

Allgemeine Relativitätstheorie

Einleitung

Leitende Gedanken der Allgemeinen Relativitätstheorie

- Methodische Vorbemerkung zur ART der folgenden Darstellung. Die ART wird motiviert durch Probleme der Newtonschen Mechanik und der SRT. Darüber muss gesprochen werden.
- Ausgangspunkt: Beschreibung von Bewegungen -> bisher: newtonische bewegungsgleichungen mit Galilei- Transformationen. Begriff des Inertialsystems: Wir werden über zulässige Koordinatensysteme und über die Bedeutung der zeit reden müssen !
- Vergl.: C. Neumann & L.Lange zur Bestimmung von Inertialsystemen in der Newtonschen Mechanik !
- M. v. Laue zur Bestimmung von Inertialsystemen in der SRT !
- Die ART lebt von Prinzipien der SRT und der Newtonschen Gravitationstheorie
 - aus der SRT: Relativitätsprinzip : kein Inertialsystem darf in der physikalischen Beschreibung gegen ein anderes ausgezeichnet sein !
 - Gravitationstheorie: Poissons-Gleichung / Quellgleichung des Feldes: $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$
 - Bewegungsgleichung in drei Raumkoordinaten: $m_T \frac{d^2x^i}{dt^2} = K^i, K^i = -m_p \partial_i \Phi$
 - Bei Newton: Als zufälliges Phänomen: $m_T = m_p$ dabei: i=1,2,3

Verallgemeinerungsversuche: z.B. Nordström (1913):

$$\Phi \# \Phi = \frac{1}{6} kT$$

$$\frac{1}{6} k := \frac{4\pi G}{c^4}$$

$$T := \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

geistreich, aber: falsch !

Einstein: 1907: Der glücklichste Gedanke meines Lebens ! Das Äquivalenzprinzip als Grundlage der ART:

$$m_T = m_p$$

Mit Hilfe $m_T = m_p$ Verallgemeinerung der SRT zur ART

II. Übergang von der SRT zur ART

Lorentz- Transformationen

Die Newtonsche Mechanik ist Galileo- invariant.

Invarianz: Bei Koordinatentransformationen ändern sich die Gleichungen/ Gesetze nicht. Forminvarianz -> die wesentlichen Gleichungen ändern sich nicht, wie Bewegungsgleichungen bezeichneten wir auch als Kovarianz !

Invarianzen der Newtonschen Mechanik

- Zeit- Transformation (Translation)

$$t' = t + \tau$$

$$\tau = \text{const.}$$

$$dt' = dt$$

Invarianz des ZeitMAßES bestimmt die Invarianz der Bewegungsgleichungen

- Raum- Transformation (Translation und Rotation)

$$x^i' = \alpha^i_k x^k + a^i$$

$$a^i = \text{const.}$$

$$\alpha^i_k = \text{const.}$$

$$\alpha^i_k (\alpha^T)^k_i = \delta^i_j$$

Drehungen sind orthogonale Transformationen -> die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind invariant unter orthogonalen Transformationen

-> entsprechend später: Verallgemeinerte orthogonalität der Lorentz- Transformationen.

Weitere Orthogonalitätseigenschaft:

$$\det |\alpha^i_k| = 1$$

Die Kovarianz der Bewegungsgleichungen folgt aus der Invarianz des Raummaßes -> Hier ist die Invarianz des Raummaßes evident durch die Orthogonalität der Drehgruppe:

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = (dx^1')^2 + (dx^2')^2 + (dx^3')^2 = d\sigma'^2$$

Spezielle Galilei- Transformation

$$x^i' = x^i + v^i t$$

$$v^i = \text{const.}$$

Keine Invarianz des Raummaßes:

$$d\sigma \neq d\sigma'$$

Insgesamt: **Kovarianz der Bewegungsgleichungen bzgl. der allgemeinen Galilei- Gruppe**

$$t' = t + \tau$$

$$x^i' = \alpha^i_k x^k + a^i + v^i t$$

Formal kann dies unter Einpacken der Zeit vierdimensional formulieren !

Dies ist dann jedoch physikalisch ohne Bedeutung

- 1) der Raum wird separabel um die Zeit erweitert -> kein Erkenntnisgewinn !
- 2) die vierdimensionale Gruppe ist reduzibel !

$$\begin{pmatrix} t' \\ x^i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v^i & \alpha^i_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau \\ a^i \end{pmatrix}$$

zehnparametrische Gruppe !

Allgemeine, bzw. andere Transformationen ändern die Form der bewegungsgleichungen !!

Beispiel: Rotierendes Bezugssystem mit konst. Winkelgeschwindigkeit !

$$x^1 := x^1 \cos \omega t - x^2 \sin \omega t$$

$$x^2 := x^1 \sin \omega t + x^2 \cos \omega t$$

Damit folgt:

$$m \frac{d^2 x^1}{dt^2} \Rightarrow m \frac{d^2 x^{1'}}{dt^2} - m \frac{\partial \Phi}{\partial x^{1'}} + \dots$$

$$m \frac{d^2 x^2}{dt^2} \Rightarrow m \frac{d^2 x^{2'}}{dt^2} + m \frac{\partial \Phi}{\partial x^{2'}} + \dots$$

$$\Phi := -\frac{\omega^2}{2} \left[(x^1')^2 + (x^2')^2 \right]$$

Systematische und historische Bemerkungen zum Verhältnis von Galilei - Invarianz und Elektrodynamik:
Bedeutung des Prinzips der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

→ Angesichts der Notwendigkeit, diese Konstanz zu berücksichtigen, wurden die Transformationsgesetze von Albert Einstein zunächst verallgemeinert

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: -> Relativitätsprinzip (Transformationen müssen so verändert werden, dass sie dem Relativitätsprinzip und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit rechnung tragen !)

$\Delta r = c \Delta t$ gilt in allen Inertialsystemen !

Aus dieser Forderung folgt sofort die Minkowski- Metrik:

$$\Delta r = c \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta r^2 = c^2 \Delta t^2$$

$$\Rightarrow (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = c^2 \Delta t^2$$

$$\Rightarrow -(\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 + c^2 \Delta t^2 = 0 := \Delta s^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2 dt^2 = 0$$

$$ds^2 = ds'^2$$

Weist man dieser Relation die Eigenschaft einer Metrik zu, so folgt ein vierdimensionaler, sogenannter pseudo-euklidischer Raum. Die Metrik in sogenannten pseudo-kartesischen Koordinaten oder auch Inertialkoordinaten lautet:

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Linienelement schreibt sich in Inertialkoordinaten:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2 dt^2$$

$$x^0 := ct$$

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^0)^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$ds^2 =! ds'^2$$

fordert man für Transformationen die Erhaltung des vierdimensionalen Linienelements, so ergeben sich die Transformationen, die diese Inertialsysteme nach dieser Vorschrift verbinden, ergo die Lorentz-Transformationen !!

Ansatz:

$$x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma} x^{\gamma} + a^{\alpha}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\gamma} = \text{const.}$$

$$a^{\alpha} = \text{const.}$$

→ Wir fordern nur Linearität der Trafo!

→ Grund: Nichtlineare Transformationen würden die Homogenität des Raumes verletzen !

Für das GEFICKTE Linienelement folgt:

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha'} dx^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} dx^{\gamma} dx^{\delta} = ds^2 = \eta_{\gamma\delta} dx^{\gamma} dx^{\delta}$$

Was aber nichts anderes sagt als:

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} = \eta_{\gamma\delta}$$

Also: Allgemeine Lorentz- Transformation (sog. Poincaré Transformation)

$$x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta} = \text{const.}$$

$$a^{\alpha} = \text{const.}$$

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} = \eta_{\gamma\delta}$$

Spezialfall der räumlichen Rotation:

$$x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$$

$$\Lambda^i_k = \alpha^i_k$$

$$\Lambda^0_0 = 1$$

$$\Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = 0$$

Spezielle Lorentz- Transformation (Lorentztrafo ohne räumliche Rotation und ohne Translation !)

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Lambda^0_0 = \gamma$$

$$\Lambda^0_j = \Lambda^j_0 = \gamma \frac{v^j}{c}$$

$$\Lambda^i_j = \delta^i_j + (\gamma - 1) \frac{v^i v_j}{v^2}$$

Somit folgt für die spezielle Lorentz- Trafo in x1- Richtung

$$x^1' = \frac{x^1 \pm v^1 t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x^2' = x^2$$

$$x^3' = x^3$$

$$ct' = \frac{ct \pm \frac{v}{c} x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dabei ist jede spezielle Lorentz- Trafo durch Kombination einer räumlichen Drehung und anschließender Lorentztrafo für Bewegung entlang der x1- Achse auf diese Form zurückzuführen !

Eigentliche Lorentz- Trafo (schließt räumliche und zeitliche Spiegelungen aus):

$$\det \Lambda = 1$$

→ nur Orthogonalitätsbedingung

→ Damit bilden die Λ^α_β eine zehnparametrische Gruppe !

4. tensoren im Minkowski- Raum

1) Minkowski- Raum: vierdimensionaler pseudo- euklidischer Raum

Dreidimensionaler euklid. Raum: bestimmt durch Pythagoras- Metrik:

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \delta_{ik} dx^i dx^k$$

$$\delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) vierdimensionaler euklidischer Raum:

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) vierdimensionaler pseudo- euklidischer Raum

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Metrik !

Merke:

2) Die Lorentz- Trafo wurde gerade unter den Voraussetzungen bestimmt, dass sie ds^2 und $\eta_{\mu\nu}$ invariant lässt !

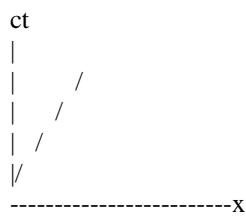
3) es existieren drei Arten von Abständen:

$ds^2 > 0 \rightarrow$ zeitartig -> Ereignisse können kausal wechselwirken

$ds^2 = 0 \rightarrow$ Lichtartig -> Ereignisse sind gleichzeitig, werden durch Lichtsignale miteinander verknüpft !

$ds^2 < 0 \rightarrow$ Raumartig ! -> Lichtsignale sind außerhalb des Minkowski- Lichtkegels und können nicht kausal wechselwirken !

Die Lichtartigen Ereignisse spannen den Minkowski- >Lichtkegel auf:



→ 45 ° Kegel, Zukunftskegel nach oben geöffnet,

→ Vergangenheits- Lichtkegel nach unten

Tensoren (definiert durch die Transformationseigenschaften)

Kontravarianter Vektor:

$$V^\beta$$

$$V^\beta = \Lambda^\beta_\alpha V^\alpha$$

Kovarianter Vektor:

$$V_\beta := \eta_{\beta\alpha} V^\alpha$$

$$\Rightarrow V^\beta = \eta^{\beta\alpha} V_\alpha$$

$$\eta^{\beta\alpha} \eta_{\alpha\gamma} = \delta^\beta_\gamma$$

Trafo:

$$V_\beta = \eta_{\beta\alpha} V^\alpha = \eta_{\beta\alpha} \Lambda^\alpha_\gamma V^\gamma = \eta_{\beta\alpha} \Lambda^\alpha_\gamma \eta^{\gamma\delta} V_\delta := \bar{\Lambda}^\delta_\beta V_\delta$$

$$\bar{\Lambda}^\delta_\beta = \eta_{\beta\alpha} \Lambda^\alpha_\gamma \eta^{\gamma\delta} = \eta_{\beta\alpha} \eta^{\gamma\delta} \Lambda^\alpha_\gamma = \Lambda^\delta_\beta$$

dies ist die inverse Lorentz- Transformatiuon, die inverse Matrix zu Λ^α_γ .

Dieser ist nur zur Veranschaulichung brauchbar. Wir verwenden als inverse Lorentz- Trafo die inverse Darstellung der Indices ! Die inverse Matrix mit Strich drüber verletzt Summenkonvention und macht bei blanker Anwendung aus Vektoren dreistufige Tensoren !. Wir beschränken uns deshalb auf

$$\Lambda_\beta^\delta$$

Dabei merke man sich: kontravariante (obenstehende) Indices werden über die Lorentz- Transformation transformiert. Kovariante (untenstehende) Indices dagegen transformieren über die inverse Lorentz- Transformation !

Allgemein

$$T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} = \Lambda^\alpha_\rho \dots \Lambda^\beta_\sigma \Lambda^\tau_\gamma \dots \Lambda^\nu_\delta T^{\rho\dots\sigma}_{\tau\dots\nu}$$

5) die partielle Ableitung ist eine tensorielle Operation und transformiert wie ein kovarianter Vektor. Die in der ART notwendige kovariante Ableitung entspricht im Minkowski- Raum der partiellen. Man kann die kovariante Ableitung auch durch einen Strichpunkt abkürzen. Da es Minkowskiraum keinen Unterschied zwischen der partiellen, kovariant transformierenden und der "kovarianten Ableitung" gibt, wird hier immer mittels Komma abgekürzt, welches im Riemannschen Raum der partiellen Ableitung entspricht !

Die partielle Ableitung ist eine tensorielle Operation ! Sie führt dann ein tensorfeld n. Stufe in ein tensorfeld (n+1). STufe über !

Beispiel:

$$\frac{\partial T^{\rho \dots \sigma}_{\tau \dots \nu}}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha T^{\rho \dots \sigma}_{\tau \dots \nu} = T^{\rho \dots \sigma}_{\tau \dots \nu, \alpha}$$

Das Transformationsverhalten der Ableitung ist kovariant also invers zum Transformationsverhalten der Viererortsvektoren, wie einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V^\rho}{\partial x^\alpha} \right)' &= \frac{\partial V'^\rho}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (V'^\rho) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\Lambda^\rho_\sigma V^\sigma) = \Lambda^\rho_\sigma \frac{\partial}{\partial x^\alpha} V^\sigma \\ &= \Lambda^\rho_\sigma \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} = \Lambda^\rho_\sigma \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\beta} = \Lambda^\rho_\sigma \Lambda_\alpha^\beta \frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\beta} \\ \text{Also: } \frac{\partial V^\rho}{\partial x^\alpha} &= \partial_\alpha \end{aligned}$$

ist die kovariante Ableitung (im Minkowskiraum)

$$\partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta$$

ist kontravariant !

$$\partial^\alpha \partial_\alpha := \# = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

ist skalar !

5. relativistische Mechanik

I. Newton'sches Axiom

Übersetzungsvereinbarungen:

$$m \frac{dx^i}{dt} = \text{const.} \rightarrow m \frac{dx^\mu}{d\tau} = \text{const.}$$

für kräftefreie Bewegung !

$m' \rightarrow m$ einen Lorentz- Skalar ! Da m selbst Quelle der Gravitation ist ! bekommt man hier Probleme für Einbeziehung der Gravitation -> SRT -> ART

$dx^i \rightarrow dx^\mu$ einen Lorentz- Vektor !

$dt \rightarrow d\tau$ einen Lorentz- Skalar !

$$d\tau := \frac{1}{c} ds = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Uhrenhypothese: Eine beliebig bewegte Uhr zeigt die Eigenzeit τ an !

Vierergeschwindigkeit:

$$(u^\mu) := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (c, v^1, v^2, v^3)$$

$$u^\mu u_\mu = c^2$$

Viererimpuls

$$(p^\mu) := m \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (c, v^1, v^2, v^3) = \left(\frac{E}{c}, p^i \right)$$

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2$$

dabei bezeichnet

m die Ruhemasse und demnach repräsentiert

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ die träge Masse !}$$

Das erste Axiom, nämlich

$$m \frac{dx^i}{dt} = \text{const.} \rightarrow m \frac{dx^\mu}{d\tau} = \text{const.}$$

besagt in seiner vierdimensionalen Fassung die Erhaltung von Energie und Impuls

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const.}$$

$$p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const.}$$

Der Lorentz- Skalar

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2$$

lautet ausgeschrieben:

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \Rightarrow E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$$

$$p^2 = p^i p_i$$

→ Energie / Impuls- Beziehung somit:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \approx mc^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

in erster Näherung, für $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ brauchbar !

Dabei kommt gerade Ruheenergie E0 zuzüglich kinetischer klassischer Energie E1 raus !

Allgemein:

$$E_0 := mc^2$$

$$E = E_0 + E_1 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \Delta m \rightarrow \Delta E_0$$

da aber

$$E = E_0 + E_1 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \Delta m \rightarrow \Delta E_0 = -\Delta E_1$$

Also: Die relativistische Verallgemeinerung des Impulses über den einfachsten Lorentz- Skalar führt auf die Äquivalenz von Masse und Energie !

setzt man den Viererimpuls in eine Kontinuitätsgleichung ein, so gewinnt man die zeitliche Erhaltung der Energie, also zeitliche Änderung = Gradient des Impulses

$$\frac{\dot{E}}{c} = \partial_i p^i \quad \text{dabei ist die rechte Seite als Kraftdichte zu sehen und mit der Geschwindigkeit } c \text{ multipliziert}$$

demnach eine Leistungsdichte

-> Energieverlust nur durch Arbeit des Feldes (an Probekörpern !)

2. newtonsches Axiom

$$m \frac{dv^i}{dt} = K^i \rightarrow m \frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu \rightarrow \text{Minkowski- Kraft !}$$

Man kann die Minkowski- Kraft konstruieren, indem man für $v=0$

$$f^\mu = (0, K^i) \text{ ansetzt und dann eine Lorentztrafo für } -v \text{ durchführt !}$$

In diesem Fall folgt:

$$f^\mu = \left(\gamma \frac{v^i K^i}{c}, \gamma (K^i_{\perp} + K^i_{\parallel}) \right)$$

Die Null- Komponente ist bis auf einen Faktor von der Dimension einer Leistung ! Im nichtrelativistischen Grenzfall lautet die Nullkomponente der Bewegungsgleichung

$$\frac{dE}{dt} = K^i v_i$$

3. Newtonsches Axiom: hat keine direkte relativistische Entsprechung

6. Elektrodynamik (im leeren Raum)

Maxwell- Gleichungen

$$\text{div} \bar{E} = 4\pi \rho_e$$

$$\text{rot} \bar{B} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\text{div} \bar{B} = 0$$

$$\text{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

daraus folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \bar{j} = 0$$

Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = q \left(\bar{E} + \frac{\bar{v}}{c} \times \bar{B} \right)$$

Lorentzkraft !

Aus der Kontinuitätsgleichung (die Null ist der offensichtlichste Lorentz- Skalar) folgt der Vierer- Stromvektor:

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu &= 0 \\ \Rightarrow j^\mu &= (c\rho_e, j^i)\end{aligned}$$

Der Vierer- Feldstärke- Tensor kann definiert werden:

$$\{F^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Aus diesem folgen die Erregungsgleichungen, die inhomogenen Maxwellgleichungen, also
 $\operatorname{div} \bar{E} = 4\pi\rho_e$

$$rot \bar{B} = \frac{4\pi}{c} \bar{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

als Divergenz des Feldstärketensors

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

und die inneren Feldgleichungen , die homogenen Maxwellgleichungen stellen eine Art Bianchi- Identität dar:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\beta F_{\mu\nu} = 0$$

Lösung dieser Gleichung, der homogenen Maxwellgleichung führt auf das Viererpotenzial, als dessen Rotation sich der Feldstärketensor darstellen lassen muss:

$$A^\mu = (\Phi, A^i)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Diese Gleichung ist invariant unter der Eichtrafo

$$A^\nu \rightarrow A^\nu + \partial^\nu \Psi$$

in Lorentz- Eichung fordert man:

$$\partial_\nu A^\nu = 0$$

Damit ergeben sich die Potenzialgleichungen gemäß

$$\# A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\# = \partial_\mu \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$$

Die Felder ergeben sich dann über

$$B = \text{rot} A$$

$$E = -\frac{1}{c} \partial_t A - \nabla \Phi$$

Also: Die Lorentzeichung führt auf die Potenzialgleichungen

$$\# A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\# = \partial_\mu \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$$

mit

$$\partial_\nu A^\nu = 0$$

Somit folgt als Bewegungsgleichung

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta$$

Energie- Impuls- Tensor

$$T^{\mu\kappa} = \frac{1}{4\pi} \left(\eta_{\lambda\nu} F^{\mu\nu} F^{\lambda\kappa} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\kappa} F_{\lambda\alpha} F^{\lambda\alpha} \right)$$

Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes im Vakuum -> SI - Einheiten !!

Der Energie- Impuls- Tensor

Wir betrachten die elektromagnetische Energiedichte im Vakuum

$$0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \bar{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \bar{B}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\bar{E}^2 + c^2 \bar{B}^2)$$

Mit den Transformationsformeln für die Felder E und B rechnet man leicht nach, dass

$$\bar{E}^2 + c^2 \bar{B}^2 \neq \bar{E}^2 + c^2 \bar{B}^2$$

Das bedeutet, die elektromagnetische Energiedichte ist kein Lorentz- Skalar !

Damit stellt sich die Frage: Wie transformiert sich u ? Was ist die entsprechende Vierergröße ??

Wir werden sehen, dass u nur die 00- Komponente eines Vierertensors zweiter Stufe ist, dass sich also die elektromagnetische Energiedichte wie die 00- Komponente eines Vierertensors transformiert

Um diesen Tensor zu finden betrachten wir wieder die Kraftdichte:

$$k^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} j^\lambda = -\frac{1}{\mu_0} \eta^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} \partial_\kappa F^{\lambda\kappa} = -\frac{1}{\mu_0} \eta^{\mu\nu} \partial_\kappa (F_{\nu\lambda} F^{\lambda\kappa}) + \frac{1}{\mu_0} \eta^{\mu\nu} (\partial_\kappa F_{\nu\lambda}) F^{\lambda\kappa}$$

Das letzte Glied kann weiter durch vertauschen von Indices umgeformt werden, wobei die Schiefsymmetrie des Feldstärketensors zu nutzen ist:

$$\begin{aligned} k^\mu &= -\frac{1}{\mu_0} \eta^{\mu\nu} \partial_\kappa (F_{\nu\lambda} F^{\lambda\kappa}) + \frac{1}{2\mu_0} \eta^{\mu\nu} (F^{\lambda\kappa} \partial_\kappa F_{\nu\lambda} + F^{\kappa\lambda} \partial_\lambda F_{\nu\kappa}) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \eta^{\mu\nu} \partial_\kappa (F_{\nu\lambda} F^{\lambda\kappa}) + \frac{1}{2\mu_0} \eta^{\mu\nu} F^{\lambda\kappa} (\partial_\kappa F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\kappa\nu}) \end{aligned}$$

Nach der inneren Feldgleichung gilt:

$$\partial_\kappa F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\kappa\nu} = -\partial_\nu F_{\lambda\kappa}$$

Also:

$$\begin{aligned} k^\mu &= -\frac{1}{\mu_0} \eta^{\mu\nu} \partial_\kappa (F_{\nu\lambda} F^{\lambda\kappa}) - \frac{1}{2\mu_0} \eta^{\mu\nu} F^{\lambda\kappa} \partial_\nu F_{\lambda\kappa} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \eta^{\mu\nu} \partial_\kappa (F_{\nu\lambda} F^{\lambda\kappa}) - \frac{1}{4\mu_0} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu (F^{\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa}) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \eta^{\mu\nu} \partial_\kappa \left(F_{\nu\lambda} F^{\lambda\kappa} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\kappa F^{\lambda\alpha} F_{\lambda\alpha} \right) \\ &:= -\partial_\kappa T^{\mu\kappa} \end{aligned}$$

Also:

$$T^{\mu\kappa} = \frac{1}{\mu_0} \eta^{\mu\nu} \left(F_{\nu\lambda} F^{\lambda\kappa} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\kappa F^{\lambda\alpha} F_{\lambda\alpha} \right)$$

Die Minkowski- Kraftdichte k^μ ihrerseits kann als negative Divergenz eines Tensors zweiter Stufe $T^{\mu\kappa}$ geschrieben werden mit

$$T^{\mu\kappa} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\eta^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} F^{\lambda\kappa} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\kappa} F_{\lambda\alpha} F^{\lambda\alpha} \right)$$

Formt man diese Gleichung noch etwas um, indem man die Indices von $F_{\nu\lambda}$ nach oben zieht, so ergibt sich:

$$T^{\mu\kappa} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\eta_{\lambda\nu} F^{\mu\nu} F^{\lambda\kappa} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\kappa} F_{\lambda\alpha} F^{\lambda\alpha} \right)$$

An dieser Form kann man sofort sehen, dass $T^{\mu\kappa}$ symmetrisch ist, da auch $\eta_{\lambda\nu}$ symmetrisch ist.

Wir drücken nun die Komponenten von $\{T^{\mu\kappa}\}$ durch die Komponenten der Feldvektoren aus, die wir aus der Matrixschreibweise von $\{F^{\mu\nu}\}$ ablesen können. Damit sollte man dann die Bedeutung von $\{T^{\mu\kappa}\}$ erkennen:

Zeit- Zeit - Komponente

$$T^{00} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \bar{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \bar{B}^2 \right) = u$$

Die elektromagnetische Energiedichte u ist also die 0-0- Komponente des Energie- Impuls- Tensors. Damit ist auch ihr Transformationsverhalten bei Lorentz- Transformationen bestimmt.

Für die Raum- Zeit- Komponenten ($j=1,2,3$) findet man:

$$T^{0j} = T^{j0} = -\frac{1}{c\mu_0} (\bar{B} \times \bar{E})^j = \frac{1}{c} (\bar{E} \times \bar{H})^j = \frac{1}{c} S^j = c\pi^j$$

Dabei bezeichnet

\bar{S} die Energiestromdichte (Poynting- Vektor) und $\bar{\pi}$ die Impulsdichte. Für die Raum- Raum- Komponenten ($i,j=1,2,3$) ergibt sich schließlich:

$$T^{ii} = -\varepsilon_0 (E^i)^2 - \frac{1}{\mu_0} (B^i)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\bar{E}^2 + c^2 \bar{B}^2)$$

$$T^{ij} = T^{ji} = -\varepsilon_0 (E^i E^j) - \frac{1}{\mu_0} (B^i B^j)$$

$j \neq j$

Zusammenfassung

Hier sollen die Bedeutungen der einzelnen Komponenten von $\{T^{\mu\nu}\}$ zusammengefasst werden:

- 1) Die 0-0-Komponente ist die elektromagnetische Energiedichte u
- 2) Die 0-j- Komponenten ($j=1,2,3$) sind $\frac{1}{c} \bar{S}$, also $1/c * \text{Energiestromdichte}$
- 3) Die j-0- Komponenten($j=1,2,3$) sind $\frac{1}{c} \bar{S} = c \bar{\pi} = c * \text{Impulsdichte}$, wobei die Impulsdichte $\bar{\pi}$ über $\bar{S} = c^2 \bar{\pi}$ mit dem Poynting- Vektor zusammenhängt.
- 4) Die Raum- Raum - Komponenten sind genau der negative Maxwellsch Spannungstensor. Sie ergeben also den Druck des elektromagnetischen Feldes

$$T^{ii} = -\varepsilon_0 (E^i)^2 - \frac{1}{\mu_0} (B^i)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\bar{E}^2 + c^2 \bar{B}^2)$$

$$T^{ij} = T^{ji} = -\varepsilon_0 (E^i E^j) - \frac{1}{\mu_0} (B^i B^j)$$

Dieser Druck ist über

$$K_x = - \int (T_{xx} n_x + T_{yx} n_y + T_{zx} n_z) df$$

$$\bar{n} df = d\bar{f}$$

als eine Durch eine Fläche hindurch übertragene Kraft zu verstehen.

Insgesamt schreibt sich der Energie- Impuls- Tensor:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & \frac{1}{c} \bar{S} & \frac{1}{c} \bar{S} & \frac{1}{c} \bar{S} \\ c \bar{\pi} & Max & well & scher \\ c \bar{\pi} & Sp & annu & ngs \\ c \bar{\pi} & te & ns & or \end{pmatrix}$$

Der Energie- Impuls- Tensor ist von fundamentaler Bedeutung, genauso wie für das elektromagnetische Feld kann in der Mechanik ein analog aufgebauter Tensor gefunden werden. Diese Tensoren spielen besonders in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine fundamentale Rolle !

Erhaltungsgrößen

Falls keine Ladungen vorhanden sind ist die Kraftdichte

$$k^\mu = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\lambda T^{\mu\lambda} = 0$$

Für die einzelnen Komponenten $\mu = 0,1,2,3$ erhält man dann:

$$\frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial ct} + \frac{\partial T^{\mu 1}}{\partial x} + \frac{\partial T^{\mu 2}}{\partial y} + \frac{\partial T^{\mu 3}}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial ct} + \nabla \cdot \bar{T}^\mu = 0$$

$$\bar{T}^\mu = (T^{\mu 1}, T^{\mu 2}, T^{\mu 3})$$

Also 4 Kontinuitätsgleichungen

Für $j=1,2,3$ ergibt diese Gleichung mit $T^{j0} = c\pi^j$

$$\nabla \cdot \bar{T}^j + \frac{\partial \pi^j}{\partial t} = 0$$

Integriert man dies über ein Volumen V :

$$\int \nabla \cdot \bar{T}^j dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int \pi^j dV$$

$$\int \nabla \cdot \bar{T}^j dV = \int \bar{T}^j d\bar{F}$$

Gaußscher Satz.

Nun kann man das Volumen V so groß wählen, dass \bar{E}, \bar{B} auf der Hüllfläche verschwinden, also:

$$\int \bar{T}^j d\bar{F} = 0$$

somit:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int \pi^j dV$$

$$\int \bar{\pi} dV = \bar{p}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{p} = 0$$

Also: sind keine Ladungen vorhanden, so ist der Gesamtimpuls des im Volumen V befindlichen elektromagnetischen Feldes erhalten !

