1})^T = -(M^{-1})^T J^T \\
\Rightarrow M^T JM &= -M^T (M^{-1})^T J^T = -(M^{-1}M)^T J^T = -J^T = J \\
M^T JM &= J
\end{aligned}$$

Dabei ist J der metrische Tensor und M die Matrix der 2. Ableitungen der Erzeugenden der kanonischen Transformation, also die Jacobi- Matrix für die Erzeugenden der kanonischen Trafo.

Dies bedeutet jedoch nichts anderes als: Die Metrik im Phasenraum ist invariant unter kanonischen Transformationen !

J definiert dabei eine Metrik über das verallgemeinerte schiefsymmetrische Skalarprodukt:

$$(\bar{x}, \bar{y}) := \bar{x}^T J \bar{y} = \sum_{i,k=1}^{2f} x_i J_{ik} y_k$$

es handelt sich dabei um eine schiefsymmetrische, nichtentartete Bilinearform
Eigenschaften:

1. Schiefsymmetrie: $(\bar{x}, \bar{y}) = -(\bar{y}, \bar{x})$, Beweis: $(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^T J \bar{y} = (\bar{y}^T J^T \bar{x})^T = -\bar{y}^T J \bar{x} = -(\bar{y}, \bar{x})$
2. bilinear: $(\bar{x}, \mathbf{I}_1 \bar{y}_1 + \mathbf{I}_2 \bar{y}_2) = \mathbf{I}_1 (\bar{x}, \bar{y}_1) + \mathbf{I}_2 (\bar{x}, \bar{y}_2)$
3. nichtentartet: $(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \forall \bar{y} \Rightarrow \bar{x} = 0$

Nebenbemerkung: Es gilt: $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \forall \bar{x}$ Also Selbstorthogonalität

$$\text{Beweis: } \bar{x}^T J \bar{x} = \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = qp - pq = 0$$

Die Symplektische Struktur auf dem R^{2f} ist von einer euklidischen Metrik grundsätzlich zu unterscheiden:

$$(\bar{x}, \bar{y})_{Eu} = \sum_i x_i y_i = \bar{x}^T g \bar{y}$$

Mit dem metrischen Tensor g, einer 2fx2f dimensionalen Einheitsmatrix !

Im Euklidischen gelten jedoch die Relationen:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$$

$$(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$$

Definition:

Die Menge der Matrizen M (kanonische Trafo) mit

$$M^T JM = J \text{ bildet die reelle symplektische Gruppe S über } R^{2f}.$$

Dies ist die Symmetriegruppe der symplektischen Struktur.

Gruppeneigenschaften

1. $M_1, M_2 \in S \Rightarrow M_3 = M_1 M_2 \in S$

Beweis: $M_3^T J M_3 = (M_1 M_2)^T J (M_1 M_2) = M_2^T M_1^T J M_1 M_2 = M_2^T J M_2 = J$

2. Assoziativität (matrixmultiplikation !)

3. Einselement Einheitsmatrix !

4. Inverse: $M^{-1} := J^{-1} M^T J$

Beweis: $M^{-1} M = (J^{-1} M^T J) M = J^{-1} (M^T J M) = J^{-1} J = 1$

Dabei gilt: $M^T, J \in S$ Beweis: Übungsaufgabe

5. Weiter gilt: $\det M = 1$ Beweis: Übungsaufgabe oder Scheck, S. 102

Fazit:

Die Invarianz der kanonischen Gleichungen $\dot{\bar{x}} := A \bar{x} = J \bar{H}_{,x}$ kann durch die symplektische Struktur des Phasenraums beschrieben werden:

$$\dot{y}_i = \sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \dot{x}_k \Leftrightarrow \dot{\bar{y}} = M^{-1} \dot{\bar{x}} = (J^{-1} M^T J) J \bar{H}_{,x}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_i} = \sum_k \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \Leftrightarrow \bar{H}_{,y} = M^T \bar{H}_{,x}$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{y}} = (J^{-1} M^T J) J (M^T)^{-1} \bar{H}_{,y} = -J(-1) M^T (M^T)^{-1} \bar{H}_{,y} = J \bar{H}_{,y}$$

Der Satz von Liouville

Lösung der Differenzialgleichung $\dot{\bar{x}} := A \bar{x} = J \bar{H}_{,x}$

$\bar{x}(t, t_0, \bar{x}_0) =: \bar{\Phi}_{t,t_0}(\bar{x}_0)$ Definition: Fluß im Phasenraum

t_0 und \bar{x}_0 beschreibt die Anfangskonfiguration und $\bar{\Phi}$ den Fluß.

Der Fluß beschreibt dabei die Zeitentwicklung der Anfangskonfiguration:

$$\bar{\Phi}_{t,t_0}(\bar{x}_0) : \Gamma \rightarrow \Gamma$$

$$\bar{x}_0(t_0) \rightarrow \bar{x}(t)$$

Dies entspricht einer Kurvenschar, die durch die Zeit parametrisiert ist:

Beispiel: eindimensionaler harmonischer Oszi:

$$(q, p) \in \Gamma$$

$$\dot{q} = p$$

$$\dot{p} = -\omega_0^2 q$$

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung lautet:

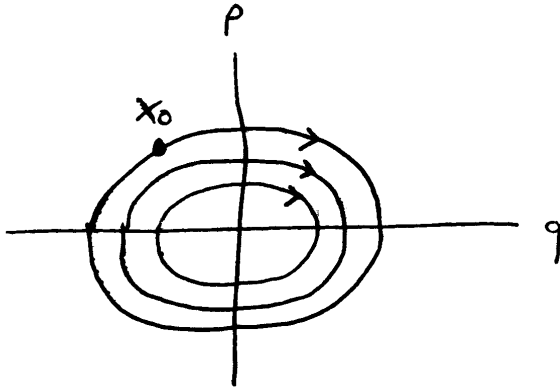
$$\bar{x}(t) = \bar{\Phi}_{t-t_0}(\bar{x}_0) = \exp[(t-t_0)A] \bar{x}_0$$

Dies ist also gerade das Exponential der Matrix.

Aufschluss liefert eine Reihenentwicklung:

$$\bar{x}(t) = \sum_n \frac{[(t-t_0)A]^n}{n!} \bar{x}_0 = \left[1 \cos w_0(t-t_0) + \frac{A}{w_0} \sin w_0(t-t_0) \right] \bar{x}_0$$

$$= \begin{pmatrix} \cos w_0(t-t_0) & \frac{1}{w_0} \sin w_0(t-t_0) \\ -w_0 \sin w_0(t-t_0) & \cos w_0(t-t_0) \end{pmatrix} \bar{x}_0$$



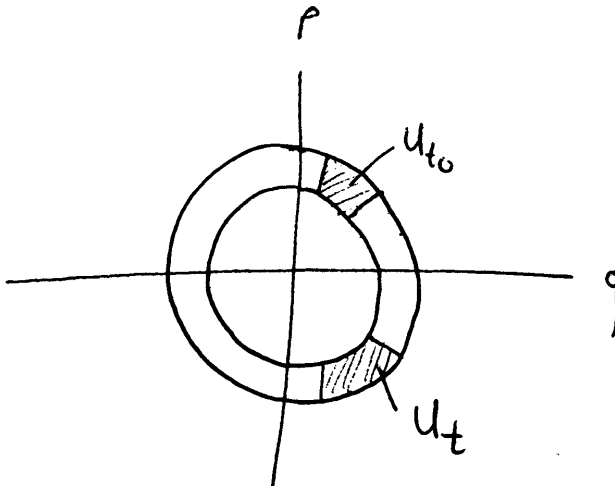
Beweis:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{pmatrix} = -w_0^2 1$$

$$A^{2n} = (-1)^{2n} w_0^{2n} 1$$

$$A^{2n+1} = (-1)^n w_0^{2n+1} \frac{1}{w_0} A$$

Als Ergebnis erhalten wir, dass alle Phasenpunkte mit gleicher, konstanter Winkelgeschwindigkeit w_0 , rotieren:
Ein Ensemble von Anfangskonfigurationen U_{t_0} läuft zum Zeitpunkt U_t insbesondere nicht auseinander.
Das bedeutet, das Gebiet U_{t_0} wandert ohne Änderung der Form und Orientierung um den Nullpunkt:



Man erhält als markantes Ergebnis, dass das Phasenvolumen bei der Zeitentwicklung erhalten ist. Im Allgemeinen ändert sich zwar die Form, stets gilt jedoch der Liouvillesche Satz:
Bei der Hamiltonschen Zeitentwicklung ist das Phasenvolumen erhalten (auch seine Orientierung). Der Fluß im Phasenraum ist also divergenzfrei.

Beweis (integrale Form):

Gegeben sei eine Menge von Anfangskonfigurationen (t_0), die das Phasenraumgebiet U_{t_0} mit dem Volumen V_{t_0} ausfüllen:

$$V_{t_0} = \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 \quad \text{Bei } t: V_t = \int_{U_t} d^{2f} x_0 = \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 \det \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) = \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 \det(D\Phi_{t,t_0}(\bar{x}_0))$$

Mit der Jacobi- Matrix:

$$(D\Phi_{t,t_0}(\bar{x}_0))_{ik} := \frac{\partial \Phi_{t,t_0}^i(\bar{x}_0)}{\partial x_0^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k}$$

Dies kann für Zeiten nahe t_0 reihenentwickelt werden:

$$\Phi_{t,t_0}(\bar{x}_0) = \bar{x}_0 + \bar{F}(\bar{x}_0, t)(t - t_0) + O((t - t_0)^2)$$

$$\bar{F}(\bar{x}_0, t) = J\bar{H}_{,x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$$

Somit folgt:

$$\frac{\partial \Phi_{t,t_0}^i(\bar{x}_0)}{\partial x_0^k} = \mathbf{d}_{ik} + \frac{\partial \bar{F}^i(\bar{x}_0, t)}{\partial x_0^k} (t - t_0) + O((t - t_0)^2)$$

Mit Hilfe $\det(1 + B\mathbf{e}) = 1 + \text{etr}(B) + O(\mathbf{e}^2)$ folgt:

$$\det(D\Phi_{t,t_0}) = \left| \frac{\partial \Phi_{t,t_0}^i(\bar{x}_0)}{\partial x_0^k} \right| = 1 + (t - t_0) \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial \bar{F}^i(\bar{x}_0, t)}{\partial x_0^i} (t - t_0) + O((t - t_0)^2)$$

$$\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial \bar{F}^i(\bar{x}_0, t)}{\partial x_0^i} = \text{div} \bar{F} = \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

Der Fluß im Phasenraum ist also divergenzfrei. Dann folgt jedoch für die Jacobideterminante:

$$\det(D\Phi_{t,t_0}) = \left| \frac{\partial \Phi_{t,t_0}^i(\bar{x}_0)}{\partial x_0^k} \right| = 1 + O((t - t_0)^2) \cong 1$$

$$\Rightarrow V_t = \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 \det(D\Phi_{t,t_0}(\bar{x}_0)) = \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 (1 + O((t - t_0)^2)) \cong V_{t_0}$$

Nebenbemerkung:

Der Satz von Liouville kann auch in der LOKALEN Form formuliert werden:

Für den Fluß Φ_{t,t_0} zu $\dot{\bar{x}} := J\bar{H}_{,x}$ ist $D\Phi_{t,t_0}$ eine symplektische Matrix, das heißt $\det(D\Phi_{t,t_0}) = 1$.

Das bedeutet, das Volumenelement $dx^1 \dots dx^{2f}$ im Phasenraum ist unter dem Fluß invariant:

$$dx^1 \dots dx^{2f} = \text{Det}(D\Phi) dx_0^1 \dots dx_0^{2f} = dx_0^1 \dots dx_0^{2f}$$

Beispiel: eindimensionaler harmonischer Oszi

$$x^i(t) = \sum_{k=1}^2 P_{ik} x_0^k$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos \omega_0(t-t_0) & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0(t-t_0) \\ -\omega_0 \sin \omega_0(t-t_0) & \cos \omega_0(t-t_0) \end{pmatrix}$$

$$\det P = \cos^2 \omega_0(t-t_0) + \sin^2 \omega_0(t-t_0) = 1$$

$$dx^1 dx^2 = (\det P) dx_0^1 dx_0^2 = dx_0^1 dx_0^2$$

Poisson- Klammern

Jede Observable läßt sich in der klassischen Mechanik als Funktion von Ort, Impuls und Zeit darstellen:

$$Observable = g(\bar{q}, \bar{p}, t)$$

Die zeitliche Änderung längs der Bahn $\bar{q}(t), \bar{p}(t)$ im Phasenraum Γ :

$$\frac{dg(\bar{q}, \bar{p}, t)}{dt} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial g}{\partial t} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial g}{\partial t} =: \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

Definition:

Für zwei beliebige Observablen $g(\bar{q}, \bar{p}, t)$ und $f(\bar{q}, \bar{p}, t)$ heißt

$$\sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) =: \{g, f\}$$

Poisson- Klammer

Eigenschaften

- 1) die Poissonklammer ist eine schiefsymmetrische nicht entartete Bilinearform. Das bedeutet jedoch, sie definiert ein symplektisches Skalarprodukt im Phasenraum:

$$\{g, f\} = (\bar{f}_x, \bar{g}_x) = \bar{f}_x^T J \bar{g}_x = \sum_{i,k=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q} \\ \frac{\partial g}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial p} \\ -\frac{\partial g}{\partial q} \end{pmatrix}$$

Aufgrund der schiefsymmetrischen Struktur und der Bilinearität sowie der Nichtentartung und der daraus folgenden Selbstorthogonalität gilt:

$$1. \text{Schiefsymmetrie: } \{f, g\} = -\{g, f\}$$

$$2. \text{bilinear: } \{f, \mathbf{I}_1 g_1 + \mathbf{I}_2 g_2\} = \mathbf{I}_1 \{f, g_1\} + \mathbf{I}_2 \{f, g_2\}$$

$$3. \text{nichtentartet: } (f, g) = 0 \forall g \Rightarrow f = \text{const. (Nullelement, wegen } \bar{f}_{,x} = 0)$$

Nebenbemerkung: Es gilt: $\{f, f\} = 0 \forall f$ Also Selbstorthogonalität

Weiter gilt die Produktregel (Leibnizregel): $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$

Die Jacobi- Identität: $\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$

$$\text{Weiter gilt: } \frac{\partial g}{\partial q_k} = \{g, p_k\} \quad \frac{\partial g}{\partial p_k} = -\{g, q_k\}$$

Die Poissonklammer ist invariant unter kanonischen Transformationen:

Beweis: Trafo: $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$

Die Jacobi- Determinante $M_{ab} = \frac{\partial x_a}{\partial y_b}$ ist symplektische Matrix,

das heißt , es gilt: $M^T J M = J \Leftrightarrow M^{-1} J (M^{-1})^T = J$, da ja

$$M^{-1} J (M^{-1})^T = J^{-1} M^T J J (M^{-1})^T = -J^{-1} M^T (M^{-1})^T = -J^{-1} = J$$

Nun muss man umrechnen von :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_k M_{ki}^{-1} \frac{\partial f}{\partial y_k} \Leftrightarrow \bar{f}_x = (M^{-1})^T \bar{f}_y \Leftrightarrow \bar{f}_x^T = \bar{f}_y^T (M^{-1})$$

$$\bar{f}_x^T J \bar{g}_x = \bar{f}_y^T (M^{-1}) J (M^{-1})^T \bar{g}_y = \bar{f}_y^T J \bar{g}_y$$

Also:

$$(\bar{f}_x, \bar{g}_x) = (\bar{f}_y, \bar{g}_y)$$

Für nicht explizit zeitabhängige Observable $g(\bar{q}, \bar{p})$ gilt:

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\}$$

g ist genau dann Bewegungskonstante, wenn gilt:

$$\{g, H\} = 0$$

Spezialfall: g ist Koordinate der Impuls: $g = q_k, g = p_k$

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\}$$

$$\dot{p}_k = \{p_k, H\}$$

So folgen die Hamiltonschen Gleichungen

Kompakt kann geschrieben werden:

$$\dot{x}_k = \{x_k, H\} = \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial x_k}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^f J_{kj} \frac{\partial H}{\partial x_j}$$

$$\text{also : } \dot{\vec{x}} = J \vec{H}_{,x}$$

Fundamentale Poisson- Klammern:

$$\{q_k, q_j\} = 0$$

$$\{p_k, p_j\} = 0$$

$$\{q_k, p_j\} = \delta_{kj}$$

Kompakt:

$$\{x_k, x_j\} = \sum_{l,m} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} J_{lm} \frac{\partial x_j}{\partial x_m} = J_{kj} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Poissonklammer ist invariant unter kanonischen Transformationen, da

$$M^T J M = J$$

Jedoch ist auch die Umkehrung richtig: ist die Transformation kanonisch, so gelten die obigen Poissonklammer-Beziehungen.

Somit:

Satz: Die Transformation $(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P})$ ist genau dann kanonisch, wenn :

$$\begin{aligned}\{Q_k, Q_j\} &= 0 \\ \{P_k, P_j\} &= 0 \\ \{Q_k, P_j\} &= \mathbf{d}_{kj}\end{aligned}$$

Beweis: Zur Vereinfachung: Nicht explizit zeitabhängige Trafos: $\frac{\partial M}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \bar{H} = H$

Bewegungsgleichung:

$$\dot{y}_k = \{y_k, H\} = \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial y_k}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^f J_{kj} \frac{\partial H}{\partial x_j}$$

Wegen $(\bar{f}_x, \bar{g}_x) = (\bar{f}_y, \bar{g}_y)$ kann nun die Bewegungsgleichung in den alten Koordinaten gebildet werden:

$$\dot{y}_k = \{y_k, H\} = \sum_{i,j,l=1}^f \frac{\partial y_k}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^f \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial y_k}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^f \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \{y_k, y_l\}$$

Also folgt:

$$\dot{y}_k = \{y_k, H\} = \sum_{i,j,l=1}^f \frac{\partial y_k}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^f \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial y_k}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^f \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \{y_k, y_l\}$$

$$\dot{y}_k = \sum_{l=1}^f J_{kl} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \Leftrightarrow J_{kl} = \{y_k, y_l\}$$

Mit der Bedeutung

$$\dot{y}_k = \sum_{l=1}^f J_{kl} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y_l} \text{ Hamiltonsche Bewegungsgleichung in den neuen Koordinaten } \rightarrow \text{Trafo kanonisch}$$

$J_{kl} = \{y_k, y_l\}$ fundamentale Poissonklammern in den neuen Koordinaten

Somit ergibt sich ein einfach nachprüfbares Kriterium für kanonische Transformationen !

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{pmatrix} \rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \bar{P} \end{pmatrix} \text{ ist kanonisch}$$

\Leftrightarrow die kanonischen Gleichungen $\dot{\bar{x}} = J \bar{H}_{,x}$ sind invariant

\Leftrightarrow die Poissonklammern $\{f, g\}$ sind invariant für alle f und g

\Leftrightarrow die fundamentalen Poissonklammern $J_{kl} = \{x_k, x_l\}$ sind invariant

\Leftrightarrow die Jacobi-Matrix $M_{ab} = \frac{\partial x_a}{\partial x_b}$ ist symplektisch, das heißt $M^T J M = J$

\Leftrightarrow es existiert eine Erzeugende !

Bezug zur Quantenmechanik

Ein Übergang zur Quantenmechanik ist möglich:

Von der klassischen Variablen $g(\bar{q}, \bar{p}, t)$ zum qm. Operator: $g: H \rightarrow H$ mit dem Hilbertraum H

Von der Poissonklammer: $\{f, g\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [f, g]$ zum Kommutator

Aus den fundamentalen Poisson-Klammern folgen die kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned}
\{q_k, q_j\} &= 0 \rightarrow [q_k, q_j] = 0 \\
\{p_k, p_j\} &= 0 \rightarrow [p_k, p_j] = 0 \\
\{q_k, p_j\} &= \mathbf{d}_{kj} \rightarrow [q_k, p_j] = i\hbar \mathbf{d}_{kj}
\end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion $H(q,p,t)$ geht über zum Hamilton- Operator

Die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{dg(\vec{q}, \vec{p}, t)}{dt} &= \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial g}{\partial t} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial g}{\partial t} =: \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} \\
\rightarrow \frac{dg}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [g, H] + \frac{\partial g}{\partial t}
\end{aligned}$$

Wobei auch nur der Zusammenhang zwischen Poisson- Klammer und Kommutator recycled wurde.

Da in diesem Bild die Operatoren zeitabhängig sind haben wir es mit der Heisenbergschen bewegungsgleichung zu tun. Im Schrödingerbild ist der Operator zeitunabhängig und die Schrödingergleichung gibt eine Bewegungsgleichung für die Zustände an.

5. Die Hamilton- Jacobi- Theorie:

Strategie: Suche eine kanonische Trafo, die alle Koordinaten zu zyklischen macht.

5.1 Hamilton-Jacobische Differenzialgleichung

Der einfachste Fall, bei dem alle Koordinaten zyklisch sind:

$$\bar{H} \equiv 0$$

Allgemeiner wähle man speziell als Erzeugende der kanonischen Trafo:

$$M_2(\bar{q}, \bar{P}, t) =: S$$

dann suchen wir die folgende Trafo:

$$(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (\bar{Q}, \bar{P})$$

$$H(\bar{q}, \bar{p}, t) \rightarrow \bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}) = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

mit

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$$

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}$$

So dass:

$$\bar{H}(\bar{Q}, \bar{P}) = H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Dies ist eine Differenzialgleichung zur Bestimmung von S und der Koordinaten P und Q, die so genannte

Hamilton- Jacobi- Differenzialgleichung.

Eine nichtlineare partielle Differenzialgleichung erster Ordnung für $S(\bar{q}, \bar{a}, t)$
 $\mathbf{a}_k = P_k = \text{const.}$

Also haben wir nur Abhängigkeit von f+1 Variablen: \bar{q}, t

Die kanonischen Gleichungen lauten:

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} \equiv 0 \Rightarrow P_k = \mathbf{a}_k = \text{const}$$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} \equiv 0 \Rightarrow Q_k = \mathbf{b}_k = \text{const}$$

Lösungsschema für die Hamilton- Jacobi DGL:

$$H(\bar{q}, \bar{p}, t)$$

$$1) \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$$

$$H\left(\bar{q}, \frac{\partial S}{\partial \bar{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \text{Ham. Jac. DGL}$$

$$2) \quad \text{Lösung der Ham- Jacobi-DGL:} \quad S(\bar{q}, \bar{a}, t) \\ \mathbf{a}_k = P_k = \text{const.}$$

$$3) \quad \text{Aus der Erzeugenden } S(\bar{q}, \bar{a}, t) \text{ folgt:}$$

$$Q_k = \frac{\partial S(\bar{q}, \bar{a}, t)}{\partial \mathbf{a}_k} = \mathbf{b}_k$$

mit der implizierten Umkehrung:

$$q_j = q_j(\bar{a}, \bar{b}, t)$$

möglich wegen

$$\det \frac{\partial^2 S(\bar{q}, \bar{a}, t)}{\partial \mathbf{a}_k \partial q_l} \neq 0$$

Somit ergeben sich f Gleichungen für q_1, \dots, q_f

$$4. p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j(\bar{q}, \bar{a}, t) = p_j(\bar{q}(\bar{a}, \bar{b}), \bar{a}, t)$$

5. Bestimmung von \bar{a}, \bar{b} aus den Anfangsbedingungen:

$$\text{In drei (3.): } q_j(0) = q_j(\bar{a}, \bar{b}, 0)$$

$$\text{In vier (4.): } p_j(0) = p_j(\bar{a}, \bar{b}, 0)$$

$$\Rightarrow \bar{a}(\bar{q}(0), \bar{p}(0))$$

$$\bar{b}(\bar{q}(0), \bar{p}(0))$$

Nach Gleichungen 3) und 4) ist damit $q_j(t)$ und $p_j(t)$ bestimmt

Physikalische Bedeutung von S:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_j p_j \dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \bar{H} - H = -H$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j p_j \dot{q}_j - H = L$$

$$\Rightarrow S = \int L dt$$

S kann somit als Wirkungsfunktional interpretiert werden.

Beispiel: 1 dim Oszi

$$1. H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2$$

$$S(q, P, t)$$

H als Hamiltonfunktion und S als Erzeugende der kanonischen Trafo mit $\frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q} = p$

Hamilton- Jacobi DGL:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

2. Lösungsansatz:

$$S(q, P, t) = W(q; P) + V(t; P)$$

Dies ist als Separationsansatz nach q und t zu interpretieren. P ist ein Parameter

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m}{2} \mathbf{w}^2 q^2 = -\frac{dV}{dt}$$

Dabei ist die linke Seite unabhängig von t und die rechte unabhängig von q. Die Lösung kann also nur dann für alle t und q übereinstimmen, wenn:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dq} \right)^2 + \frac{m}{2} \mathbf{w}^2 q^2 = -\frac{dV}{dt} = \mathbf{a} \equiv \text{const}$$

$$V(t) = -\mathbf{a}t + V_0$$

Es folgt:

$$\left(\frac{dW}{dq} \right)^2 = m^2 \mathbf{w}^2 \left(\frac{2\mathbf{a}}{m\mathbf{w}^2} - q^2 \right)$$

$$W = m\mathbf{w} \int dq \sqrt{\left(\frac{2\mathbf{a}}{m\mathbf{w}^2} - q^2 \right)}$$

Also:

$$S(q, \mathbf{a}, t) = m\mathbf{w} \int dq \sqrt{\left(\frac{2\mathbf{a}}{m\mathbf{w}^2} - q^2 \right)} - \mathbf{a}t + V_0$$

Da Potenziale um skalare Faktoren verschoben werden können:

$$S(q, \mathbf{a}, t) = m\mathbf{w} \int dq \sqrt{\left(\frac{2\mathbf{a}}{m\mathbf{w}^2} - q^2 \right)} - \mathbf{a}t = -\mathbf{a}t + m\mathbf{w} \left[\frac{q}{2} \sqrt{\left(\frac{2\mathbf{a}}{m\mathbf{w}^2} - q^2 \right)} + \frac{\mathbf{a}}{m\mathbf{w}^2} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m\mathbf{w}^2}{2|\mathbf{a}|}} \right) \right]$$

$$Q = \left(\frac{\partial S(q, P, t)}{\partial \mathbf{a}} \right) = -t + \frac{1}{\mathbf{w}} \int dq \left(\frac{2\mathbf{a}}{m\mathbf{w}^2} - q^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{b}$$

$$3. \quad Q = \mathbf{b} = -t + \frac{1}{\mathbf{w}} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m\mathbf{w}^2}{2|\mathbf{a}|}} \right)$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{\mathbf{w}} \sqrt{\frac{2\mathbf{a}}{m}} \sin(\mathbf{w}(t + \mathbf{b}))$$

Mit der Nebenbedingung, dass Q=to (Dimension: Zeit) !

$$4. \quad p = \left(\frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q} \right) = \frac{dW}{dq} = m\mathbf{w} \sqrt{\frac{2\mathbf{a}}{m\mathbf{w}^2} - q^2} = \sqrt{2\mathbf{a}m} \cos(\mathbf{w}(t + \mathbf{b}))$$

5. Anfangsbedingungen: t=0: p(0)=0, q(0)=q₀ ungleich 0 !

$$p(0) = 0, q(0) = q_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow q_0 = \frac{1}{\mathbf{w}} \sqrt{\frac{2\mathbf{a}}{m}} \sin(\mathbf{w}(\mathbf{b}))$$

$$0 = p_0 = \sqrt{2\mathbf{a}m} \cos(\mathbf{w}(\mathbf{b}))$$

$$\Rightarrow \mathbf{b} = \frac{\mathbf{p}}{2\mathbf{w}} \Rightarrow q_0 = \sqrt{\frac{2\mathbf{a}}{m\mathbf{w}^2}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \frac{m}{2} \mathbf{w}^2 q_0^2 = E$$

Alpha beschreibt also die Gesamtenergie. Physikalisch sinnvoll, da zu dieser Zeit nur potenzielle Energie vorhanden ist.

Also: $P=E$ (Energie), $Q=t$ (Zeit) \rightarrow Energie und Zeit als neue verallgemeinerte Koordinaten bei der Transformation, die durch $S(q, P, t)$ erzeugt wird.

Spezialfall:

Nicht explizit zeitabhängige Hamiltonfunktion H

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0 \quad H \text{ ist dann Integral der Bewegung}$$

Hamilton- Jacobi DGL:

$$H(\bar{q}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Lösungsansatz:

$$S(\bar{q}, \bar{P}, t) = W(\bar{q}; \bar{P}) - Et$$

Somit folgt:

$$H(\bar{q}, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}) = E \quad \text{Energie bei skleronomen Zwangsbedingungen}$$

$W(\bar{q}; \bar{P})$ heißt verkürztes Wirkungsfunktional

Dieses kann auch als Erzeugende einer kanonischen Trafo (im engeren Sinn) aufgefasst werden:

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j}$$

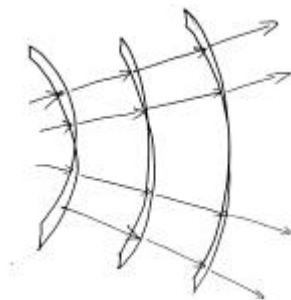
$$Q_j = \frac{\partial W}{\partial P_j}$$

$$\bar{H} = H = E$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}_j} = \mathbf{w}_j \Rightarrow Q_j = \mathbf{w}_j t + \mathbf{b}_j = \frac{\partial W}{\partial P_j}$$

Bezug zur QUantenmechanik

- Betrachten wir 1 Teilchen im Potenzial $V(\bar{q}), \bar{q} \in \mathbb{R}^3$, gilt auch für $V(\bar{q}), \bar{q} \in \mathbb{R}^f$
- $W(\bar{q}) = \text{const}$ sind dann Flächen im \mathbb{R}^3 :



Dabei sind $S(\bar{q}, t) = W(\bar{q}) - Et$ Wirkungswellen mit einer Phasengeschwindigkeit

$$\bar{u} \approx \nabla W(\bar{q}) \quad \text{mit} \quad \bar{u} \perp W(\bar{q}) = \text{const}$$

Der Teilchenimpuls eines fliegenden Teilchens dagegen berechnet sich ebenfalls als Gradient der Erzeugenden:

$\bar{p} = \nabla W(\bar{q})$ Damit haben wir jedoch eine Betrachtung der "Wirkungswellen" entgegen einer Darstellung als Teilchen mit Impuls p (Welle-Teilchen-Dualismus).