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{p} = 0$$

Also Impulserhaltung $\bar{p} = \text{const.}$

Die Nullte Gleichung

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial ct} + \nabla \cdot \bar{T}^0 = 0$$

liefert analog

$$\frac{\partial u}{\partial ct} + \frac{1}{c} \nabla \cdot \bar{S} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \bar{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Mit Hilfe von

$$\int \nabla \cdot \bar{S} dV = \int \bar{S} d\bar{F} = 0$$

$$\int u dV = E$$

folgt dann völlig analog die Energieerhaltung $\frac{\partial}{\partial t} E = 0$

Das heißt: Die Gesamtenergie des elektromagnetischen Feldes im Volumen V ist konstant. Aus dem Energie-Impuls- Tensor

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & \frac{1}{c}\bar{S} & \frac{1}{c}\bar{S} & \frac{1}{c}\bar{S} \\ c\bar{\pi} & Max & well & scher \\ c\bar{\pi} & Sp & annu & ngs \\ c\bar{\pi} & te & ns & or \end{pmatrix}$$

sieht man weiterhin, das

$$\frac{1}{c} \int T^{00} dV = \frac{1}{c} \int u dV = \frac{1}{c} E = p^0$$

$$\frac{1}{c} \int T^{j0} dV = \frac{1}{c} \int \pi^j dV = p^j$$

Also dass eine Integration der $\mu 0$ - Komponenten über ein Volumen V:

$$\frac{1}{c} \int T^{\mu 0} dV = p^\mu$$

den Energie- Impuls- Vektor (Vierervektor) gibt.

Der in der Mechanik analog (z.B. für Systeme von Punktmassen oder Flüssigkeiten) eingeführte Energie-Impuls- Tensor besitzt ebenfalls die Eigenschaft, dass seine Divergenzfreiheit die Energie- und Impulserhaltung für das mechanische System ohne äußere Kräfte ergibt. Sind zwischen dem mechanischen System und dem elektromagnetischen Feld Wechselwirkungen vorhanden, etwa dadurch, dass die Teilchen geladen sind, dann liefert das Verschwinden der Divergenz der Summe der beiden Energie- Impuls- Tensoren die Erhaltung der Gesamtenergie und des Gesamtmpulses der Teilchen und des Feldes.

7. Relativistische Hydrodynamik !

Ideale Flüssigkeit:

Wird charakterisiert durch die Dichte $\rho(x^j, t)$

durch ein Geschwindigkeitsfeld $v^i(x^j, t)$

und durch ein isotropes Druckfeld $P(x^j, t)$

→ dies sind 5 Feldfunktionen !

Bewegungsgleichung in der nichtrelativistischen Fassung

3 Euler- Gleichungen

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \bar{v}) \bar{v} \right) = -\nabla P + \bar{f}$$

→ quadratisch in v und linear in ρ !

Eine Kontinuitätsgleichung und 1 Zustandsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v}) = 0$$

$$P = P(\rho)$$

Insgesamt also 5 Bestimmungsgleichungen

in Komponentenschreibweise:

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + (\partial_k v^k) v^i \right) = -\partial_i P + f^i$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho v^i) = 0$$

$$P = P(\rho)$$

Man kann die Massendichte ρ so präzisieren, dass ρ in dem IS' zu bestimmen ist, in dem das betrachtete Flüssigkeitselement ΔV an x momentan ruht !

die so definierte Massendichte

$$\rho = \text{Ruhemasse} / \text{Eigenvolumen} \quad \rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \text{ ist ein Lorentz- Skalar !}$$

Mit der Vierergeschwindigkeit

$$(u^\mu) := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (c, v^1, v^2, v^3)$$

$$u^\mu u_\mu = c^2$$

folgt, dass

$$M^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta \text{ ein Lorentz- Tensor ist}$$

Mit

$$(u^\mu) := \gamma(c, v^i)$$

$$\gamma^{-2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

können wir

$$M^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta \text{ durch } v^i \text{ ausdrücken:}$$

$$M^{\alpha\beta} = \rho \gamma^2 c^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{v^1}{c} & \frac{v^2}{c} & \frac{v^3}{c} \\ \frac{v^1}{c} & \frac{v^1 v^1}{c^2} & \frac{v^1 v^2}{c^2} & \frac{v^1 v^3}{c^2} \\ \frac{v^2}{c} & \frac{v^2 v^1}{c^2} & \frac{v^2 v^2}{c^2} & \frac{v^2 v^3}{c^2} \\ \frac{v^3}{c} & \frac{v^3 v^1}{c^2} & \frac{v^3 v^2}{c^2} & \frac{v^3 v^3}{c^2} \end{pmatrix}$$

Als Zeit- zeit_ Komponente gewinnen wir (00- Komponente)

$$M^{00} = \rho \gamma^2 c^2$$

Als Größe

$$\tilde{\rho} = \frac{M^{00}}{c^2} = \rho \gamma^2$$

gewinnen wir Eine Energie- Massendichte.
Während

ρ als Lorentz- Skalar definiert wurde, transformiert dann $\tilde{\rho} = \frac{M^{00}}{c^2} = \rho\gamma^2$ eben als 00- Komponente eines Lorentz- Tensors !

Analog dazu kann man anstelle der Lorentz- skalaren Ruhemasse m auch die relativistische Masse

$$\gamma m = \frac{p^0}{c}$$

Wichtig: ir haben einen deutlichen Unterschied zur Elektrodynamik ! Die dort eingeführte Ladungsdichte ρ_e

war definiert als 0- Komponente eines Lorentz- Vektors, ergo: $\rho_e = \frac{j^0}{c}$. Sie war KEIN Lorentz- Skalar wie die hier eingeführte Masse pro Eigenvolumen !

Für den Vergleich zwischen Elektrostatik und Elektrodynamik und Newtonscher Theorie und ART andererseits

ist es hilfreich, $\tilde{\rho} = \frac{M^{00}}{c^2} = \rho\gamma^2$ als Energie- massen- Dichte einzuführen, die als Komponente eines Lorentz-

Tensors wie die Ladungsdichte $\rho_e = \frac{j^0}{c}$ transformiert !

Divergenz von $M^{\alpha\beta}$:

$$\partial_\beta M^{0\beta} = c[\partial_t \tilde{\rho} + \partial_k (\tilde{\rho} v^k)]$$

$$\partial_\beta M^{i\beta} = \partial_t (\tilde{\rho} v^i) + \partial_k (\tilde{\rho} v^i v^k) = \tilde{\rho} (\partial_t v^i + v^k \partial_k v^i) + v^i (\partial_t \tilde{\rho} + \partial_k (\tilde{\rho} v^k))$$

Damit aber haben wir eine relativistische Verallgemeinerung der Euler- Gleichungen.
denn: Im nichtrelativistischen Grenzfall reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \bar{v}) \bar{v} \right) = 0$$

und

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{v}) = 0$$

Die relativistische Verallgemeinerung des kräftefreien Falls (keine Druckgradienten UND keine externen aufgeprägten Kräfte, also

$$\nabla P = 0$$

$$\bar{f} = 0$$

erhalten wir als Kontinuitätsgleichung die zeitartige Divergenz des Energie- Massen- Tensors:

$$\partial_\beta M^{0\beta} = 0$$

während die kräftefreie Eulergleichung als raumartige Divergenz des Energie- Massen- Tensors folgt:

$$\partial_\beta M^{i\beta} = 0$$

Also sind alle Gleichungen enthalten in der Form:

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = 0$$

Die Divergenzfreiheit des Energie- Massen- Tensors ist im kräftefreien all gültig ! Dann folgen als Divergenz des Energie- massen- Tensors die kräftefreie Eulergleichung und die Kontinuitätsgleichung !

Die Gleichung $\partial_\beta M^{\alpha\beta} = 0$ ist natürlich kovariant, da $M^{\alpha\beta} = 0$ Lorentztenзор !

Die Kontinuitätsgleichung $\partial_\beta M^{0\beta} = 0$ ist inhaltlich eine Kontinuitätsgleichung für die Energie !

Während die Eulergleichung $\partial_\beta M^{i\beta} = 0$ eine Kontinuitätsgleichung für den Impuls repräsentiert !

Also ist $\partial_\beta M^{\alpha\beta} = 0$ der differenzielle Erhaltungssatz für die Viererimpulsdichte der Flüssigkeit !

Weg vom kraftefreien Fall

Wegen

$$K = P \cdot A$$

$$\Rightarrow dK^i = \sum_{j=1}^3 P^{ij} dA^j$$

Diese Formulierung brauchen wir aber nur für nichtisotrope Medien, wenn die Kraft nicht parallel zur Flächennormalen ist !

Für die betrachtete Flüssigkeit setzen wir im jeweiligen Ruhesystem IS' eines herausgegriffenen Flüssigkeitselementes einen isotropen Druck voraus, also

$$P'^{ij} = \begin{pmatrix} P & & \\ & P & \\ & & P \end{pmatrix} \text{ im momentan mitbewegten IS'}$$

die relativistische Verallgemeinerung sollte ein Vierertensor $P^{\alpha\beta}$ sein !

Dabei müssen die Kontinuitätsgleichung und die Eulergleichung im momentanen Ruhesystem IS' in nichtrelativistischer Formulierung gelten, also

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + (\partial_k v^k) v^i \right) = -\partial_i P + f^i$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho v^i) = 0$$

$$P = P(\rho)$$

Das bedeutet, wir schreiben

$$\partial_\beta M^{i\beta} = \partial_i P = \partial_j P'^{ij}$$

Die Kontinuitätsgleichung bleibt dagegen $\partial_\beta M^{0\beta} = 0$

Also geben wir der Gleichung

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = 0$$

den Zusatzterm

$$(\partial_\beta P'^{\alpha\beta}) = (0, \partial_i P)$$

also gilt:

$$P'^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{pmatrix}$$

Hierin ist P der im Ruhesystem IS' des betrachteten Volumenelements gemessene Druck !

Dieser Eigendruck P(x) ist wie die Massendichte ein Lorentz- Skalar ! Er braucht deshalb auch keinen Strich !

Der Drucktensor $P^{\alpha\beta}$ in dem IS, in dem sich das Flüssigkeitselement bei x mit $u^\alpha(x)$ bewegt, ergibt sich nach altbekanntem Schema durch Lorentztrafo mit -v, also:

$$P^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta P^{\gamma\delta}$$

Als Ergebnis gewinnt man:

$$P^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta P^{\gamma\delta} = P \left(\frac{u^\alpha u^\beta}{c^2} - \eta^{\alpha\beta} \right)$$

Dieser Ausdruck muss richtig sein!

Einerseits ist es ein Lorentz- Tensor, andererseits reduziert er sich für v=0 auf $P^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{pmatrix}$

wegen

$$u^\alpha = (c, 0)$$

nun gewinnen wir als kovariante Gleichung

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = -\partial_\beta P^{\alpha\beta}$$

dies ergibt im nichtrelativistischen Grenzfall unsere eingangs dargestellte Eulergleichung mit f=0 (keine äußeren Kräfte, aber Druck!) und die Kontinuitätsgleichung!

Wir schreiben:

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = -\partial_\beta P^{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \partial_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_\beta (M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta}) = 0$$

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{pmatrix}$$

im momentan mitbewegten Ruhesystem

und allgemein

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P$$

Falls nun äußere Kräfte vorhanden sind, so wird einfach die Minkowski- Kraftdichte auf der rechten Seite der Euler/ Kontinuitätsgleichungen addiert, also:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_\beta (M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta}) = f^\alpha$$

Dies ist die relativistische Verallgemeinerung von Euler- Gleichung und Kontinuitätsgleichung einer idealen Flüssigkeit!

Diese Gleichungen sind eine relativistische Verallgemeinerung, denn sie sind:

- 1) Lorentz- invariant !
- 2) gehen im nichtrelativistischen Grenzfall in Kontinuitäts- und Euler- Gleichung über:

$$\partial_\beta T^{0\beta} = 0 \Rightarrow v \ll c \Rightarrow \text{Kontinuitätsgleichung}$$

$$\partial_\beta T^{i\beta} = 0 \Rightarrow v \ll c \Rightarrow \text{Euler- Gleichung}$$

- 3) die Voraussagen , die neuen, relativistischen Voraussagen eben, stimmen mit Experimenten überein !

Ein ähnliches Vorgehen führt von der Elektrostatik zur Elektrodynamik !

Wir haben jedoch nicht gezeigt , dass derartige Verallgemeinerungen zu eindeutigen Resultaten führen ! Die Gültigkeit der so gewonnenen Gleichungen ergibt sich letztlich doch nur aus dem Vergleich mit dem Experiment !

Meist werden viel mehr Effekte vorhergesagt als aus der ursprünglichen Theorie folgen.

SO folgte aus der relativistischen Verallgemeinerung von

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho_e$$

das Magnetfeld.

Analog erwarten wir schon jetzt derartige " magnetische Effekte " der Gravitation für die Verallgemeinerung von

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

Fakt ist jedenfalls, dass sich unser Vorgehen nun leicht verallgemeinern lässt: Wir suchen grundsätzlich Gleichungen, die

- lorentzinvariant sind
- sich im nichtrelativistischen Grenzfall auf die bekannten Gleichungen reduzieren
- mit Experimenten übereinstimmen !

Beschleunigte Bezugssysteme im Minkowski- Raum

Beschleunigte Bezugssysteme im Minkowski- Raum

Newtonsche Mechanik

- INERTIALSYSTEM (\bar{x}, t)
- $m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = 0$ (freies Teilchen)
- Nicht- Inertialsystem:
 $(\bar{x}', t' = t)$

Beispiel: Rotierendes Bezugssystem mit $\bar{\omega}$ = Winkelgeschwindigkeit !

$$m \frac{d^2 \bar{x}'}{dt^2} = -m \dot{\bar{\omega}} \times \bar{x}' - m \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{x}') - 2m(\bar{\omega} \times \dot{\bar{x}}') = 0$$

mit der Zentrifugalkraft

$$m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{x})$$

und der Corioliskraft

$$2m(\bar{\omega} \times \dot{\bar{x}})$$

Demnach lassen sich Potenziale definieren:

$$\varphi := -\frac{1}{2}|\bar{\omega} \times \bar{x}|^2 \text{ als Zentrifugalpotenzial !}$$

$$\bar{A} := c(\bar{\omega} \times \bar{x}) \text{ als Coriolis- Vektorpotenzial !}$$

die Bewegungsgleichung schreibt sich dann:

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -m \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - m\nabla \varphi - m\text{rot}\bar{A} \times \frac{\dot{\bar{x}}}{c}$$

$$\text{Dabei sind } \varphi := -\frac{1}{2}|\bar{\omega} \times \bar{x}|^2 \text{ und } \bar{A} := c(\bar{\omega} \times \bar{x}) \text{ Trägheitsfelder !}$$

Wir haben gesehen: In der klassischen Mechanik verwendet man rotierende Bezugssysteme, obwohl die Grundgesetze (Newtonsche Axiome) nur in Inertialsystemen gelten ! Nicht- Inertialsysteme sind also zulässig ! In ihnen haben die Gesetze lediglich nicht mehr ihre einfache, kovariante Form !

Setzt man beispielsweise in das zweite Newtonsche Axiom eine Transformation in ein rotierendes Bezugssystem ein, so erhält die Bewegung zusätzliche Terme, nämlich , wie dargestellt, die Zentrifugal- und die Corioliskraft !

Spezielle Relativitätstheorie

Hier betrachten wir ein Inertialsystem (x^i, t)

mit dem Minkowski- Linienelement:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Die Bewegungsgleichung eines freien Teilchens der Masse m lautet:

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} = 0 \Leftrightarrow \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2$$

Übergang zu einem Nicht- Inertialsystem (x'^i, t') : Wie oben transformieren sich die Neuen Koordinaten in jeder Komponente in Abhängigkeit aller Komponenten der alten Koordinaten, also:

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$$

$$x^\mu = x^\mu(x'^\nu)$$

Für das Linienelement folgt:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}$$

Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden:

$$x = x' \cos(\omega t') - y' \sin(\omega t')$$

$$y = x' \sin(\omega t') + y' \cos(\omega t')$$

Nun machen wir noch eine Grenzfall- Näherung, nämlich derart, dass

$$\omega^2(x'^2 + y'^2) \ll c^2$$

Die Koordinaten werden dann in das bekannte Linienelement eingesetzt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)] dt^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

Man sieht sofort, wie im Nicht- Inertialsystem die Gestalt des Linienelements komplizierter wird !

Die Form $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ war die Grundlage der SRT. Wir erwarten gleich, dass in KS' die relativistischen Gesetze eine andere Form haben werden !

Zunächst zeigen wir, dass ds^2 für beliebige Koordinaten x^ν' eine quadratische Form der Koordinatendifferenziale ist !

Setzt man eine ganz allgemeine Trafo an:

$$x^\alpha = x^\alpha(x') = x^\alpha(x^0', x^1', x^2', x^3')$$

so folgt:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta := g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Über

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta}$$

definieren wir den metrischen Tensor des Nicht- Inertialsystems KS'.

Der metrische Tensor ist symmetrisch ! $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$

$$\text{Er ist eine Funktion der Koordinaten } x' = (x^0', x^1', x^2', x^3')$$

Er heißt metrisch, weil er die Abstände ds zwischen verschiedenen Punkten des Koordinatensystems bestimmt. Auf die tensoriellen Eigenschaften kommen wir später zurück.

Aus einem gegebenen Ausdruck für ds^2 , wie

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)] dt^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

können die Komponenten von $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ abgelesen werden.

$$g_{00} = \left[1 - \frac{\omega^2}{c^2} (x'^2 + y'^2) \right]$$

$$g_{11} = -1$$

$$g_{22} = -1$$

$$g_{33} = -1$$

$$g_{01} = g_{10} = 2\omega y'$$

$$g_{02} = g_{20} = -2\omega x'$$

Wir können nun der Zentrifugalkraft ein Zentrifugalpotenzial $\Phi = -\frac{\omega^2}{2}(x'^2 + y'^2)$ zuordnen, so dass:

$$\bar{Z} = -m\nabla\Phi = m\nabla \frac{\omega^2}{2} (x'^2 + y'^2)$$

Also ergibt sich für die Zeitkomponente:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

Die Potenziale, die sich aufgrund einer nicht- Inertial- System- Darstellung des Linienelements identifizieren lassen tauchen alle im metrischen Tensor auf ! (Hier übrigens im Grenzfall der Newtonschen Näherung !)

Demnach bestimmen die ersten Ableitungen des metrischen Tensors die Kräfte der relativistischen Bewegungsgleichungen !

Die $g_{\alpha\beta}$ können überhaupt als die relativistischen Beschleunigungspotenziale betrachtet werden !

Die Bedeutung der Koordinaten in KS' folgt aus dem Wegelement

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ = [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)] dt'^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

So wird die Bedeutung der KS'- zeit t' klar, wenn man das Wegelement an einem bestimmten Raumpunkt, am besten

$dx' = dy' = dz' = 0$ auswerten !:

$$d\tau = \frac{ds_{Uhr}}{c} = \sqrt{g_{00}} dt = \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Die KS'- Zeit t' ist über diese Relation mit der Anzeige τ einer in KS' ruhenden Uhr verknüpft !

Den Ausdruck $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$ erhalten wir als die bekannte Zeitdilettion, wenn wir die Uhrzeit in einem Inertialsystem berechnen !

In Inertialsystemen gilt:

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ und die Uhr bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = \omega\rho$. Man kann sich leicht überzeugen, dass beide Ausdrücke das selbe $d\tau$ ergeben !

Wir haben gesehen, dass die Koeffizienten $g_{\mu\nu}(x')$ des metrischen Tensors Funktionen der Koordinaten sind !

Eine solche Koordinatenabhängigkeit ergibt sich auch für krummlinige Koordinaten !

So erhält man beispielsweise für Zylinderkoordinaten:

$$x'^0 = ct$$

$$x'^1 = \rho$$

$$x'^2 = \Phi$$

$$x'^3 = z$$

Das Wegelement folgendermaßen:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\Phi^2 - dz^2 = g_{\mu\nu}(x') dx^\mu dx^\nu$$

damit schreibt sich der metrische Tensor:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -\rho^2 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist der metrische Tensor koordinatenabhängig, falls man sich nicht in einem Inertialsystem befindet UND falls man nichtkartesische Koordinaten verwendet !

AN einem Beispiel sollen relativistische Effekte in einem beschleunigten Bezugssystem berechnet werden. So am Zwillingsparadoxon. Ein Zwilling bleibt auf der Erde, welche näherungsweise als Inertialsystem betrachtet wird, der andere unternimmt einen Raumflug !

Die gemeinsamen Raumzeitpunkte des Abflugs und der Rückkehr werden mit A und R bezeichnet !

Die Lebensuhr von Zwilling 1 oder jede andere physikalische Uhr auf der Erde zeigt nach Rückkehr:

$$T_1 = \frac{1}{c} \int_A^R ds_1 = \int_A^R dt = t_R - t_A$$

Die Uhr an Bord bewegt sich dagegen mit der Geschwindigkeit $\bar{v}(t)$. Sie zeigt demnach die Eigenzeitspanne

$$T_2 = \frac{1}{c} \int_A^R ds = \int_A^R d\tau = \frac{1}{c} \int_A^R \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt = T_1 \sqrt{1 - \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2}}$$

mit dem zeitgemittelten Quadrat der Geschwindigkeit, ein geeigneter Mittelwert !

Natürlich: $T_2 < T_1$

Nun ergibt sich ein scheinbares Paradoxon: Man könnte ja im Bezugssystem der Rakete die Gesetze der SRT anwenden., um etwa die Eigenzeit der Uhr auf der Erde auszurechnen ! Dann könnte man schnell den Schluss ziehen, dass die Uhr 1 die Zeit T2 und die Uhr 2 die Zeit T1 anzeigt.

Dies ist jedoch falsch ! Zwar kann man ein Koordinatensystem finden, in dem die bewegte Uhr ruht, jedoch ist dies dann kein Inertialsystem !

Es ist also ein System mit

$$g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$$

Die Berechnung der Zeiten ist komplizierter !

insbesondere gilt die Formel

$$\tau = \frac{1}{c} \int_A^R \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \text{ nicht !}$$

Das Problem ist damit vergleichbar, dass man statt

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\Phi^2 - dz^2$$

die Funktionaldeterminanten vernachlässigt und schreibt

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\rho^2 - d\Phi^2 - dz^2$$

was natürlich FALSCH ist !

oder dass man erwartet, auf einem Karussell wie gewohnt Billard spielen zu können.

Will man dennoch die Zeiten in einem mit der Uhr 2 verbundenen Koordinatensystem berechnen, so benötigt man eine Transformation, die man sich erst überlegen muss.

Für nicht zu große Zeiten könnte man sich die Galileo- Trafo überlegen:

$$t = t'$$

$$x = x' + \frac{gt'^2}{2}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Für kleine Zeiten bedeutet dies, dass der Ursprung von KS' relativ zu IS konstant beschleunigt ist !
Das Linienelement setzt sich zusammen gemäß

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x') dx^{\mu'} dx^{\nu'}$$

wegen

$$dt = dt'$$

$$dx = dx' + gt' dt'$$

$$dy = dy'$$

$$dz = dz'$$

folgt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x') dx^{\mu'} dx^{\nu'} \\ &= (c^2 - g^2 t'^2) dt'^2 - 2gt' dx' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \end{aligned}$$

Damit zeigt die mitgenommene Uhr, die in KS' ruht, wegen $x' = y' = z' = 0$ die Zeit

$$ds^2 = (c^2 - g^2 t'^2) dt'^2 = c^2 d\tau^2$$

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{(c^2 - g^2 t'^2)} dt' = \sqrt{g_{00}} dt'$$

also insgesamt:

$$T_2 = \int_A^R d\tau = \frac{1}{c} \int_A^R ds = \int_A^R \sqrt{1 - \frac{g^2 t'^2}{c^2}} dt'$$

Also zeigt die Uhr 2, jetzt in KS' berechnet, genau die Zeit an, die wir in IS berechnet haben ! ergo

$$T_2 = \frac{1}{c} \int_A^R ds = \int_A^R d\tau = \frac{1}{c} \int_A^R \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt = T_1 \sqrt{1 - \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2}}$$

insbesondere zeigt sie nicht einfach die KS'-Zeit

$$t_R' - t_A' = t_R - t_A = T_1 \text{ an !}$$

das bedeutet, die Zeitkoordinate t' in

$$ds^2 = (c^2 - g^2 t'^2) dt'^2 = c^2 d\tau^2$$

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{(c^2 - g^2 t'^2)} dt' = \sqrt{g_{00}} dt'$$

unterscheiden, sie ist aber NICHT das physikalische Zeitmaß entlang dieser Bahn.

Analog im Fall der Zylinderkoordinaten kann der Winkel Φ als Koordinate zwar geeignet sein, jedoch ist $d\Phi$ nicht der Abstand zwischen den beiden Punkten (ρ, Φ, z) und $(\rho, \Phi + d\Phi, z)$

Man könnte willkürlich eine andere Zeitkoordinate einführen, beispielsweise

$$t = t'^2$$

$$x = x' + \frac{gt'^4}{2}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Dies würde dann ds^2 , wie oben berechnet, also die Metrik, derart verändern, dass die Eigenzeit auch mit diesem t' noch richtig berechnet werden kann.

Ebenso könnten wir ja in

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ = [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)] dt'^2 + 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Zylinderkoordinaten einführen:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ = [c^2 - \omega^2 \rho'^2] dt'^2 - 2\omega \rho'^2 d\Phi' dt' - d\rho'^2 - \rho'^2 d\Phi'^2 - dz'^2 := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Beide metrischen Tensoren in diesen 2 Zeilen beschreiben doch die gleiche physikalische Situation ! Für den Fall in Zylinderkoordinaten berechnen wir noch einmal die Zeit einer Uhr, die im rotierenden System KS' ruht. Für die ruhende Uhr gilt:

$$d\rho' = d\Phi' = dz' = 0 \\ \Rightarrow ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = [c^2 - \omega^2 \rho'^2] dt'^2 := c^2 d\tau \\ d\tau = \left(\frac{ds}{c} \right)_{Uhr} = \sqrt{g_{00}} dt' = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \rho'^2}{c^2}} dt'$$

Also wieder das altbekannte Ergebnis !

Ergebnisse

Wir haben folgendes gesehen:

- 1) im beschleunigten System KS' erhält man für das Wegelement die Form

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\mu\nu}(x') dx^\mu dx^\nu$$

an die Stelle des konstanten Minkowski- Tensors $\eta_{\alpha\beta}$ tritt also der koordinatenabhängige metrische Tensor $g_{\mu\nu}(x')$.

- 2) die beschleunigte Bewegung von KS' legt $g_{\mu\nu}(x')$ teilweise fest ! So muss eine geeignete Koordinatentransformation $x^\alpha = x^\alpha(x') = x^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$ gewährleisten, dass sich der Ursprung von KS' mit der vorgesehenen Geschwindigkeit $v(t) = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{x'=0}$ bewegt ! Dadurch liegt die Koordinatenabhängigkeit und auch $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\mu\nu}(x') dx^\mu dx^\nu$ teilweise fest !
- 3) der metrische Tensor ist durch die vorgegebene Beschleunigung jedoch nicht vollständig festgelegt ! Vielmehr können willkürliche Koordinatentransformationen die tatsächliche Form von $g_{\mu\nu}(x')$ ändern ! (vergleiche ds^2 in kartesischen und Zylinderkoordinaten !)
- 4) Die Freiheit der Koordinatenwahl ist insbesondere deshalb nützlich, als dann Koordinaten gewählt werden können, die dem Problem besonders angepasst sind . Beispiel: Kugelkoordinaten für Probleme sphärischer Symmetrie
- 5) Die tatsächliche Bedeutung der Koordinaten ergibt sich aus $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$. Insbesondere legt g_{00} den Zusammenhang zwischen der Zeitkoordinate t' und der Anzeige von Uhren , die in KS' ruhen , nämlich der Eigenzeit $ds^2 = c^2 d\tau^2$ für einen festen Raumpunkt $d(Raum)=0$ fest ! Ergo: $d\tau$ ist die Zeit, die wirklich auf Uhren in KS' angezeigt wird, also die zeit, die dank der 1) Bewegung und 2)

Beschleunigung angezeigt wird, nachdem ein Parameter $d\tau$ festgelegt wurde. $d\tau$ kann dabei eine in KS ruhende Uhr sein. Dann ist g_{00} gerade der Zusammenhang zwischen einer beschleunigten/ Gravitation spürenden / fliegenden Uhr und der ruhenden Uhr !. g_{00} ist jedoch auch koordinatenabhängig ! Ergo kann t' so gewählt werden, dass die Größe gar keine physikalische Zeit mehr ist. Dann schafft g_{00} halt den Zusammenhang zwischen diesem beliebigen Parameter und der auf Uhren angezeigten Eigenzeit τ !

- 6) Analog dazu bestimmt der metrische Tensor auch die Messung von Längen und Winkeln ! Die Längenmessung mit $d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Phi^2$ bestimmt die Bedeutung von ρ und Φ !
- 7) für rotierende Systeme gilt in Newtonscher Näherung (langsame Rotation) $g_{00} = 1 + 2\Phi$ mit dem Zentrifugalpotenzial Φ , welches mit der ebenso bezeichneten Koordinate $\Phi := \varphi$ überhaupt nichts zu tun hat !

Dieser Punkt legt es nahe, die $g_{\mu\nu}(x)$ überhaupt als relativistische Beschleunigungspotenziale anzusehen !

Hieraus und aus der Äquivalenz von Trägheits- und Gravitationskräften folgt dann, dass die $g_{\mu\nu}(x)$ die relativistischen gravitationspotenziale sind !

Bewegungsgleichung

Wird gewonnen durch die Transformation $x^\mu = x^\mu(x^\nu)$ in der relativistischen Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Also:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = m \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right) = 0$$

Also:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = 0$$

Somit:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = 0 \Big| \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \\ & \Rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = \delta_\nu^\alpha$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right) \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

Wegen

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = - \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right) \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

können wir den Ausdruck

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right)$$

als eine "Trägheitskraft" interpretieren ! besser: Als Trägheitsfeld.

Wir bezeichnen diese Felder mit einem sogenannten Christoffelsymbol:

$$\Gamma^{\alpha}_{\nu\kappa} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right)$$

Also:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Erinnern wir uns: Die Metrik aus Nichtinertialsystemen war durch

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta := g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \text{ gegeben !}$$

also:

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta}$$

Vergleicht man dies mit $\Gamma^{\alpha}_{\nu\kappa} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right)$, so sieht man, dass sich die Christoffelsymbole als

partielle Ableitung der Metrik ausdrücken lassen müssen !