In jedem Fall erhält man als Hamilton-Jacobi-DiffGl:

$$H(\bar{q}, \nabla W) = \frac{1}{2m} (\nabla W(\bar{q}))^2 + V(\bar{q}) = E$$

Der Übergang zur Quantenmechanik ist analog dem Übergang von der geometrischen Optik zur Wellenoptik (Wellenoptik als geometrische Optik für große Wellenlängen) und geometrische Optik als Wellenoptik für kleine Wellenlängen (gut Übergangsergebnisse). Die typische optisch-mechanische Analogie

Wir erhalten in der quantenmechanischen Analogie als Wellenformalismus dagegen die Schrödingergleichung:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r})$$

links mit H = Hamiltonoperator in Ortsdarstellung. $\Psi(\vec{r}) = e^{\frac{i}{\hbar} W(\vec{r})}$ als Wellenfunktion

Unsere Koordinatentransformation lautet:

$$\bar{q} \rightarrow \vec{r}$$

$$\bar{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

Auch hier sieht man die Analogie bei kleinen Wellenlängen, wenn folgende Näherung erlaubt ist:

$$\Delta e^{\frac{i}{\hbar} W(\vec{r})} = \nabla \frac{i}{\hbar} \left(\nabla W e^{\frac{i}{\hbar} W(\vec{r})} \right) \cong -\frac{1}{\hbar^2} (\nabla W)^2 e^{\frac{i}{\hbar} W(\vec{r})}$$

Veranschaulichung der Zusammenhänge:

Aus der klassischen Mechanik gelangen wir durch Übergang von Poissonklammern auf Kommutatoren zur Heisenbergschen Matrizenmechanik, die sich zur Quantenmechanik transformieren lässt.

führt man in der klassischen Mechanik dagegen die Hamilton-Jacobi-Theorie ein (optisch-mechanisches Analogon), so gelangt man leicht zur Wellenmechanik (Schrödinger) und kann sich auf diesem Weg ebenso der Quantenmechanik nähern.

Wirkungs- und Winkelvariable

Nun betrachten wir eine Modifikation des Hamilton-Jacobi-Verfahrens. Dabei geht es speziell um periodische Systeme. Das Ganze soll an einem Beispiel skizziert werden und erst dann Verallgemeinerung finden.

Klassifikation von periodischem Verhalten:

- geschlossene Phasenraumkurven welcher Art auch immer sind Librationen. Diese sind beispielsweise Schwingungen.
- dabei gilt:

$$q(t + T) = q(t)$$

$$p(t + T) = p(t)$$

- periodische (hinsichtlich des Ortes), aber nicht geschlossene Phasenraumkurven, also Phasenraumkurven, die selbst entlang des Ortes im Impuls schwingen (dies sind nicht Schwingungen im Ortsraum!) sind Rotationen. Die Phasenbahnen sind offen und es gilt:

$$q(t + T) = q(t) + q_0$$

-
- $$p(t + T) = p(t)$$

- Beispiel für eine Rotation ist die Drehung einer Achse: $q(t) = \mathbf{j}$
 $q_0 = 2\mathbf{p}$

Beispiel: Das mathematische Pendel (mit beliebig großen Auslenkungen)

f= 1, verallgemeinerte Koordinate: Winkel \mathbf{j} , s= \mathbf{j} 1

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\mathbf{j}}^2$$

$$V = mgl(1 - \cos \mathbf{j})$$

verallgemeinerter kanonischer Impuls:

$$p_{\mathbf{j}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{j}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{j}}} = ml^2 \dot{\mathbf{j}}$$

für ein konservatives System

$$H(\mathbf{j}, p_{\mathbf{j}}) = T + V = \frac{p_{\mathbf{j}}^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \mathbf{j})$$

Es folgen die Hamiltonschen Gleichungen:

$$\dot{\mathbf{j}} = \frac{\partial H(\mathbf{j}, p_{\mathbf{j}})}{\partial p_{\mathbf{j}}} = \frac{p_{\mathbf{j}}}{ml^2}$$

$$\dot{p}_{\mathbf{j}} = -\frac{\partial H(\mathbf{j}, p_{\mathbf{j}})}{\partial \mathbf{j}} = -mgl \sin \mathbf{j}$$

1. Integral (Energieerhaltung): Phasenbahn

$$H(\mathbf{j}, p_{\mathbf{j}}) = T + V = \frac{p_{\mathbf{j}}^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \mathbf{j}) = E = \text{const.}$$

Für kleine Winkel gilt die bekannte Kleinwinkelnäherung:

$$\frac{p_{\mathbf{j}}^2}{2ml^2} + mgl \frac{\mathbf{j}^2}{2} = E = \text{const.} \rightarrow \text{Ellipsen, wie vom harmon. Oszi bekannt.}$$

$$\mathbf{j} = \dot{p}_{\mathbf{j}} = 0$$

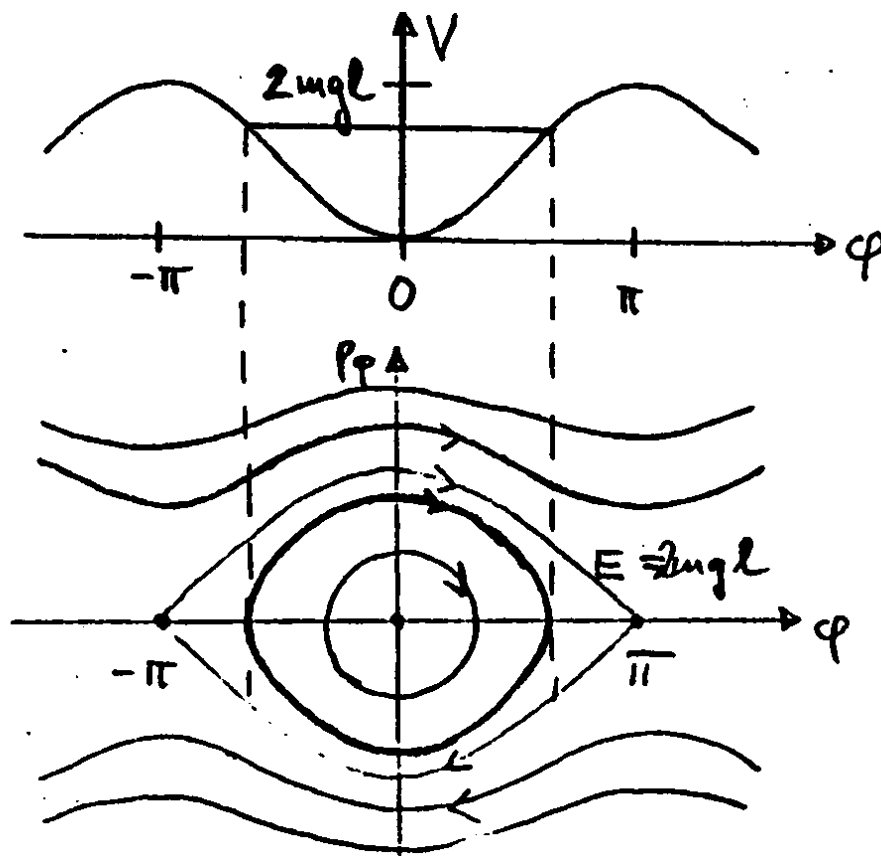
Gleichgewichtslagen: Fixpunkte: $p_{\mathbf{j}} = 0$

$$\mathbf{j} = n\pi, n \in \mathbb{N}$$

a) $E \leq 2mgl$ Libration: Schwingung mit $|\mathbf{j}| \leq \mathbf{j}_0$

b) $E > 2mgl$ Rotation: überschlagendes Pendel: \mathbf{j} unbeschränkt

Für $E=2mgl$ haben wir den Spezialfall einer Kriechbahn (Separatrix zwischen a) und b):



Übergang zu neuen kanonischen Variablen (f=1)

$$(q, p) \rightarrow (q, I)$$

$$I(E) := \oint_{\Gamma_E} p dq$$

$I(E)$ ist als Wirkungsvariable zu verstehen, als die Fläche, die von einer notwendigerweise geschlossenen Bahn Γ_E zur Energie E im Phasenraum eingeschlossen ist. (= Phasenintegral).

q ist die Winkelvariable, auf Periode 1 normiert.

Gelegentlich findet sich:

$$(q, p) \rightarrow (q, I)$$

$$I(E) := \frac{1}{2p} \oint_{\Gamma_E} p dq$$

In diesem Fall ist q auf $2p$ normiert.

gesucht ist die zugehörige kanonische Transformation:

$$p = \frac{\partial W(q, I)}{\partial q}$$

$$q = \frac{\partial W(q, I)}{\partial I}$$

Mit der neuen Hamiltonfunktion:

$$H\left(q, \frac{\partial W(q, I)}{\partial q}\right) = E(I)$$

Dies ist die Umkehrfunktion von $I(E)$, existiert genau dann, wenn $\frac{dI}{dE} \neq 0$.

Da q zyklisch ist muss I konstant sein.

Die Hamiltonsche Bewegungsgleichung für q lautet:

$$\dot{q} = \frac{\partial E(I)}{\partial I} := n_I = \text{const.}$$

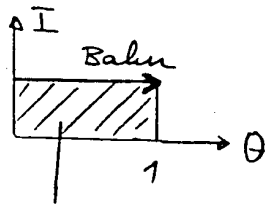
$$q = n_I t + q_0 \mod 1$$

$$I = \text{const}$$

Die Lösung für q ist bei Normierung auf $2p$ natürlich modulo $2p$ zu verstehen.

Mit der Lösung jedoch ist für jedes $E(I)$ die Frequenz n_I berechnet.

Das Phasenraumportrait ist der folgenden gestalt:



$$I(E) = \oint_{\Gamma_E} p dq \quad (\text{per def.})$$

Beispiel: eindimensionaler Oszillator

$$H\left(q, p = \frac{\partial W(q, I)}{\partial q}\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = E(I)$$

Phasenbahn:

$$\frac{\partial W(q, I)}{\partial q} = p = \pm m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}$$

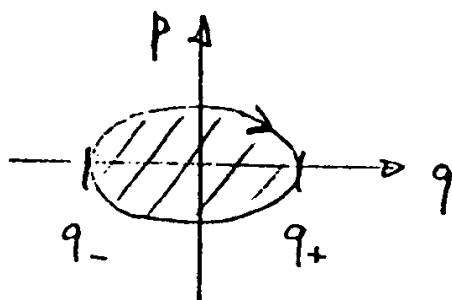
Umkehrpunkte:

$$q_{\pm} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

Wirkungsvariable:

$$I(E) = \oint p dq = 2m\omega \int_{q_-}^{q_+} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2} dq$$

$$I(E) = 2m\omega \left[\frac{q}{2} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2} + \frac{E}{m\omega^2} \arcsin \frac{q}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \right]_{q_+}^{q_-} = \frac{2p}{\omega} E$$



Transformierte Hamiltonfunktion:

$$\bar{H} = E = \frac{w}{2p} I$$

$$\dot{q} = \frac{\partial E}{\partial I} = \frac{w}{2p} := n_I$$

Die zeitliche Änderung des Winkels, also die Frequenz des harmonischen Oszillators ist völlig unabhängig von $E(I)$

Nebenbemerkungen:

1. $I = \frac{2p}{w} E = tE$ hat die Dimension Zeit* Energie, also Wirkung
2. q ist die Winkelvariable, die zur periodischen Bewegung im Phasenraum ! gehört und hat überhaupt nichts mit dem Winkel im Ortsraum (des Pendels Φ) zu tun

Allgemein: Periodische Bewegungen werden immer durch eine Winkelvariable parametrisiert.

→ die periodische Bewegung wird damit auf die 1-Sphäre S^1 (Kreis mit Radius 1) abgebildet.

Verallgemeinerung auf beliebiges f:

Eine Bewegung heißt periodisch bzw. quasiperiodisch, falls die Projektion der Phasenbahn (Trajektorie) auf jede (p_j, q_j) - Ebene periodisch mit Frequenz

$w_j = \frac{2p}{t_j}$ ist. Jede Projektion also für gleiche Koordinaten in Ort und Impuls !

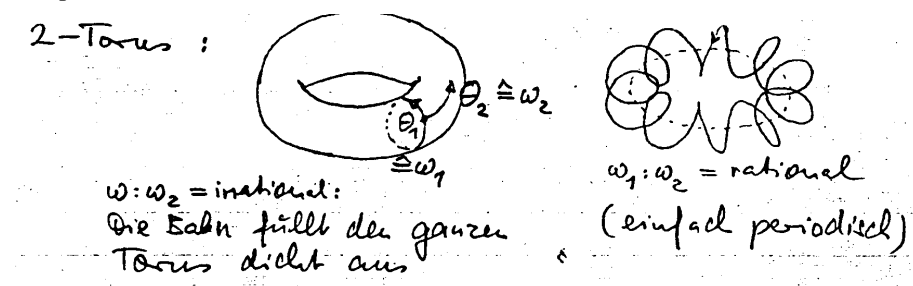
Falls: $w_1 : w_2 : w_3 : \dots : w_f$ rational ist, so ist die Bahn geschlossen, also einfach periodisch.

Falls: $\exists i, j \rightarrow w_i : w_j$ irrational \rightarrow offene Bahn (quasiperiodisch).

Parametrisierung erfolgt durch die Winkelvariable q_j zu w_j :

Abbildung auf $S^1 \times S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 =: T^f$ (f mal S^1 - Sphären- Räume), Abbildung auf den sogenannte f-Torus

Beispiel: 2Torus:



Ist das Frequenzverhältnis irrational, so wirkt der Torus nur als Phasenraumattraktor. Die Bahn füllt den gesamten Torus dicht aus !

Satz über integrable Systeme

Ein autonomes System (Hamiltonsch) habe f unabhängige Integrale der Bewegung

$$g_k(\bar{q}, \bar{p}) \quad k=1, \dots, f$$

mit $g_1(\bar{q}, \bar{p}) = H(\bar{q}, \bar{p})$ Energie und

$$\{g_i, g_j\} = 0 \quad \forall i, j$$

Dann gilt:

- die durch $g_k(\bar{q}, \bar{p}) = \mathbf{a}_k = \text{const}$ gegebene Hyperfläche des Phasenraums (falls kompakt und beschränkt und abgeschlossen) läßt sich diffeomorph auf einen f-dimensionalen Torus T^f abbilden.
- die Allgemeine Bewegung auf T^f ist quasiperiodisch: $\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = \mathbf{w}_i$, \mathbf{q}_i ist zugehörige Winkelvariable, $i=1, \dots, f$
- das System ist INTEGRABEL, das heißt, die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lassen sich vollständig und global integrieren.

Beispiele: 2- Körper- Problem mit Zentralkraft, gekoppelte harmonische Oszillatoren

Gegenbeispiel: 3- Körperproblem mit Zentralkraft (f=9, nur 6 unabhängige Integrale der Bewegung:

$$E, \bar{P}_{gesamt}, l^2, l_3$$

Nebenbemerkung:

Wegen $\{l_3, l_1\} = l_3$ und zyklisch erfüllen die 3 Drehimpulskomponenten nicht alle die Bedingung $\{g_i, g_j\} = 0$ obgleich gilt: $\{l_i, H\} = 0$.

Wirkungsvariable:

$$I_k(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_f) := \oint_{\Gamma_k} p_k dq_k \quad (k = 1, \dots, f)$$

Für ein separables System gilt:

$$W = \sum_{j=1}^f W_j(q_j, \bar{\mathbf{a}})$$

$$p_k = \frac{dW_k}{dq_k}$$

Die Umkehrung liefert die Energie:

$$E \equiv \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1(I_1, \dots, I_f)$$

Die Hamiltongleichungen lauten:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial E(I_1, \dots, I_f)}{\partial I_k} = \mathbf{n}_k(I_1, \dots, I_f)$$

$$\Rightarrow \mathbf{q}_k = \mathbf{n}_k t + \mathbf{b}_k$$

$$\mathbf{n}_k = \frac{1}{t_k}$$

Fazit:

Mit der Wirkungs- und Winkelvariablen können die Frequenzen \mathbf{n}_k periodischer Bewegungen bestimmt werden, ohne die vollständige Lösung angeben zu müssen.

5.3 Störungen integrierbarer Systeme

Betrachte ein integrables, quasiperiodisches, autonomes Hamiltonsches System mit der Wirkungsvariablen

$$\bar{I}(I_1, \dots, I_f) \text{ und der Winkelvariablen } \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_f), \text{ Hamiltonfunktion } H_0(\bar{I})$$

Betrachten wir nun eine kleine Störung der Stärke \mathbf{e} :

$$H(\bar{\mathbf{q}}, \bar{I}, \mathbf{e}) = H_0(\bar{I}) + \mathbf{e}H_1(\bar{\mathbf{q}}, \bar{I}, \mathbf{e})$$

In diesem Fall ist \mathbf{q} nicht mehr zyklisch. $\bar{I}(I_1, \dots, I_f)$ ist also keine Bewegungskonstante mehr !

Beispiel:

Himmelsmechanik, beispielsweise restringiertes 3- Körper- Problem

System: Sonne, Erde, Mond

- integrables 2- Körper- Problem mit 2 größeren Massen (annähernd Kreisbahn) und einer kleinen Masse m_3 als Störung
- Frage: Ist die quasiperiodische Bewegung über lange Zeiten stabil ? Das heißt: Verändert die Störung die Struktur der Bewegungsmannigfaltigkeit nur wenig ?

Also:

Durch eine dritte Masse m_3 ist eine Störung gegeben. Die Bewegung konnte auch vorher (bei irrationalem Verhältnis der Umlaufzeiten oder Frequenzen) schon nur quasiperiodisch sein.

Ist die quasiperiodische Lösung unter Anwesenheit der dritten Masse jedoch noch stabil ?

- Dies ist bis heute ungelöst... Es gibt jedoch Hinweise auf chaotische Bewegungen, beispielsweise chaotische Bewegungen des Planeten Pluto !

Teilantwort liefert die KAM_ Theorie (Kolmogorov, Arnold, Moser, 1954, 1963, 1967)

- Stabilitätsaussagen

Voraussetzung:

Die Frequenzen des integrablen Systems $H_0(\bar{I})$ sind rational unabhängig, also:

$$\sum_{i=1}^f r_i \omega_i = 0 \quad r_i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r_1 = \dots = r_f = 0$$

Dann überdeckt jede Bahn für festes $I_k = \mathbf{a}_k$ den Torus T^f dicht ohne sich jedoch zu schließen: Die Bewegung ist ergodisch.

ERGODISCHE Bewegung (nichtresonanter Torus)

KAM- Theorem

Sind in einem integrablen Hamiltonschen System H_0 die Frequenzen genügend irrational:, das heißt

$$\left| \sum_{i=1}^f r_i \omega_i \right| \geq g |\bar{r}|^a \quad \mathbf{a}, \mathbf{g} > 0$$

So hat das gestörte System $H(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{I}}, \mathbf{e}) = H_0(\bar{\mathbf{I}}) + \mathbf{e} H_1(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{I}}, \mathbf{e})$ für kleine \mathbf{e} überwiegend ebenfalls quasiperiodische Lösungen und die eisten nichtresonanten Tori von H_0 werden nur wenig deformiert, aber nicht zerstört.

Anwendung:

Das restringierte 3-Körper-Problem ist KAM- Stabil. Aber: keine Aussage über eine Langzeitstabilität unseres Planetensystems !

Praktische Verfahren zur Berechnung der gestörten Lösungen:

- störungstheoretische Entwicklung in \mathbf{e}
- Mittelung über die Störungen

Mechanik des starren Körpers

Bisher betrachtet: System von Massepunkten

Jetzt: Ausgedehnte, starre Körper

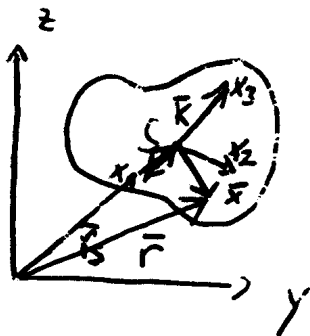
Erhalten bleibt der fixe Abstand zwischen den Punkten des Körpers (starr) im Gegensatz dazu steht die Mechanik der deformierbaren Medien, also Elastomechanik oder Hydrodynamik

Definition des starren Körpers:

- A) System von n Massepunkten mit festen Abständen (Zwangsbedingungen)
B) Vorgegebene, kontinuierliche Masseverteilung $\mathbf{r}(\bar{\mathbf{r}})$

Gesamtmasse: $M = \int d^3r \rho(\vec{r})$

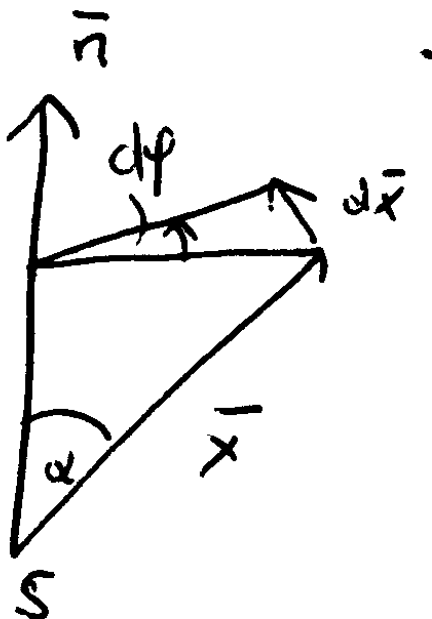
Beschreibung



- 1) Beschreibung im raumfesten Koordinatensystem (x,y,z) als Inertialsystem.
- 2) Beschreibung im körperfesten (intrinsischen) Koordinatensystem \bar{K} . Dieses ist fest mit dem Körper verbunden (x_1, x_2, x_3) und ist im Allgemeinen kein Inertialsystem. Ursprung von \bar{K} ist S, beispielsweise der Schwerpunkt.

Der starre Körper hat 6 Freiheitsgrade (3 Komponenten Schwerpunktskoordinaten und 3 Winkel zur Orientierung von \bar{K})

6.1 Kinetische Energie und Trägheitstensor



Betrachten wir eine infinitesimale Verrückung $d\vec{r} = d\vec{r}_S + d\vec{x} = d\vec{r}_S + d\vec{f} \times \vec{x}$
 $d\vec{f} := \vec{n} d\vec{j}$

In Kapitel 3.3 haben wir bereits mit infinitesimalen Drehungen gearbeitet. Dort handelte es sich um passive Drehungen. Hier haben wir es nun mit aktiven Drehungen zu tun -> anderes Vorzeichen.

$\vec{V} := \frac{d\vec{r}_S}{dt}$ Schwerpunktschwindigkeit

$\vec{\omega} := \frac{d\vec{f}}{dt}$ Winkelgeschwindigkeit

Damit ergibt sich die Geschwindigkeit eines beliebigen Aufpunktes des starren Körpers:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{x}$$

Nebenbemerkungen:

$\vec{\omega}$ hängt von der Wahl von S ab.

Falls S der Schwerpunkt ist, so gilt:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{x}^{(i)} = 0 \text{ nach Def. A) des starren Körpers}$$

$$\int d^3x \vec{x} \mathbf{r}(\vec{x}) = 0 \text{ Definition B) -> Schwerpunktsvektor im körperfesten System } \vec{K} :$$

Kinetische Energie:

$$A) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}^{(i)2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i V^2 + \vec{V} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)} \right)^2$$

Mit den Beziehungen

$$\sum_{i=1}^n m_i = M$$

$$\vec{V} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)} \right) = \left(\vec{V} \times \vec{\omega} \right) \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}^{(i)} = 0, \text{ da } \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}^{(i)} = 0$$

$$\left(\vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)} \right)^2 = \omega^2 x^2 \sin^2 \alpha = \omega^2 x^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \omega^2 x^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{x})^2 = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \omega^m \left[x^2 \mathbf{d}_{mn} - x_m x_n \right] \omega^n$$

Somit folgt:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}^{(i)2} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \omega^m J_{mn} \omega^n$$

mit dem Trägheitstensor

$$J_{mn} := \sum_{i=1}^n m_i \left[\vec{x}^{(i)2} \mathbf{d}_{mn} - x_m^{(i)} x_n^{(i)} \right]$$

Der Trägheitstensor ist also durch die Massenverteilung bestimmt

Im Sinne der Definition B) dagegen gilt:

$$T = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{w}} \times \bar{x})^2 = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) V^2 + (\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{w}}) \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) \bar{x} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \mathbf{w}^m J_{mn} \mathbf{w}^n$$

$$\text{mit } \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) \bar{x} = 0$$

und dem Trägheitstensor

$$J_{mn} = \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) [x^2 \mathbf{d}_{mn} - x_m x_n]$$

Also gilt die Zerlegung der kinetischen Energie:

$$T = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{w}} \times \bar{x})^2 = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) V^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \mathbf{w}^m J_{mn} \mathbf{w}^n$$

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{w}}$$

Dabei ist

$$T_{trans} = \frac{1}{2} M V^2 \text{ kinetische Energie der translatorischen Bewegung}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{w}} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{w}} \text{ kinetische Energie der Rotationsbewegung}$$

Eigenschaften des Trägheitstensors

$\bar{\mathbf{J}}$ ist ein Tensor zweiter Stufe. Das heißt unter Drehungen $R \in SO(3)$ transformiert er sich wie folgt:

R kennzeichnet dabei die Drehmatrizen im R^3 mit Orthogonalitätseigenschaft: $RR^T = 1, \det R = 1$

Nun, er transformiert sich unter Drehungen wie folgt:

$$\text{Wenn } x_m \rightarrow x'_m = \sum_{n=1}^3 R_{mn} x_n$$

$$\text{Dann: } J_{mn} \rightarrow J'_{mn} = \sum_{l=1}^3 \sum_{s=1}^3 R_{ml} R_{ns} J_{ls}$$

Kompakt:

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x}' = R \bar{x}$$

$$\bar{\mathbf{J}} \rightarrow \bar{\mathbf{J}}' = R \bar{\mathbf{J}} R^T$$

Dabei bemerken wir: Matrizen sind einfach Zahlenschemata mit Zeilen und Spalten. Aber erst das Transformationsverhalten definiert einen Tensor (Im Gegensatz zu einer Matrix).

$$\text{Tensor 1. Stufe: } x'_m = \sum_{n=1}^3 R_{mn} x_n = \text{Vektor}$$

$$\text{Tensor 2. Stufe } J'_{mn} = \sum_{l=1}^3 \sum_{s=1}^3 R_{ml} R_{ns} J_{ls}$$

$$\text{Tensor n-ter Stufe: } A'_{mn\dots x} = \sum_{l,s,\dots,t=1}^3 R_{ml} R_{ns} \dots R_{xt} A_{ls\dots t} \text{ wobei links n Indices stehen und rechts n mal die}$$

Drehmatrix angewendet wird (und jeweils von 1-3 summiert !)

Beweis des Transformationsverhaltens für

$$J_{mn} := \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\sum_t x_t^{(i)2} \right) \mathbf{d}_{mn} - x_m^{(i)} x_n^{(i)} \right]$$

Zunächst zum Skalarprodukt:

$$x_m' = \sum_{n=1}^3 R_{mn} x_n$$

$$\Rightarrow \sum_t x_t'^2 = \sum_t \sum_l \sum_s R_{tl} R_{ts} x_l x_s = \sum_l \sum_s \left(\sum_t R_{tl}^T R_{ts} \right) x_l x_s = \sum_l \sum_s \mathbf{d}_{ls} x_l x_s = \sum_l x_l^2$$

das Skalarprodukt ist also invariant

Aber auch das Delta- Element ist invariant:

$$\sum_l \sum_s R_{ml} R_{ns} \mathbf{d}_{ls} = \sum_l R_{ml} R_{nl} = \sum_l R_{ml} R_{ln}^T = \mathbf{d}_{mn}$$

Kompakt:

$$R R^T = R R^T = 1$$

Also:

$$J_{mn}' = \sum_{l=1}^3 \sum_{s=1}^3 R_{ml} R_{ns} J_{ls} = \sum_{i=1}^n m_i \sum_{l=1}^3 \sum_{s=1}^3 R_{ml} R_{ns} \left[\left(\sum_t x_t^{(i)2} \right) \mathbf{d}_{ls} - x_l^{(i)} x_s^{(i)} \right]$$

$$J_{mn}' = \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\sum_t x_t^{(i)2} \right) \mathbf{d}_{mn} - x_m^{(i)} x_n^{(i)} \right]$$

Der Trägheitstensor J' in den neuen Koordinaten ist also gleich dem alten, was Transformationsverhalten eines Tensors zweiter Stufe belegt:

Dabei gilt:

$$\left(\sum_t x_t^{(i)2} \right) \mathbf{d}_{mn} \text{ ist der invariante Anteil}$$

$x_m^{(i)} x_n^{(i)}$ hängt von der Wahl des körperfesten koordinatensystems ab.

Weitere Eigenschaften

1) J_{mn} enthält einen kugelsymmetrischen, also rotationsinvarianten Anteil $\left(\sum_t x_t^{(i)2} \right) \mathbf{d}_{mn}$

2) J_{mn} ist linear in der Massendichte. Der Trägheitstensor ist also additiv beim Zusammenfügen zweier starrer Körper

3) J_{mn} ist ein reeller, symmetrischer Tensor, dargestellt durch die reelle, symmetrisch Matrix

$$\bar{J} = \int d^3 x \mathbf{r}(\bar{x}) \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & x_3^2 + x_1^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

Der Tensor ist diagonalisierbar durch die orthogonale Transformation $R_0 \in SO(3)$:

$$\bar{\bar{J}}' = R_0 \bar{\bar{J}} R_0^T = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

Das heißt: Es existiert ein gedrehtes, körperfestes Koordinatensystem (y_1, y_2, y_3) in Richtung der **Hauptträgheitsachsen**:

$$\bar{\bar{J}}' = \int d^3 y \mathbf{r}(\bar{\mathbf{y}}) \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & y_3^2 + y_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}$$

Also: $J_i \geq 0 \quad i=1, \dots, 3$, Matrix positiv semidefinit.

Die Diagonalisierung führt auf das Eigenwertproblem:

$\bar{\bar{J}} \hat{\bar{\mathbf{w}}}^{(i)} = J_i \hat{\bar{\mathbf{w}}}^{(i)}$ mit Eigenvektoren $\hat{\bar{\mathbf{w}}}^{(i)}$ und Eigenwerten J_i . Ein homogenes, lineares Gleichungssystem

Ziel ist es nun, die Hauptachsenrichtung $\hat{\bar{\mathbf{w}}}^{(i)}$ so zu suchen, dass $\bar{\bar{J}}$ diagonal wird:

$$\Leftrightarrow \det(\bar{\bar{J}} - J_i \mathbf{1}) = 0$$

Somit ergeben sich 3 reelle, positiv semidefinite Eigenwerte J_i

Das Trägheitsmoment

Trägheitsmoment bezüglich Achse $\bar{\mathbf{n}}$: $J(\bar{\mathbf{n}}) \doteq \bar{\mathbf{n}} \bar{\bar{J}} \bar{\mathbf{n}}$ Diese quadratische Form ist positiv semidefinit.

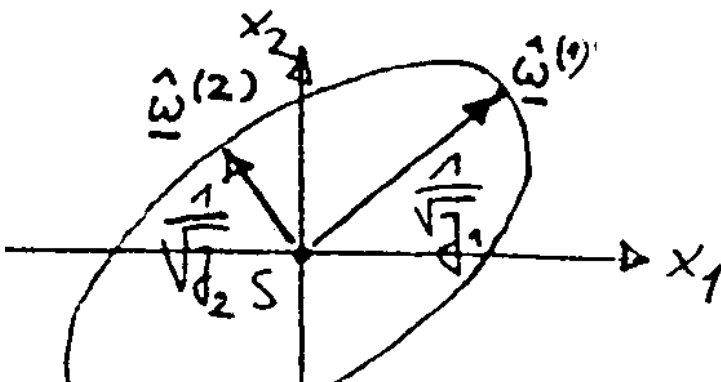
$$\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{n}} \mathbf{w} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \mathbf{w}^2 J(\bar{\mathbf{n}})$$

Trägheitsellipsoid

Die Normierung des Trägheitsmomentes liefert eine Ellipsoidgleichung: $\bar{\mathbf{n}} \bar{\bar{J}} \bar{\mathbf{n}} = 1$.