Man schreibe sich dazu eine geeignete Kombination von Ableitungen des metrischen Tensors auf und vergleiche diese mit dem geforderten Ergebnis.

Eine etwas längliche Rechnung (Fließbach , S. 66, 67) zeigt:

$$\Gamma^{\alpha}_{\nu\kappa} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda\nu,\kappa} + g_{\kappa\lambda,\nu} - g_{\nu\kappa,\lambda})$$

Damit sind unsere "Trägheitskräfte" als Ableitungen des metrischen Tensors zu betrachten. Die Komponenten des metrischen Tensors repräsentieren also umgekehrt "Trägheitspotenziale".

Eigenschaften der Christoffelsymbole

Sie besitzen in den unteren Indices 10 unabhängige Komponenten , mit dem freien oberen Index also 40 unabhängige Komponenten !

Die Christoffels sind symmetrisch in den beiden unteren Indices !

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

ist die Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld

Dabei ergeben sich dann die Gravitationskräfte als Ableitung der Potenziale $g_{\mu\nu}$

Elektrodynamik

Vergleicht man $\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$ mit der Bewegungsgleichung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld, also

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta$$

so sieht man, dass die $\Gamma^{\alpha}_{\nu\kappa}$ den Feldern $F^{\alpha\beta}$ entsprechen und dementsprechend die $g_{\mu\nu}$ den Potenzialen A^α !

Newton'scher Grenzfall

Wir untersuchen, analog zum rotierenden Bezugssystem, die Bewegung eines Teilchens im Gravitationsfeld im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten und schwacher, statischer Felder.

Für kleine Geschwindigkeiten

$$v^i \ll c$$

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$$

folgt

$$\frac{d^2x^\alpha}{d^2\tau} = -\Gamma^\alpha_{\nu\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \approx -\Gamma^\alpha_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2$$

Für statische Felder ist die Metrik nicht zeitabhängig.

Also gilt:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda 0,0} + g_{0\lambda,0} - g_{00,\lambda}) = -\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} g_{00,\lambda} = -\frac{1}{2} g^{\alpha i} g_{00,i} = -\frac{1}{2} g^{\alpha i} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

Für schwache Felder können wir annehmen, dass die metrische Struktur in guter Näherung durch lineare Korrekturen an die Minkowski-Metrik erzeugt werden kann:

$$g_{\lambda\nu} = \eta_{\lambda\nu} + h_{\lambda\nu}$$

$$|h_{\lambda\nu}| = |g_{\lambda\nu} - \eta_{\lambda\nu}| \ll 1$$

Das bedeutet nichts anderes, als dass die verwendeten Koordinaten

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x^i)$$

fast Minkowski-Koordinaten sind! Die exakte Bedeutung der Koordinaten folgt WIE IMMER für allgemeine Koordinaten aus der physikalischen Größe ds!

in erster Näherung gilt nun:

$$\Gamma^\alpha_{00} = 0, \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2x^0}{d^2\tau} \approx -\Gamma^0_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0 = \frac{d^2t}{d^2\tau}$$

$$\frac{d^2x^i}{d^2\tau} \approx -\Gamma^i_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

also gewinnen wir einerseits:

$$\frac{dt}{d\tau} = \text{const.}$$

und andererseits:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \nabla h_{00}(\bar{r})$$

Diese Bewegungsgleichung kann man mit dem bekannten newtonischen Resultat vergleichen, also mit

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi(\bar{r})$$

Also:

$$g_{00}(\bar{r}) = 1 + h_{00} = 1 + \frac{2\Phi(\bar{r})}{c^2}$$

$$h_{00} = \frac{2\Phi(\bar{r})}{c^2}$$

Der newtonsche Grenzfall der Form $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\nabla h_{00}(\bar{r})$ liefert uns alleine Aussagen über h_{00} , nicht jedoch über die anderen $h_{\mu\nu}$.

Wir werden später sehen, dass für schwache, statische Felder, alle h_{ii} der Ordnung $\frac{\Phi(\bar{r})}{c^2}$ sind ! Insbesondere, dass die Außerdiagonalelemente verschwinden.

Außerdiagonalelemente heißen: Koordinaten sind nicht unabhängig voneinander variierbar !

Wir hatten oben den Zusammenhang $g_{00}(\bar{r}) = 1 + h_{00} = 1 + \frac{2\Phi(\bar{r})}{c^2}$ bereits aus einer elementaren

Diskussion über beschleunigte Bezugssysteme erhalten ! Die jetzige Ableitung bezieht sich dagegen auf das

Newton'sche Gravitationspotenzial ! Die Zahl $|h_{00}| = \frac{2|\Phi(\bar{r})|}{c^2}$ gibt die absolute Stärke des Gravitationsfeldes an

! Sie bestimmt die Abweichungen von der Minkowski-Metrik und demnach die Größe der relativistischen Korrekturen der ART gegenüber der Newton'schen Gravitationstheorie ! Wir wollen die Zahl für einige Fälle abschätzen:

Im Fall schwächerer, statischer Felder gilt die Newton'sche Feldgleichung

$$\Delta\Phi(\bar{r}) = 4\pi g\rho(\bar{r})$$

Sie wird für eine kugelsymmetrische Massenverteilung durch das Potenzial

$$\Phi(\bar{r}) = -\frac{GM}{r}$$

$$r > R$$

gelöst !

Dabei ist M die Gesamtmasse und r der Abstand vom Zentrum ! Die Masse liege innerhalb von R

Betrachten wir die Erde mit Masse Me und einem Radius von 6400 km !

An der Oberfläche ruft das Gravitationsfeld die Beschleunigung

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} \approx 10 \frac{m}{s^2} \text{ hervor !}$$

Damit erhalten wir für die absolute Stärke des Gravitationsfeldes

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} \approx 10 \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{|\Phi(R_E)|}{c^2} = \frac{GM_E}{c^2 R_E} = \frac{g R_E}{c^2} = 7 \cdot 10^{-10}$$

(Erde)

Wir vergleichen:

$$2 \frac{|\Phi(R_E)|}{c^2} \text{ für}$$

Erde: $1,4 \cdot 10^{-9}$

Sonne: $4 \cdot 10^{-6}$

Weißen Zwerge $\approx 3 \cdot 10^{-4}$

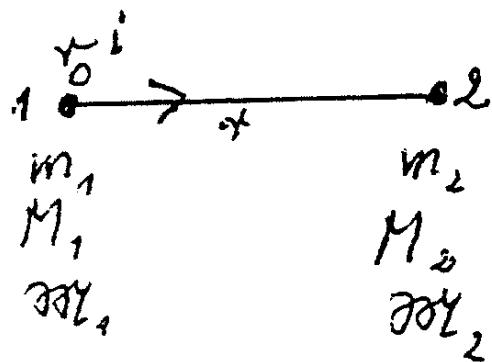
Neutronenstern (Pulsar) $\approx 3 \cdot 10^{-1}$

Der nächste zu betrachtende Sterntyp wäre nun ein Schwarzes Loch. Für Schwarze Löcher sind die relativistischen Effekte dann so stark, dass sie nicht mehr als Korrekturen behandelt werden können!

III Übergang von der Newtonschen Gravitationstheorie zur ART

9. newtonsche Gravitationstheorie

Gravitationswechselwirkung gemäß Newtonscher Axiomatik:



m = träge Masse

M = passive Schwere Masse (passive Gravitationsladung) -> das Gewicht auf der Waage, der Teil Masse, der die Gravitation einer anderen Masse "spürt"

Mm:=kyrillsches m = aktive schwere Masse (aktive Gravitationsladung), der Teil der Masse, der gravitatives Potenzial erzeugt!

Bewegungsgleichungen gemäß 2. Axiom:

$$m \frac{d^2 x_1^i}{dt^2} = M_1 E_2^i$$

$$E_2^i = \frac{G(Mm)_2}{r^2} r_0^i$$

also die "Feldstärke von 2"

$$m \frac{d^2 x_2^i}{dt^2} = M_2 E_1^i$$

$$E_1^i = -\frac{G(Mm)_1}{r^2} r_0^i$$

also die "Feldstärke von 1"

Nach dem dritten Axiom folgt:

$$F_{12} = -F_{21}$$

$$\Rightarrow M_2 E_1^i = -M_1 E_2^i$$

$$\Rightarrow M_2 \frac{G(Mm)_1}{r^2} r_0^i = M_1 \frac{G(Mm)_2}{r^2} r_0^i$$

$$\Rightarrow M_2 (Mm)_1 = M_1 (Mm)_2$$

Natürlich kann M₂ alleine verändert werden. Hält man aber eine der Massen konstant, so folgt sofort:

$$M_2 = (Mm)_2$$

$$M_1 = (Mm)_1$$

Newton's Pendelversuche zeigten:

m=M

wegen

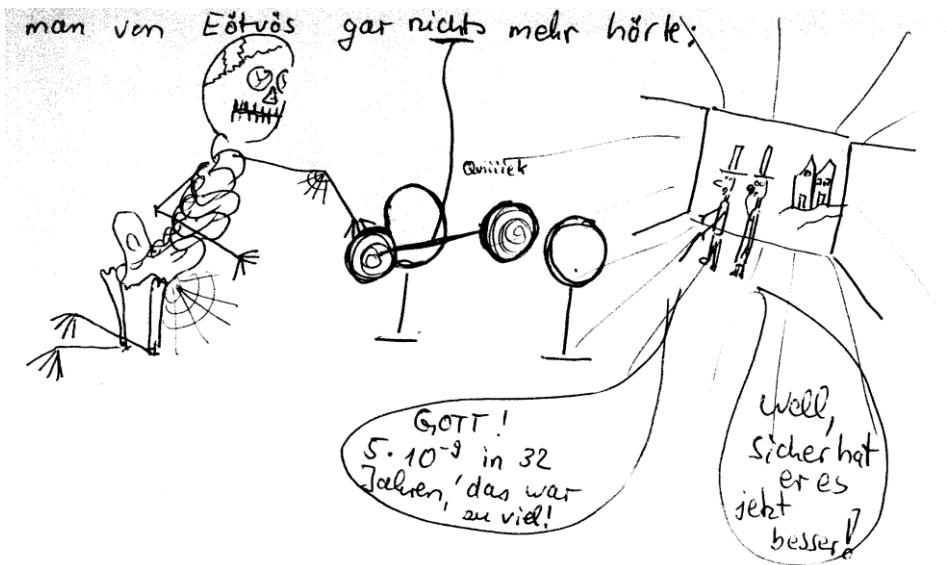
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{M} \frac{l}{g}}$$

dass m=M konnte Newton mit einer Genauigkeit von 10^{-3} zeigen, er maß lediglich, dass verschiedene Körper die gleiche Schwingungsdauer ergeben !

Eötvös baute 1890 sein Torsionswaagenexperiment auf und konnte 1922 damit Genauigkeiten von $5 \cdot 10^{-9}$ erreichen !

Neue Experimente dieses Typs, meist Fallturmexperimente, erreichen Genauigkeiten von $10^{-11} - 10^{-12}$.

Dabei werden Ringe fallengelassen, deren Kapazität gemessen wird. Die ineinandergeschachtelten Ringe bestehen aus verschiedenen schweren Materialien und unterschiedliche Fallgeschwindigkeiten äußern sich empfindlich in einer Veränderung der Kapazität des Ringkondensators !



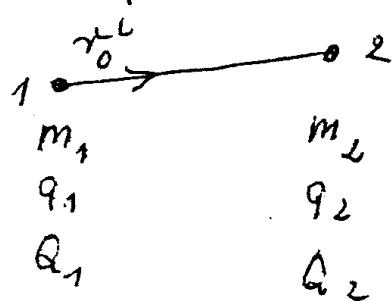
Fazit:

$$m = M = (Mm)$$

Dieses Äquivalenzprinzip ist eine Besonderheit der Gravitation !!

10. Das Äquivalenzprinzip in der Newtonschen Gravitationstheorie

Dieses Prinzip zeichnet die Gravitationswechselwirkung als etwas besonderes aus, wie der Vergleich mit der elektrischen Wechselwirkung zeigt:



m= träge Masse

q= passive elektrische Ladung (die im Feld eine anderen "angegriffen" wird)

Q= aktive elektrische Ladung (die das Feld produziert)

Bewegungsgleichungen

$$m \frac{d^2 x_1^i}{dt^2} = q_1 E_2^i$$

$$E_2^i = \frac{Q_2}{r^2} r_0^i$$

$$m \frac{d^2 x_2^i}{dt^2} = q_2 E_1^i$$

$$E_1^i = -\frac{Q_1}{r^2} r_0^i$$

mit dem dritten Axiom kann man sofort einsehen:

$$q=Q$$

Diese Äquivalenz wird auch in der Elektrodynamik vorausgesetzt, da ansonsten weder ein Potenzial noch eine Lagrangefunktion eingeführt werden kann (Clausius).

Denn nur dann gilt:

$$q_1 E_2^i = -q_1 \frac{\partial U_2}{\partial x_1^i} = -\frac{\partial U}{\partial x_1^i}$$

$$U = q_1 U_2 = q_2 U_1$$

$$q_2 E_1^i = -q_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2^i} = -\frac{\partial U}{\partial x_2^i}$$

Also:

$m \neq q = Q$ -> die elektrische Ladung ist nicht gleich der trägen Masse , wohl aber ist die Gravitationsladung gleich der trägen Masse !

11. Die lokale Äquivalenz von Trägheit und Schwere (Einsteinsches Äquivalenzprinzip)

Es existieren verschiedene Versionen des Newtonschen Äquivalenzprinzips

- die träge Masse m ist gleich der schweren Masse M
- Gravitationskräfte sind äquivalent zu Trägheitskräften
- im lokalen Inertialsystem (frei fallender Fahrstuhl) gelten die bekannten Gesetze der SRT ohne Gravitation !
- bezüglich eines in einem homogenen Gravitationsfeld frei fallenden Bezugssystems (" Einsteinscher Fahrstuhl ") verlaufen alle Prozesse so, als wäre gar kein Gravitationsfeld vorhanden.

Denn:

Seien x^i Cartesische Koordinaten, in denen die Erdoberfläche O ruht

$x^{i'}$ mit dem frei fallenden Fahrstuhl verbundene kartesische Koordinaten !

$$x^i \rightarrow x^{i'} = x^i - \frac{1}{2} g^i t^2$$

$$x^i = x^{i'} + \frac{1}{2} g^i t^2$$

setzen wir dies in die Bewegungsgleichung ein, so folgt:

$$m_A \frac{d^2 x^i A}{dt^2} = M_A g^i + F^i$$

$$\Rightarrow m_A \frac{d^2 x^{i'} A}{dt^2} = (M_A - m_A) g^i + F^{i'} = F^i$$

Dabei sind die F^i irgendwelche anderen auf die m_A wirkenden Kräfte

Bezüglich eines in einem homogenen Gravitationsfeld frei fallenden lokalen Bezugssystems verlaufen alle Prozesse so, als wäre gar kein Gravitationsfeld vorhanden !

Einstein: 1907: " Der glücklichste Gedanke meines Lebens ": Diese Eigenschaft der Gravitation ist wesentlich und sollte auch in der relativistischen Theorie der Gravitation gelten !

Einsteinsches Äquivalenzprinzip

- in einem frei fallenden lokalen Bezugssystem gelten die Gesetze der SRT !
- in einem lokalen Inertialsystem gelten die Gesetze der ST
- Durch eine Transformation, die den Übergang von einem lokalen Inertialsystem (LIS) zu einem dagegen beschleunigten System beschreibt, erhalten die SRT- Gleichungen eine Form, die den Einfluss eines äußeren Gravitationsfeldes berücksichtigt !

Dies ist der eigentliche Hintergrund für $g_{\lambda\nu}$, welches wir aus Überlegungen über beschleunigte Bezugssysteme gewonnen haben, für $g_{\lambda\nu}$ als ein Tensor der Gravitationspotenziale !

Zusammenfassung Kapitel II und III

In der SRT ohne Gravitation gilt:

- in einem globalen (damit erst recht lokalen) IS gelten die Gesetze der SRT
- in einem globalen (und erst recht lokalen) Nicht- Inertialsystem beschreibt die dann auftretende Metrik $g_{\lambda\nu} \neq \eta_{\lambda\nu}$ Trägheitsfelder.

Aufgrund des für die Gravitation vorausgesetzten Äquivalenzprinzips gilt:

- in einem lokalen Inertialsystem IS gelten die Gesetze der SRT
- in einem lokalen Nicht- Inertialsystem beschreibt die dann auftretende Metrik $g_{\lambda\nu} \neq \eta_{\lambda\nu}$ auch die Gravitationsfelder !
-
- > aufgrund des Äquivalenzprinzips werden Trägheit und Schwere lokal identifiziert !
- Also durch ein und dasselbe metrische Feld

$g_{\lambda\nu}(x^\alpha)$ beschrieben !

Formales Schema:

Gleichungen der SRT aufstellen, die irgendwelche physikalischen Prozesse in einem Inertialsystem ohne den Einfluss eines Gravitationsfeldes beschreiben !

- Allgemeine Koordinatentransformationen →
- Gleichungen, die diese Prozesse dann unter Berücksichtigung der Gravitation beschreiben !
-

Physikalische Bedeutung gewinnt der Übergang zu allgemein kovarianten Gleichungen erst im Riemannschen Raum :

IV. Riemannsche Geometrie

12. Der Riemannsche Raum

Zunächst: Vergleich zweidimensionaler ebener und 2- dim. gekrümmter Räume, um den Begriff des gekrümmten Raumes an einem Beispiel zu illustrieren:

Euklidischer Raum (n=2)

in kartesischen Koordinaten, Linienelement:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = \delta_{ab} dx^a dx^b$$

a,b = 1,2

Geradengleichung:

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = 0$$

t= Kurvenparameter

Übergang zu Kreiskoordinaten:

$$x^1, x^2 \rightarrow r, \varphi$$

$$x^1 = r \cos \varphi$$

$$x^2 = r \sin \varphi$$

Krummlinige Koordinaten (Polarkoordinaten):

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b$$

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} + \Gamma^a{}_{cd} \frac{dx^c}{dt} \frac{dx^d}{dt} = 0$$

Bewegungsgleichung

Wird gewonnen durch die Transformation $x^\mu = x^\mu(x^\nu)$ in der relativistischen Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Also:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = m \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right) = 0$$

Also:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = 0$$

Somit:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = 0 \Big| \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \\ & \Rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = \delta_\nu^\alpha \\ & \Rightarrow \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right) \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0 \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = - \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right) \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

können wir den Ausdruck

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right)$$

als eine "Trägheitskraft" interpretieren ! besser: Als Trägheitsfeld.

Wir bezeichnen diese Felder mit einem sogenannten Christoffelsymbol:

$$\Gamma^\alpha{}_{\nu\kappa} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right)$$

Also:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\nu\kappa} \frac{dx^\kappa}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

In diesem Sinne können wir uns wieder den Kreiskoordinaten zuwenden:

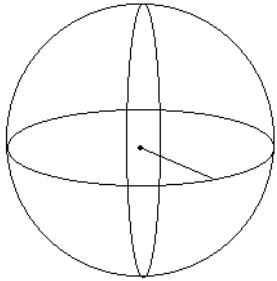
$$\Gamma^\alpha_{\nu\kappa} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \right)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\partial r \cos \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial r \cos \varphi \partial r \cos \varphi} + \frac{\partial r \cos \varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \cos \varphi \partial r \cos \varphi}$$

usw...

Gekrümmter Raum (n=2)

- es existieren gar keine kartesischen Koordinaten
- Beispiel: Oberfläche einer Kugel !



$$x^1 = \vartheta$$

$$x^2 = \varphi$$

Krummlinige Koordinaten (Polarkoordinaten):

$$ds^2 = \lambda^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = g_{ab}(x) dx^a dx^b$$

Dabei existieren nur krummlinige Koordinaten (wie die obigen) ! -> es braucht gar keine Trafo !

Also:

$$ds^2 = \lambda^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = g_{ab}(x) dx^a dx^b$$

genauso schreibt man:

$$\frac{d^2x^a}{dt^2} + \Gamma^a_{cd} \frac{dx^c}{dt} \frac{dx^d}{dt} = 0$$

Minkowski- Raum (eben, n=4)

In quasi- kartesischen Koordinaten (Globales Inertialsystem)

Linienelement

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Geradengleichung ist die geradlinig gleichförmige Bewegung

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Koordinatentransformation IS - Nicht- IS

Krummlinige Koordinaten in beliebigem Nicht- IS

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x') dx'^{\mu} dx'^{\nu}$$

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0$$

Gekrümmter Raum (n=4)

Auch hier: es gibt keine quasi- kartesischen Koordinaten (keine globalen IS)
 ➔ in krummlinigen Koordinaten (nicht Inertialsystemen)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu}$$

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0$$

Äquivalenzprinzip

- schwere und träge Masse sind gleich
- Gravitationskräfte sind äquivalent zu Trägheitskräften
- in lokalen Inertialsystemen (Satellitenlabor) gelten die bekannten Gesetze der SRT ohne Gravitation !
- in einem frei fallenden lokalen Bezugssystem gelten die Gesetze der SRT !
- in einem lokalen Inertialsystem gelten die Gesetze der ST
- Durch eine Transformation, die den Übergang von einem lokalen Inertialsystem (LIS) zu einem dagegen beschleunigten System beschreibt, erhalten die SRT- Gleichungen eine Form, die den Einfluss eines äußeren Gravitationsfeldes berücksichtigt !

Die Träge Masse m ist die Masse aus dem zweiten newtonschen Axiom , also m auf der linken Seite der Gleichung

$$ma = F$$

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -M \nabla \Phi(\bar{r})$$

dabei sind die Gravitationskräfte nun proportional zur schweren Masse M. Die Gleichung wird für die vertikale Bewegung in einem homogenen Schwerefeld zu

$$m \ddot{x} = -Mg$$

diese Gleichung hat die Lösung:

$$x(t) = -\frac{1}{2} \frac{M}{m} g t^2$$

Galileis Aussage: Alle Körper fallen gleich schnell ! bedeutet, dass das Verhältnis $\frac{M}{m}$ für alle Körper gleich ist

! Anstelle des freien Falls kann man sich die Schwingungsdauer für ein Pendel ansehen:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{M} \frac{l}{g}}$$

Newton konnte mit einer Genauigkeit von 10^{-3} zeigen, dass verschiedene Körper gleich

schnell schwingen. Daneben gab es Experimente von Eötvös (1890 - 1922) und heute: Fallturmexperimente.

Sofern träge und schwere Masse zueinander Proportional sind, können sie durch eine geeignete Wahl der Einheiten schon gleichgesetzt werden ! Also m=M. Die Gravitationskonstante wird so gegeben, dass $[m]=[M]=\text{kg}$.

Aufgrund der Äquivalenz von Masse und Energie tragen alle Energieformen zur Masse bei. Das Äquivalenzprinzip impliziert nun, dass jede Energieform ΔE mit $\frac{\Delta E}{c^2}$ zur schweren UND zur trägen Masse beiträgt ! In den gerade erwähnten Experimenten spielt jedoch die gravitative Bindungsenergie keine Rolle !. Später werden wir noch darauf zurückkommen, ob auch der Beitrag der Gravitationswechselwirkung selbst (der für planetare Körper eine Rolle spielt) dem Äquivalenzprinzip genügt !

Sofern schwere und träge Masse gleich sind, sind Gravitationskräfte absolut äquivalent zu Trägheitskräften. Das bedeutet, dass Schwerefelder durch einen Übergang in ein beschleunigtes KS eliminiert werden können !

Wir demonstrieren dies zunächst an einem einfachen Beispiel ! Im homogenen Schwerefeld an der Erdoberfläche lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = Mg$$

Dabei ist g die bekannte Erdbeschleunigung !

Diese Bewegungsgleichung gilt in einem auf der Erdoberfläche ruhenden System. Für den jetzigen Zweck ist dies in guter Näherung ein IS !

Betrachten wir nun folgende Trafo in ein beschleunigtes IS:

$$\bar{r} = \bar{r}' + \frac{1}{2} \bar{g} t^2$$

$$t = t'$$

Dabei setzen wir voraus, dass die auftretenden Geschwindigkeiten nichtrelativistisch sind :

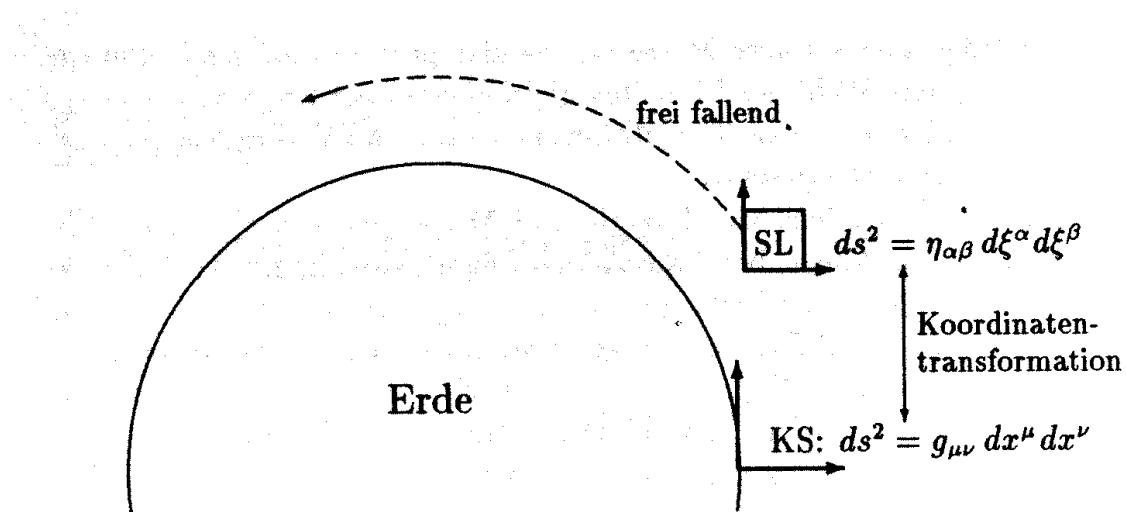
$$gt \ll c$$

Der Ursprung $\bar{r}' = 0$ von KS bewegt sich in IS mit $\bar{r} = \frac{1}{2} \bar{g} t^2$

Das Bezugssystem KS kann am einfachsten durch einen " frei fallenden " Fahrstuhl realisiert werden. Setzen wir dies in die Bewegungsgleichung ein, so folgt:

$$m \frac{d^2 \bar{r}'}{dt^2} = (M - m) \bar{g} = 0$$

falls das Äquivalenzprinzip gilt ! Dann ist die resultierende Bewegungsgleichung in KS die eines freien Teilchens . Die Gleichheit von träger und schwerer Masse ermöglicht also ein KS, in dem die Gravitationskräfte völlig wegfallen ! Im Bezugssystem " frei fallender Fahrstuhl " spürt der Benutzer keine Schwerkraft !



Im SL gelten die Gesetze der SRT ohne Schwerkraft ! Die Gesetze mit Gravitation folgen einfach durch Einsetzen einer allgemeinen Koordinatentransformation !

Einstein verallgemeinert diesen Befund ! Sein Postulat lautet: In einem frei fallenden KS laufen ALLE Gesetze so ab, als ob kein Gravitationsfeld vorhanden sei ! Damit wird zum einen der Befund von mechanischen auf alle physikalischen Prozesse(zu allen Zeiten und an allen Orten) ausgedehnt, vor allem werden aber auch inhomogene Gravitationsfelder zugelassen !

Das so verallgemeinerte Äquivalenzprinzip heißt
"Einstinsches Äquivalenzprinzip "

Die Gleichheit von schwerer und träger Masse heißt dagegen schwaches Äquivalenzprinzip ! Es ist derzeit Gegenstand der Diskussion, ob das starke aus dem schwachen Äquivalenzprinzip abgeleitet werden kann, wenn die Gravitationstheorie konsistent sein soll !

Im folgenden reden wir immer vom starken /Einstinschen Äquivalenzprinzip !

Ein mögliches frei fallendes System ist das Satellitenlabor (ohne Eigenrotation).

Ist es hinreichend klein, so können wir in ihm die Inhomogenität des Gravitationsfeldes vernachlässigen !

Dass mechanische Vorgänge im SL so ablaufen, wie gefordert, demonstrieren Experimente. Das ÄP sagt jedoch, Im SL verlaufen ALLE Vorgänge so ab, als sei keine Gravitation vorhanden !

Die geradlinige Bewegung freier Massenpunkte im SL bedeutet, dass dort die Vorgänge wie in einem IS ablaufen !

Man redet deshalb von diesem lokalen Bezugssystem, in dem sich keine Gravitationskräfte bemerkbar machen, als von einem LOKALEN Inertialsystem Lokal bedeutet: Das lokale IS ist KEIN IS !

Schließlich ist das Satellitenlabor gegen den Fixsternhimmel beschleunigt ! Nach der Einführung des Begriffs "Lokales IS" lautet das Äquivalenzprinzip:

Im Lokalen IS gelten die Gesetze der SRT !

Der Beobachter im SL stellt fest, dass physikalische Vorgänge nach den Gesetzen der SRT ablaufen ! Dabei treten weder Gravitations- noch Trägheitskräfte auf ! Ein Beobachter auf der Erde sieht die Vorgänge im SL dagegen anders: Für ihn bewegt sich das SL im Gravitationsfeld ! Dieses Feld ist etwa in 200 km Höhe nur gering schwächer als auf der Erdoberfläche . Zusätzlich treten im SL Trägheitskräfte auf, weil das SL beschleunigt ist ! Die Bewegung des SL (freier Fall) ist jedoch so, dass sich Trägheitskräfte und Gravitationskräfte wie auf der rechten Seite der Newtonschen Gleichung, gerade aufheben !

Die Aufhebung von Beschleunigungs- und Gravitationskräften gilt exakt nur für den Schwerpunkt des SL. Deshalb bezieht sich das Äquivalenzprinzip auf ein kleines, also lokales SL. Das Satellitenlabor oder der Fahrstuhl sind geeignete Lokale IS für das Feld auf der Erde, da ihre Ausdehnung klein gegen die Ausdehnung der Quelle ist und damit klein gegen die Skala, auf der sich das Feld wesentlich ändert !

Betrachtet man das mittlere Gravitationsfeld des Alls, so kann ein lokales IS auch eine entsprechend große Ausdehnung (z.B. 100000 Lichtjahre) haben.

Das ÄP erlaubt die Aufstellung von rel. Gesetzen mit Gravitation ! Dazu geht man von den bekannten ST-Gesetzen aus, die die Vorgänge im SL korrekt beschreiben !

Hierin setzt man eine Koordinatentransformation zu einem anderen Bezugssystem KS ein, etwa einem Labor auf der Erde. Man geht also nach folgendem Schema vor:

- 1) SRT- Gesetze ohne Gravitation
- 2) ->Koordinatentrafo
- 3) Gesetze (relativistisches Gesetz) mit Gravitation

In der Koordinatentransformation ist die relative Beschleunigung zwischen SL und KS enthalten, die dem Gravitationsfeld entspricht! Die Transformation hinterlässt natürlich " Spuren" in dem betrachteten Gesetz ! Diese Spuren gerade beschreiben die Gravitation !

Als nichtrelativistisches Beispiel dienen die Gleichungen des oben frei fallenden Fahrstuhls mit $M=m$.
Die Gleichung

$m \frac{d^2 \bar{r}'}{dt^2} = (M - m) \bar{g} = 0$ beschreibt die geradlinige Bewegung im frei fallenden Fahrstuhl (Gesetz ohne

Gravitation). Die Trafo $\bar{r} = \bar{r}' + \frac{1}{2} \bar{g} t'^2$ führt dann zu $m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = M \bar{g}$. Also taucht als Spur der Trafo die $t = t'$

Gravitationskraft $M \bar{g} = m \bar{g}$ in der Gleichung auf!

Riemannscher Raum

À lá Fließbach können wir die Minkowskikoordinaten im Lokalen IS oder im SL zur Abwechslung auch mal mit ξ^α bezeichnen! Nach dem Äquivalenzprinzip gelten hier die Gesetze der ST, also besonders

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (\text{Lokales IS, Minkowskiraum})$$

Der Übergang von einem Lokalen IS zu einem KS mit den Koordinaten x^μ geschieht durch eine Trafo
 $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$

Wir setzen diese Transformation in $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$ ein und erhalten:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}$$

Der Riemannsche Raum ist also der Raum

$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ als KS, ein Raum, in dem sich das Wegelement nach obigem Ausdruck darstellen lässt!

Als Konvention verwenden wir ab jetzt die Indices $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ im Riemannschen Raum und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ im Minkowski-Raum.

Die Metrik ist über $\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}$ bestimmt, also über die Koordinatentransformation. Diese

Koordinatentrafo beschreibt auch die relative Beschleunigung zwischen dem KS und dem lokalen IS. Da diese Beschleunigung für die Lokalen IS an zwei verschiedenen Orten unterschiedlich sind, gibt es keine globale Trafo, die $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ auf die Minkowski-Form bringt! Insofern unterscheiden sich die hier betrachteten Trafos von unserem obigen Beispiel mit dem rotierenden Bezugssystem!

Nach dem ÄP können die Gravitationsfelder lokal vollständig (also für alle physikalischen Effekte) eliminiert werden. Dies bedeutet zugleich, dass sie vollständig beschrieben werden durch die allgemeinen Koordinatentransformationen, die am jeweils betrachteten Punkt zum Lokalen IS führen! In der zentralen Größe des Wegelements führen diese Transformationen zum metrischen Tensor! Dieser enthält dann die relativistische Beschreibung des Gravitationsfeldes!

Wir haben bereits gesehen, dass die Ableitungen der $g_{\mu\nu}$, ergo letztendlich die Christoffelsymbole die Gravitationskräfte in der relativistischen Bewegungsgleichung bestimmen. Die $g_{\mu\nu}$ sind daher die relativistischen Gravitationspotenziale.

Insbesondere gilt:

$$g_{00}(\bar{r}) = 1 + h_{00} = 1 + \frac{2\Phi(\bar{r})}{c^2}$$

$$|\Phi(\bar{r})| \ll c^2$$

auch für das Newtonsche Gravitationspotenzial $\Phi(\bar{r})$!

Aus dem Äquivalenzprinzip folgen die relativistischen Gesetze im Gravitationsfeld ! Das Äquivalenzprinzip kann aber nicht die Feldgleichungen für die $g_{\mu\nu}(x)$ festlegen. Diese Gleichungen haben nämlich gar keinen Entsprechung in der SRT !

Geometrisch bedeutet die Koordinatenabhängigkeit des metrischen Tensors im Allgemeinen eine Krümmung des Raumes ! Die noch aufzustellenden Feldgleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen dieser Krümmung und den Quellen (also insbesondere der Massen) des Gravitationsfeldes quantitativ !

13. Tensoren im Riemannschen Raum

Definition

Der Riemannsche Raum V_4 ist eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, auf der eine Metrik

$g_{\mu\nu}(x^\rho)$ definiert ist, derart, dass $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen invariant ist und

$g_{\mu\nu}$ die Signatur -2 hat (um die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zu wahren !) (das bedeutet: 2 mehr negative Eigenwerte als positive. Signatur = Differenz zwischen positiven und negativen Eigenwerten)

Bezeichnungen

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu(x^\alpha)$$

$$x^\mu \rightarrow dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} := x^{\mu'}{}_{,\alpha}$$

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}} := \delta_\nu{}^\mu$$

es gibt wieder drei Arten von Abständen:

$ds^2 > 0$ zeitartig -> kausale WW möglich, raumartig -> keine kausale WW möglich

Tensoren

Werden auch im Riemannschen Raum durch ihr Verhalten bei allgemeinen koordinatentransformationen bestimmt !

$$V^\beta \rightarrow V^{\beta'} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} V^\alpha$$

für kontravariante Vektoren
und

$$V_\beta \rightarrow V_\beta' = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\gamma} V^\gamma = g_{\alpha\beta}' V^\alpha = \frac{\partial x^\delta}{\partial x^\beta} V_\delta$$

$$V_\beta' = \frac{\partial x^\delta}{\partial x^\beta} V_\delta$$

Also:

$$V_\beta := g_{\alpha\beta} V^\alpha$$

$$V^\beta := g^{\alpha\beta} V_\alpha$$

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} = g^{\beta\alpha} g_{\alpha\gamma} = \delta^\beta_\gamma$$

Allgemein

$$T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\rho} \dots \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\gamma} \dots \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\delta} T^{\rho\dots\sigma}_{\tau\dots\rho}$$

Dabei bleiben Symmetrien bei Transformationen erhalten:

$$S_{\mu\nu} := \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) = S_{\nu\mu}$$

$$A_{\mu\nu} := \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) = -A_{\nu\mu}$$

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu}$$

$$S_{\mu\nu} := T_{(\mu\nu)}$$

$$A_{\mu\nu} := T_{[\mu\nu]}$$

Beweis für den Symmetrisierten Tensor:

$$S_{\mu\nu}' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} S_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\nu} S_{\beta\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\nu} S_{\alpha\beta} = S_{\nu\mu}'$$

Die partielle Ableitung ist dagegen keine kovariante Operation. Das bedeutet: Aus einem Tensor k-ter Stufe wird kein Tensor k+1. Stufe mehr !

Denn:

$$\frac{\partial A^{\beta'}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial A^{\beta'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} A^\alpha + \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu}$$

Die Partielle Ableitung würde genau dann richtig transformieren, wäre kovariant, wenn sie einen Tensor k+1. Stufe bilden würde, wenn also

$$\frac{\partial A^{\beta'}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu}$$

$$\partial_\nu A^{\beta'} = \partial_\alpha x^{\beta'} \partial_\nu x^\mu \partial_\mu A^\alpha$$

DIES STIMMT ABER NICHT !!!

Statt dessen haben wir eine zweite Ableitung als Korrektur:

$$\frac{\partial A^{\beta'}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} A^\alpha$$

Es ist also notwendig, eine forminvariante Ableitung unter allgemeinen Koordinatentransformationen, also eine kovariante Ableitung einzuführen !

Die kovariante Ableitung eines Tensors k. Stufe ist dann gerade ein Tensor k+1. Stufe und damit nach Definition des Wortes "Tensor" ein im Riemannschen Raum unter allgemeinen Koordinatentransformationen kovariantes Objekt !

13. Tensoren im Riemannschen Raum

Definition

Der Riemannsche Raum V_4 ist eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, auf der eine Metrik

$g_{\mu\nu}(x^\rho)$ definiert ist, derart, dass $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen invariant ist und

$g_{\mu\nu}$ die Signatur -2 hat (um die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zu wahren !) (das bedeutet: 2 mehr negative Eigenwerte als positive. Signatur = Differenz zwischen positiven und negativen Eigenwerten)

Bezeichnungen

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu(x^\alpha)$$

$$x^\mu \rightarrow dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} := x^{\mu'},_\alpha$$

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}} := \delta_\nu^{\mu'}$$

es gibt wieder drei Arten von Abständen:

$ds^2 > 0$ zeitartig -> kausale WW möglich, raumartig -> keine kausale WW möglich

Tensoren

Werden auch im Riemannschen Raum durch ihr Verhalten bei allgemeinen koordinatentransformationen bestimmt !

$$V^\beta \rightarrow V^{\beta'} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} V^\alpha$$

für kontravariante Vektoren
und

$$V_\beta \rightarrow V_\beta' = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\gamma} V^\gamma = g_{\alpha\beta}' V^\alpha = \frac{\partial x^\delta}{\partial x^\beta} V_\delta$$

$$V_\beta' = \frac{\partial x^\delta}{\partial x^\beta} V_\delta$$

Also:

$$V_\beta := g_{\alpha\beta} V^\alpha$$

$$V^\beta := g^{\alpha\beta} V_\alpha$$

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} = g^{\beta\alpha} g_{\alpha\gamma} = \delta^\beta_\gamma$$

Allgemein

$$T^{\alpha\dots\beta}_{\gamma\dots\delta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\rho} \dots \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\gamma} \dots \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\delta} T^{\rho\dots\sigma}_{\tau\dots\rho}$$

Dabei bleiben Symmetrien bei Transformationen erhalten:

$$S_{\mu\nu} := \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) = S_{\nu\mu}$$

$$A_{\mu\nu} := \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) = -A_{\nu\mu}$$

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu}$$

$$S_{\mu\nu} := T_{(\mu\nu)}$$

$$A_{\mu\nu} := T_{[\mu\nu]}$$

Beweis für den Symmetrisierten Tensor:

$$S_{\mu\nu}' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} S_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\nu'} S_{\beta\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\nu} S_{\alpha\beta} = S_{\nu\mu}'$$

Die partielle Ableitung ist dagegen keine kovariante Operation. Das bedeutet: Aus einem Tensor k-ter Stufe wird kein Tensor k+1. Stufe mehr !

Denn:

$$\frac{\partial A^{\beta'}}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial A^{\beta'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} A^\alpha + \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu}$$

Die Partielle Ableitung würde genau dann richtig transformieren, wäre kovariant, wenn sie einen Tensor k+1. Stufe bilden würde, wenn also

$$\frac{\partial A^{\beta'}}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu}$$

$$\partial_{\nu'} A^{\beta'} = \partial_\alpha x^{\beta'} \partial_{\nu'} x^\mu \partial_\mu A^\alpha$$

DIES STIMMT ABER NICHT !!!

Statt dessen haben wir eine zweite Ableitung als Korrektur:

$$\frac{\partial A^{\beta'}}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} A^\alpha$$

Es ist also notwendig, eine forminvariante Ableitung unter allgemeinen Koordinatentransformationen, also eine kovariante Ableitung einzuführen !

Die kovariante Ableitung eines Tensors k. Stufe ist dann gerade ein Tensor k+1. Stufe und damit nach Definition des Wortes " Tensor" ein im Riemannschen Raum unter allgemeinen Koordinatentransformationen kovariantes Objekt !

14. Partielle und kovariante Ableitung

- Definition der kovarianten Ableitung durch die Forderungen:
- 1) die kovariante Ableitung eines Tenors k- ter Stufe ergibt einen Tensor (k+1). Stufe
 - 2) Im Minkowski- Raum reduziert sich in quasi- kartesischen Koordinaten (also in einem globalen Inertialsystem) die kovariante auf die partielle Ableitung (Im Riemannschen Raum entsprechend gefordert für lokale IS)

Man betrachte die Transformationseigenschaft der Christoffelsymbole, die als zweite Ableitung der alten Koordinaten beim Übergang von einem IS, bzw. lokalen IS zu beliebigen Koordinaten auftreten:

IS bzw. lokales IS:

Koordinate ξ^μ

Metrik $\eta_{\mu\nu}$

Geradengleichung bzw. bewegungsgleichung eines freien Teilchens:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

→ beliebiges KS:

→ Koordinaten x^μ , Metrik $g_{\mu\nu}$

Geradengleichung / bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

mit:

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\rho\beta,\alpha} - g_{\beta\alpha,\rho})$$

Nun betrachten wir das Transformationsverhalten der Christoffelsymbole, also quasi eine erneute Koordinatentransformation. Denn: Die Christoffelsymbole hatten sich ja aus einer Koordinatentransformation der Bewegungsgleichung ergeben.

Wir transformieren:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \\
\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\beta} \right), \\
\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\rho} \left(\frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right), \\
\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\rho} \left(\frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\tau \partial x^\lambda} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\lambda} \right), \\
\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\tau \partial x^\lambda} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \\
\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\tau \partial x^\lambda} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \delta^\sigma_\lambda \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \\
\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma^\sigma_{\tau\lambda} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} \right) &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} \right) = 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} &= - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}
\end{aligned}$$

Somit bei Anwendung des Christoffels auf einen Vektor:

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma^\sigma_{\lambda\tau} A^\beta + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} A^\beta, \\
\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} &= - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}, \\
\Rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\beta} = - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\beta}, \\
\Rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} A^\beta &= - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\beta} A^\beta = - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\alpha} A^\kappa
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\beta} \Gamma^\sigma_{\lambda\tau} A^\beta - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\alpha} A^\kappa \\ \Rightarrow \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\lambda} \Gamma^\sigma_{\rho\tau} A^\lambda - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} A^\kappa \\ \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\lambda} A^\lambda \Gamma^\sigma_{\rho\tau} - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} A^\kappa \\ \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\nu} A^\rho \Gamma^\sigma_{\rho\tau} - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} A^\kappa\end{aligned}$$

Nun aber:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} A^\alpha \\ \Rightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} A^\alpha \\ \Rightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} A^\alpha + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\nu} A^\rho \Gamma^\sigma_{\rho\tau} - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} A^\kappa \\ \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} A^\alpha &= \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\kappa} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} A^\kappa \\ \Rightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\nu} A^\rho \Gamma^\sigma_{\rho\tau} \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\nu} A^\rho \Gamma^\sigma_{\rho\tau} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} A^\rho \Gamma^\alpha_{\rho\kappa} \\ \Rightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} A^\rho \Gamma^\alpha_{\rho\kappa} \\ \Rightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} A^\rho \Gamma^\alpha_{\rho\kappa} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\kappa} + A^\rho \Gamma^\alpha_{\rho\kappa} \right)\end{aligned}$$

Das bedeutet jedoch

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\kappa} + A^\rho \Gamma^\alpha_{\rho\kappa}$$

transformiert gerade wie ein Tensor 2. Stufe, nämlich

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\kappa} + A^\rho \Gamma^\alpha_{\rho\kappa} \right)$$

Also definieren wir als kovariante Ableitung:

$$\nabla_\nu A^\mu := A^\mu_{;\nu} := A^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda$$

Weiter gilt:

$$\nabla_\nu A_\mu := A_{\mu,\nu} := A^\mu,_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} A_\lambda$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}\nabla_\nu T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \beta_l} &= T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \beta_l, \nu} + \Gamma^{\alpha_1}{}_{\lambda\nu} T^{\lambda\alpha_2 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \beta_l} + \Gamma^{\alpha_k}{}_{\lambda\nu} T^{\alpha_1 \dots \lambda}{}_{\beta_1 \dots \beta_l} \\ &\quad - \Gamma^\lambda{}_{\beta_1\nu} T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\lambda\beta_2 \dots \beta_l} - \Gamma^\lambda{}_{\beta_l\nu} T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \lambda}\end{aligned}$$

Während wir bereits gesehen haben, dass die partielle Ableitung der metrik natürlich nicht verschwindet, gilt als Charakteristikum der Riemannschen Geometrie

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0$$

Also: die kovariante Ableitung der Metrik verschwindet !

Es gilt:

1) die kovariante Ableitung macht immer einen Tensor entsprechender Stufe im Riemannschen Raum

2) Im Minkowskiraum oder im Lokalen Inertialsystem reduziert sich die kovariante Ableitung wegen

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad \text{wieder auf die partielle Ableitung !}$$

$$\Rightarrow \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa} = 0$$

3) es gelten die üblichen Rechenregeln für die Ableitung insbesondere die Kettenregel !

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}$$

Man sieht, dass dieser Ausdruck verschwindet, wenn man für die Christoffelsymbole den entsprechenden Ausdruck der Ableitungen der Metrik einsetzt.

Mit

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} = 0$$

haben wir das erste Beispiel einer Feldgleichung (kovariant). Das heißt: eine partielle DGL, die kovariant gegenüber Koordinatentransformationen ist ! Kovariante Gleichungen stellen einen einfachen Weg dar, um bekannte Gleichungen im Lokalen IS für ein KS mit $g_{\mu\nu}(x)$ zu formulieren.

Die kovariante Verallgemeinerung des Differenzials

$$dA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = A^\mu,_\nu dx^\nu$$

lautet

$$DA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu = A^\mu,_\nu dx^\nu$$

Dies ist nach Konstruktion wieder ein Vektor im Riemannschen Raum. Das gilt dagegen für

$$dA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = A^\mu,_\nu dx^\nu \text{ nicht, wie sich durch Ausführen einer Koordinatentransformation leicht zeigen lässt !} \rightarrow \text{die partielle Ableitung ist keine kovariante Operation !}$$

15. Paralleltransport von Vektoren

Anschauliche Bedeutung der kovarianten Ableitung führt zum Begriff des "Paralleltransports" bzw. zum Begriff der "Parallelität von Vektoren in infinitesimal benachbarten Punkten":

Wir führen die koordinatenabhängigen Transformationsmatrizen ein, nämlich

$$\alpha^i{}_k(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x^k}$$

$$\alpha_i{}^k(x) = \frac{\partial x^k}{\partial x^i}$$

betrachten wir das totale Differenzial eines Vektors A^μ :

$$dA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = A^{\mu,\nu} dx^\nu = A^\mu(x^\lambda + dx^\lambda) - A^\mu(x^\lambda)$$

Dies ist kein Vektor (im Riemannschen Raum mit $g_{\mu\nu}(x) \neq \eta_{\mu\nu}$)

Der Grund ist einfach: Die Terme

$A^\mu(x^\lambda + dx^\lambda)$ und $A^\mu(x^\lambda)$ transformieren verschieden, nämlich mit $\alpha^{\mu\nu}(x)$ und $\alpha^{\mu\nu}(x + dx)$ und $\alpha^{\mu\nu}(x + dx) \neq \alpha^{\mu\nu}(x)$.

Man muss also $A^\mu(x + dx)$ zum Punkt x transportieren. Dabei soll er sich für den Fall kartesischer Koordinaten, also den Minkowski-Raum nicht ändern!

Dann ist $dA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = A^{\mu,\nu} dx^\nu = A^\mu(x^\lambda + dx^\lambda) - A^\mu(x^\lambda)$ auch ein Vektor!

Für die ungeänderten kartesischen Komponenten ist der verschobene Vektor parallel zum nicht verschobenen! Die betrachtete Verschiebung ist eine sogenannte Parallel-Verschiebung (Parallel-Verschiebung: Er würde sich im Minkowski-Fall nicht ändern!)

Die Änderung der Komponenten $A^\mu(x^\lambda + dx^\lambda)$ beim Transport von $(x^\lambda + dx^\lambda)$ nach x^λ sei δA^μ genannt!

Somit kann an die infinitesimale Differenz zweier Vektoren am selben Punkt bilden:

$$\begin{aligned} DA^\mu &= (A^\mu(x^\lambda + dx^\lambda))_{verschobennachx} - A^\mu(x^\lambda) = A^\mu(x^\lambda + dx^\lambda) - A^\mu(x^\lambda) - \delta A^\mu \\ DA^\mu &= A^\mu(x^\lambda + dx^\lambda) - A^\mu(x^\lambda) - \delta A^\mu = A^{\mu,\nu} dx^\nu - \delta A^\mu = dA^\mu - \delta A^\mu \end{aligned}$$

Das heißt: wir ziehen die Änderung bei der Parallelverschiebung von der änderungslosen Parallelverschiebung im Minkowski-Fall wieder ab!

Da wir die kovarianten Differenziale gemäß

$$DA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + \Gamma^{\mu\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu = A^{\mu,\nu} dx^\nu \text{ bereits eingeführt haben, ergibt sich:}$$

$$\delta A^\mu = -\Gamma^{\mu\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu$$

Also: 2 Vektoren in infinitesimalen Punkten des Riemannschen Raumes sind genau dann parallel, wenn

$DA^\mu = 0$. Dies ist dann der Fall, wenn der Schlussfehler entgegen dem kartesischen Fall sich mit der differenziellen Änderung des kartesischen Falls genau kompensiert, wenn also

dA^μ und δA^μ sich gegenseitig kompensieren.

Das heißt: Die kovariante Ableitung verschwindet:

$$dA^\mu - \delta A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + \Gamma^{\mu\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu = A^{\mu,\nu} dx^\nu = 0$$

Man kann auch etwas anders an die Sache herangehen:

δA^μ muss offensichtlich proportional zu A^λ und zur Verschiebung dx^ν sein. Also: Der Schlussfehler bei der Verschiebung ist gerade proportional zur Vektorlänge und zur Länge der Verschiebung, also

$$\delta A^\mu = -\Gamma^{\mu\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu$$

Die Koeffizienten $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ lassen sich dann aus der Bedingung bestimmen, dass

$DA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu = A^\mu_{;\nu} dx^\nu$ ein Vektor ist ! Das Ergebnis sind natürlich die Christoffels !

Damit ist $DA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu = A^\mu_{;\nu} dx^\nu$, die infinitesimale Differenz zweier Vektoren am selben Punkt, also gleich dem kovarianten Differenzial.

Aus

$DA_\mu = dA_\mu - \delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda dx^\nu = A_{\mu;\nu} dx^\nu$ folgt mit Hilfe der Definition der kovarianten Ableitung die Parallelverschiebung eines kovarianten Vektors, nämlich

$$\delta A_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda dx^\nu$$

Beispiel: Polarkoordinaten

Wie interpretiert man δA^μ als Parallelverschiebung ?

Dies soll an einfachen Beispielen dargestellt werden:

Zunächst betrachte man einen zweidimensionalen Euklidischen Raum in Polarkoordinaten:

$$x^1 = \rho$$

$$x^2 = \varphi$$

Das Wegelement wird durch

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

gegeben. Damit ergeben sich die metrischen Koeffizienten zu

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$$

Die meisten partiellen Ableitungen der $g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$ verschwinden, außer:

$$g_{22,1} = 2\rho$$

Damit können leicht die Christoffelsymbole bestimmt werden. Sie verschwinden alle außer:

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{g^{11}}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\rho$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = -\frac{g^{22}}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{\rho}$$

Wir entwickeln alle Vektoren, also auch den Wegelementvektor nach Basisvektoren $d\bar{s} = dx^i \bar{e}_i = dx_i \bar{e}^i$ aus

$$ds^2 = d\bar{s} \cdot d\bar{s} = (\bar{e}_i \bar{e}_k) dx^i dx^k = g_{ik} dx^i dx^k$$

kann man die Verknüpfung des Skalarprodukts der Basisvektoren mit den metrischen Koeffizienten erkennen:

$$\begin{aligned}(\bar{e}_i \bar{e}_k) &= g_{ik} \\(\bar{e}^i \bar{e}^k) &= g^{ik}\end{aligned}$$

Für orthogonale Koordinaten (wie Kugel- oder Zylinderkoordinaten) werden meist normierte Basisvektoren eingeführt! Für Polarkoordinaten hängen die normierten Basisvektoren \bar{e}_ρ und \bar{e}_φ gemäß

$$\bar{e}_\rho = \bar{e}^1 = \bar{e}_1, \bar{e}_\varphi = \frac{\bar{e}_2}{\rho} = \rho \bar{e}_2$$

mit den hier verwendeten Basisvektoren zusammen.

Nun wollen wir die Parallelverschiebung eines konstanten Vektors, nämlich

$$\bar{A} = \bar{e}_x = \bar{e}_1 \cos \varphi - \bar{e}_2 \frac{\sin \varphi}{\rho} = A^i \bar{e}_i$$

untersuchen. Dieser Vektor hat die Komponenten

$$A^1 = \cos \varphi = \cos x^2$$

$$A^2 = -\frac{\sin \varphi}{\rho} = -\frac{\sin x^2}{x^1}$$

Die Koordinatenabhängigkeit der Komponenten von A^i beruht, wie gewohnt, auf der Wahl von krummlinigen Koordinaten!

der Vektor $\bar{A} = \bar{e}_x = \bar{e}_1 \cos \varphi - \bar{e}_2 \frac{\sin \varphi}{\rho} = A^i \bar{e}_i$ selbst ist dagegen ortsunabhängig!

Dieses Beispiel macht sofort klar, dass

$$dA^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \text{ kein Maß für die Änderung von } \bar{A} \text{ zwischen } x \text{ und } x+dx \text{ ist.}$$

Speziell für die Verschiebung

$$(dx^i) = (dx^1, dx^2) = (0, d\varphi)$$

erhalten wir

$$(dA^i) = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^p} dx^p \right) = \left(-\sin \varphi, -\frac{\cos \varphi}{\rho} \right) d\varphi$$

und

$$(\delta A^i) = (-\Gamma^i{}_{kp} A^k dx^p) = (-\Gamma^1{}_{22} A^2 d\varphi, -\Gamma^2{}_{12} A^1 d\varphi) = \left(-\sin \varphi, -\frac{\cos \varphi}{\rho} \right) d\varphi$$

Also verschwindet das kovariante Differenzial

$$DA^i = dA^i - \delta A^i = 0$$

Genau dies spiegelt die Konstanz des Vektors \bar{A} wider!

Betrachten wir die Parallelverschiebung entlang des endlichen Wegs

$$(x^i) = (\rho, \varphi) = (1, 0) \rightarrow d\rho = 0 \rightarrow (x^i) = (\rho, \varphi) = \left(1, \frac{\pi}{2} \right)$$

mittels

$$\left(dA^i \right) = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^p} dx^p \right) = \left(-\sin \varphi, -\frac{\cos \varphi}{\rho} \right) d\varphi$$

erhalten wir hierfür

$$\int \left(dA^i \right) = \int_0^\pi (-\sin \varphi, -\cos \varphi) d\varphi = (-1, -1)$$

das bedeutet jedoch, dass sich die Komponenten des konstanten Vektors

$$\bar{A} = \bar{e}_x = \bar{e}_1 \cos \varphi - \bar{e}_2 \frac{\sin \varphi}{\rho} = A^i \bar{e}_i \text{ sich längs des Weges}$$

$$\left(x^i \right) = (\rho, \varphi) = (1, 0) \rightarrow d\rho = 0 \rightarrow \left(x^i \right) = (\rho, \varphi) = \left(1, \frac{\pi}{2} \right) \text{ ändern gemäß:}$$

$$\left(A^i \right) = (1, 0) \rightarrow \left(A^i \right) = (0, -1)$$

Dies ist im Folgenden noch in einer Abbildung illustriert. Die Änderung aufgrund der Parallelverschiebung ist

$$\int \left(\delta A^i \right) = \int_0^\pi (-\sin \varphi, -\cos \varphi) d\varphi = (-1, -1)$$

Für den konstanten Vektor \bar{A} spiegelt also die koordinatenabhängigkeit $A^i(x)$ nur die Änderung der Komponenten bei Parallelverschiebung wider:

es ist

$$DA^i = dA^i - \delta A^i = 0$$

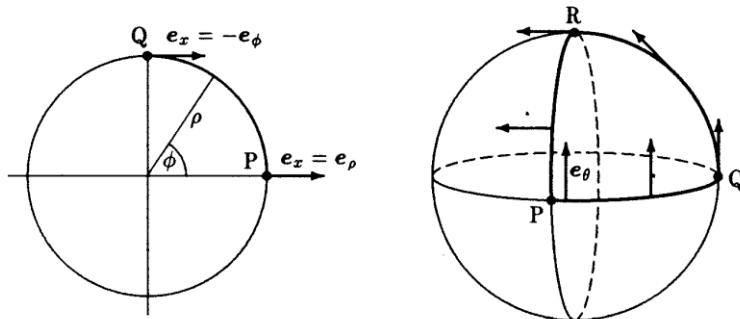


Abbildung 16.1 Linke Seite: In einem zweidimensionalen ebenen Raum werden Polarkoordinaten ρ und ϕ verwendet. Der Vektor $\mathbf{A} = e_x$ wird von P nach Q parallel verschoben. Obwohl der Vektor konstant ist, ändern sich seine Komponenten, und zwar von $\mathbf{A} := (1, 0)$ zu $\mathbf{A} := (0, -1)$. Im ebenen Raum ist das Ergebnis unabhängig vom gewählten Weg. Längs eines geschlossenen Weges (wie etwa dem gezeigten Kreis) führt eine solche Parallelverschiebung zum ursprünglichen Vektor zurück. Rechte Seite: Als Beispiel für einen gekrümmten zweidimensionalen Raum wird eine Kugeloberfläche betrachtet. Der Vektor e_θ wird längs Großkreisen (Geodäten) von P über Q und R zurück nach P verschoben. Bei dieser Parallelverschiebung ist der Winkel zwischen dem Vektor und der Geodäte konstant. Die Verschiebung längs des geschlossenen Weges führt zu einem anderen Vektor, und zwar $-e_\phi$. Dies ist ein Charakteristikum eines gekrümmten Raums.