Die Lage des Ellipsoids sind ist durch die Eigenvektoren $\hat{\bar{\mathbf{w}}}^{(i)}$, die Maße folgen aus den J_i derart, dass die zu

$\hat{\bar{\mathbf{w}}}^{(i)}$ gehörige Achse die Länge $\frac{1}{\sqrt{J_i}}$ trägt:



4) Die J_i heißen Hauptträgheitsmomente (Trägheitsmomente entlang der Eigenvektoren= Hauptachsen)

Es gilt:

$J_1 \neq J_2 \neq J_3$ unsymmetrischer Kreisel

$J_1 = J_2 \neq J_3$ symmetrischer Kreisel (axialsymmetrisch)

$J_1 = J_2 = J_3$ kugelsymmetrischer Kreisel (nicht notwendigerweise Kugelform)

Satz von Steiner

Sei J_{mn} der Trägheitstensor in einem körperfesten System \bar{K} , welches im Schwerpunkt S zentriert ist. Sei nun \bar{K}' ein zu \bar{K} achsparalleles, um den Vektor \bar{a} verschobenes System. Dann ist J_{mn}' in \bar{K}' gegeben durch

$$J_{mn}' = J_{mn} + M[a^2 \mathbf{d}_{mn} - a_m a_n]$$

Die beiden Koordinatensystem dürfen dabei nur durch die Translation um \vec{a} unterschiedlich sein. Wesentlich ist vor allem, dass bei roationsvarianten Systemen keine Verdrehung der Achsen erfolgt !

Beweis:

$$J_{mn}' = \int d^3x' \mathbf{r}'(\bar{x}') \left[\left(\sum_t x_t'^2 \right) \mathbf{d}_{mn} - x_m' x_n' \right]$$

Bei uns: $\bar{x}' = \bar{x} + \bar{a}$

$$J_{mn}' = \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) \left[\left(\sum_t (x_t + a_t)^2 \right) \mathbf{d}_{mn} - (x_m + a_m)(x_n + a_n) \right]$$

$$J_{mn}' = \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) \left[\left(\sum_t [(x_t)^2 + 2(a_t x_t) + a_t^2] \right) \mathbf{d}_{mn} - x_m x_n - x_m a_n - x_n a_m - a_m a_n \right]$$

$$\int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) \sum_t (a_t x_t) = \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) (x_m a_n + x_n a_m) = 0 \quad \text{wegen} \quad \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) \bar{x} = 0$$

Somit:

$$J_{mn}' = \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) \left[\left(\sum_t (x_t^2 + a_t^2) \right) \mathbf{d}_{mn} - x_m x_n - a_m a_n \right]$$

$$J_{mn}' = J_{mn} + \int d^3x \mathbf{r}(\bar{x}) \left[\left(\sum_t (a_t^2) \right) \mathbf{d}_{mn} - a_m a_n \right] = J_{mn} + M [a^2 \mathbf{d}_{mn} - a_m a_n]$$

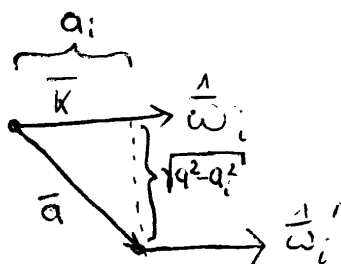
Speziell im Hauptachsensystem:

keine Außerdiagonalelemente: $m=n=i$

$$J_i' = J_i + M(a^2 - a_i^2) \quad i = 1, \dots, 3$$

mit $(a^2 - a_i^2)$ als Quadrat des Abstandes der beiden Drehachsen.

Dabei wird bei einer Verschiebung um \bar{a} nur der Abstand der Drehachsen berücksichtigt. das heißt, die Komponente der Verschiebung in Richtung der Drehachse wird wieder quadratisch subtrahiert:



Beispiele

1. Kugelsymmetrische Massendichte:

$$\mathbf{r}(\bar{x}) = \mathbf{r}(r)$$

$$J_1 = J_2 = J_3 =: J$$

$$3J = J_1 + J_2 + J_3 = \int d^3x \mathbf{r}(r) \left[(x_2^2 + x_3^2) + (x_1^2 + x_3^2) + (x_1^2 + x_2^2) \right] = \int d^3x \mathbf{r}(r) 2r^2$$

$$3J = 2 \cdot 4\pi \int_0^R dr r^4 \mathbf{r}(r)$$

Bei homogener Massenverteilung:

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \text{ bezüglich Schwerpunkt S}$$

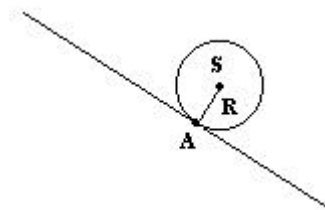
folgt:

$$J = \frac{8}{3} \pi \int_0^R dr r^4 \mathbf{r}(r) = \frac{2M}{R^3} \int_0^R dr r^4$$

$$J = \frac{2}{5} MR^2$$

2. Abrollende Kugel: Momentaner Auflagepunkt ist A

Das Trägheitsmoment bezüglich der momentanen Drehachse durch den Auflagepunkt A:



$$J_A = J + MR^2 = \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2$$

6.3 Drehimpuls und Bewegungsgleichungen

Drehimpuls

A) diskret:

$$\vec{l} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_S + \vec{x}^{(i)}) \times (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)})$$

$$\vec{l} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_S \times \vec{V}) + \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}^{(i)} \times \vec{V} + \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{x}^{(i)} \right) + \sum_i m_i \vec{x}^{(i)} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)})$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{x}^{(i)} \times \vec{V} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{x}^{(i)}) = 0$$

$$\vec{l} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_S \times \vec{V}) + \sum_i m_i \vec{x}^{(i)} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)}) = M (\vec{r}_S \times \vec{V}) + \sum_i m_i \vec{x}^{(i)} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)})$$

Mit

$$M (\vec{r}_S \times \vec{V}) \text{ als Schwerpunktsdrehimpuls}$$

$$\sum_i m_i \vec{x}^{(i)} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}^{(i)}) \text{ als Relativedrehimpuls}$$

B) kontinuierliche Situation

$$\vec{l} = \vec{r}_s \times M\vec{V} + \int d^3x \mathbf{r}(\vec{x}) \vec{x} \times (\vec{w} \times \vec{x})$$

$$\vec{L} = \int d^3x \mathbf{r}(\vec{x}) \vec{x} \times (\vec{w} \times \vec{x}) = \int d^3x \mathbf{r}(\vec{x}) [x^2 \vec{w} - (\vec{x} \cdot \vec{w}) \vec{x}]$$

Also:

$$\vec{L} = \vec{J} \vec{w}$$

Dies sieht man an der Komponentenschreibweise:

$$L_m = \sum_{n=1}^3 \int d^3x \mathbf{r}(\vec{x}) [x^2 d_{mn} - x_m x_n] w_n = \sum_{n=1}^3 J_{mn} w_n$$

Nebenbemerkung:

Im Allgemeinen ist \vec{L} nicht parallel zu \vec{w} , nur falls \vec{w} in Richtung der Hauptträgheitsachse liegt!

Allgemeine Bewegungsgleichung für den Gesamtdrehimpuls

$$\frac{d}{dt} \vec{l} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \text{ Dabei sind } \vec{F}_i \text{ äußere, eingeprägte Kräfte. Die resultierende Kraft } \vec{F}(\vec{r}_S) = \sum_i \vec{F}_i \text{ soll}$$

auf den Schwerpunkt wirken, so dass gilt:

$$\sum_i \frac{\vec{F}_i}{m_i} = \frac{\vec{F}(\vec{r}_S)}{M}$$

Somit:

$$\frac{d}{dt} \vec{l} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{\vec{F}_i}{m_i} = \vec{r}_S \times \vec{F}(\vec{r}_S)$$

Bekanntlich gilt für die Schwerpunktsbewegung:

$$M\ddot{\vec{r}}_S = \vec{F}(\vec{r}_S) \text{ (Newton)}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{l} = \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_S \times M\vec{V} + \int d^3x \mathbf{r}(\vec{x}) \vec{x} \times (\vec{w} \times \vec{x}) \right) = \frac{d}{dt} (\vec{r}_S \times M\dot{\vec{r}}_S) + \frac{d}{dt} \vec{L} = M\dot{\vec{r}}_S \times \dot{\vec{r}}_S + \vec{r}_S \times M\ddot{\vec{r}}_S + \frac{d}{dt} \vec{L}$$

$$M\dot{\vec{r}}_S \times \dot{\vec{r}}_S = 0$$

$$\vec{r}_S \times M\ddot{\vec{r}}_S = \vec{r}_S \times \vec{F}(\vec{r}_S)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{l} = \vec{r}_S \times \vec{F}(\vec{r}_S) + \frac{d}{dt} \vec{L}$$

$$\text{Gleichzeitig gilt: } \frac{d}{dt} \vec{l} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{\vec{F}_i}{m_i} = \vec{r}_S \times \vec{F}(\vec{r}_S)$$

Somit:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = 0 \text{ Der Relativdrehimpuls ist im Schwerpunktsystem mit raumfesten Achsen konstant.}$$

Also: Es verschwindet die Zeitableitung des relatiwdrehimpulses im Schwerpunktsystem mit RAUMFESTEN Achsen.

Die Transformation muss nun noch ins körperfeste, rotatorisch mitbewegte System \bar{K} erfolgen:

Dabei sieht der Beobachter im RAUMFESTEN System neben der zeitlichen Änderung $\left(\frac{d}{dt} \right)$, die im

mitbewegten System ebenfalls stattfindet noch die Rotation des mitbewegten Systems überlagert.

Also:

$$\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)' + \bar{\mathbf{w}} \times$$

Somit gilt für das körperfeste System \bar{K} :

$$\dot{\bar{L}} + \bar{\mathbf{w}} \times \bar{L} = 0$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)' \bar{L} + \bar{\mathbf{w}} \times \bar{L} = 0$$

Mit $\bar{L} = \bar{\bar{J}} \bar{\mathbf{w}}$ folgt im körperfesten System, wo gilt: $\dot{\bar{\bar{J}}} = 0$

$$\bar{\bar{J}} \dot{\bar{\mathbf{w}}} + \bar{\mathbf{w}} \times \bar{\bar{J}} \bar{\mathbf{w}} = 0$$

Dies ist eine nichtlineare DGL in $\bar{\mathbf{w}}$:

Im Schwerpunktsystem ergeben sich die EULERSCHEN Gleichungen für den kräftefreien Kreisel, falls

$\bar{\bar{J}}$ diagonal (Hauptträgheitsachsensystem):

$$J_1 \dot{\mathbf{w}}_1 = (J_2 - J_3) \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3$$

$$J_2 \dot{\mathbf{w}}_2 = (J_3 - J_1) \mathbf{w}_3 \mathbf{w}_1$$

$$J_3 \dot{\mathbf{w}}_3 = (J_1 - J_2) \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2$$

Beispiel: Symmetrischer Kreisel: $J_1 = J_2 \equiv J \neq J_3$

$\dot{\mathbf{w}}_3 = 0$, also $\mathbf{w}_3 = \text{const}$ im mitrotierenden System

$$J \dot{\mathbf{w}}_1 = (J - J_3) \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3$$

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = \frac{(J - J_3)}{J} \dot{\mathbf{w}}_2 \mathbf{w}_3 = - \left[\frac{(J - J_3)}{J} \mathbf{w}_3 \right]^2 \mathbf{w}_1$$

Diese Gleichung kann zweimal integriert werden. Mit den Integrationskonstanten

$\mathbf{w}_\perp \mathbf{j}_0$ und der Zusammenfassung $\mathbf{w}_0 := \frac{(J - J_3)}{J} \mathbf{w}_3$

folgt:

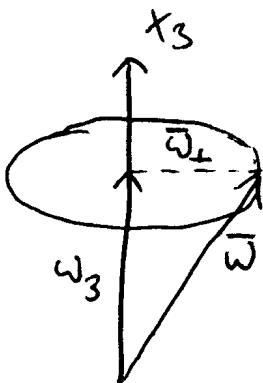
$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_\perp \cos(\mathbf{w}_0 t + \mathbf{j}_0)$$

Dies kann in

$J \dot{\mathbf{w}}_1 = (J - J_3) \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3$ eingesetzt werden und es ergibt sich:

$$\mathbf{w}_2 = -\mathbf{w}_\perp \sin(\mathbf{w}_0 t + \mathbf{j}_0)$$

Die Definitionen sind an folgender Figur ersichtlich:



Dabei ist x_3 die Figurenachse (Achse durch die Drehachse von J_3)

Es gilt:

$$\mathbf{w}_1(t)^2 + \mathbf{w}_2(t)^2 = \mathbf{w}_\perp^2 = \text{const}$$

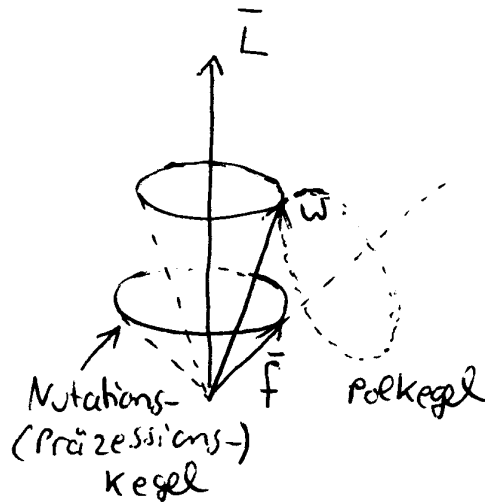
$$\mathbf{w}_1(t)^2 + \mathbf{w}_2(t)^2 + \mathbf{w}_3(t)^2 = \mathbf{w}_\perp^2 + \mathbf{w}_3(t)^2 = \text{const}$$

Das heißt

$\bar{\mathbf{w}}$ und damit auch $\bar{\mathbf{L}}$ mit $L_i = J_i \mathbf{w}_i$ rotieren um die Figurenachse $\bar{\mathbf{f}} \parallel x_3$

Veranschaulicht man diese Situation im Schwerpunktsystem mit **raumfesten** Achsen, so gilt mit

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{L}} = 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{L}} \text{ fest}$$



$\bar{\mathbf{w}}$ und $\bar{\mathbf{f}}$ präzedieren um die raumfeste Achse $\bar{\mathbf{L}}$. Dabei müssen $\bar{\mathbf{w}}$, $\bar{\mathbf{f}}$ und $\bar{\mathbf{L}}$ stets in einer Ebene liegen.



Anwendung:

Erde als abgeplattetes Rotationsellipsoid:

$$\frac{(J - J_3)}{J} \approx \frac{1}{300}$$

$$\frac{2p}{\mathbf{w}_3} = 1 \text{ Tag}$$

Damit kann die Präzessionsperiode leicht berechnet werden:

$$T = \frac{2p}{\mathbf{w}_0} = \frac{2pJ}{\mathbf{w}_3(J - J_3)} = \frac{J}{(J - J_3)} \cdot 1 \text{ Tag} = 300 \text{ Tage}$$

Die Erde präzediert also einmal in 300 Tagen um ihre eigene Achse !

7. Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

Bisher wurden nur HAMILTONSCHE SYSTEME von Differentialgleichungen betrachtet. (Energieerhaltung, falls keine explizite Zeitabhängigkeit, sondern nur durch die Zeitabhängigkeit von q und p in H)

Jetzt sollen ganz allgemeine Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet werden. Beispielsweise Systeme mit Reibung.

→ dissipative Systeme.

Diese sind jedoch im Allgemeinen nicht integrierbar. Das heißt, die Bahnkurven können gar nicht analytisch angegeben werden.

Es lassen sich jedoch numerische Lösungen finden.

Dabei werden jedoch folgende Fragen aufgeworfen:

1. Wie ist das Langzeitverhalten derartiger Systeme?
2. Wie ist die Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollparametern)?
3. Wie ist die Stabilität gegen kleine äußere Störungen?
4. Wie stark sind die Systeme chaotisch (also von Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen stark abhängig)?
5. Kann man globale Aussagen über den dynamischen Fluß machen? Also über die Gesamtheit aller Bahnen?
6. Sind die Lösungen geordnet oder ungeordnet (:= chaotisch)?