Beispiel: Kugeloberfläche

Für eine geodätische Linie $x^i(s)$ führen wir den Tangentenvektor ein, nämlich $u^i = \frac{dx^i(s)}{ds}$

Damit können wir

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \text{ in der Form:}$$

$$\frac{du^\mu}{ds} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \text{ schreiben !}$$

Also:

$$du^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha dx^\beta = \delta u^\mu$$

und damit:

$$Du^\mu = 0$$

(Tangentenvektor u^μ einer geodätischen Linie)

Die Änderung der Komponenten u^μ ergibt sich aus der Änderung durch Parallelverschiebung $du^\mu = \delta u^\mu$. Also ist der Tangentenvektor zugleich ein längs der geodätischen Linie parallelenverschobener Vektor. Für die Parallelverschiebung eines anderen Vektors A^μ entlang einer geodätischen Linie bedeutet dies, dass der Winkel zwischen A^μ und u^μ konstant bleibt. In einem zweidimensionalen Raum legt bereits dies die Parallelverschiebung fest .

Betrachten wir noch einmal die Parallelverschiebung im ebenen zweidimensionalen Raum in Polarkoordinaten. Die Geodäte ist hier eine Gerade, die durch P und Q geht ! Bei der Parallelverschiebung ist der Winkel zwischen \bar{e}_x und dieser Geraden konstant !

Als nichttriviales Beispiel betrachten wir den gekrümmten zweidimensionalen Raum der Kugeloberfläche !

Wir wollen nun einen Vektor längs des Weges

$$(\vartheta, \varphi) = \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow (0, \text{beliebig}) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

parallel verschieben ! Die einzelnen Wegstücke sind immer Großkreise, also geodätische Linien. Anhand der Abbildung sieht man, dass:

$$\bar{A} = \bar{e}_g \rightarrow \bar{A} = \bar{e}_\varphi \text{ durch die Parallelverschiebung}$$

Der Endvektor ist also gegen den Ausgangsvektor um 90° verdreht $\left(\frac{\pi}{2} \right)$. Dem entspricht die Winkelsumme von 270° für das vom geschlossenen Weg eingeschlossene Dreieck !

Krümmung des raums

Das Beispiel " Polarkoordinaten" behandelt, wie wir bereits skizziert haben, einen euklidischen und NICHT gekrümmten Raum. Die Wahl der krummlinigen Koordinaten war beliebig. der Raum selbst ist jedoch flach, es existieren kartesische Koordinaten !

Mit den eingeführten Begriffen lässt sich ein flacher Raum definieren als der Raum, in dem die Parallelverschiebung längs eines geschlossenen Weges jeden Vektor in sich selbst überführt.

Also: Euklidischer Raum:

$$\oint \delta A^i = 0$$

gekrümmter Raum.

$$\oint \delta A^i \neq 0 \text{ (im Allgemeinen)}$$

Veranschaulichung: Kugeloberfläche !

Wichtig : Bei Parallelverschiebungen: Es gibt keinen einbettenden Raum, in dem sich die Kugeloberfläche befindet ! Sonst hätten wir ja nur den Fall der krummlinigen Koordinaten in drei Dimensionen, nämlich Kugelkoordinaten ! Nein, es existieren im Raum keine kartesischen Koordinaten, also: Die Kugeloberfläche repräsentiert den gesamten Raum !

Die spätere Definition der Krümmung (Krümmungstensor) erfolgt ohne Bezug auf die hier gegebene geometrische Deutung. Die Anschaulichkeit ist dann im vierdimensionalen Raum nicht mehr gegeben! Man kann den Krümmungstensor jedoch auch über die hier diskutierte Parallelverschiebung definieren: Dazu betrachten wir die Änderung eines Vektors entlang einer geschlossenen Kurve, die eine infinitesimale Fläche df^{pm} umgrenzt.

Diese Änderung muss proportional zum durchlaufenen Weg, aufintegriert, also zur umgrenzten Fläche und natürlich zum Vektor selbst sein:

$$\oint \delta A^i \oint \Gamma^i_{kp} A^k dx^p = -\frac{1}{2} R^i_{kpm} A^k df^{pm}$$

Wenn man dann noch eine endliche, anstatt der infinitesimalen Fläche betrachtet, so ist rechts noch über eine Fläche zu integrieren!

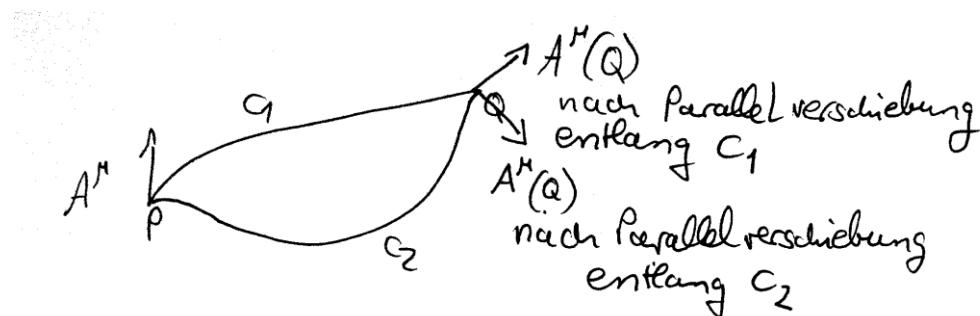
Als Differenz von 2 Vektoren am selben Ort (geschlossene Kurve) ist die linke Seite der Gleichung selbst ein Vektor.

Das bedeutet, der Proportionalitätskoeffizient R^i_{kpm} ist ein Tensor vieter Stufe. Es handelt sich um den sogenannten Krümmungstensor (in Riemannschen Räumen: Riemannscher Krümmungstensor). Seine Kontraktion ergibt den Ricci-Tensor und erneute Kontraktion den Ricci-Skalar!

Für den nichtgekrümmten Raum folgt aus $\oint \delta A^i = 0$ und der Beliebigkeit der Wahl von Vektor A und Fläche df, dass $R^i_{kpm} = 0$

Bemerkung

Es macht keinen Sinn, an Vektoren einen Fernvergleich der Richtungen vorzunehmen, sondern nur der Winkel!



Bei dieser Art der Verschiebung ändert sich der Winkel zwischen Vektor und Kurve!
(anders als beim Fermi-Walker-Transport)

16. Geodätische Linien (Geodäten)

Def.: der Autoparallelen: (die "geradeste Verbindung" zweier Punkte):

Für beliebige Kurven ändert sich dabei der Winkel zwischen Vektor und Kurve (nicht so bei Geodäten!)

Autoparallele = Kurve, längs der der Tangentenvektor parallel verschoben wird (immer Tangente bleibend!)

Also: Parallelverschiebung:

$$A^{\mu}_{,\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} A^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{Parallelverschiebung})$$

Wähle den Tangentenvektor an der Kurve mit einem Kurvenparameter τ :

$$A^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Autoparallelengleichung

Definition: Geodäten = " kürzeste Verbindung" zweier Punkte:

Geodäte = Kurve, längs der

$$\delta \int_A^B ds = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

(Geodätengleichung)

Also: In der Riemannschen Geometrie sind die Autoparallelen gleich den Geodäten !

Geometrische Aspekte

Es geht hier um geometrische Aspekte der Beschreibung von Gravitationsfeldern durch einen metrischen Tensor.

Die Koordinatenabhängigkeit von $g_{\mu\nu}(x)$ bedeutet im allgemeinen, dass der durch das Wegelement ds^2 definierte Raum gekrümmmt ist !

Die Bahngleichungen im Gravitationsfeld sind dann die geodätischen Linien dieses Raumes

Krümmung des Raums

Wir betrachten das N- dimensionale Riemannsche Wegelement:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

Beschränkung auf 2 Dimensionen:

$$ds^2 = g_{11}(x^1, x^2) (dx^1)^2 + 2g_{12}(x^1, x^2) dx^1 dx^2 + g_{22}(x^1, x^2) (dx^2)^2$$

Wir haben bereits Beispiele diskutiert und erinnern uns an die Ebene in kartesischen Koordinaten:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

in Polarkoordinaten

Dagegen haben wir die Kugeloberfläche mit den Winkelkoordinaten $(x^1, x^2) = (\vartheta, \varphi)$ also:

$$ds^2 = a^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

In der Ebene gibt es eine Koordinatentrafo zwischen den kartesischen und den krummlinigen Koordinaten. Dies existiert für unser Linienelement der Kugel nicht !

An diesem einfachen Beispiel sehen wir:

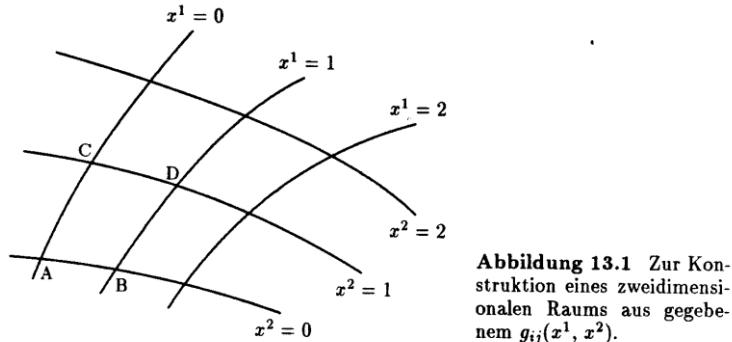
- 1) Der metrische Tensor bestimmt die Eigenschaft eines Raumes. Dazu gehört insbesondere die Krümmung!
- 2) die Gestalt des metrischen Tensors ist durch die Eigenschaft des Raumes nicht eindeutig festgelegt. Vielmehr kann sie durch Wahl anderer Koordinaten im gegebenen Raum verändert werden !

Wir demonstrieren jetzt, wie die Krümmung des Raumes durch die $g_{\mu\nu}$ beschrieben wird

Beschränkung auf 2 Dimensionen:

$$ds^2 = g_{11}(x^1, x^2) dx^1 dx^1 + 2g_{12}(x^1, x^2) dx^1 dx^2 + g_{22}(x^1, x^2) dx^2 dx^2$$

Dazu konstruieren wir die zugehörige, zweidimensionale Fläche wie im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum:



Die Fläche soll dazu, wie hier dargestellt, in kleinen Schritten $\delta x^1, \delta x^2$ konstruiert werden. Das bedeutet, die $g_{\mu\nu}$ sollen sich über die Längen der $\delta x^1, \delta x^2$ nur geringfügig ändern! Im Folgenden setzen wir willkürlich $\delta x^1 = \delta x^2 = 1$! Einen beliebigen Punkt A des dreidimensionalen Raumes wählen wir als

Koordinatenursprung der Fläche: $x^1 = x^2 = 0$. Am Punkt A löten wir zwei Drähte zusammen, die die Koordinatenlinien $x^1 = 0$ und $x^2 = 0$ darstellen sollen! Auf dem Draht $x^2 = 0$ löten wir dann im Abstand $\delta s_{AB} = \sqrt{g_{11}(0,0)} \delta x^1 = \sqrt{g_{11}(0,0)}$ einen Draht $x^1 = 1$ an! (Punkt B) Alle Abstände δs sind

physikalische Abstände, also echte Drahlängen. Auf dem Draht $x^1 = 0$ löten wir im Abstand $\delta s_{AC} = \sqrt{g_{22}(0,0)} \delta x^2 = \sqrt{g_{22}(0,0)}$ einen Draht $x^2 = 1$ an Punkt C! Jetzt werden die beiden neuen Drähte in den Abständen $\sqrt{g_{22}(1,0)}$ und $\sqrt{g_{22}(0,1)}$ bei D zusammengelötet!

Damit stehen alle Seitenlängen des Vierecks ABDC fest. Der Diagonalenabstand

$\delta s_{AD} = \sqrt{g_{11}(0,0) + 2g_{12}(0,0) + g_{22}(0,0)}$ legt dann das ganze Viereck als ebenes Flächenstück endgültig fest!

Analog werden die Vierecke konstruiert, die an \overline{BD} und \overline{CD} angrenzen.

Legt man nun alle drei Vierecke auf eine Ebene, so ergibt sich ein bestimmter Winkel beim Punkt D für das fehlende Viereck! Dieses vierte Viereck ist seinerseits jedoch durch die metrischen Koeffizienten $g_{\mu\nu}$

festgelegt! Im Allgemeinen ist das Einfügen dieses Vierecks nur möglich, wenn die Kanten \overline{BD} und \overline{CD} abgeknickt werden. Diese Knicke sind durch die vier Vierecke, also durch die $g_{\mu\nu}$ festgelegt. Über viele kleinen Vierecke hinweg ergibt sich daraus dann die Krümmung der Fläche.

Man kann sich schön klarmachen, wie eine derartige Konstruktion für eine Kugel aussieht. Dabei beginnt man am Äquator und setzt die Vierecke mit den Längen und Breitenkreisen als Begrenzung zusammen!

Das konstruktive Verfahren zeigt, wie die Krümmung der Fläche aus einem vorgegebenen metrischen Tensor folgt. Für eine zweidimensionale Fläche ist die sich ergebende Krümmung im dreidimensionalen Raum anschaulich erkennbar!

Neben der hier diskutierten Krümmung gibt es noch eine sogenannte äußere Krümmung! Dazu betrachte man ein Blatt Papier, das auf einem Tisch liegt. Es stellt eine ebene Fläche dar, auf die wir ein Koordinatennetz (euklidisch) malen könnten. Wenn man ein solches euklidisches Netz aufgemalt hat, dann kann man das Papier verbiegen (zum Beispiel zu einem Zylinder). Das bedeutet: die Abstände innerhalb der Fläche ändern sich nicht. Die Metrik bleibt gleich. Eine solche Verbiegung bezeichnet man als "äußere Krümmung".

Im Folgenden wird es vor allem um die Innere Krümmung gehen, die sich aus der Metrik innerhalb der Fläche ergibt!

Wenn die $g_{\mu\nu}$ koordinatenunabhängig sind, so sind alle konstruierten Vierecke gleich und ergeben daher eine Ebene.

Das heißt:

$g_{\mu\nu} = \text{constant} \rightarrow \text{Raum nicht gekrümmmt!}$

Im Euklidischen Raum kann man kartesische Koordinaten einführen, also durch eine Koordinatentransformation von $g_{\mu\nu} = \text{constant}$ zu $g_{\mu\nu}' = \delta_{\mu\nu}$ übergehen. Wegen $g_{\mu\nu} = \text{constant} \rightarrow \text{Raum nicht gekrümmmt!}$ folgt, dass $g_{\mu\nu} \neq \text{constant}!$ umgekehrt bedeutet die Koordinatenabhängigkeit der $g_{\mu\nu}$ nicht notwendig, dass der Raum gekrümmmt ist, wie

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

zeigt. Das koordinatenabhängige $g_{\mu\nu}$ kommt dadurch zu Stande, dass krummlinige Koordinaten gewählt wurden.

In diesem Abschnitt haben wir nun aus gegebenen metrischen Koeffizienten Koordinatenabstände berechnet und damit eine Fläche konstruiert. Durch Messung von Längen auf einer gegebenen Fläche könnte man leicht nachprüfen, ob diese eben ist oder nicht.

beispielsweise: Abweichung von 180° Winkelsumme in Dreiecken! Gauß (1777-1855) hat im dreidimensionalen Raum als erster nachgemessen, ob er gekrümmmt ist. Dazu hat er das Dreieck Inselberg-Broken-Hoher Hagen ausgemessen. Er konnte zeigen, dass der Raum auf einer 100 km Skala eben ist.

Wenn man in $ds^2 = g_{11}(x^1, x^2)dx^1)^2 + 2g_{12}(x^1, x^2)dx^1dx^2 + g_{22}(x^1, x^2)dx^2)^2$ eine Koordinatentransformation einsetzt, so gewinnt man eine andere Funktion für das Längenelement aber keinen anderen Fläche. Dies liegt daran, dass die Konstruktion der Fläche ja über physikalische Längen ds erfolgt, die sich bei der Transformation nicht ändern. Bei einer Koordinatentrafo erhalten lediglich die Punkte der selben Fläche andere Namen (Koordinatenwerte).

So gewinnt man

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \text{ aus } ds^2 = dx^2 + dy^2 \text{ durch die Trafo } \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

Allerdings beschreiben beide Formen für ds eine ebene Fläche! Auch in $ds^2 = a^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$ könnte man andere Koordinaten einführen. Eine Trafo auf kartesische Koordinaten geht aber nicht, denn sonst wäre ja $g_{\mu\nu} = \text{const.} \rightarrow$ der Raum eben und der Raum ist nicht eben! er ist eine Kugel!

Kartesische Koordinaten implizieren immer einen nichtgekrümmten oder ebenen Raum. Umgekehrt kann man in der Ebene immer kartesische Koordinaten einführen! Ein Raum ist nichtgekrümmt oder euklidisch, wenn kartesische Koordinaten möglich sind. Ein Raum ist genau dann gekrümmkt, wenn keine kartesischen Koordinaten möglich sind. Dabei muss man natürlich von der erwähnten äußeren Krümmung absehen! Für eine gegebene Funktion ds^2 bzw. $g_{\mu\nu}$ wird es aber kaum möglich sein, durch Probieren der möglichen Koordinatentrafos die Nichtexistenz kartesischer Koordinaten nachzuweisen! Statt dessen werden wir sehen, wie man die Krümmung des Raumes operativ aus gegebenem $g_{\mu\nu}$ berechnet!

Nach dem Äquivalenzprinzip werden die Gravitationsfelder durch Koordinatentrafos und dann koordinatenabhängige $g_{\mu\nu}$ beschrieben. Dies bedeutet geometrisch eine Krümmung des vierdimensionalen Raums. Die noch aufzustellenden Feldgleichungen für die $g_{\mu\nu}$ beschreiben den Zusammenhang zwischen dieser Krümmung und den Quellen des Gravitationsfeldes (insbesondere der Massen) quantitativ. In diesem Sinne verursachen Massen eine Krümmung des Raums!

Geodätische Linien

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Gravitationsfeld lautet

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Wir werden nun zeigen, dass die hierdurch bestimmten Bahnkurven die geodätischen Linien des durch die $g_{\mu\nu}$ definierten Riemannschen Raumes sind. Unter Geodätischen Linien versteht man die KÜRZESTE Verbindung zwischen zwei gegebenen Punkten. In der Ebene sind dies geraden, auf der Kugeloberfläche Großkreise.

Die notwendige Bedingung für eine geodätische Linie zwischen zwei gegebenen Punkten A und B lautet:

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \min imal$$

Die Weglänge $\int_A^B ds$ soll bezüglich beliebiger Kurven $x^\lambda(\tau)$, die durch A und B gehen, minimal sein ! Dann muss die Bahnänge also beliebigen infinitesimalen Variationen $\delta x^\lambda(\tau)$ gegenüber stationär sein:

$$\delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \delta \int_A^B d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = 0$$

bei dieser Variation sind die Endpunkte festzuhalten $\delta x^\lambda(A) = \delta x^\lambda(B) = 0$

Wir führen nun die Lagrangefunktion $L(\dot{x}(\tau), x(\tau)) = -mc \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ ein. Dabei gilt:

$$\begin{aligned}\dot{x}^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ x &= (x^\mu)\end{aligned}$$

$$\text{Damit wird unsere Forderung } \delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \delta \int_A^B d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = 0$$

zum Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta \int_A^B d\tau L(\dot{x}, x) = 0$$

wir kennen die zugehörigen Lagrangeleichungen aus der Mechanik:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L(\dot{x}, x)}{\partial \dot{x}^\kappa} \right) - \frac{\partial L(\dot{x}, x)}{\partial x^\kappa} = 0$$

Man kann leicht zeigen, dass dies gleichbedeutend mit der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

ist. Das bedeutet, die Bahnkurven sind extreme Verbindungen zwischen den Punkten A und B. Ob eine gefundene Kurve minimal oder maximal ist, muss eine genauere Untersuchung zeigen ! Die Einführung der Lagrangefunktion liefert uns einen Zusammenhang zwischen der geometrischen und der mechanischen Interpretation der Bewegungsgleichung. Wir haben den Vorfaktor mc so gewählt, damit L ohne Gravitationsfeld und für Minkowskikoordinaten in die bekannte Lagrangefunktion der SRT übergeht !

Nämlich

$$L_0(u^\alpha) = -mc \sqrt{u^\alpha u_\alpha}$$

Die Lagrangefunktion ist meist ein besonders einfacher und skalarer Ausdruck. So ist der Zusatzterm in der Lagrangefunktion in einem Äußeren Vektorfeld $A^\beta(x)$ einfach der einfachst mögliche denkbare lorentzinvariante Term, ergo

$$L(u^\alpha) = -mc \sqrt{u^\alpha u_\alpha} - \frac{q}{c} A^\beta u_\beta$$

Vorfaktoren wurden dabei so gewählt, dass die richtigen Bewegungsgleichungen (Lorentzkraft) folgen !

$L(u^\alpha) = -mc\sqrt{u^\alpha u_\alpha} - \frac{q}{c} A^\beta u_\beta$ ist dann um den einfachsten Skalar ergänzt worden, der die Bahn mit einem äußeren Vektorfeld verknüpft ! Analog dazu ist

$L(\dot{x}(\tau), x(\tau)) = -mc\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ ein besonders einfacher Ausdruck, der sich mit einem gegebenen Tensorfeld $g_{\mu\nu}(x)$ bilden lässt !

Im Übrigen folgt dann die richtige Bewegungsgleichung $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$, würde sie jedoch auch ohne die Wurzel in der Lagrangefunktion. Wegen der Homogenität von zeit und Raum ist die Lagrangefunktion jedoch mit den \dot{x}^μ und nicht mit x^μ zu bilden ! Die äußeren Felder $A^\beta(x)$ und $g_{\mu\nu}(x)$ können diese Homogenität natürlich verletzen !

Wir geben noch eine Begründung dafür, dass die Bewegungsgleichung geodätische Linien beschreibt. In der Umgebung eines beliebigen Punktes x_0 können wir ja die Näherung $g_{\mu\nu}(x) \approx g_{\mu\nu}(x_0) = \text{const.}$ machen. Nachdem der Raum dann nicht gekrümmmt ist, können wir kartesische Koordinaten einführen. Dann jedoch, wegen $g_{\mu\nu}(x) \approx g_{\mu\nu}(x_0) = \text{const.}$ verschwinden die Christoffelsymbole und die Bewegungsgleichung

reduziert sich auf $\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0$ mit den kartesischen Koordinaten ξ^μ . Diese Gleichung ist dann nur lokal gültig, beschreibt aber lokal eine gerade. Also ist die durch die allgemeine Bewegungsgleichung

$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$ gegebene Bahn lokal eine gerade und damit lokal die kürzeste Verbindung. Aus der Fortsetzung dieser lokalen geraden ergeben sich dann global die geodätischen Linien !

Zusammenfassend stellen wir fest: Ein Teilchen in dem durch $g_{\mu\nu}(x)$ gegebenen Gravitationsfeld bewegt sich auf einer geodätischen Linie in dem durch diese $g_{\mu\nu}(x)$ definierten Riemannschen Raum.

Dies ist eine Geodäte in einem vierdimensionalen Raum (eine Zeit- und drei Ortskoordinaten). Natürlich ist dies keine Geodäte im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum ! Dies kann man sich am Beispiel einer Wurfparabel verdeutlichen !

Verallgemeinerte Vektoroperationen

Bevor wir zum Krümmungstensor kommen sollen noch einige verallgemeinerte Vektoroperationen angegeben werden

Determinante des metrischen Tensors

Wir definieren die Determinante des metrischen Tensors durch

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N} g_{1i_1} g_{2i_2} \dots g_{Ni_N} > 0$$

Die Elemente des total antisymmetrischen Tensors $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$ sind die bekannten des Levi-Civita-Symbols auf mehr Dimensionen. Bei den physikalischen Anwendungen wird die Determinante jedoch negativ. Im gravitationsfreien Fall schon gilt

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \det(\eta_{\mu\nu}) = -1$$

wir definieren dann

$$g = -\det(g_{\mu\nu}) \text{ und wahren damit } g > 0$$

Differenziert man die Gleichung $g = \det(g_{\mu\nu}) = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N} g_{1i_1} g_{2i_2} \dots g_{Ni_N} > 0$, so folgt:

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = \sum_{k=1}^N \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N} g_{1i_1} g_{2i_2} \dots \frac{\partial g}{\partial x^l} g_{Ni_N}$$

Nun gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = \frac{\partial g}{\partial x^l} \delta^m_{ik} = \frac{\partial g}{\partial x^l} g^{mr} g_{ri_k}$$

Wir ersetzen diesen Ausdruck für den herausgefallenen Faktor g_{ki_k} . Dadurch tritt das Produkt

$g_{ri_r} g_{ri_k}$ auf. Dieses ist jedoch symmetrisch in i_r und i_k . Wird aber mit dem antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol kontrahiert. Daher überlebt nur der Term mit $r = k$:

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = \frac{\partial g}{\partial x^l} g^{mk} g$$

Dadurch erhalten wir einen Ausdruck für die Ableitung der Metrik im kontrahierten Fall und damit für das einfache kontrahierte Christoffelsymbol:

$$\Gamma^k_{km} = \frac{g^{km}}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x^l} + \frac{\partial g}{\partial x^k} - \frac{\partial g}{\partial x^m} \right) = \frac{g^{km}}{2} \frac{\partial g}{\partial x^l} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^l} \text{ da wegen der Symmetrie der Metrik } k$$

und m als Summationsindizes vertauscht werden können, heben sich der zweite und dritte Term des Christoffelsymbols gerade weg!

Wir bestimmen nun die Transformationseigenschaft von $g = \det(g_{\mu\nu})$

$$\alpha^i_k(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x^k}$$

$$\alpha_i^k(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x^i}$$

Remember:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\kappa} + A^\rho \Gamma^\alpha_{\rho\kappa} \right)$$

Somit:

$$g_{\mu\nu}' = \alpha_\mu^\lambda \alpha_\nu^\kappa g_{\lambda\kappa}$$

Führen wir Matrizen ein, nämlich $\alpha_\mu^\lambda = \bar{\alpha} /$, so folgt:

$$\bar{G}' = \bar{\alpha} / \bar{G} \bar{\alpha} / T$$

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & \dots & \dots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \dots & \dots & \dots & g_{NN} \end{pmatrix}$$

Da die Determinante invariant gegen Transponierung einer Matrix ist, erhalten wir als Determinante der Transformation des metrischen Tensors:

$$\begin{aligned} |\bar{G}| &= \left| \bar{\alpha} / \bar{G} \bar{\alpha}^T \right| \\ \Leftrightarrow g' &= \left(\left| \bar{\alpha} \right|^2 \right) g = \left(\det \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} \right) \right)^2 g \end{aligned}$$

Das bedeutet, da g ein Tensor 2. Stufe ist, transformiert er sich mit dem Quadrat der Jacobideterminante der Koordinatentransformation ! Das Volumenelement dagegen transformiert sich mit der Jacobideterminante:

$$d^N x = dx^1 \dots dx^N = \det \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} \right) dx'^1 \dots dx'^N = (\det \bar{\alpha}) d^N x'$$

Also folgt:

$$\sqrt{g} d^N x = \sqrt{g'} d^N x'$$

das bedeutet, Volumenelemente, die mit der Jacobideterminante transformieren, transformieren mit der Wurzel der Determinante des metrischen Tensors Die Größe $\sqrt{g} d^N x$ ist ein Skalar. Nämlich das unter koordinatentransformationen invariante Volumenelement. Als Beispiel betrachten wir den Übergang von kartesischen Koordinaten x, y, z mit $g=1$ zu Kugelkoordinaten

r, ϑ, φ mit dem metrischen Tensor

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & r^2 & & \\ & & r^2 \sin^2 \vartheta & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g' = r^4 \sin^2 \vartheta$$

In diesem Fall wird

$$\sqrt{g} d^N x = \sqrt{g'} d^N x'$$

$$dx dy dz = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

Die total antisymmetrische Größe $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$ wird durch Zuweisung von Zahlen definiert. Diese Zuweisung ist jedoch unabhängig von den verwendeten Koordinaten, also

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N} = \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$$

Also folgt:

$$\left(\frac{\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} \right)' = \frac{\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g'}} = \frac{\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} \det \bar{\alpha}$$

Andererseits kann man $\left(\frac{\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} \right)$ als einen Tensor behandeln und brav transformieren. Das bedeutet:

$$\left(\frac{\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} \right)' = \left(\alpha^{i_1}_{j_1} \dots \alpha^{i_N}_{j_N} \right) \frac{\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} = \frac{\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} \det \bar{\alpha}$$

Das Ergebnis ist in der Tat das selbe, also können wir schreiben:

$$\left(\frac{\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} \right) \text{ ist ein Tensor !}$$

Den zugehörigen kovarianten Tensor gewinnt man gemäß Tensorregeln , also:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_N j_N} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_N} = g \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$$

Also:

Die

$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{i_1 i_2 \dots i_N}$ haben die selbe Symmetrie wie die $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$, jedoch haben die nichtverschwindenden Elemente einen anderen Betrag, nämlich g anstelle von 1.

Analog zu $\left(\frac{\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} \right)$ ist ein Tensor ! zeigt man, dass $\sqrt{g} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{i_1 i_2 \dots i_N}$ ein Tensor ist !

Gradient

Die Vektoroperationen Gradient, Rotation, Divergenz bestehen alle rein aus den ersten partiellen Ableitungen von Feldern ! Wir untersuchen die Modifikationen, die sich ergeben, wenn die partiellen Ableitungen durch kovariante ersetzt werden.

Für Skalare S ist dies einfach. Hier kann man die kovariante Ableitung gleich der partiellen setzen. Wir können den Gradienten durch die Komponenten der partiellen Ableitung schreiben:

$$S_{;k} = S_{,k} = \frac{\partial S}{\partial x^k}$$

Allerdings ist die kontravariante Ableitung von der partiellen verschieden, also im Allgemeinen $S_{,k} \neq S^{,k}$.

Man sieht dies an Polarkoordinaten.

$$(x^1, x^2) = (\rho, \varphi). \text{ Hier gilt: } S_{,2} = \frac{\partial S}{\partial x^2} = \frac{\partial S}{\partial \varphi} \text{ aber } S^{,2} = \frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial S}{\partial \varphi}.$$

Diese Sache steht im Gegensatz zum üblichen Vorgehen bei den orthogonalen Koordinaten im euklidischen Raum. Dann nämlich werden normierte Basisvektoren eingeführt (Bei Kugel-, Polar- oder elliptischen Koordinaten im flachen Raum). Für die Polarkoordinaten folgt dann

$$(grad S)_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \text{ anstelle } S_{,2} = \frac{\partial S}{\partial x^2} = \frac{\partial S}{\partial \varphi} \text{ oder } S^{,2} = \frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial S}{\partial \varphi}.$$

Entsprechende Unterschiede zwischen der Formulierung mit ko- und kontravarianten Basisvektoren einerseits und normierten Basisvektoren andererseits ergeben sich ebenso für Rotation und Divergenz !

Rotation

Aus der kovarianten Ableitung eines Vektors kann man einen antisymmetrischen Tensor bilden !

$$A_{i;k} - A_{k;i} = A_{i,k} - \Gamma^j_{ik} A_j - A_{k;i} + \Gamma^j_{ik} A_j = A_{i,k} - A_{k,i}$$

Hierbei heben sich die Terme mit Christoffels wieder auf.

Speziell im dreidimensionalen Raum ist damit die Zusammenfassung der nichtverschwindenden unabhängigen Komponenten des antisymmetrischen Tensors $A_{i,k} - A_{k,i}$ zu einem Dreivektor möglich !, der dann mit rot A bezeichnet wird.

Für die kartesischen Koordinaten gilt:

$$(rot \bar{A})^i = \varepsilon^{ikl} A_{k,l}$$

Wegen $\left(\frac{\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} \right)$ ist dann

$$(rot \bar{A})^i = \frac{\varepsilon^{ikl}}{\sqrt{g}} \frac{1}{2} (A_{l;k} - A_{k;l}) = \frac{\varepsilon^{ikl}}{\sqrt{g}} A_{l,k}$$

ein Vektor im Riemannschen Raum.

Allerdings ist diese Konstruktion so nur für N=3 Komponenten möglich ! Denn nur dann hat der antisymmetrische Tensor drei Indices !

Divergenz

Mit $\Gamma^k_{km} = \frac{g^{km}}{2} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) = \frac{g^{km}}{2} \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^l}$ können wir die kovariante

Divergenz

$A^i_{;i}$ kompakt schreiben:

$$A^i_{;i} = A^i_{,i} + \Gamma^i_{ij} A^j = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} A^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i)$$

Aus diesem Ausdruck und wegen

$$\int_V dx^1 \dots dx^N \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i) = \int_{\partial V} df_i \sqrt{g} A^i$$

ergibt sich der Gaußsche Satz mit dem invarianten Volumenelement $\sqrt{g} d^N x = \sqrt{g'} d^N x'$:

$$\int_V dx^1 \dots dx^N \sqrt{g} A^i_{;i} = \int_{\partial V} df_i \sqrt{g} A^i$$

17. Der Krümmungstensor

Der Krümmungstensor ist ein kovariantes Maß für die Krümmung des Raumes (Die Metrik und die Konnektion sind dagegen ungeeignet. Denn: Die $g_{\mu\nu}$ sind kein Maß ! Sie können an jedem Punkt auf $\eta_{\mu\nu}$ transformiert werden. Die Konnektion $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ dagegen ist kein Tensor !

Ausführlich:

Das Äquivalenzprinzip zeigte uns, wie das Gravitationsfeld durch den metrischen Tensor beschrieben wird. Allerdings haben wir gesehen, wie die koordinatenabhängigen Elemente im Allgemeinen Raumkrümmung bedeuten.

$g_{\mu\nu}$ hängen ab von der Struktur des Riemannschen Raumes UND von der Wahl der Koordinaten.

Also ist den $g_{\mu\nu}$ nicht unmittelbar anzusehen, ob der Raum gekrümmmt ist !

So beschreiben $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ und $ds^2 = dx^2 + dy^2$ den flachen Raum. Man kann sagen: Die $g_{\mu\nu}$ beschreiben genau dann den flachen Raum (Euklidischen Raum), wenn es eine Koordinatentransformation gibt, die global zum metrischen Tensor $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ oder eben zu $\eta_{\mu\nu}$ im Minkowskiraum führt. Dagegen ist der gekrümmte Raum dadurch charakterisiert, dass es eine solche Trafo nicht gibt ! Bekanntes Beispiel: Zweidimensionale Kugeloberfläche

$ds^2 = a^2 d\vartheta^2 + a^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ Theta / Phi sind die üblichen Winkelkoordinaten, a ist ein konstanter Parameter. Ein gekrümmter Raum kann wie die Kugel $ds^2 = a^2 d\vartheta^2 + a^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ endlich sein, aber auch unendlich ! Wie der zweidimensionale Raum eine Rotationshyperboloids !

Einem gegebenen, koordinatenabhängigen metrischen Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ ist die Möglichkeit der Trafo auf kartesische Koordinaten nicht anzusehen.

Man kann aber den sogenannten Krümmungstensor definieren, dessen Verschwinden den flachen Raum charakterisiert !

Wir gehen dazu von der Differenz

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = -R^m{}_{ikl}A_m \text{ aus !}$$

Dies muss richtig sein, da $A_{i;k;l} - A_{i;l;k}$ linear im Feld ist !

Da die linke Seite ein Tensor ist und A_m ein Tensor, muss der Proportionalitätsfaktor ein Tensor vierter Stufe sein ! Bereits jetzt kann man sehen, dass im ebenen Raum $R^m{}_{ikl} = 0$ gilt.

Im ebenen Raum verschwinden nämlich die Christoffelsymbole und $A_{i,k,l} - A_{i,l,k} = 0$, falls der Raum zweifach stetig differenzierbar ist !

Dann wird $R^m{}_{ikl} = 0$ zu einem Lorentz- Skalar und dementsprechend $R^m{}_{ikl}' = 0$ für beliebige Koordinaten !

$$R^m{}_{ikl} = 0 \text{ für einen beliebigen nicht gekrümmten Raum}$$

Dagegen verschwindet $R^m{}_{ikl}$ im gekrümmten Raum nicht . Man gibt ihm deshalb den Namen Krümmungstensor.

Werten wir $A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = -R^m{}_{ikl}A_m$ aus, so folgt wegen

$$T_{ik;p} = T_{ik,p} - \Gamma^l{}_{ip}T_{lk} - \Gamma^l{}_{kp}T_{il}$$

dass

$$\begin{aligned} A_{i;k;l} - A_{i;l;k} &= A_{i;k,l} - \Gamma^m{}_{il}A_{m;k} - \Gamma^m{}_{kl}A_{i;m} - A_{i;l,k} + \Gamma^m{}_{ik}A_{m;l} + \Gamma^m{}_{lk}A_{i;m} \\ &= A_{i;k,l} - \Gamma^m{}_{il}A_{m;k} - A_{i;l,k} + \Gamma^m{}_{ik}A_{m;l} \\ &= A_{i,k,l} - (\Gamma^m{}_{ik}A_m)_{,l} - \Gamma^m{}_{il}(\Gamma^p{}_{mk}A_p)_{,k} - A_{i,l,k} + (\Gamma^m{}_{il}A_m)_{,k} + \Gamma^m{}_{ik}(\Gamma^p{}_{ml}A_p)_{,l} \\ &= -\Gamma^m{}_{ik,l}A_m - \Gamma^m{}_{ik}A_{m,l} - \Gamma^m{}_{il}A_{m,k} + \Gamma^m{}_{il}\Gamma^p{}_{mk}A_p + \Gamma^m{}_{il,k}A_m + \Gamma^m{}_{il}A_{m,k} + \Gamma^m{}_{ik}A_{m,l} - \Gamma^m{}_{ik}\Gamma^p{}_{ml}A_p \\ &= -\Gamma^m{}_{ik,l}A_m + \Gamma^m{}_{il}\Gamma^p{}_{mk}A_p + \Gamma^m{}_{il,k}A_m - \Gamma^m{}_{ik}\Gamma^p{}_{ml}A_p \\ &= -\Gamma^m{}_{ik,l}A_m + \Gamma^m{}_{il,k}A_m + \Gamma^p{}_{il}\Gamma^m{}_{pk}A_m + \Gamma^m{}_{il,k}A_m - \Gamma^p{}_{ik}\Gamma^m{}_{pl}A_m \\ &= -(\Gamma^m{}_{ik,l} - \Gamma^m{}_{il,k} - \Gamma^p{}_{il}\Gamma^m{}_{pk} + \Gamma^p{}_{ik}\Gamma^m{}_{pl})A_m \end{aligned}$$

Mit Hilfe unserer Definition

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = -R^m{}_{ikl}A_m$$

folgt also wegen

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = -(\Gamma^m{}_{ik,l} - \Gamma^m{}_{il,k} - \Gamma^p{}_{il}\Gamma^m{}_{pk} + \Gamma^p{}_{ik}\Gamma^m{}_{pl})A_m$$

dass

$$R^m{}_{ikl} = \Gamma^m{}_{ik,l} - \Gamma^m{}_{il,k} - \Gamma^p{}_{il}\Gamma^m{}_{pk} + \Gamma^p{}_{ik}\Gamma^m{}_{pl} = \frac{\partial \Gamma^m{}_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^m{}_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^p{}_{ik}\Gamma^m{}_{pl} - \Gamma^p{}_{il}\Gamma^m{}_{pk}$$

Sofort sieht man, wie mit den Christoffelsymbolen der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet !

Wir haben gesehen, dass es sich um einen Tensor handelt, also muss auch der rechte Ausdruck ein Tensor sein !

Man kann noch zeigen, dass $R^m{}_{ikl} = \frac{\partial \Gamma^m{}_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^m{}_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^p{}_{ik}\Gamma^m{}_{pl} - \Gamma^p{}_{il}\Gamma^m{}_{pk}$ der einzige Tensor ist,

der aus dem metrischen Tensor, seiner ersten und seiner zweiten Ableitung gebildet werden kann und gleichzeitig linear in der zweiten Ableitung ist.

Dazu geht man an einen Punkt des lokal euklidischen Koordinatensystems (dort verschwinden dann die Christoffelsymbole), dann schreibt man das Transformationsverhalten für $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ an und dann bildet man diejenigen Linearkombinationen dieser Ableitungen, die sich wie ein Tensor transformieren!

Das legt dann die ersten beiden Terme in $R^m_{ikl} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^p_{ik}\Gamma^m_{pl} - \Gamma^p_{il}\Gamma^m_{pk}$ fest!

Die anderen Terme folgen aus der Forderung, dass die gesuchte Größe ein Tensor ist!

Folgende Kontraktionen sind ebenfalls Tensoren

Der Ricci- Tensor

$$R_{ip} = R^m_{iml} = g^{km} R_{kiml}$$

und der Krümmungsskalar

$$R = R^i_i = g^{ip} R_{ip}$$

Dagegen verschwindet die Kontraktion

$$R^m_{mil} = g^{km} R_{kmil} = 0$$

wegen

$$R_{kmil} = -R_{mkil}$$

das heißt: kovariant geschrieben ist der Riemann-tensor antisymmetrisch in den ersten beiden Indices

Drücken wir $R_{kmil} = -R_{mkil} = g_{ks} R^s_{mil}$ noch explizit durch die zweiten Ableitungen des metrischen Tensors aus, so folgt aus den Definitionen der Christoffelsymbole und

$$R^m_{ikl} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^p_{ik}\Gamma^m_{pl} - \Gamma^p_{il}\Gamma^m_{pk} \text{ dass}$$

$$R_{mikp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^i \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^i \partial x^k} \right) + g_{rs} \left(\Gamma^r_{km} \Gamma^s_{ip} - \Gamma^r_{pm} \Gamma^s_{ik} \right)$$

Hier kann man die Symmetrien des Riemann-tensors besonders einfach ablesen:

$$R_{mikp} = R_{kpmi}$$

$$R_{mikp} = -R_{imkp} = -R_{mipk} = R_{impk}$$

$$R_{mikp} + R_{mpik} + R_{mkpi} = 0$$

Daneben haben wir noch die Bianchi- Identität für die kovariante Ableitung: (Differentialidentität):

$$R_{mikp;a} + R_{mipa;k} + R_{mia;k;p} = 0$$

Zahl der algebraisch unabhängigen Komponenten

Wegen

$$R_{mikp} = -R_{imkp} = -R_{mipk} = R_{impk}$$

ist der Riemann-tensor antisymmetrisch in den vorderen beiden und hinteren beiden Indices.

Für jedes dieser Pärchen ergeben sich somit nur 6 unabhängige Komponenten.

Man kann damit den Riemann-tensor als eine 6x6- Matrix auffassen, wenn man die vorderen und die hinteren Indices als "einen" zusammenfasst

Weiter gilt

$$R_{mikp} = R_{kpmi}$$

Somit wäre diese 6x6- Matrix symmetrisch. Das bedeutet jedoch, sie hat nur $\binom{7}{2} = 21$ unabhängige Komponenten.

Durch die eine zusätzliche Gleichung $R_{mikp} + R_{mpik} + R_{mkpi} = 0$ verschwindet eine weitere Unabhängigkeit und man sieht, dass der Krümmungstensor in 4 Dimensionen genau 20 algebraisch unabhängige Komponenten besitzt !

Weiter: Ricci. tensor:

$$R_{ip} = g^{km} R_{kim}$$

und der **Krümmungsskalar**

$$R = R^i_i = g^{ip} R_{ip}$$

Nun: Ham mer alles zamm für die Formulierung der **Einstiesschen Gravitationsgleichungen !!**

Man kann sich die Zahl der unabhängigen Komponenten von R_{mikp} auch allgemeiner überlegen:

Jeder Doppelindex (mi) oder (kp) kann wegen der Antisymmetrie
 $M = N(N-1)/2$

unabhängige Werte annehmen !

Bezüglich dieser zwei Doppelindizes kann man R_{mikp} als MxM- Matrix auffassen. Diese ist dann jedoch wegen

$$R_{mikp} = R_{kpmi}$$
 symmetrisch.

Eine symmetrische M x M - Matrix hat jedoch auch nur

$$\frac{M(M+1)}{2} = \frac{(N(N-1))(N(N-1)+2)}{8} = \frac{N(N-1)(N^2-N+2)}{8}$$

unabhängige Werte annehmen.

Um die Einschränkung

$R_{mikp} + R_{mpik} + R_{mkpi} = 0$ genauer zu untersuchen ersetzen wir den Term durch

$$R_{mikp} = \frac{1}{8} (R_{mikp} - R_{imkp} - R_{mipk} + R_{kpni} + R_{impk} - R_{kpim} - R_{pkni} + R_{pkim})$$

Das heißt: in $R_{mikp} + R_{mpik} + R_{mkpi} = 0$ erhalten wir dann $3*8 = 4$! Terme mit jeweils verschiedener Reihenfolge der vier Indices !

Da jede Permutation ein Minuszeichen ergibt, ist dies eine bezüglich aller vier Indices total antisymmetrische Summe

Daher bedeutet $R_{mikp} + R_{mpik} + R_{mkpi} = 0$ nur dann eine zusätzliche Bedingung für die R_{ipkm} falls alle vier Indices verschieden sind.

Es gibt

$$\binom{N}{4} = \frac{N!}{(N-4)!4!} \text{ für } N \geq 4 \text{ Möglichkeiten, vier verschiedene Indexwerte aus } N \text{ möglichen auszuwählen (}$$

und Null für $N < 4$).

Für jede derartige Auswahl ergibt sich eine weitere Einschränkung !

Das bedeutet:

Die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Krümmungstensors ist

$$c_N = \frac{N(N-1)(N^2-N+2)}{8} - \binom{N}{4} = \frac{N^2(N^2-1)}{12}$$

Man gewinnt:

$$\begin{aligned} c1 &= 0 \\ c2 &= 1 \\ c3 &= 6 \\ c4 &= 20 \end{aligned}$$

Betrachten wir etwas eingehender den zweidimensionalen Fall:

Die Indices nehmen nur die Werte 1 und 2 an.

Wegen $R_{mikp} = -R_{imkp} = -R_{mipk} = R_{impk}$ müssen das vordere und das hintere Indexpaar verschiedene Werte erhalten. Somit sind die einzigen nichtverschwindenden Elemente

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$$

In zwei Dimensionen ist der Krümmungstensor also durch eine einzige Größe bestimmt !

Der Krümmungstensor kann in der Form

$$R_{mikp} = (g_{mk}g_{ip} - g_{mp}g_{ik}) \frac{R_{1212}}{g} \text{ geschrieben werden. Mit } g = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} = \det(g_{ik})$$

Für den Ricci- Tensor folgt dann:

$$R_{ip} = g^{mk}R_{mikp} = g_{ip} \frac{R_{1212}}{g}$$

$$R = \frac{2R_{1212}}{g}$$

für den Ricci- Skalar.

mit der Metrik für die Kugel $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ gewinnen wir

$$R = -\frac{2}{a^2}$$

Wie wir wissen ist der Krümmungstensor alleine durch die Metrik bestimmt. So mit ergibt sich anschaulich keine Krümmungsgröße für eine Kurve ($c1=0$) weil

$$ds^2 = dx^2 \text{ immer möglich ist !}$$

Man kann eine Kurve natürlich krümmen, das wäre jedoch äußere Krümmung. Die g_{ik} enthalten jedoch nur Informationen über die innere Krümmung. Offensichtlich ändert sich die Metrik innerhalb des zweidimensionalen Raumes nicht, wenn man ein Blatt Papier im Dreidimensionalen verbiegt.

Ebenso wird die Metrik auf einer Geraden ($N=1$) nicht verändert, wenn man diese im Höherdimensionalen verbiegt. Der äußere Krümmungsradius einer Kurve ist also ohne Belang für die Metrik auf der Kurve.

Für eine zweidimensionale Fläche im Dreidimensionalen kann man an jedem Punkt zwei Hauptkrümmungsradien ρ_1 und ρ_2 definieren.

Die Gaußsche Krümmung $K = \frac{1}{(\rho_1\rho_2)}$ hängt dann über

$$K = \frac{1}{(\rho_1\rho_2)} = -\frac{R}{2} \text{ mit dem Krümmungsskalar } R \text{ zusammen ! Für eine zu einem Zylinder gebogene Fläche}$$

ist an jedem Punkt einer der beiden Krümmungsradien unendlich, so dass K und R verschwinden. Also ist die Zylinderfläche ein Euklidischer Raum.

Die Behauptung der Einleitung, dass für die Kugeloberfläche kein kartesisches Koordinatensystem existiert, fassen wir nun allgemeiner:

$$R_{mikp} \neq 0 \Leftrightarrow \text{keine kartesischen Koordinaten !}$$

Dies bedeutet: ein nichtverschwindender Krümmungstensor ist äquivalent zur Nichtexistenz eines kartesischen Koordinatensystems. Man kann zeigen, dass die Existenz eines kartesischen Koordinatensystems zu $R_{mikp} \neq 0$ im Widerspruch steht. Denn: R_{mikp} ist ein Tensor. In kartesischen Koordinaten ist $R_{mikp} = 0$. Als Tensor gilt dies dann jedoch für beliebige Koordinaten.

Umgekehrt kann man zeigen, dass für

$R^m_{ikp} = 0$ kartesische Koordinaten möglich sind: Ausgehend von den gegebenen Koordinaten führt man zunächst eine Transformation durch, die an einem Punkt ein lokales kartesisches System ergibt.

An dieser Stelle verschwinden dann die Christoffelsymbole! Wegen $R^m_{ikp} = 0$ gilt aber auch $\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0$, so dass man das lokale kartesische Koordinatensystem zu einem globalen fortsetzen können muss!

Alternative Ableitung des Krümmungstensors

Durch die kovariante Ableitung bekommen wir eine eindeutige Vorschrift zur Parallelverschiebung eines Vektors längs einer festen Kurve, nämlich

$$T_{a;n} \frac{dx^n}{d\lambda} = 0 \Rightarrow$$

$$T_{a,n} \frac{dx^n}{d\lambda} - \Gamma^m_{an} T_m \frac{dx^n}{d\lambda} = \frac{dT_a}{d\lambda} - \Gamma^m_{an} T_m \frac{dx^n}{d\lambda} = 0$$

In der Art wird ein Vektor längs einer festen Kurve parallel verschoben. Wenn nun das Ergebnis der Parallelverschiebung unabhängig von der Wahl der Kurve ist, so spricht man von Fernparallelismus. Notwendig für Fernparallelismus ist offensichtlich die Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung im Infinitesimalen:

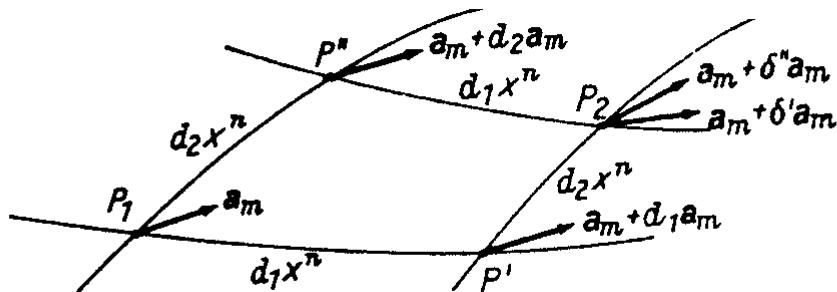


Abb. 6.1
Parallelverschiebung
eines Vektors

Bei Anwendung der gegebenen Vorschrift auf die Parallelverschiebung des Vektors a_m längs der Seiten des infinitesimalen Parallelogramms erhalten wir:

Von P_1 nach P' :

$$d_1 a_m = \Gamma^i_{mna_i} d_1 x^n$$

und von P_1 nach P''

$$d_2 a_m = \Gamma^i_{mna_i} d_2 x^n$$

betrachten wir nun den Weg von P1 über P' nach P2, so sind die Christoffelsymbole im Punkt P' zu nehmen, deshalb haben wir die Korrektur $\Gamma^r{}_{mq,s}d_1x^s$

Also:

$$\begin{aligned}\delta' a_m &= (\Gamma^r{}_{mq} + \Gamma^r{}_{mq,s}d_1x^s)(a_r + d_1a_r)d_2x^q + d_1a_m \\ &= (\Gamma^r{}_{mq} + \Gamma^r{}_{mq,s}d_1x^s)(a_r + \Gamma^i{}_{rn}a_i d_1x^n)d_2x^q + \Gamma^i{}_{mn}a_i d_1x^n \\ &\approx \Gamma^r{}_{mq}a_r d_2x^q + \Gamma^r{}_{mq}\Gamma^i{}_{rn}a_i d_1x^n d_2x^q + \Gamma^r{}_{mq,s}d_1x^s a_r d_2x^q + \Gamma^i{}_{mn}a_i d_1x^n \\ &= \Gamma^r{}_{mq}\Gamma^i{}_{rn}d_2x^q d_1x^n a_i + \Gamma^r{}_{mq,s}d_1x^s a_r d_2x^q + \Gamma^i{}_{mn}a_i (d_1x^n + d_2x^n)\end{aligned}$$

Dabei wurden Terme der Ordnung

$\Gamma^r{}_{mq,s}\Gamma^i{}_{rn}$ vernachlässigt!

Geht man dagegen von P1 über P'' nach P2, so sind die Christoffelsymbole am Punkt P'' zu nehmen.

Man gewinnt:

$$\begin{aligned}\delta'' a_m &= (\Gamma^r{}_{mq} + \Gamma^r{}_{mq,s}d_2x^s)(a_r + d_2a_r)d_1x^q + d_2a_m \\ &= (\Gamma^r{}_{mq} + \Gamma^r{}_{mq,s}d_2x^s)(a_r + \Gamma^i{}_{rn}a_i d_2x^n)d_1x^q + \Gamma^i{}_{mn}a_i d_2x^n \\ &\approx \Gamma^r{}_{mq}a_r d_1x^q + \Gamma^r{}_{mq}\Gamma^i{}_{rn}a_i d_2x^n d_1x^q + \Gamma^r{}_{mq,s}d_2x^s a_r d_1x^q + \Gamma^i{}_{mn}a_i d_2x^n \\ &= \Gamma^r{}_{mq}\Gamma^i{}_{rn}a_i d_2x^n d_1x^q + \Gamma^r{}_{mq,s}d_2x^s a_r d_1x^q + \Gamma^i{}_{mn}a_i (d_1x^n + d_2x^n)\end{aligned}$$

Die Vektoren, die auf verschiedenen Wegen nach P2 transportiert wurden, differieren also um

$$\begin{aligned}\delta'' a_m - \delta' a_m &= \Gamma^r{}_{mq}\Gamma^i{}_{rn}a_i d_2x^n d_1x^q + \Gamma^r{}_{mq,s}d_2x^s a_r d_1x^q + \Gamma^i{}_{mn}a_i (d_1x^n + d_2x^n) \\ &\quad - \Gamma^r{}_{mq}\Gamma^i{}_{rn}d_2x^q d_1x^n a_i - \Gamma^r{}_{mq,s}d_1x^s a_r d_2x^q - \Gamma^i{}_{mn}a_i (d_1x^n + d_2x^n) \\ &= \Gamma^r{}_{mq}\Gamma^i{}_{rn}a_i d_2x^n d_1x^q - \Gamma^r{}_{mq}\Gamma^i{}_{rn}d_2x^q d_1x^n a_i + \Gamma^r{}_{mq,s}d_2x^s a_r d_1x^q - \Gamma^r{}_{mq,s}d_1x^s a_r d_2x^q \\ &= \Gamma^n{}_{ms}\Gamma^r{}_{nq}a_r d_2x^q d_1x^s - \Gamma^n{}_{mq}\Gamma^r{}_{ns}d_2x^q d_1x^s a_r + \Gamma^r{}_{ms,q}d_2x^q a_r d_1x^s - \Gamma^r{}_{mq,s}d_1x^s a_r d_2x^q \\ &= (-\Gamma^r{}_{mq,s} + \Gamma^r{}_{ms,q} + \Gamma^r{}_{nq}\Gamma^n{}_{ms} - \Gamma^r{}_{ns}\Gamma^n{}_{mq})d_2x^q d_1x^s a_r\end{aligned}$$

Das heißt: der Paralleltransport ist für alle Vektoren a_r und beliebige Parallelogramme, also d_1x^n, d_2x^n beliebig, nur dann vom Weg unabhängig, wenn der Ausdruck

$(-\Gamma^r{}_{mq,s} + \Gamma^r{}_{ms,q} + \Gamma^r{}_{nq}\Gamma^n{}_{ms} - \Gamma^r{}_{ns}\Gamma^n{}_{mq})$ verschwindet, also

$$R^r{}_{msq} = \Gamma^r{}_{mq,s} - \Gamma^r{}_{ms,q} + \Gamma^r{}_{ns}\Gamma^n{}_{mq} - \Gamma^r{}_{nq}\Gamma^n{}_{ms} = 0$$

Man kann dies als Definition des Riemannschen Krümmungstensors auffassen! Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man auch für endliche Abstände Fernparallelismus definieren: Der Paralleltransport wird wegunabhängig (wie man durch Zerlegung einer von einer Kurve umschlossenen Fläche in infinitesimale Parallelogramme zeigen kann).

Wegunabhängigkeit der Parallelverschiebung ist eine sehr anschauliche Interpretation der Vertauschbarkeit der zweiten kovarianten Ableitung eines Vektors!. Schließlich gilt:

$$\begin{aligned}A_{i;k;l} &= A_{i;k,l} - \Gamma^m{}_{il}A_{m;k} - \Gamma^m{}_{kl}A_{i;m} \\ &= A_{i,k,l} - (\Gamma^m{}_{ik}A_m)_{,l} - \Gamma^m{}_{il}(\Gamma^p{}_{mk}A_p) - \Gamma^m{}_{kl}(\Gamma^p{}_{im}A_p) \\ &= A_{i,k,l} - \Gamma^m{}_{ik,l}A_m - \Gamma^m{}_{ik}A_{m,l} - \Gamma^m{}_{il}A_{m,k} + \Gamma^m{}_{il}\Gamma^p{}_{mk}A_p - \Gamma^m{}_{kl}A_{i,m} + \Gamma^m{}_{kl}\Gamma^p{}_{im}A_p\end{aligned}$$

Bildet man nun die Differenz mit vertauschten kovarianten Ableitungen ($k <-> l$), so folgt mit

$$R^r{}_{msq} = \Gamma^r{}_{mq,s} - \Gamma^r{}_{ms,q} + \Gamma^r{}_{ns}\Gamma^n{}_{mq} - \Gamma^r{}_{nq}\Gamma^n{}_{ms} = 0$$

$$\begin{aligned}
A_{i;k;l} - A_{i;l;k} &= A_{i;k,l} - \Gamma^m{}_{il} A_{m,k} - \Gamma^m{}_{kl} A_{i;m} - A_{i;l,k} + \Gamma^m{}_{ik} A_{m;l} + \Gamma^m{}_{lk} A_{i;m} \\
&= A_{i;k,l} - \Gamma^m{}_{il} A_{m;k} - A_{i;l,k} + \Gamma^m{}_{ik} A_{m;l} \\
&= A_{i,k,l} - (\Gamma^m{}_{ik} A_m)_{,l} - \Gamma^m{}_{il} (A_{m,k} - \Gamma^p{}_{mk} A_p) - A_{i,l,k} + (\Gamma^m{}_{il} A_m)_{,k} + \Gamma^m{}_{ik} (A_{m,l} - \Gamma^p{}_{ml} A_p) \\
&= -\Gamma^m{}_{ik,l} A_m - \Gamma^m{}_{ik} A_{m,l} - \Gamma^m{}_{il} A_{m,k} + \Gamma^m{}_{il} \Gamma^p{}_{mk} A_p + \Gamma^m{}_{il,k} A_m + \Gamma^m{}_{il} A_{m,k} + \Gamma^m{}_{ik} A_{m,l} - \Gamma^m{}_{ik} \Gamma^p{}_{ml} A_p \\
&= -\Gamma^m{}_{ik,l} A_m + \Gamma^m{}_{il} \Gamma^p{}_{mk} A_p + \Gamma^m{}_{il,k} A_m - \Gamma^m{}_{ik} \Gamma^p{}_{ml} A_p \\
&= -\Gamma^m{}_{ik,l} A_m + \Gamma^m{}_{il,k} A_m + \Gamma^p{}_{il} \Gamma^m{}_{pk} A_m + \Gamma^m{}_{il,k} A_m - \Gamma^p{}_{ik} \Gamma^m{}_{pl} A_m \\
&= -(\Gamma^m{}_{ik,l} - \Gamma^m{}_{il,k} - \Gamma^p{}_{il} \Gamma^m{}_{pk} + \Gamma^p{}_{ik} \Gamma^m{}_{pl}) A_m \\
&= -R^m{}_{ilk} A_m = R^m{}_{ikl} A_m
\end{aligned}$$

Das bedeutet:

Kovariante Ableitungen sind genau dann vertauschbar, wenn der Krümmungstensor verschwindet. Er verschwindet nur dann, wenn der Raum flach ist, wenn sich also im gesamten Raum ein kartesisches Koordinatensystem einführen lässt. In kartesischen Koordinaten sind ja alle Christoffels Null ! Der Krümmungstensor verschwindet. Wenn er verschwindet, kann man andererseits durch (eindeutige) Parallelverschiebung von vier in einem Punkt orthogonalen Vektoren ein Koordinatensystem im gesamten Raum erzeugen.