Qualitative Dynamik

- Betrachtung des Fluß als Ganzes, Stabilitätsaussagen, topologische Struktur und Langzeitverhalten in:

Lit.:

F. Scheck, Mechanik (Springer, 1988)

H.G. Schuster, deterministisches Chaos (VHC, 1987)

7.1 Vektorfelder als dynamische Systeme

Die Dynamik sehr vieler physikalischer Systeme läßt sich zumindest als ein System von nichtlinearen Differentialgleichungen 1. Ordnung formulieren:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}(t), t)$$

Dabei ist $\bar{x} \in R^n$ dynamische Variable und $\bar{F} : R^n \times R_t \rightarrow R^n$ ein Vektorfeld

Durch den analytischen Zusammenhang $\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}(t), t)$ ist das dynamische System deterministisch:

Beispiel: Newtonsche Bewegungsgleichung mit Reibung

$$\ddot{y} + f_1(y, t)\dot{y} + f_2(y, t) = 0$$

Mit der Reibung f_1 und der Kraft f_2

Wir entwickeln daraus ein System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung:

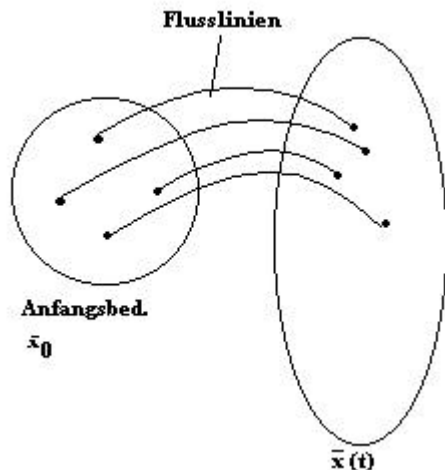
$$\begin{aligned} \dot{y} &:= x_2 & \dot{x}_1 &= x_2 \\ y &:= x_1 & \dot{x}_2 &= -f_1 x_2 - f_2 \end{aligned} \quad \text{so folgt:}$$

Im Spezialfall HAMILTONSCHE Systeme, also: $\dot{\bar{x}} = \bar{J}H_{,x} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

folgt:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{array}$$

Fluß des Vektorfeldes $\bar{F} : R^n \times R_t \rightarrow R^n$ auf der Mannigfaltigkeit M , hier: auf dem Phasenraum, z.B. über R^n :
(vergl. Kapitel 4.5): $\Phi : M \times R_t \rightarrow M$



$$\Phi : M \times R_t \rightarrow M \text{ mit } \Phi(\bar{x}_0, t) = \Phi_t(\bar{x}_0) = \bar{x}(t, \bar{x}_0)$$

Der Fluß ist also zu verstehen als die Gesamtheit aller Bahnkurven = Trajektorien

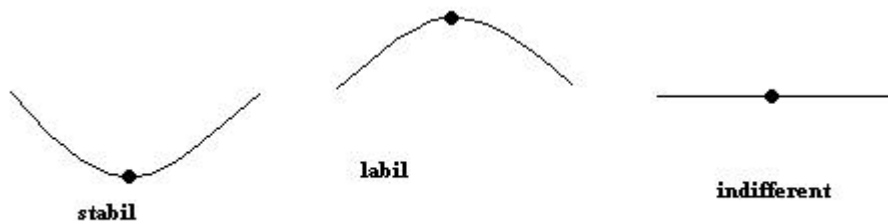
Fixpunkte \bar{x}^* des autonomen dynamischen Systems $\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}(t), t)$

Dies sind sogenannte stationäre Punkte, Gleichgewichtspunkte, singuläre Punkte, kritische Punkte

$$0 = \dot{\bar{x}}^* = \bar{F}(\bar{x}^*)$$

als Bestimmungsgleichung für die \bar{x}^*

Stabilität eines Fixpunktes



Der Test auf Stabilitätsverhalten erfolgt durch Linearisierung für kleine Auslenkungen:

$$d\bar{x} := \bar{x} - \bar{x}^* :$$

$$d\dot{\bar{x}}_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{x^*} dx_k$$

Kompakte Schreibweise:

$$d\dot{\bar{x}} = (DF)_* d\bar{x} \text{ mit der Jacobi-Matrix } DF$$

Dies ist ein System von linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Lösungsansatz:

$$\mathbf{\bar{d}x}(t) = \mathbf{\bar{x}} e^{\mathbf{I} t} \Rightarrow \mathbf{I} \mathbf{\bar{x}} = \mathbf{A} \mathbf{\bar{x}} \quad \text{Eigenwertgleichung}$$

$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I} 1) = 0$ liefert die Eigenwerte \mathbf{I}_k zu den Eigenvektoren $\mathbf{\bar{x}}^{(k)}$ zur Jacobi-Matrix $\mathbf{Df} = \mathbf{A}$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\mathbf{\bar{d}x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{\bar{x}}^{(k)} e^{\mathbf{I}_k t}$$

Annahme: die Eigenwerte \mathbf{I}_k sind nicht entartet und die c_k sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

Beispiel: Ebenes Pendel (vergl Kap. 5.2)

$$ml^2 \ddot{\mathbf{j}} + mgl \sin \mathbf{j} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \mathbf{j} \\ x_2 = p_{\mathbf{j}} = ml^2 \dot{\mathbf{j}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 = -mgl \sin x_1 \end{array}$$

Für die Fixpunkte gilt:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, x_1 = n\pi (n = 0, 1, \dots)$$

→ Fixpunkt im Ort ($q=0$) und im Winkel: Ganzzahlige Vielfache von π

Linearisierung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}_* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}_* := \mathbf{A}$$

Erster Fixpunkt: $x_1 = x_2 = 0$ (ruhes Pendel)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & 0 \end{pmatrix}$$

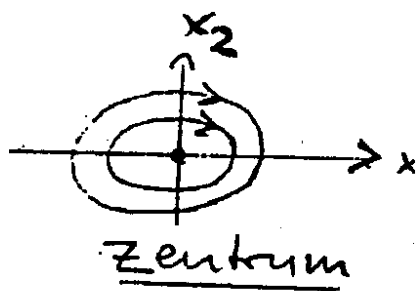
$$\text{Eigenwertgleichung: } \det(\mathbf{A} - \mathbf{I} 1) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -1 \end{vmatrix} = 0 = 1^2 + \frac{g}{l}$$

$$\text{Somit: } \mathbf{I}_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i \omega$$

Somit folgt für die zeitliche Lösung:

$$\mathbf{\bar{d}x}(t) = c_1 \mathbf{\bar{x}}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \mathbf{\bar{x}}^{(2)} e^{-i\omega t}$$

Dies sind jedoch gerade ungedämpfte, freie Schwingungen um das Zentrum:



Für den Zweiten Fixpunkt $x_1 = p, x_2 = 0$ gilt:

Das Pendel steht senkrecht nach oben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -I & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -I \end{vmatrix} = 0 = I^2 - \frac{g}{l}$$

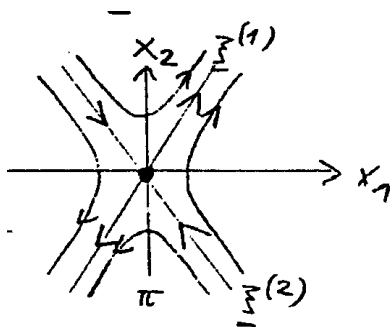
$$\text{Eigenwerte: } I_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } \vec{d}\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 \vec{x}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

Das bedeutet jedoch, dass der erste Term auf der rechten Seite für t gegen unendlich unendlich groß wird.

Die Lösung ist also instabil längs der Richtung von $\vec{x}^{(1)}$

Das Zentrum im Phasenraum ist kein stabiler Fixpunkt mehr, sondern als Sattelpunkt instabil:



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{d}\vec{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(c_1 \vec{x}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 \vec{x}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} \right) = \infty$$

Da die Matrix A nicht symmetrisch ist, sind die Vektoren $\vec{x}^{(1)}$ und $\vec{x}^{(2)}$ im Allgemeinen nicht senkrecht zueinander !

Ebenes Pendel mit Reibung

Ohne Reibung: $ml^2 \ddot{\mathbf{j}} + mgl \sin \mathbf{j} = 0$ $l =$ Pendellänge !

$$\ddot{\mathbf{j}} + \frac{2g}{ml^2} \mathbf{j} + w^2 \sin \mathbf{j} = 0$$

mit Reibung :

$$w^2 = \frac{g}{l}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \mathbf{j} \\ x_2 = p_{\mathbf{j}} = ml^2 \dot{\mathbf{j}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 = -mgl \sin x_1 - 2gx_2 \end{array} \quad \text{Die Fixpunkte sind ungeändert !}$$

Linearisierung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl \cos x_1 & -2g \end{pmatrix}_* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}_* := A$$

Erster Fixpunkt: $x_1 = x_2 = 0$ (ruhendes Pendel)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -2g \end{pmatrix}$$

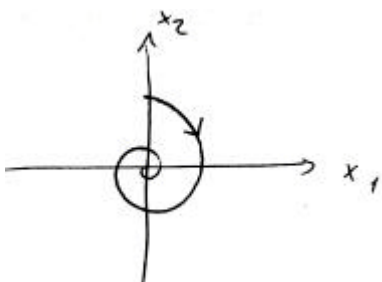
Eigenwertgleichung: $\det(A - I\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -\lambda - 2g \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 + 2gl + \frac{g}{l}$

$$\frac{g}{l} = w^2$$

Somit: $\lambda_{1/2} = -g \pm i \sqrt{\frac{g}{l} - g^2} = -g \pm i \sqrt{w^2 - g^2}$

Schwache Reibung: $w^2 > g^2$ -> Lösung wie angegeben demonstriert Schwingung mit abnehmender Amplitude:

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}^{(1)} e^{-g+i\sqrt{w^2-g^2}t} + c_2 \vec{x}^{(2)} e^{-g-i\sqrt{w^2-g^2}t}$$



Es liegt in stabiler Fokus vor. Die Lösung ist stabil

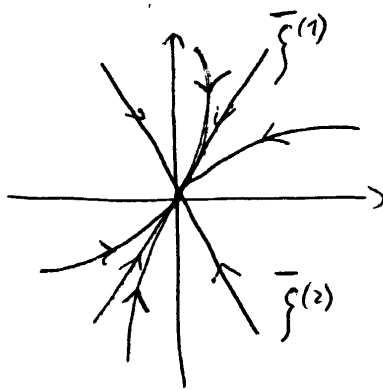
Starke Reibung $w^2 < g^2$

$$I_{1/2} = -g \pm \sqrt{g^2 - \frac{g}{l}} = -g \pm \sqrt{g^2 - w^2}$$

$$\vec{d}\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}^{(1)} e^{-g + \sqrt{g^2 - w^2} t} + c_2 \vec{x}^{(2)} e^{-g - \sqrt{g^2 - w^2} t}$$

Die Lösung ist überhaupt nicht mehr oszillierend, strebt aber entlang von $\vec{x}^{(1)}$ und $\vec{x}^{(2)}$ gegen einen stabilen

Fixpunkt, bzw. ist der Fixpunkt entlang $\vec{x}^{(1)}$ wie auch entlang $\vec{x}^{(2)}$ stabil. Es liegt der sogenannte "Kriechfall" vor. Der Oszillator ist überdämpft. Im Phasenraum bildet der Oszillator einen stabilen Knoten:



Für den Zweiten Fixpunkt $x_1 = p, x_2 = 0$ gilt:

Das Pendel steht senkrecht nach oben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & -2g \end{pmatrix}$$

$$\det(A - I1) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -I & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -I - 2g \end{vmatrix} = 0 = I^2 + 2gl - \frac{g}{l} = I^2 + 2gl - w^2$$

$$\text{Eigenwerte: } I_{1/2} = -g \pm \sqrt{w^2 + g^2}$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } \vec{d}\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}^{(1)} e^{-g + \sqrt{w^2 + g^2} t} + c_2 \vec{x}^{(2)} e^{-g - \sqrt{w^2 + g^2} t}$$

Das bedeutet jedoch erneut, dass der erste Term auf der rechten Seite für t gegen unendlich unendlich groß wird.

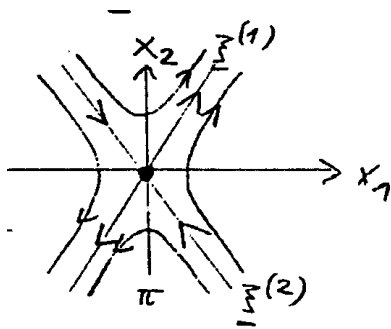
$$I_1 > 0$$

wie im Fall ohne Reibung !

$$I_2 < 0$$

Die Lösung ist also instabil längs der Richtung von $\vec{x}^{(1)}$

Das Zentrum im Phasenraum ist kein stabiler Fixpunkt mehr, sondern als Sattelpunkt instabil:



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(c_1 \bar{\mathbf{x}}^{(1)} e^{-g + \sqrt{w^2 + g^2} t} + c_2 \bar{\mathbf{x}}^{(2)} e^{-g - \sqrt{w^2 + g^2} t} \right) = \infty$$

Da die Matrix A nicht symmetrisch ist, sind die Vektoren $\bar{\mathbf{x}}^{(1)}$ und $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ im Allgemeinen nicht senkrecht zueinander !

Stabilität und Langzeitverhalten

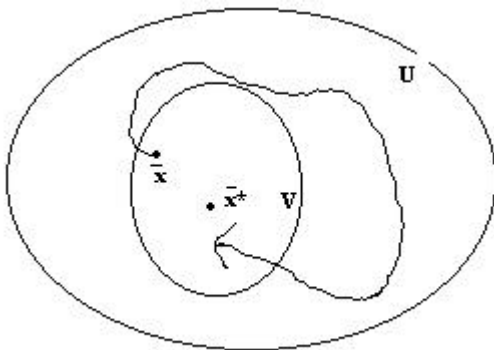
Hier soll eine allgemeinere Definition von Stabilität gegeben werden.

Fixpunkte $\bar{\mathbf{x}}^*$ des autonomen dynamischen Systems $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{x}}(t), t)$

Definition:

$\bar{\mathbf{x}}^*$ heißt stabil (auch : Ljapunov- stabil), wenn zu jeder Umgebung U von $\bar{\mathbf{x}}^*$ eine Umgebung V von $\bar{\mathbf{x}}^*$ existiert, so dass:

$$\bar{\mathbf{x}} \in V \Rightarrow \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$$



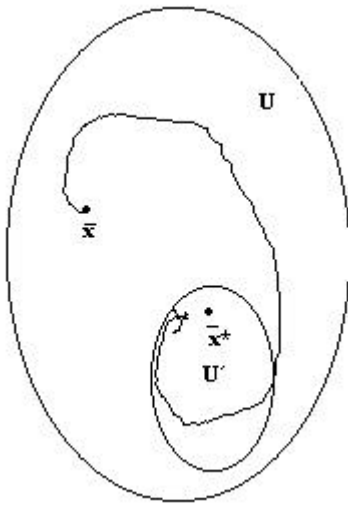
Definition:

$\bar{\mathbf{x}}^*$ heißt asymptotisch stabil (auch : Ljapunov- stabil), wenn zu $\bar{\mathbf{x}}^*$ eine Umgebung U und eine Umgebung U' von $\bar{\mathbf{x}}^*$ existiert, so dass:

$$\bar{\mathbf{f}}(U, t_2) \in U' \subset \bar{\mathbf{f}}(U, t_1) \in U \quad \text{für } t_2 > t_1 \geq 0$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{x}}^* \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in U$$



Das heißt anschaulich: Die Umgebung U schrumpft mit wachsendem t auf \bar{x}^* zusammen. Das heißt: Phasenraumvolumina schrumpfen. asymptotisch stabile Fixpunkte treten somit nur in nicht hamiltonschen Systemen (also bei nicht alleine konservativen Kräften) auf. (Vergl. Kapitel 4.5: Satz von Liouville)

Def.: Ein dynamisches System heißt dissipativ, wenn Phasenraumvolumina schrumpfen.