Dass der Riemannsche Krümmungstensor wirklich ein Tensor ist, kann man am schnellsten an

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = R^m{}_{ikl} A_m \text{ sehen.}$$

Der Krümmungstensor verschwindet also genau dann, wenn

- a) der Raum flach ist, was bedeutet, dass im ganzen Raum kartesische Koordinaten mit $g_{ab} = \eta_{ab}$ und $\Gamma^a{}_{bc} = 0$ eingeführt werden können
- b) der Paralleltransport von Vektoren wegunabhängig ist
- c) kovariante Ableitungen vertauschbar sind
- d) die geodätische Abweichung (die Relativbeschleunigung) zweier beliebiger, sich kräftefrei bewegender Teilchen verschwindet .

All diese Formulierungen sind äquivalent !

Das Kovarianzprinzip

Ausgehend vom Äquivalenzprinzip stellen wir nun das Kovarianzprinzip auf.

Es ist ein verfahren, physikalische Gesetze mit Gravitation aus den bekannten SRT- Gesetzen abzuleiten. Wie beginnen mit analogen verfahren im dreidimensionalen euklidischen Raum und im Minkowski- Raum

Für ein elektrisches Feld, welches in einem kartesischen Koordinatensystem KS' parallel zur x- Achse ist

$$\bar{E} = E_x \bar{e}_x'$$

sei vorausgesetzt:

$$\frac{\partial E_x(\bar{r})}{\partial x'} = 4\pi\rho_e(\bar{r})$$

Wie sieht diese Beziehung bei beliebiger Richtung von \bar{E} aus ?

Wegen der Isotropie des Raumes müssen grundlegende Gesetze so formuliert werden, dass sie kovariant unter Drehungen im dreidimensionalen Euklidischen Raum sind.

Hierzu führt man 3- Tensoren ein, die durch ihre Transformationseigenschaften unter orthogonalen Transformationen (Drehungen) definiert sind.

Da $\rho_e(\bar{r})$ ein r- Skalar ist, $\frac{\partial}{\partial x^i}, E_x(\bar{r})$ gerade die 1- Komponenten von Vektoren sind, lautet die naheliegende Verallgemeinerung

$$\partial_i E^i(\bar{r}) = 4\pi\rho_e(\bar{r})$$

Die Gültigkeit dieser Verallgemeinerung folgt aus folgender Überlegung: Man betrachtet die Umgebung eines bestimmten Punktes \bar{r} und man wählt dort ein kartesisches KS' so, dass \bar{E} parallel zu \bar{e}_x ist.

Die Gleichung $\partial_i E^i(\bar{r}) = 4\pi\rho_e(\bar{r})$ ändert ihre Form unter orthogonalen Transformationen nicht. Sie reduziert sich dann lokal auf $\frac{\partial E_x(\bar{r})}{\partial x^i} = 4\pi\rho_e(\bar{r})$, ist also nach Voraussetzung gültig !

Da der Punkt \bar{r} beliebig ist und Differentialgleichungen lokale Aussagen sind, gilt dann $\partial_i E^i(\bar{r}) = 4\pi\rho_e(\bar{r})$ generell !

Aus der Isotropieannahme alleine bekommen wir also eine Vorschrift zur Aufstellung allgemeingültiger Gesetze: Die gesuchte Gleichung muss folgende Bedingung erfüllen:

- kovariant gegen orthogonale Transformationen
- Gültigkeit in einem speziellen KS'

Bereits in diesem einfachen Beispiel hier können wir einen schritt weitergehen und die Möglichkeit betrachten, statt kartesischen beliebige andere, z.B. Kugelkoordinaten einzuführen.

Dann können wir die Gleichung in der Form

$$\nabla \cdot \bar{E}(\bar{r}) = 4\pi\rho_e(\bar{r})$$

Dabei soll die Divergenz zunächst koordinatenunabhängig definiert sein, also beispielsweise über den Gaußschen Satz für ein infinitesimales Volumen.

Dass $\nabla \cdot \bar{E}(\bar{r}) = 4\pi\rho_e(\bar{r})$ gültig ist folgt aus folgenden Überlegungen:

- Kovarianz unter allgemeinen Koordinatentrafos
- Gültigkeit für spezielle Koordinaten

Der Struktur nach analoge Betrachtungen haben wir zum Aufstellen der Gesetze der SRT benutzt. Auch damals waren wir davon ausgegangen, dass ein Gesetz in einem bestimmten Koordinatensystem gültig ist und dann auf ein bewegtes transformiert.

Die Gleichwertigkeit gedrehter KS war damals noch Gleichwertigkeit verschiedener Inertialsysteme. Statt Kovarianz gegenüber orthogonalen Trafos hatten wir die Kovarianz gegenüber Lorentztransformationen !

- Kovarianz gegenüber Lorentztrafos
- Gültigkeit in einem speziellen IS'

In allen betrachteten Fällen wird die Kovarianz (gegenüber orthogonalen Trafos, allgemeinen Trafos, Lorentztrafos) durch die mathematische Form der Gleichungen gewährleistet. Der Grenzfall, für den eine betrachtete allgemeine Gleichung sich auf eine bekannte reduziert, ist dabei häufig nur lokal (im Ort und in der Zeit) zu verwirklichen.

Dies genügt für Differentialgleichungen, weil sie lokale Aussagen sind.

Ein analoges Verfahren werden wir verwenden, um die Gesetze der ART abzuleiten. Als Grenzfall dient uns der Flache Raum, also das lokale IS (Satellitenlabor) an der jeweils betrachteten Stelle.

Die Trafo zu dem Koordinatensystem, das wir tatsächlich nutzen wollen ist dann eine Trafo zwischen relativ zueinander beschleunigten Bezugssystemen.

Formal ist dies eine der in Kapitel 14 betrachteten allgemeinen Koordinatentransformationen. Wir haben bereits untersucht, wie wir Gleichungen formulieren müssen, damit sie kovariant oder auch forminvariant unter solchen allgemeinen Koordinatentransformationen sind. Dazu haben wir kovariante Größen (Riemann-tensoren) und kovariante Differentialoperatoren eingeführt.

Aus dem Äquivalenzprinzip folgt dann das Kovarianzprinzip !

Die im Gravitationsfeld gültigen Gleichungen sind durch folgende Bedingungen bestimmt:

- Kovarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen -> das bedeutet: Das Gesetz muss die Form einer Riemann- Tensorgleichung haben !
- Gültigkeit im lokalen IS: Beim Einsetzen von $\eta_{\mu\nu}$ statt $g_{\mu\nu}(x)$ müssen die Gesetze der SRT folgen.

Ein Bezugssystem mit $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ kann nur lokal verwirklicht werden, etwa durch Elimination der Gravitationskräfte im Satellitenlabor. Ähnlich dazu ist die Reduktion der relativistischen Bewegungsgleichung auf den Newtonschen Grenzfall nur (zeitlich) lokal möglich. Denn: Ein momentan mitbewegtes IS gibt es für einen beschleunigten Massenpunkt ja nur in einer bestimmten zeitlichen Umgebung.

Also:

Schema:

SRT- Gesetze ohne Gravitation -> Koordinatentrafo -> ART Gesetze mit Gravitation !

Man kann das (mühsame) Einsetzen einer allgemeinen Koordinatentransformation in ein SRT- Gesetz folgendermaßen umgehen: Man schreibt das SRT- Gesetz in allgemein kovarianter Form. Danach ändert es seine Form nicht mehr unter Trafos. Also stellt es schon das gesuchte Gesetz mit Gravitation dar ! Dieses Verfahren heißt Kovarianzprinzip ! Das Äquivalenzprinzip ist die Annahme, die diesem Verfahren zu Grunde liegt. So wie es oben die Annahme der Isotropie des Raums oder das Einsteinsche Relativitätsprinzip war !

Also:

Grundgesetze der Physik im Riemannschen Raum

Schwaches ÄP bzw. Einsteinsches Äquivalenzprinzip

**SRT- Gesetze ohne Gravi → Koordinatentrafos →ART- Gesetze: relativistische Gesetze mit Gravitation
Koordinatentrafos**

$$\xi^\mu \rightarrow x^\mu = \eta_{\mu\nu}$$

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x)$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu$$

Die Tensoren in M_4 transformieren zu Tensoren in V_4 nach folgendem Schema:

Minkowski -> Riemann

$$d\xi^\mu \rightarrow dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \xi^\alpha$$

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

$$A^\mu{}_{M_4} \rightarrow A^\mu{}_{V_4} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} A^\alpha{}_{M_4}$$

Dabei tauchen die bereits von uns eingeführten Transformationsmatrizen auf:

$$\alpha^i{}_k(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x^k}$$

$$\alpha_i{}^k(x) = \frac{\partial x^k}{\partial x^i}$$

also hier einfach : $x' = x, x = \xi$

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \alpha_\mu{}^\nu(x)$$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} = \alpha^\nu{}_\mu(\xi)$$

Definition von Riemannntensoren

In aller Ausführlichkeit:

Zuerst muss man sich die Konstruktion der Riemannntensoren aus den bekannten lorentztensoren richtig klarmachen. In der ART geht man von einem Vierdimensionalen Riemannschen Raum mit den Koordinaten x^μ aus. An jedem Punkt dieses Raumes gibt es eine Transformation $x^\mu = x^\mu(\xi)$ zu den Koordinaten ξ^α eines lokalen IS. Die Koordinatentrafo $x^\mu = x^\mu(\xi)$ legt dann die Beziehung zwischen dem Lorentzvektor $d\xi^\alpha$ und dem Riemannvektor dx^μ fest:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \xi^\alpha$$

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

Durch Einsetzen dieses Zusammenhangs in das Wegelement

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &\Rightarrow \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kennen wir. Es entspricht ganz allgemein der Zuordnung eines Riemannntensors zu einem Lorentztenзор.

Denn: Das Wegelement ds ist sowohl ein Riemann- wie auch ein Lorentzskalar !

Ganz analog:

$$A^\mu{}_{V_4} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} A^\alpha{}_{M_4}$$

Um zu verifizieren, dass das so konstruierte Objekt tatsächlich ein Riemannvektor ist, muss man eine

$$\begin{aligned} \alpha^i{}_k(x) &= \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \\ \text{Koordinatentrafo machen und dann schauen, ob die Vektoren mittels } & \text{im Riemannschen Raum} \\ \alpha_i{}^k(x) &= \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \end{aligned}$$

transformieren, ergo:

$$A^\mu{}' = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} A^\alpha{}_{M_4} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} A^\alpha{}_{M_4} = \alpha^\mu{}_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} A^\alpha{}_{M_4} = \alpha^\mu{}_\nu A^\nu$$

q.e.d

für einen kovarianten Vektor gilt:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\gamma} A^\gamma = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} A_\alpha$$

Die Riemannntensoren definiert man sich analog zu den Vektoren, ergo:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} F_{\alpha\beta}$$

Ein Lorentz- Skalar ist zugleich Riemann- Skalar. Ein Lorentz- Skalarfeld $S(\xi)$ wird ungeändert zum Riemann- Skalarfeld

$$S(x^0, \dots, x^3) \equiv S(\xi^0(x), \dots, \xi^3(x))$$

Dass sich die Argumente der Abhängigkeit ändern, das gilt insbesondere auch für

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial\xi^\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} F_{\alpha\beta}$$

und

$$A^\mu_{V_4} = \frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\alpha} A^\alpha_{M_4}$$

Das heißt überhaupt: Ein Vektor ist Lorentz- Vektor, also Vektor im Minkowski- Raum, weil er als Vektor von den Minkowski- Koordinaten abhängt !

Nun. Beim Skalar gilt auch, dass $S(x)$ eine ganz andere Funktion der Argumente ist als $S(\xi)$. Eigentlich würde man also einen anderen Buchstaben heranziehen müssen, um das Objekt zu benennen.

Verschiedene KS (mit den Koordinaten x oder x') sind mit dem lokalen IS (mit ξ) durch eine Koordinatentransformation $\xi(x)$ oder $\xi(x')$ verbunden. Daraus ergibt sich das Transformationsverhalten des Riemannschen Skalarfeldes:

$$S(x') = S(\xi(x')) = S(\xi(x'(x))) = S(\xi(x)) = S(x)$$

Für die jetzt definierten Riemannntensoren gelten die oben angegebenen Rechenregeln. Besonders sei an das Ziehen von Indices über die Metrik erinnert ! Wichtig sind weiter Transformationsverhalten, Bildung neuer Tensoren und Differentiation von Tensorfeldern !

Bewegung im Gravitationsfeld

Als erste physikalische Anwendung des Kovarianzprinzips betrachten wir die Bewegung eines Teilchens im Gravitationsfeld.

Im IS (lokal) mit den Minkowskikoordinaten ξ^α gilt:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

$$d\tau = \frac{ds}{c}$$

Das lokale IS ist etwa ein frei fallendes Satellitenlabor am Ort ξ^α des Teilchens. Die Gültigkeit von

$\frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$ wird im Äquivalenzprinzip postuliert. Sie beruht auf der Äquivalenz von Gravitations- und Beschleunigungskräften.

Nach dem Kovarianzprinzip müssen wir nun eine kovariante Gleichung aufstellen, die sich für $\eta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ auf den kräftefreien Fall reduziert.

Über

$$u^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} u^\alpha = \frac{dx^\nu}{d\tau} \text{ erhalten wir die zur Vierergeschwindigkeit gehörige Riemann- Geschwindigkeit.}$$

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung müssen wir u^ν differenzieren. Das kovariante Differenzial

$$Du^\nu = u^\mu_{;\nu} dx^\nu = du^\mu - \delta u^\mu = u^\mu_{,\nu} dx^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\kappa} u^\kappa dx^\nu$$

ist ein Riemannvektor. Dies gilt nicht für du^μ . Als kovariante Verallgemeinerung

$$\text{von } \frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \text{ bietet sich deshalb an:}$$

$$\frac{Du^\alpha}{d\tau} = 0$$

$$\text{genauso könnte man schreiben } \frac{Du^\alpha}{D\tau} = 0$$

Dies ist die richtige Beschreibung für die Bewegung im Gravitationsfeld, weil sie

- 1) für den flachen Raum in das Gesetz der SRT übergeht
- 2) kovariant formuliert ist !

Ausführlich:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0$$

Durch explizites Einsetzen einer allgemeinen Koordinatentrafo haben wir diese Gleichung bereits einmal erhalten. Im Gegensatz zum Vorgehen damals vereinfacht das Kovarianzprinzip den Gewinn der Bewegungsgleichungen jedoch wesentlich. Bei komplizierteren Gesetzen ist diese Vereinfachung unerlässlich !

Beweis der Bianchi- Identitäten

$$R_{mikp;a} + R_{mipak} + R_{miak;p} = 0$$

Wir wollen diese Identitäten mit Hilfe des Kovarianzprinzips beweisen:

An einem bestimmten, jedoch beliebigen Punkt P können wir ein lokales kartesisches KS konstruieren. Wir nehmen N geodätische Linien, die durch P gehen und die N linear unabhängigen Basisvektoren (= Tangentenvektoren an die geodätischen Linien) definieren ! Durch eine geeignete Linearkombination ergibt dies ein orthonormiertes Basissystem, das ein lokales kartesisches KS' mit $g_{ik} = \bar{e}_i \bar{e}_k = \delta_{ik}$ in der Umgebung von P definiert. (Das sollte man sich veranschaulichen - am besten an einer Kugeloberfläche).

In KS' gilt: $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$ in KS'

Natürlich verschwinden nicht die Ableitungen der Christoffelsymbole. Es folgt deshalb der auf diese Ableitungen beschränkte Ausdruck:

$$\begin{aligned}
R_{mikp;a} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^a} \left(\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial \xi^i \partial \xi^p} + \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial \xi^m \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial \xi^m \partial \xi^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial \xi^i \partial \xi^k} \right) = \\
&\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 g_{mk}}{\partial \xi^a \partial \xi^i \partial \xi^p} + \frac{\partial^3 g_{ip}}{\partial \xi^a \partial \xi^m \partial \xi^k} - \frac{\partial^3 g_{ik}}{\partial \xi^a \partial \xi^m \partial \xi^p} - \frac{\partial^3 g_{mp}}{\partial \xi^a \partial \xi^i \partial \xi^k} \right) \\
\Rightarrow R_{mikp;a} + R_{mipa;k} + R_{miak;p} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 g_{mk}}{\partial \xi^a \partial \xi^i \partial \xi^p} + \frac{\partial^3 g_{ip}}{\partial \xi^a \partial \xi^m \partial \xi^k} - \frac{\partial^3 g_{ik}}{\partial \xi^a \partial \xi^m \partial \xi^p} - \frac{\partial^3 g_{mp}}{\partial \xi^a \partial \xi^i \partial \xi^k} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 g_{mp}}{\partial \xi^k \partial \xi^i \partial \xi^a} + \frac{\partial^3 g_{ia}}{\partial \xi^k \partial \xi^m \partial \xi^p} - \frac{\partial^3 g_{ip}}{\partial \xi^k \partial \xi^m \partial \xi^a} - \frac{\partial^3 g_{ma}}{\partial \xi^a \partial \xi^i \partial \xi^p} \right) + \\
&\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 g_{ma}}{\partial \xi^p \partial \xi^i \partial \xi^k} + \frac{\partial^3 g_{ik}}{\partial \xi^p \partial \xi^m \partial \xi^a} - \frac{\partial^3 g_{ia}}{\partial \xi^p \partial \xi^m \partial \xi^k} - \frac{\partial^3 g_{mk}}{\partial \xi^p \partial \xi^i \partial \xi^a} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{mk}}{\partial \xi^a \partial \xi^i \partial \xi^p} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{mk}}{\partial \xi^p \partial \xi^i \partial \xi^a} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{ip}}{\partial \xi^a \partial \xi^m \partial \xi^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{ip}}{\partial \xi^k \partial \xi^m \partial \xi^a} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{ik}}{\partial \xi^a \partial \xi^m \partial \xi^p} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{ik}}{\partial \xi^p \partial \xi^m \partial \xi^a} \\
&- \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{mp}}{\partial \xi^a \partial \xi^i \partial \xi^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{mp}}{\partial \xi^k \partial \xi^i \partial \xi^a} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{ia}}{\partial \xi^k \partial \xi^m \partial \xi^p} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{ia}}{\partial \xi^p \partial \xi^m \partial \xi^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{ma}}{\partial \xi^a \partial \xi^i \partial \xi^p} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_{ma}}{\partial \xi^p \partial \xi^i \partial \xi^k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dies gilt also in einem lokalen IS. Allerdings können wir in der Gleichung

$$R_{mikp;a} + R_{mipa;k} + R_{miak;p} = 0$$

eine allgemeine Koordinatentransformation vornehmen, ohne dass sich deren Form ändert. Also gilt die Bianchi-Identität für beliebige Koordinaten in der Umgebung von P ! Für jeden Punkt des Raumes kann man die geführte Argumentation wiederholen. Also gilt Bianchi allgemein.

Zusammenfassung

Wir haben in diesem Kapitel ein allgemeines Prinzip zum Gewinn physikalischer Gesetze aufgestellt:

1. Das Gesetz ist kovariant unter bestimmten Transformationen (orthogonale, Lorentz, allgemeine). Dieser Forderung liegt im Allgemeinen eine physikalische Symmetriannahme (Isotropie des Raumes, Relativitätsprinzip, Äquivalenzprinzip) zugrunde.
2. Die Gleichung ist richtig in einem bestimmten Grenzfall (etwa im KS mit bestimmter Orientierung, im momentanen Ruhesystem, im Lokalen IS), der durch eine der Symmetrietransformationen mit dem allgemeinen Fall verbunden ist.

In dieser Form haben wir die Gemeinsamkeit des Kovarianzprinzips mit der Isotropieannahme und mit dem Relativitätsprinzip der SRT herausgestellt. Allerdings gibt es dabei einen wichtigen Unterschied: Die Gesetze der SRT sind nicht nur in der Form sondern auch in der Aussage invariant unter Lorentztrafos. So hängen die einer Lorentztrafo mit \bar{v} unterzogenen Maxwellgleichungen nicht von \bar{v} ab, bzw. bei Drehungen dann vom Drehwinkel...

In der ART gilt dies nur für die Form der Gleichung. Jede Trafo beschreibt eine unterschiedliche physikalische Situation (unterschiedlich starkes Gravitationsfeld). Die tatsächliche Aussage der Gleichungen hängt von der vorgenommenen Transformation ab ! Die hier betrachteten Bezugssysteme, insbesondere das lokale IS und ein KS mit $g_{\mu\nu}$, sind relativ zueinander beschleunigt und damit physikalisch NICHT gleichwertig . Die physikalischen Effekte in versch. IS sind gleich. In beschleunigten Systemen natürlich NICHT ! Unter diesem Gesichtspunkt könnte man den Namen Allgemeine Relativitätstheorie kritisieren !

Als operatives Prinzip zur Aufstellung von physikalischen Gesetzen ist das Kovarianzprinzip von gleicher Struktur wie das Relativitätsprinzip. Abschließend sei es noch einmal formuliert:

Kovarianzprinzip: Gesetze im Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}(x)$ sind durch kovariante Gleichungen gegeben, die sich ohne Gravitationsfeld (also für den Fall $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$) auf die Gesetze der SRT reduzieren.

Gesetze mit Gravitation

Mit Hilfe des Kovarianzprinzips wollen wir nun die bekannten relativistischen Gesetze ohne Gravitation zu den entsprechenden Gesetzen mit Gravitation verallgemeinern:

Mechanik

Im letzten Kapitel wurden bereits die relativistischen Bewegungsgleichungen für ein Teilchen im Gravitationsfeld angegeben. Wir lassen jetzt neben der Gravitation noch andere Kräfte zu. Außerdem untersuchen wir die Bewegung des Eigendrehimpulses (Spin) eines Teilchens

In einem Inertialsystem gilt:

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = f^\alpha \text{ in IS}$$

Nach dem Äquivalenzprinzip gilt genau diese Gleichung auch im lokalen IS.

Die Minkowskikraft könnte dabei die elektromagnetische Kraft $f^\alpha = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta$ sein. Sie enthält keine Gravitationskräfte, die verschwinden ja in IS'.

Dem Lorentzvektor f^α ordnen wir nun den entsprechenden Riemannvektor zu: $f^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} f^\alpha$

Die kovariante Verallgemeinerung von $m \frac{du^\alpha}{d\tau} = f^\alpha$ lautet dann:

$$m \frac{Du^\mu}{d\tau} = f^\mu$$

Also:

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} + m \Gamma^\mu_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu = f^\mu$$

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu - m \Gamma^\mu_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu$$

Das heißt: rechts treten in Form der Christoffels die Gravitationskräfte explizit neben den allgemeinen Kräften auf.

Die Gleichung $m \frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu - m \Gamma^\mu_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu$ ist nach dem Kovarianzprinzip gültig, denn sie reduziert sich im IS auf die SRT-Form und sie ist kovariant.

Die Kovarianz ist in $m \frac{Du^\mu}{d\tau} = f^\mu$ evident, hatten wir doch das kovariante Differenzial so konstruiert.

Die vier Komponenten von u^μ sind nicht alle unabhängig. Vielmehr gilt:

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u_\nu u^\nu = c^2 \text{ in IS}$$

nach dem Kovarianzprinzip wird diese Gleichung zu

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = u_\nu u^\nu = c^2$$

Dies ist eine Nebenbedingung an die Geschwindigkeit. Für jede Lösung der Bewegungsgleichung

$$m \frac{Du^\mu}{d\tau} = f^\mu \text{ gilt daher } g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = u_\nu u^\nu = c^2 = \text{constant.}$$

Es genügt deshalb, die Anfangsbedingung $u^\mu(\tau=0)$ so zu wählen, dass $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = u_\nu u^\nu = c^2$ erfüllt ist. Dann muss die Nebenbedingung $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = u_\nu u^\nu = c^2$ beim Lösen der Bewegungsgleichung nicht mehr berücksichtigt werden.

Aus $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ gewinnt man die Bahnkurve $x^\mu(\tau)$ durch Integration. Löst man dann $x^\mu(\tau) = ct$ nach $\tau = \tau(t)$ auf und setzt man dies in $x^i(\tau)$, also die räumlichen Komponenten ein, so gewinnt man die eigentliche Bahnkurve $x^i(t)$. Dabei setzen wir voraus, dass $x^0 = ct$ die Bedeutung einer Zeitkoordinate hat. Der Zusammenhang zwischen t und den Uhrzeiten in KS mit x^μ wurde bereits diskutiert.

Nichtrelativistischer Grenzfall der mechanischen Bewegungsgleichungen (ohne äußere Kräfte ->

$$f^\alpha = 0$$

$$v^i \ll c$$

$$\Rightarrow \frac{dx^i}{dt} \ll c$$

$$\Rightarrow \frac{dx^i}{dt} \ll \frac{d(ct)}{dt} \Rightarrow \frac{dx^i}{dt} \ll \frac{dx^0}{dt} \Rightarrow \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$$

Also folgt für die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -m \Gamma^\alpha{}_{\gamma\delta} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\delta}{d\tau} \approx -m \Gamma^\alpha{}_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau}$$

Weiter kann man für statische Felder setzen dass:

$$g_{\mu\nu,0} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma^\alpha{}_{00} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda 0,0} + g_{0\lambda,0} - g_{00,\lambda}) = -\frac{1}{2} g^{\alpha i} g_{00,i}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

→ Näherung für schwache Felder

$$\Rightarrow \Gamma^0{}_{00} = 0$$

$$\rightarrow \Gamma^i{}_{00} = \frac{1}{2} h_{00,i}$$

→ Also haben wir die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d t}{d\tau} = const.$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} c^2 \partial_i h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00,i}$$

$$\Rightarrow g_{00} = 1 + h_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

Das bedeutet: Man kann die Gleichung

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

somit schreiben als

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G\rho}{c^2}$$

Spinbewegung

Für spätere Anwendungen betrachten wir den Fall, dass das Teilchen einen klassischen Eigendrehimpuls hat, den wir als Spin $\bar{s} = s^i \bar{e}_i$ bezeichnen.

Wir ordnen diesem Spinvektor s^i einen Lorentzvektor s^α zu. Dazu gehen wir in das momentan mitbewegte IS' (Ruhesystem genannt) des betrachteten Teilchens und definieren dort:

$$(s^\alpha) = (0, s^i)$$

im Ruhesystem IS'.

Hieraus ergibt sich durch LT der Spinvektor s^α in einem beliebigen IS. Im Ruhesystem ist $(u^\alpha) = (c, 0)$

und damit $u_\alpha s^\alpha = 0$

Da dies ein Lorentz-Skalar ist, gilt:

$$u_\alpha s^\alpha = 0 \text{ in einem beliebigen IS-}$$

Wir betrachten zunächst den kräftefreien Fall. Es soll kein Drehmoment auf den Spin und keine Kraft auf das Teilchen wirken. Im Ruhesystem IS' gilt

$$\bar{s} := (s'^1, s'^2, s'^3) = const. \text{ (kräftefrei)}$$

Dies bedeutet $\frac{ds'^i}{dt} = 0$ und $\frac{ds'^\alpha}{d\tau} = 0$

Die Trafo in ein beliebiges IS ergibt:

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} = 0 \text{ für den kräftefreien Fall !}$$

Nun müssen wir wieder wie gewohnt vorgehen:

Wir definieren den Riemannvektor $s^\mu \equiv \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \right) s^\alpha$.

Nach dem Kovarianzprinzip gilt dann:

$$\frac{Ds^\mu}{d\tau} = 0$$

also:

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu s_\lambda \text{ für die Spinpräzession im Gravitationsfeld !}$$

Auch im Riemannschen Raum bleiben die Skalare erhalten. So wird $u_\alpha s^\alpha = 0$

zu $u_\mu s^\mu = 0$.

Man kann sehen, dass die Lösung von $\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu s_\lambda$ den Betrag des Spinvektors erhält, also

$$s^\mu s_\mu = \text{const.}$$

Die Gleichung $\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu s_\lambda$ beschreibt demnach eine Drehung oder Präzession des Spinvektors. In der

Ableitung haben wir vorausgesetzt, dass im lokalen IS keine Kräfte auf das Teilchen wirken. In der Gleichung

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu s_\lambda \text{ sind folglich alleine die Gravitationskräfte berücksichtigt !. Also beschreibt die}$$

Gleichung die Präzession des Spins eines Teilchens, das im Gravitationsfeld frei fällt. Beispielsweise könnte es sich um die Präzession einer Kreiselachse in einem Erdsatelliten handeln.

Wir unterscheiden für die Präzession:

- 1) Teilchen im Gravitationsfeld
- 2) Teilchen im anderen Kraftfeld (Thomas- Präzession)
- 3) Teilchen im Kraftfeld und in einem Gravitationsfeld (Fermi- Transport)

Im Folgenden brauchen wir nur den ersten, gerade gelösten Fall

Andere Fälle:

Thomas- Präzession

Nach $m \frac{du^\alpha}{d\tau} = f^\alpha$ gilt für ein Teilchen unter dem Einfluss der Kraft f^α diese Gleichung !

Dabei steht f^α beispielsweise für die Coulombkraft, unter der sich ein klassisches Elektron mit dem Spin s^α

bewegt. Die Gleichung $m \frac{du^\alpha}{d\tau} = f^\alpha$ gilt in einem lokalen IS. Nun führen wir ein relativ zu IS mit konstanter

Geschwindigkeit bewegtes IS' ein, in dem das Teilchen momentan ruht. In IS' wirke kein Drehmoment auf den Spin , also

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = 0 \text{ in IS'}$$

Das bedeutet, wir studieren alleine die Spinbewegung des Teilchens, die durch die beschleunigte Bewegung des Teilchens im Kraftfeld f^α hervorgerufen wird. In IS' gilt nun

$$\left(\frac{ds'^\alpha}{d\tau} \right) = \left(\frac{ds'^0}{d\tau}, 0 \right)$$

$$u'^\alpha = (c, 0)$$

Nun machen wir eine Lorentztrafo in IS, was

$$u^\alpha = \Lambda^\alpha_0 c$$

und

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} = \Lambda^\alpha_0 \left(\frac{ds^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{u^\alpha}{c} \frac{ds^0}{d\tau} = g(\tau) u^\alpha$$

Dabei ist $g(\tau)$ eine zunächst unbekannte Funktion ! Wir multiplizieren

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} = \Lambda^\alpha_0 \left(\frac{ds^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{u^\alpha}{c} \frac{ds^0}{d\tau} = g(\tau) u^\alpha \text{ mit } u_\alpha \text{ und summieren über Alpha:}$$

So folgt:

$$\frac{u_\alpha}{c^2} \frac{ds^\alpha}{d\tau} = g(\tau)$$

Dies kann man nach τ differenzieren und es folgt:

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} \frac{du_\beta}{d\tau} s^\beta u^\alpha \text{ (Thomas- Präzession)}$$

Dies ist die SPinpräzession eines beschleunigten Teilchens $\frac{du_\beta}{d\tau} = \frac{f^\beta}{m}$ ohne Gravitationsfeld. Sie wird Thomas- Präzession genannt ! Dabei wurde angenommen, dass kein Drehmoment auf das Teilchen (im momentanen Ruhesystem) wirkt.

Die Thomas- Präzession führt zu einem bekannten Effekt für die Spinbewegung eines Elektrons im Atom. Bewegt sich das Elektron mit der Geschwindigkeit \bar{v} , so ergibt das Coulombfeld \bar{E} des Kerns ein Magnetfeld $\bar{B}(IS) \approx -\bar{v} \times \frac{\bar{E}}{c}$ im jeweiligen Ruhesystem des Elektrons. Die Wechselwirkung dieses B- Feldes mit dem magnetischen Moment $\bar{\mu} = \text{const.} \cdot \bar{s}$ bewirkt dann ein Drehmoment. Die Thomas- Präzession führt nun in diesem Fall dazu, dass die Spinpräzession aufgrund dieses Drehmoments halbiert wird !

Fermi- Transport

Lassen wir nun neben den äußeren f^α noch Gravitationskräfte zu. Dann gilt $\frac{ds^\alpha}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} \frac{du_\beta}{d\tau} s^\beta u^\alpha$ im lokalen Inertialsystem und aus dem Kovarianzprinzip folgt:

$$\frac{Ds^\nu}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} \frac{Du^\mu}{d\tau} s_\mu u^\nu$$

Dies beschreibt die Spinpräzession eines beschleunigten Teilchens $\frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{f^\mu}{m}$, auf das zusätzlich ein Gravitationsfeld wirkt. Man bezeichnet diese Präzession als Fermi- Transport !

Elektrodynamik

Nach dem Äquivalenzprinzip gelten die Maxwellgleichungen

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0$$

im lokalen IS.

Remember:

Andererseits kann man $\left(\frac{\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}}\right)$ als einen Tensor behandeln und brav transformieren. Das bedeutet:

$$\left(\frac{\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}}\right) = (\alpha^{i_1}_{j_1} \dots \alpha^{i_N}_{j_N}) \frac{\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} = \frac{\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}} \det \bar{\alpha}$$

Das Ergebnis ist in der Tat das selbe, also können wir schreiben:

$$\left(\frac{\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}}\right) \text{ ist ein Tensor !}$$

Den zugehörigen kovarianten Tensor gewinnt man gemäß Tensorregeln , also:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_N j_N} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_N} = g \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$$

Also:

Die

$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ haben die selbe Symmetrie wie die $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$, jedoch haben die nichtverschwindenden Elemente einen anderen Betrag, nämlich g anstelle von 1.

Analog zu $\left(\frac{\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}}{\sqrt{g}}\right)$ ist ein Tensor ! zeigt man, dass $\sqrt{g} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ ein Tensor ist !

Also gilt:

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa;\nu} = 0$$

Dabei wurden wieder Riemannsche Tensoren j^ν und $F^{\mu\nu}$ eingesetzt, die bekanntermaßen definiert sind.

Obiges sind die Maxwellgleichungen im Gravitationsfeld. Das Gravitationspotenzial findet sich dabei wieder in den kovarianten Ableitungen, ergo dort in den Γ . Ein Elektromagnetisches Feld, wie wir später sehen werden, geht auch in die Einsteinschen Feldgleichungen ein, da es Quelle der Gravitation ist. Also kann man davon

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

sprechen, dass $\frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa;\nu} = 0$ und die Einsteinschen Feldgleichungen ein gekoppeltes System für die

Felder $A_\mu(x)$ und $g_{\mu\nu}(x)$ dar. der Beitrag des elektromagnetischen Feldes zu Energiedichte kann meist gegenüber vorhandenen Massen vernachlässigt werden. Dann sind die $g_{\mu\nu}(x)$ in den Maxwellgleichungen

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

nur die äußersten vorgegebenen Gravitationsfelder !

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa;\nu} = 0$$

Die $g_{\mu\nu}(x)$ hängen vom Gravitationsfeld und von den vorgegebenen Koordinaten ab. Das bedeutet, unsere Maxwellgleichungen hier sind auch richtig für krummlinige Koordinaten, z.B. für Kugelkoordinaten im Euklidischen Raum ! (also ohne Gravitationsfeld). Das teilweise mühevolle Umschreiben von

Vektorgleichungen auf spezielle nichtkartesische Koordinaten ist in dieser Form der Maxwellgleichungen allgemein gelöst.

Die Maxwellgleichungen im Gravitationsfeld (oder in krummlinigen Koordinaten) lassen sich noch vereinfachen. Es gilt:

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = F^{\mu\nu}_{,\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\kappa} F^{\lambda\kappa} + \Gamma^\mu_{\mu\rho} F^{\nu\rho}$$

wegen:

$$F^{\mu\nu}_{;\kappa} = F^{\mu\nu}_{,\kappa} + \Gamma^\nu_{\kappa\rho} F^{\mu\rho} + \Gamma^\mu_{\kappa\rho} F^{\rho\nu}$$

Remember:

Differenziert man die Gleichung $g = \det(g_{\mu\nu}) = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N} g_{1i_1} g_{2i_2} \dots g_{Ni_N} > 0$, so folgt:

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = \sum_{k=1}^N \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N} g_{1i_1} g_{2i_2} \dots \frac{\partial g_{ki_k}}{\partial x^l} \dots g_{Ni_N}$$

Nun gilt:

$$\frac{\partial g_{ki_k}}{\partial x^l} = \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \delta^m_{ik} = \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} g^{mr} g_{ri_k}$$

Wir ersetzen diesen Ausdruck für den herausgefallenen Faktor g_{ki_k} . Dadurch tritt das Produkt

$g_{ri_r} g_{ri_k}$ auf. Dieses ist jedoch symmetrisch in i_r und i_k . Wird aber mit dem antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol kontrahiert. Daher überlebt nur der Term mit $r = k$:

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} g^{mk} g$$

Dadurch erhalten wir einen Ausdruck für die Ableitung der Metrik im kontrahierten Fall und damit für das einfache kontrahierte Christoffelsymbol:

$$\Gamma^k_{km} = \frac{g^{km}}{2} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) = \frac{g^{km}}{2} \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^l} \text{ da wegen der Symmetrie der Metrik k}$$

Also:

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = F^{\mu\nu}_{,\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\kappa} F^{\lambda\kappa} + \Gamma^\mu_{\mu\rho} F^{\nu\rho}$$

$$\Rightarrow F^{\mu\nu}_{;\mu} = F^{\mu\nu}_{,\mu} + \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_\mu \sqrt{g}) F^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow F^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} F^{\mu\nu})$$

Also schreiben sich die inhomogenen Maxwellgleichungen in folgender Form:

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} F^{\mu\nu}) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Aber auch die homogenen Maxwellgleichungen vereinfachen sich:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa;\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa;\nu} = 0 \Rightarrow \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} (F_{\lambda\kappa,\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} F_{\rho\kappa} - \Gamma^\rho_{\nu\kappa} F_{\rho\lambda})$$

Da jedoch Christoffelsymbole bezüglich der unteren Indices symmetrisch sind, fallen alle Terme mit Christoffelsymbolen weg und es verbleibt nur die partielle Ableitung.

Merke: Kontrahiert man die kovariante Ableitung über die unteren Indices mit einem total antisymmetrischen Tensor, so geht diese wegen der Symmetrie der Indices an den Christoffelsymbolen in die partielle Ableitung über!

Also:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa,\nu} = 0$$

Ergo: die inneren Feldgleichungen der Elektrodynamik spüren keine Gravitation !

Betrachten wir die Bewegungsgleichung eines massiven geladenen Teilchens im äußeren Feld:

$$m \frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} u^\kappa u^\lambda + \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

hier stecken die elektromagnetischen Kräfte im Feldstärketensor und die Gravitationskräfte in den Christoffelsymbolen.

Auch hier gewinnen wir die Christoffels als Ableitung der Metrik als "Potenzial" und den Feldstärketensor als Ableitung der A_μ .

Die Kontinuitätsgleichung wird zu

$$j^\mu_{;\mu} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(\sqrt{g} j^\mu)}{\partial x^\mu} = 0$$

Energie- Impuls- Tensor

Ohne äußere Kräfte könnten wir die Grundgesetze der Hydrodynamik ausdrücken in der Form

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \text{ (Minkowskiraum)}$$

Dabei wurde der allgemeine Energie- Impuls- Tensor $T^{\alpha\beta}$ verwendet !

Dem Energie- Impuls- Tensor einer idealen Flüssigkeit können wir den Riemantensor

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P$$

zuordnen. Druck P und Massendichte sind Lorentz- und Damit auch Riemannskalarfelder !

Zum Allgemeinen Energie- Impuls- Tensor (siehe unten) tragen alle Energieformen bei, die in der SRT auftreten. nach dem Äquivalenzprinzip verwenden wir nun diesen Energie- Impuls- Tensor im lokalen IS. Er sollte dann alle Energiebeiträge enthalten außer der Gravitation selbst. Dies gilt dann auch für den zugehörigen Riemantensor

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P + T^{\mu\nu}_{e.m.} + \dots$$

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{oben} + T^{\mu\nu}_{e.m.}$$

In einem IS gilt für den allgemeinen Energie- Impuls- Tensor $T^{\mu\nu}$ der Erhaltungssatz

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$$

also bei uns:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

Dies beschreibt zum Beispiel die relativistische Bewegung einer Flüssigkeit im Gravitationsfeld. Das Gravitationsfeld geht über die Christoffels ein. Andere Kräfte sind dann über ihren Beitrag zum vollkommenen allgemeinen Energie- Impuls- Tensor

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P + T^{\mu\nu}_{e.m.} + \dots$$

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{oben} + T^{\mu\nu}_{e.m.}$$

enthalten. Der Energie- Impuls- Tensor in allgemeiner Form ist die relativistische Verallgemeinerung der Energie- Massendichte $\tilde{\rho} = \frac{T_{00}}{c^2}$. Der zugehörige Riemannntensor zur allgemeinen Form enthält dann alle relevanten Energieformen als Quelle des Gravitationsfeldes. Der allgemeine Energie- Impuls- Tensor der Riemannschen Theorie IST die Quelle des Gravitationsfeldes.

Allerdings enthält er alle Quellen des Feldes außer dem Gravitationsfeld selbst.

In praktischen Anwendungen reduziert sich der Energie- Impuls- Tensor auf die Form

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P$$

Merke zur Metrik:

Die Metrik selbst ist die Mannigfaltigkeit. Tensoren sind wie Tiere auf der Metrik. Sie haben sich dort eingestellt und üben Einfluss auf die Metrik aus ! Sie geistern auf der Metrik umher !

Energie- Impuls- Tensor

Wir werden noch ausführlicher sehen: Alle Energieformen tragen zum Energie- Impuls- Tensor bei:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P + T^{\mu\nu}_{ED} + \dots$$

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{HD} + T^{\mu\nu}_{ED}$$

Remember

$$T_{em}^{\mu\kappa} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\eta_{\lambda\nu} F^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\kappa} F_{\lambda\alpha} F^{\lambda\alpha} \right)$$

in anderen Einheiten auch

$$T_{em}^{\mu\kappa} = \frac{1}{4\pi} \left(F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\kappa} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\kappa} F_{\lambda\alpha} F^{\lambda\alpha} \right)$$

Also in der Art:

$$T_{em}^{00} = \frac{1}{8\pi} (\bar{E}^2 + \bar{B}^2)$$

$$\bar{S} = c \sum_i T_{ED}^{0i} \bar{e}_i = \frac{c}{4\pi} \bar{E} \times \bar{B}$$

Als differenzierlicher Energie- Impuls- Erhaltungssatz:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$$

für räumlich begrenzte Systeme oder im unendlichen schnell genug abklingende Felder:

$$T^{\alpha 0}_{,0} + T^{\alpha i}_{,i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial(ct)} \int_V d^3r T^{\alpha 0} = - \int_V d^3r T^{\alpha i}_{,i} = - \int_{\partial V} dF_i T^{\alpha i} = 0$$

$$\Rightarrow P^\alpha \frac{1}{c} \int_V d^3r T^{\alpha 0} = const.$$

als integraler Energie- Impuls- Erhaltungssatz

Das Volumen V umschließt das System, ∂V umschließt das System

In der ART gilt dann in kovariantem Differenzial:

$$D_\beta T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} T^{\lambda\beta} + \Gamma^\lambda_{\lambda\beta} T^{\alpha\beta} = 0$$

Der allgemeine verallgemeinerte Energie- Impuls- Tensor der Speziellen Relativitätstheorie in beliebigen Koordinaten

$$M^{\alpha\beta} = \rho \gamma^2 c^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{v^1}{c} & \frac{v^2}{c} & \frac{v^3}{c} \\ \frac{v^1}{c} & \frac{v^1 v^1}{c} & \frac{v^1 v^2}{c} & \frac{v^1 v^3}{c} \\ \frac{v^2}{c} & \frac{v^2 v^1}{c} & \frac{v^2 v^2}{c} & \frac{v^2 v^3}{c} \\ \frac{v^3}{c} & \frac{v^3 v^1}{c} & \frac{v^3 v^2}{c} & \frac{v^3 v^3}{c} \end{pmatrix}$$

$$\text{Für } v = 0 \text{ gilt: } P^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{pmatrix}$$

nun gewinnen wir als kovariante Gleichung

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = -\partial_\beta P^{\alpha\beta}$$

dies ergibt im nichtrelativistischen Grenzfall unsere eingangs dargestellte Eulergleichung mit $f=0$ (keine äußeren Kräfte, aber Druck !) und die Kontinuitätsgleichung !

Wir schreiben:

$$\partial_\beta M^{\alpha\beta} = -\partial_\beta P^{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \partial_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_\beta (M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta}) = 0$$

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{pmatrix}$$

im momentan mitbewegten Ruhesystem

und allgemein

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P$$

Falls nun äußere Kräfte vorhanden sind, so wird einfach die Minkowski- Kraftdichte auf der rechten Seite der Euler/ Kontinuitätsgleichungen addiert, also:

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_\beta (M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta}) = f^\alpha$$

Dies ist die relativistische Verallgemeinerung von Euler- Gleichung und Kontinuitätsgleichung einer idealen Flüssigkeit !

Also:

Der allgemeine Energie- Impuls Tensor

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P$$

tritt in der relativistischen Gravitationstheorie als Quelle des Feldes auf. Wir bestimmen nun die Erhaltungsgrößen, die sich aus der Divergenzfreiheit

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = \left(M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P \right)_{,\beta} = 0$$

ergeben.

Diese Divergenzfreiheit, die Kontinuitätsgleichung für Energie und Impuls (siehe oben) wird vorausgesetzt. Sie gilt für eine ideale Flüssigkeit ohne äußere Kräfte. betrachten wir ein abgeschlossenes System. Ein solches System hat keine Wechselwirkung mit anderen Systemen: $f^\alpha = 0$. Zum anderen soll das System begrenzt sein, also innerhalb eines hinreichend groß gewählten Volumens V liegen. Wir integrieren

$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$ über V , wobei wir die Gleichung in zeitliche und räumliche Divergenz zerlegen und den Satz von Gauß verwenden:

$$T^{\alpha 0}_{,0} + T^{\alpha i}_{,i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial(ct)} \int_V d^3r T^{\alpha 0} = - \int_V d^3r T^{\alpha i}_{,i} = - \int_{\partial V} dF_i T^{\alpha i} = 0$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass die Materiedichteverteilung und alle anderen Quellen der Gravitation im Unendlichen abklingen.

Also:

$$T^{\alpha 0}_{,0} + T^{\alpha i}_{,i} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P^\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \int_V d^3r T^{\alpha 0} \right) = 0$$

$$P^\alpha = \frac{1}{c} \int_V d^3r T^{\alpha 0} = \text{const.}$$

Dies ist die Erhaltung von Energie und Impuls im abgeschlossenen System !

Anstelle eines endlichen Integrationsvolumens, das das betrachtete System vollständig umfasst, können wir auch den gesamten Raum betrachten. Dann zählt die Argumentation mit den Feildern und Dichten, die hinreichend schnell abklingen.

Ansonsten sagt man einfach: Die Verteilungen verschwinden am Rand des Systems !

Nun: $P^\alpha = \frac{1}{c} \int_V d^3r T^{\alpha 0} = \text{const.}$ hat die Dimension eines Impulses. Sie ist außerdem ein Lorentzvektor.

Dies kann leicht gezeigt werden ! Damit stellt $P^\alpha = \frac{1}{c} \int_V d^3r T^{\alpha 0} = \text{const.}$ den erhaltenen Viererimpuls des

durch $T^{\alpha\beta}$ beschriebenen Feldes dar. Somit ist cP^0 die Energie und P^i der Impuls des Feldes.

Daraus folgt die Interpretation der Komponenten von $T^{0\alpha}$:

Zeit- Zeit- Komponente T^{00} = Energiedichte

Zeit- Raum- Komponente $\frac{T^{0i}}{c}$ = Impulsdichte !

Somit: Zeitanteile sind die Energie des räumlichen Impulses. Der zeitliche Transport von Energie schafft Impuls ! Homogenität des Raums ist an die Homogenität der Zeit geknüpft !

Die Gleichung $T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$ ist der richtige differenzielle Ausdruck für die Erhaltung von Energie und Impuls

Allgemeiner Energie- Impuls- Tensor

Energie- und Impulserhaltung gelten nur für abgeschlossene Systeme. Dazu sind alle Teile des physikalischen Systems, mit denen eine Wechselwirkung besteht, zu berücksichtigen. Als Beispiel hierzu betrachten wir eine geladene Flüssigkeit, auf die elektromagnetische Kräfte wirken. Die Kraftdichte f^α ist durch die elektromagnetischen Felder gegeben.

Also:

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = f^\alpha = -T_{em}^{\alpha\beta}_{,\beta}$$

mit

$$T_{em}^{\mu\kappa} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\eta_{\lambda\nu} F^{\mu\nu} F^{\kappa\lambda} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\kappa} F_{\lambda\alpha} F^{\lambda\alpha} \right)$$

oder:

$$(T^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta})_{,\beta} = 0$$

Die Energie- Impuls- Erhaltung gilt dann nicht mehr separat für die Systeme Flüssigkeit und elektromagnetisches Feld, sondern für das Gesamtsystem. Befinden sich in unserem Gefäß weitere Bestandteile neben Flüssigkeit und elektromagnetischem Feld, so treten diese ebenfalls als Kräfte in Erscheinung. In analogen Schritten können jedoch die Kräfte zu einem Bestandteil des Energie- Impuls- Tensors umgeformt werden. Dazu sind alle auftretenden Energieformen im Energie- Impuls- Tensor zu berücksichtigen:

$$T^{\alpha\beta} = (M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta} + \dots)$$

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = (M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta} + \dots)_{,\beta} = 0$$

Dieser Energie- Impuls- Tensor ist zudem auch symmetrisch:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$$

Dabei hat sich die Symmetrie aller einzelnen Beiträge übertragen ! Der Erhaltungssatz $T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$ gilt für das Gesamtsystem ! Sofern die verschiedenen Anteile nicht miteinander koppeln, gilt allerdings der Erhaltungssatz auch für jedes Teilsystem !

Quelle des Gravitationsfeldes

Wir begründen nun, dass der Energie- Impuls- Tensor als Quellterm in den relativistischen Feldgleichungen der Gravitation auftritt.

Nach der Einführung der relevanten Größen kann die bereits angedeutete Argumentation hier nun präzisiert werden:

Wir beziehen uns auf die Analogie zur Elektrodynamik. In der Elektrostatik ist die Ladungsdichte ρ_e die Quelle des Feldes. In einer dynamischen Theorie lautet der Erhaltungssatz für die Ladung $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ Wobei $j^0 = \rho_e c$. Die relativistische Verallgemeinerung der Elektrostatik ist daher von der Ersetzung

$\rho_e \rightarrow j^\alpha$ im Quellterm begleitet. In der Newtonschen Gravitationstheorie ist die Massendichte ρ die Quelle des Feldes. Wir haben eingangs bereits eine Reihe von Beispielen diskutiert , nach denen alle möglichen Energieformen zur Massendichte beitragen können. Der Erhaltungssatz für all diese Beiträge lautet

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = (M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta} + \dots)_{,\beta} = 0 . \text{ Für eine Flüssigkeit gilt } T^{00} = \tilde{\rho}c^2 \text{ mit der Energie-}$$

$$\text{Massendichte } \tilde{\rho} = \frac{M_{00}}{c^2} = \rho\gamma^2$$

Also ist $\tilde{\rho}$ die analoge Größe zu ρ_e . Nun verschwindet jedoch im newtonschen Grenzfall der Unterschied zwischen $\tilde{\rho}$ und ρ . Geht man dennoch analog zur Elektrodynamik vor, so sollte für die relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Theorie im Quellterm die Ladung ρ durch $T^{\alpha\beta}$ ersetzt werden !

Wegen der Äquivalenz von Masse und Energie können alle Energieformen zur Masse beitragen. Jede Energieform sollte daher Quelle des Gravitationsfeldes sein. Alle Beiträge sollten auch in der allgemeinsten Form des Energie- Impuls- Tensors enthalten sein ! Offen ist allerdings, wie dies für den Energiebeitrag des Gravitationsfeldes selbst geschehen soll. Denn: Der Energie- Impuls- Tensor eines bestimmten Feldes muss aus der entsprechenden Feldtheorie abgelitten werden ! Wir werden auf diese Frage bei der Aufstellung der Einsteinschen Feldgleichungen zurückkommen !

Anwendungen

Bei Anwendungen benötigen wir gar nicht die verallgemeinerte Form

$$T^{\alpha\beta} = (M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta} + \dots)$$

Wir können durchwegs vom Energie- Impuls- Tensor einer idealen Flüssigkeit ausgehen, also von

$$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P$$

Dies geht, weil schon der Anwendungsbereich dieses Tensors weit über gewöhnliche Flüssigkeiten hinausgeht ! Die Voraussetzung für die Anwendung ist lediglich, dass das physikalische System beschrieben werden kann durch

- 1) eine Massendichte ρ
- 2) ein Geschwindigkeitsfeld \bar{v}
- 3) und einen isotropen Druck P .

Dabei sind ρ und P jeweils im lokalen und momentanen Ruhesystem zu nehmen !

Diese Voraussetzungen können auch für ein Gas oder für einen Festkörper, für Photonengas, für Planeten und Sterne erfüllt und sogar für das ganze Universum bei geeigneter Mittelung über die Metagalaxis um Effekte von Galaxienclustern zu verwischen !

Gas

Die individuellen Geschwindigkeiten \bar{v}_n tragen zur Ruhemasse eines Volumenelements bei. Außerdem bestimmen sie den Druck und tragen auch auf diesem Weg zum Energie- Impuls- Tensor bei. Die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \langle \bar{v}_n \rangle$ der Atome in einem Volumenelement ΔV bestimmt das Geschwindigkeitsfeld $(u^\alpha) = \gamma(c, v)$ an der Stelle des Volumenelements.

Die mittlere Geschwindigkeit ist oft viel kleiner als die individuellen, statistisch verteilten Geschwindigkeiten. So gilt für Luft bei Zimmertemperatur: $\langle |\bar{v}_n| \rangle = 400$ m/s, während für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit etwa $v = 1$ m/s (zugluft) oder $v \sim 30$ m/s (Orkan) gilt !

Wegen $\bar{v}_n \ll c$ sind die Beiträge zur Massendichte und zum Druck von der Ordnung $\frac{v^2}{c^2}$ verglichen mit dem

führenden Term $T^{00} \approx \rho c^2$. Die mittlere Geschwindigkeit kommt dagegen auch in der Ordnung v/c in $T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P$ vor !

Festkörper oder Flüssigkeit

Für Flüssigkeiten und Festkörper gilt immer $P \ll \rho c^2$. Andernfalls halten die Atomhüllen dem Druck nicht Stand und der Festkörper entartet. Das bedeutet, man kann den Druckbeitrag in

$T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P$ total vernachlässigen. Ein etwaiges Geschwindigkeitsfeld $(u^\alpha) = \gamma(c, v)$ könnte sich aus einer starren Rotation ergeben.

Photonengas

Die Energiedichte u_{em} der Photonen trägt mit $\rho_{str.} = \frac{u_{em}}{c^2}$ zur Massendichte bei. Wie bereits erläutert, trägt die elektromagnetische Strahlung in einem Kasten (oder in einem Stern) zur Masse (Ruhemasse) des Kastens bei. Der Druck des Photonengases ist $P = \frac{u_{em}}{3} = \rho_{str} \frac{c^2}{3}$.

Die angegebenen Formeln setzen ein IS voraus, in dem die Impulsverteilung und damit der Druck des Photonengases isotrop sind. Dieses System nimmt die Stelle des momentanen Ruhesystems in. In diesem System ist dann $(u^\alpha) = (c, 0)$ in $T^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P$. Ansonsten ist u^α die

Geschwindigkeit des betrachteten IS relativ zu dem durch die Isotropie ausgezeichneten IS. Die in $\rho_{str} = \frac{u_{em}}{c^2}$

berücksichtigten statistischen elektromagnetischen Felder treten nicht in $T^{\alpha\beta}$ in $T^{\alpha\beta} = (M^{\alpha\beta} + P^{\alpha\beta} + T_{em}^{\alpha\beta} + \dots)$ auf.

Wenn die auftretenden Geschwindigkeiten, wie in diesen beiden Beispielen nichtrelativistisch sind, dann übersteigt die Ruheenergie der Materie kinetische Energiebeiträge um viele Größenordnungen. Dann gilt:

$$T^{00} \approx \rho c^2$$

$$\frac{T^{0i}}{T^{00}} \approx \frac{v^i}{c} \ll 1$$

$$\frac{T^{ij}}{T^{00}} = O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2, \frac{P}{\rho c^2}\right) \ll 1$$

Für viele Anwendungen genügt dann die Näherung

$$T^{\alpha\beta} \approx \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{nichtrelativistischer Grenzfall})$$

Diese Näherung ist möglich für folgende Systeme:

Erde: Für den Gravitationsdruck gilt: $|\nabla P| \sim \rho g, P \sim |\nabla P|r_e = \rho gr_e = \rho c^2 \left(\frac{gr_e}{c^2} \right) \sim 10^{-9} \rho c^2$

Somit:

$P \ll \rho c^2$. Der Druckbeitrag zum Energie- Impuls- Tensor ist also vernachlässigbar klein. Die Erddrehung führt ihrerseits zu Geschwindigkeiten ungleich Null, aber auch hier:

$v^i \ll c$, so dass vernachlässigbar !

Sterne

Auch hier gilt noch $P \ll \rho c^2, v^i \ll c$

Universum Die Massen der Galaxien und Sterne können durch eine kontinuierliche Massendichte beschrieben werden, wenn man über hinreichend große Bereiche (100 Mio. Lichtjahre) mittelt. Im heutigen Universum gilt

$$T^{\alpha\beta} \approx \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ während im früheren Universum die Situation eines hochrelativistischen Gases}$$

vorlag ! Die kosmische Hintergrundstrahlung trägt auch zur Massendichte bei und zwar mit $\rho_{str} = \frac{u_{em}}{c^2}$.

Einstein'sche Feldgleichungen

Nichtrelativistischer Grenzfall der mechanischen Bewegungsgleichungen (ohne äußere Kräfte ->

$$f^\alpha = 0$$

$$v^i \ll c$$

$$\Rightarrow \frac{dx^i}{dt} \ll c$$

$$\Rightarrow \frac{dx^i}{dt} \ll \frac{d(ct)}{dt} \Rightarrow \frac{dx^i}{dt} \ll \frac{dx^0}{dt} \Rightarrow \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$$

Also folgt für die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -m \Gamma^\alpha_{\gamma\delta} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\delta}{d\tau} \approx -m \Gamma^\alpha_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau}$$

Weiter kann man für statische Felder setzen dass:

$$g_{\mu\nu,0} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\lambda 0,0} + g_{0\lambda,0} - g_{00,\lambda}) = -\frac{1}{2} g^{\alpha i} g_{00,i}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

→ Näherung für schwache Felder

$$\Rightarrow \Gamma^0_{00} = 0$$

$$\rightarrow \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} h_{00,i}$$