Lokales Kriterium für Stabilität

Wenn \bar{x}^* stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobimatrix $(DF)_{\bar{x}^*}$ einen positiven Realteil

Beispiel: Fixpunkt a) des Pendels mit / ohne Reibung, also der Fixpunkt mit Winkel und Ort =0, $x_1=x_2=0$

Hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität:

Alle Eigenwerte haben negative Realteile

Somit wird die Lösung für die Störung $\bar{d}\bar{x}$ für unendliche Zeit beliebig klein und divergiert nicht. Imaginärteile sind oszillierend und damit irrelevant für die Stabilität. Sie geben an, in welcher Zeit die Annäherung an den Fixpunkt (falls vorhanden) erfolgt.

Beispiel für Instabilität: Fixpunkte b)

Allgemeines System mit $n=2$:

Linearisierung

$$\begin{pmatrix} \dot{d}x_1 \\ \dot{d}x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =: A$$

Eigenwertgleichung:

$$\det(A - I\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda \text{tr}A + \det A = 0$$

Somit: $I_{1/2} = \frac{1}{2} \left(trA \pm \sqrt{(trA)^2 - 4 \det A} \right)$

mit $trA = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \bar{F}$

Fallunterscheidung

A) Stabiler Fokus (Strudelpunkt)

$\det A > 0$

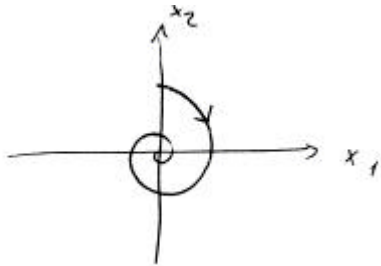
$trA < 0$

$(trA)^2 < 4 \det A$

$I_{1/2} = -I_0 \pm i w$

$I_0, w > 0$

Dies ist eine gedämpfte Schwingung im Phasenraum. Die Phasenraumkurve ist eine elliptische Spirale:



B) Instabiler Fokus

$\det A > 0$

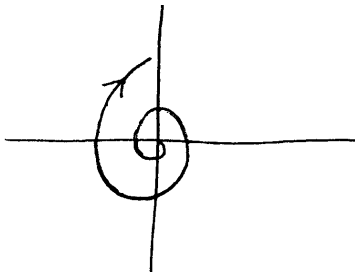
$trA > 0$

$(trA)^2 < 4 \det A$

$I_{1/2} = +I_0 \pm i w$

$I_0, w > 0$

Dies ist eine entdämpfte Schwingung. Die Phasenraumkurve ist ebenfalls eine elliptische Spirale, die jedoch in positiver Zeitrichtung nach Außen durchlaufen wird. Damit $tr A > 0$ muss dem System von Außen zugeführt werden (Beispiel: "negative Reibung"):



C) Stabiler Knoten

$\det A > 0$

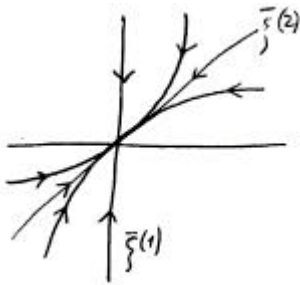
$trA < 0$

$(trA)^2 > 4 \det A$

$$I_{1/2} < 0$$

$$I_{1/2} \in \mathbb{R}$$

Dies ist ein exponentieller Zerfall. Fast alle Trajektorien nähern sich dabei entlang des Eigenvektors, der zum betragsmäßig kleineren Eigenwert gehört. Weil hier das "Kriechen" zum Fixpunkt, also der Zerfall langsamer stattfindet:



D) Instabiler Knoten

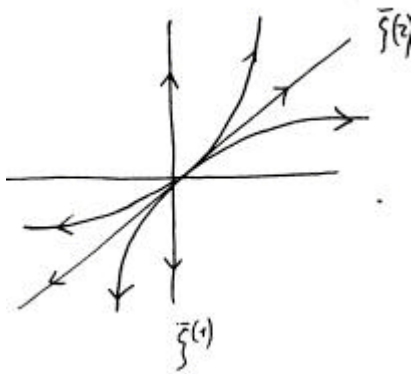
$$\det A > 0$$

$$\operatorname{tr} A > 0$$

$$(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$$

$$I_{1/2} > 0$$

$$I_{1/2} \in \mathbb{R}$$



Das System ist exponentiell entdämpft.

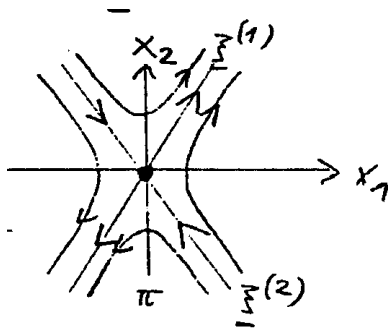
E) Sattelpunkt

$$\det A > 0$$

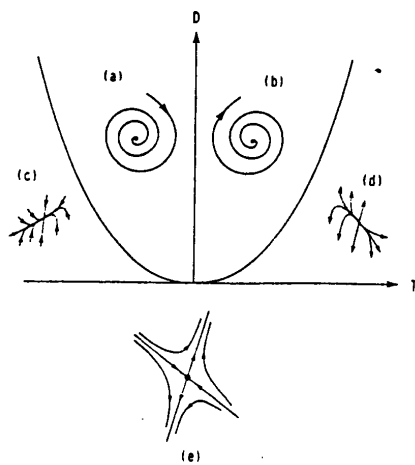
$$I_1 > 0$$

$$I_2 < 0$$

$$I_{1/2} \in \mathbb{R}$$



Summary:



Grenze zwischen den 5 Bereichen: entartete Fälle:

- in diesem Fall versagt die lineare Stabilitätsanalyse völlig. Es ist nötig, höhere Terme der Taylorentwicklung um den Fixpunkt zu betrachten.

Beispiel:

$$\text{tr}A=0$$

$$\det A>0$$

$I_{1/2} = \pm i\omega$ Dies kann ZENTRUM sein, also der Mittelpunkt der Phasenraumtrajektorien, die ungedämpfte
 $I_{1/2} \in I$

Schwingungen beschreiben (energieabhängige, aber unveränderliche Ellipsen).

Dieses Zentrum ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil !

Vergleiche: ungedämpfter Oszillator.

Es kann sich aber auch um einen schwach stabilen oder instabilen Fokus handeln (der dann auch asymptotisch stabil ist)

- es sind in diesem Fall auch qualitative Änderungen im Verhalten des Flusses möglich (Bifurkationen = Verzweigungen der Lösungsmannigfaltigkeit)

Speziell: Hamiltonsche Vektorfelder:

$$\dot{\bar{x}} := J\bar{H}_{,x}$$

$$\Leftrightarrow \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Linearisierung zum Fixpunkt \bar{x}^* :

$$d\bar{x} := \bar{x} - \bar{x}^*$$

$$d\dot{\bar{x}} = A d\bar{x}$$

$$\text{mit : } d\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{x^*} dx_k = \sum_{k,j=1}^{2f} \left(J_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_j} \right) dx_k$$

$$\sum_{j=1}^{2f} \left(J_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_j} \right) = A_{ik}$$

$$trA = \text{div} \bar{F} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$trA = 0 = \sum_{i=1}^{2f} I_i$$

Möglichkeit zur asymptotischen Stabilität

Wegen $trA=0$ folgt **Keine asymptotische Stabilität** möglich.

$$\text{Re } I_i < 0$$

Beweis: Asymptotische Stabilität nur, wenn alle $\Rightarrow trA = \sum_i \text{Re } I_i + \sum_i \text{Im } I_i$

aber: $\sum_i \text{Im } I_i$ besteht aus komplex konjugierten Paaren, da die Eigenwertgleichung reell ist !

Somit gilt jedoch $trA = \sum_i \text{Re } I_i < 0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung für asymptotische Stabilität, mit

$$trA=0$$

Nicht asymptotisch Stabilität

Nicht asymptotische Stabilität nur wenn $\text{Re } I_i \leq 0$, also kein $\text{Re } I_i > 0$

Aus genannten Gründen kann dann aber nur $\text{Re } I_i = 0 \quad \forall i$

$$\text{Also: } I_i = \pm i \omega_i$$

Also: Zentrum, reine Oszillationen, keine Dämpfung oder Unterdämpfung

Fall $f=1 \rightarrow n=2$

In diesem Fall können die Fixpunkte nur Zentren (falls $\det A > 0 \rightarrow I_i = \pm i \omega_i$) oder Sattelpunkte

(falls $\det A < 0 \rightarrow I_1 > 0, I_2 < 0, I_i \in \mathbb{R}$) sein !

Beispiel zur Stabilität

Der kräftefreie unsymmetrische Kreisel

oBdA: $0 < J_1 < J_2 < J_3$

Folgende sind die Eulerschen Gleichungen für \mathbf{w}_i

$$J_1 \dot{\mathbf{w}}_1 = (J_2 - J_3) \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3$$

$$J_2 \dot{\mathbf{w}}_2 = (J_3 - J_1) \mathbf{w}_3 \mathbf{w}_1$$

$$J_3 \dot{\mathbf{w}}_3 = (J_1 - J_2) \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2$$

Somit:

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = -\frac{(J_3 - J_2)}{J_1} \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3 = -k_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3$$

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = \frac{(J_3 - J_1)}{J_2} \mathbf{w}_3 \mathbf{w}_1 = k_2 \mathbf{w}_3 \mathbf{w}_1$$

$$\dot{\mathbf{w}}_3 = -\frac{(J_2 - J_1)}{J_3} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 = -k_3 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2$$

Die Fixpunkte seien:

$$\bar{\mathbf{v}}^{*(1)} = (\mathbf{w} \quad 0 \quad 0)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{*(2)} = (0 \quad \mathbf{w} \quad 0)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{*(3)} = (0 \quad 0 \quad \mathbf{w})$$

Also: Rotation um x1, x2, bzw x3- Achse.

Diese drei Fixpunkte erfüllen die Gleichung:

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = \dot{\mathbf{w}}_2 = \dot{\mathbf{w}}_3 = 0$$

Linearisierung zum Fixpunkt:

$$\begin{pmatrix} d\dot{\mathbf{w}}_1 \\ d\dot{\mathbf{w}}_2 \\ d\dot{\mathbf{w}}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} d\mathbf{w}_1 \\ d\mathbf{w}_2 \\ d\mathbf{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 \mathbf{w}_3 & -k_1 \mathbf{w}_2 \\ k_2 \mathbf{w}_3 & 0 & k_2 \mathbf{w}_1 \\ -k_3 \mathbf{w}_2 & -k_3 \mathbf{w}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{w}_1 \\ d\mathbf{w}_2 \\ d\mathbf{w}_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{*(1)} : \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 = 0, \mathbf{v}_3 = 0$$

$$0 = \det(A - I) = \begin{vmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -I & k_2 \mathbf{w} \\ 0 & -k_3 \mathbf{w} & -I \end{vmatrix} = -I(I^2 + k_2 k_3 \mathbf{w}^2)$$

$$\Rightarrow I_1^{(1)} = 0, I_{2/3}^{(1)} = \pm i \mathbf{w} \sqrt{k_2 k_3}$$

Der Fixpunkt ist also stabil (Zentrum)

$$\bar{\mathbf{v}}^{*(2)} = (0 \quad \mathbf{w} \quad 0):$$

$$0 = \det(A - I) = \begin{vmatrix} -I & 0 & -k_1 \mathbf{w} \\ 0 & -I & 0 \\ -k_3 \mathbf{w} & 0 & -I \end{vmatrix} = -I(I^2 + k_1 k_3 \mathbf{w}^2)$$

$$\Rightarrow I_1^{(2)} = 0, I_{2/3}^{(2)} = \pm \mathbf{w} \sqrt{k_1 k_3}$$

Der Fixpunkt ist instabil (Sattelpunkt)

$$\bar{\mathbf{v}}^{*(3)} = (0 \quad 0 \quad \mathbf{w}):$$

$$0 = \det(A - I) = \begin{vmatrix} -I & -k_1 \mathbf{w} & 0 \\ k_2 \mathbf{w} & -I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{vmatrix} = -I(I^2 + k_1 k_2 \mathbf{w}^2)$$

$$\Rightarrow I_1^{(3)} = 0, I_{2/3}^{(2)} = \pm i \mathbf{w} \sqrt{k_1 k_2}$$

→ Fixpunkt stabil (Zentrum)

Fazit: Bei asymmetrischen Kreiseln ist nur die Rotation um die Achse zum größten und zum kleinsten Trägheitsmoment stabil !

Hamiltonsche Systeme

Hier folgt aus $\text{tr} A = \text{div} \bar{F} = 0$ der Satz von Liouville (§ 4.5)

$$V_t = \int_{U_t} d^{2f} x = \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 \det D\Phi_t(\bar{x}_0) = \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 \left[1 + (t - t_0) \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i} + \dots \right]$$

$$\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i} = (\text{div} \bar{F})_{\bar{x}_0}$$

$$V_t = V_{t_0} + (t - t_0) \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 (\text{div} \bar{F})_{\bar{x}_0} + O(t - t_0)^2$$

$$\frac{dV_t}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{(t - t_0)} = \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 (\text{div} \bar{F})_{\bar{x}_0} = 0$$

$$(\text{div} \bar{F})_{\bar{x}_0} = 0$$

Das heißt: Die Phasenraumvolumina sind erhalten, der Fluß ist inkompressibel !

Für **dissipative** Systeme gilt für kleine Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt \bar{x}^* umschließen:

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{U_t} d^2 f_x (\operatorname{div} \bar{F})_{\bar{x}^*} = \Lambda V_t$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{\Lambda t} V_0$$

Mit der Phasenraumkontraktionsrate $\Lambda \doteq \operatorname{div} \bar{F} < 0$ wegen $\operatorname{div} \bar{F} = \sum_i \operatorname{Re} I_i < 0$, da sonst der Fixpunkt nicht stabil wäre (Voraussetzung).

Allgemein gilt:

Def.: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren. Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten und Fokus, jeweils stabil), heißen SENKEN oder ATTRAKTOREN im Phasenraum.

Beispiel für ein dissipatives System: LORENZMODELL (1963)

$$\dot{x} = -sx + sy$$

$$\dot{y} = -zx - xz + rz - y$$

$$\dot{z} = yx + xy - bz$$

Dies leitet sich ab aus der Temperatur- und Strömungsverteilung einer inkompressiblen Flüssigkeit: Das Rayleigh - Bénard- System

Linearisierung:

$$A = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ -z & -1 & r-x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

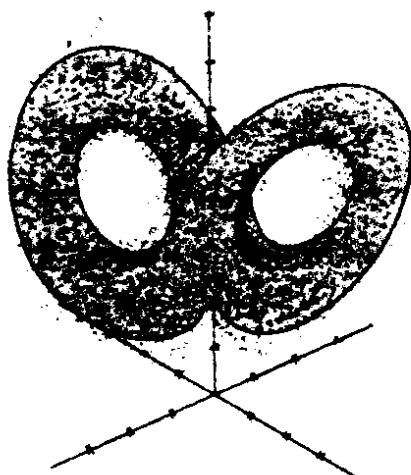
$$\Rightarrow \Lambda = \operatorname{tr} A = -(s + 1 + b)$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-(s+1+b)t} V_0 \quad t \rightarrow \infty \rightarrow 0$$

Phasenraumvolumina schrumpfen also monoton!

Das Lorenzmodell produziert weiterhin chaotisch Lösungen:

Der Stereoplot eines numerisch bestimmten Attraktors im Phasenraum liefert folgendes Bild:



Dies ist so zu verstehen, dass sich die Phasenraumkurven, die sich übrigens nie schneiden ! im Raum dieses Attraktors konzentrieren:

Insbesondere enden gleich Anfangszustände immer wieder am selben Attraktor.

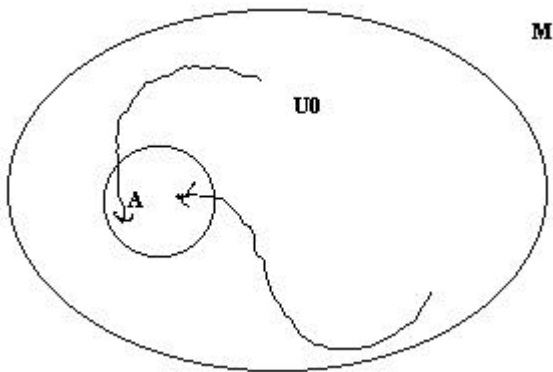
Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch Attraktoren bestimmt:

Def.:

Sei \bar{F} ein vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$. Eine abgeschlossene, unter dem Fluß Φ_t invariante $\Phi_t(A) \subseteq A$, unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt Attraktor, falls:

- 1) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\Phi_t(U_0) \subseteq U_0$ ($t > 0$)
- 2) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0 \exists T > 0$, so dass $\Phi_t(U_0) \subset V$ ($t > T$)

Das heißt, es existiert ein Attraktorbecken U_0 , aus dem der Fluß asymptotisch in den Attraktor A läuft :



Nebenbemerkung: Es kann grundsätzlich mehrere koexistierende Attraktoren auf M geben !

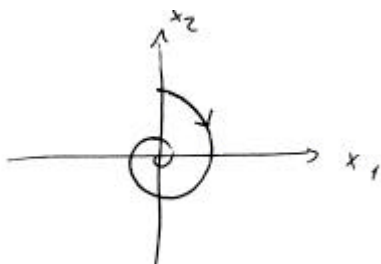
Ein Attraktor **Fehler! Textmarke nicht definiert.** von **Fehler! Textmarke nicht definiert.** heißt **fraktal**, wenn er weder eine endliche Anzahl von Punkten, eine stückweise differenzierbare Kurve oder Fläche noch eine Menge, die von einer geschlossenen stückweise differenzierbaren Fläche umgeben wird, darstellt. Ein Attraktor heißt **seltsam**, wenn er chaotisch, fraktal oder beides ist. Die Begriffe chaotisch, fraktal und seltsam werden für kompakte invariante Mengen, die keine Attraktoren sind, analog benutzt. Ein dynamisches System heißt **chaotisch**, wenn es eine kompakte invariante chaotische Menge besitzt.

Beispiele für Attraktoren:

Stabiler Fixpunkt:

Mindestdimension des Phasenraumes: 1

Dimension des Attraktors: 0



Stabiler Grenzyklus:

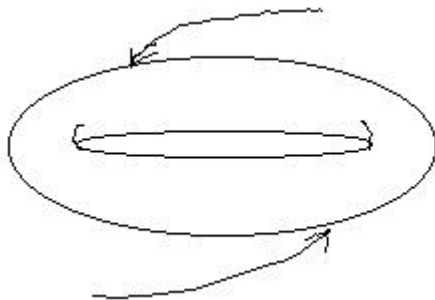
Mindestdimension des Phasenraumes: 2
Dimension des Attraktors: 1



periodische Bewegung im Phasenraum

Stabiler Torus T^2

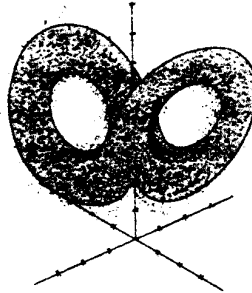
Mindestdimension des Phasenraumes: 3
Dimension des Attraktors: 2



quasiperiodische Bewegung im Phasenraum

Seltsamer Attraktor

Mindestdimension des Phasenraumes: 3
Dimension des Attraktors: $2 < D < 3$ (fraktaldimensional)



chaotische Bewegung im Phasenraum

Bifurkationen

Sei der Fluß von einem Kontrollparametr μ abhängig, so zeigt sich, dass sich die Zahl der Attraktoren bei einem kritischen Wert μ_c schlagartig ändern kann.

Es treten dann sogenannte Bifurkationen auf ("Verzweigungen" der Lösungsmannigfaltigkeit).

Notwendige Voraussetzung für diesen Prozess ist jedoch Nichtlinearität !

Bifurkationspunkte sind oft verknüpft mit Stabilitätswechsel. Das bedeutet, die lineare Stabilität der Fixpunkte im Falle lokaler Bifurkationen muss untersucht werden.

Klassifizierung einfachster Bifurkationen:

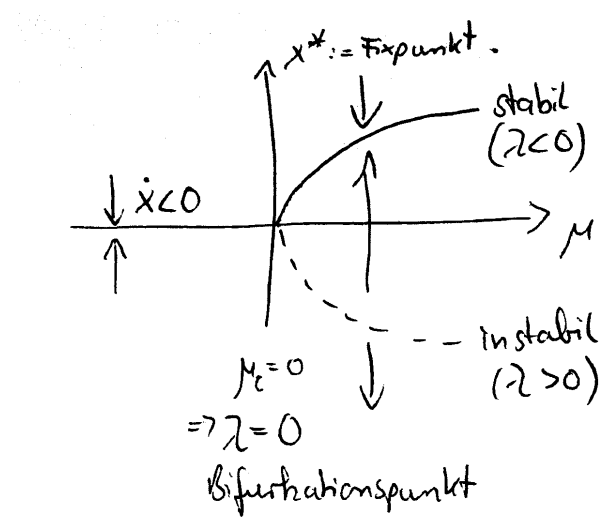
A) Eigenwert- Null - Bifurkation

$$I < 0 \rightarrow I > 0$$

stabiler Fixpunkt (Knoten) -> instabilen Fixpunkt (Sattelpunkt für $n \geq 2$)

$$\det A > 0 \rightarrow \det A < 0$$

A1) Sattel- Knoten- Bifurkation



einfachster Fall:

$$\dot{x} = m - x^2$$

$$x^* = \pm \sqrt{m} \text{ Fixpunkte existieren also nur für } m \geq 0$$

$$d\dot{x} = -2x^* dx$$

Somit existieren:

$$I_1 > 0 \text{ und } I_2 < 0 \text{ für } x^* = \pm \sqrt{m}$$

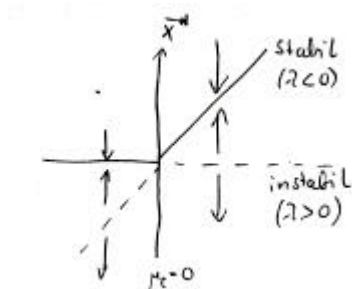
A2) Transkritische Bifurkation

$$\dot{x} = mx - x^2$$

$$x^* = m, 0$$

$$d\dot{x} = (m - 2x^*) dx$$

$$\Rightarrow I = \begin{cases} m \\ -m \end{cases} \quad \text{Stabilitätswechsel bei } \mu_c = 0$$



A3) Stimmgabelbifurkation (pitchfork bifurcation)

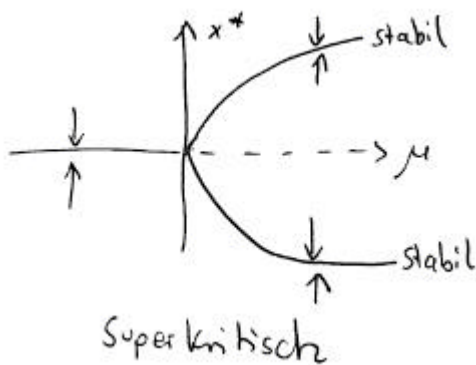
superkritisch:

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

$x^* = \pm\sqrt{\mu}, 0$ für $\mu \geq 0$ zwei Fixpunkte, sonst einer

$$d\dot{x} = (\mu - 3x^{*2})dx$$

$$\Rightarrow l = \begin{cases} \mu & \text{zum Eigenwert } \mu \text{ ist der Fixpunkt stabil für } \mu < 0 \text{ und zu } -2\mu \text{ stabil für } \mu > 0 \\ -2\mu & \end{cases}$$

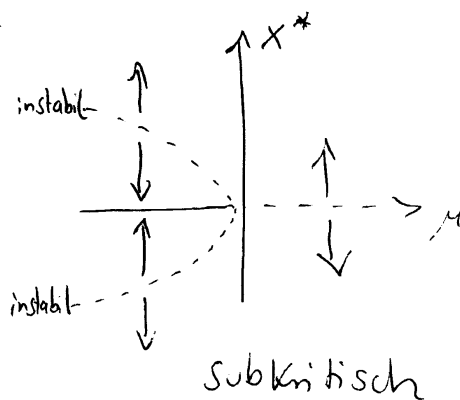


subkritisch

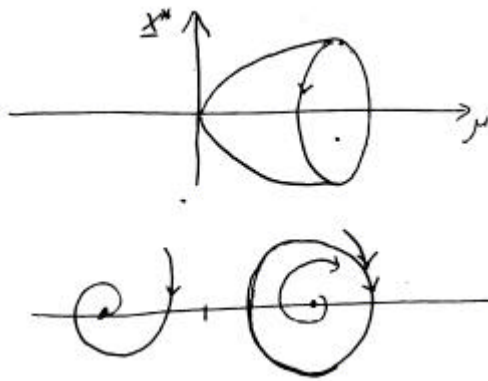
$$\dot{x} = \mu x + x^3$$

$x^* = \pm\sqrt{-\mu}, 0$ mit den ersten beiden Fixpunkten nur für $\mu < 0$, ansonsten, für $\mu > 0$ existiert nur $x^*=0$

Stabil ist jedoch lediglich der Fixpunkt $x^*=0$ für $\mu < 0$:



A) Hopf- Bifurkation



stabiler Fokus \rightarrow instabiler Fokus mit Grenzyklus

$$I_{1,2} = I_0 \pm i\omega \quad \text{mit:} \quad I_0 < 0 \rightarrow I_0 > 0$$

stabiler Fokus \rightarrow instabiler Fokus mit Grenzyklus

Übergang vom stabilen Fokus zum instabilen Fokus mit Grenzyklus

sei $n=2$:

$\text{tr } A < 0$ (stabiler Fokus) \rightarrow $\text{tr } A > 0$ (instabiler Fokus)

(Voraussetzung: $\det A > 0$)

mindestens $n=2$ nötig !

Deterministisches Chaos

Deterministische, aber ungeordnete Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit $n \geq 3$ (autonom):

Seltsamer (chaotischer) Attraktor

komplexes, irreguläres Verhalten kann verschiedene Ursachen haben, die sich im zeitlichen Verhalten einer Observablen oft schwer unterscheiden lassen.

Als Unterscheidungskriterien bieten sich an:

quasiperiodisch

deterministisches Chaos

stochastisches Rauschen

wenige dynamische Freiheitsgrade:
niedrigdimensionaler Phasenraum

viele mikroskopische Freiheitsgrade. (Statistisches Ensemble)

Attraktor: Torus T^d $d=2,3,4,\dots$ seltsamer Attraktor, fraktale Dimension

$f \sim 10^{24}$

$$\text{Autokorrelationsfunktion} \quad \langle x(t)x(t+\mathbf{t}) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\mathbf{t}) dt$$

periodisch in \mathbf{t}

$\rightarrow 0$ für $\mathbf{t} \rightarrow \infty$

$= 0$ für $\mathbf{t} > \mathbf{t}_c$

Fourierspektrum (bzw. Leistungsspektrum):
$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$$

diskrete Frequenzen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$

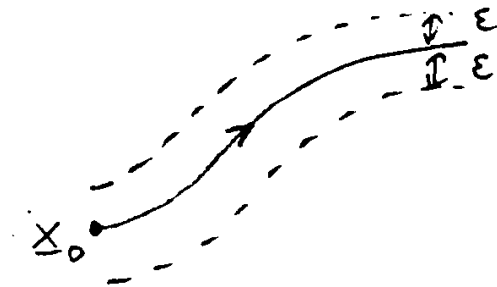
breites Frequenzband

Instabilität der Bewegung bei kleinen
Störungen der Anfangsbedingungen
typische universelle
Bifurkationszenarien

Def.: Eine Bewegung heißt **chaotisch**, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.

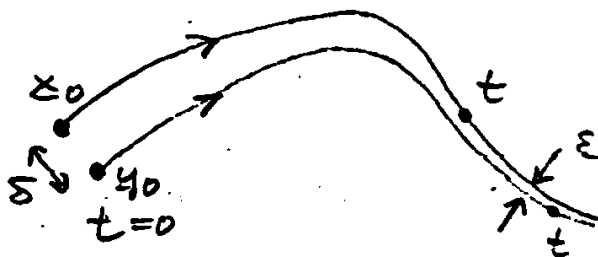
Quantitative Formulierung der Stabilität gegenüber kleinen Variationen der Anfangsbedingungen:

Bahnstabilität / Orbitale Stabilität



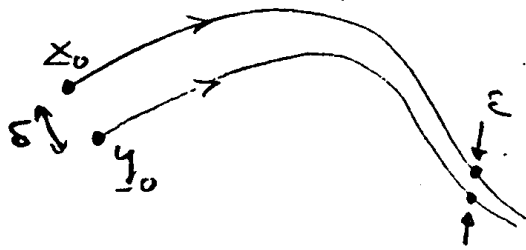
bahnstabil: Alle benachbarten Bahnen bleiben in einer ϵ - Röhre um $\Phi(t, \bar{x}_0)$

Asymptotisch bahnstabil:



Der Abstand benachbarter Bahnen geht gegen Null für $t \rightarrow \infty$

Ljapunov- stabil



Für DASSELBE t gilt: $|\Phi(t, \bar{x}_0) - \Phi(t, \bar{y}_0)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ (t gleicher Zeitpunkt auf beiden Bahnen)

Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve $\Phi(t, \bar{x}_0)$:

$$d\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\bar{x}(t), t) dx_k$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\bar{x}(t), t) := A_{ik}(t)$$

Dabei:

$I_k(t)$ zu $A_{ik}(t)$ Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren $\bar{x}^{(k)}(t)$

Formale Lösung:

$$d\bar{x}(t) = e^{\int_0^t A(t') dt'} d\bar{x}(0)$$

Dies ist die Zeitentwicklung einer infinitesimalen Kugel um \bar{x}_0 , also ein n -dimensionaler Ellipsoid mit den Hauptachsen $p_k(t) \sim p_k(0)e^{I_k t}$

Definition: Stabilität ist bestimmt durch die **Ljapunov-Exponenten** $\bar{I}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_k(t)}{p_k(0)}$

Nebenbemerkung: Sei I der führende (größte) Ljapunov-Exponent

$$I := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |\bar{x}(t) - \bar{y}(t)| \Rightarrow |\Phi(t, \bar{x}_0) - \Phi(t, \bar{y}_0)| \sim e^{I t}$$

Das heißt, der Abstand der anfangs leicht auseinanderliegenden Phasenraumkurven wächst mit $e^{I t}$.

Für $I < 0$: kleine Abweichungen der Anfangsbedingungen werden exponentiell gedämpft

$I > 0$: die benachbarten Bahnen laufen exponentiell auseinander (Kriterium für Chaos)

Für den chaotischen Attraktor im R^3 gilt:

Auf dem Attraktor: $\bar{I}_1 > 0$ auf dem Attraktor: chaotische Bewegung

$\bar{I}_2 = 0$: Bifurkationspunkte

$\bar{I}_3 < 0$: Von außen Annäherung an den Attraktor (Abstand verringert sich exponentiell).

Beispiel für ein Ljapunov-Spektrum:

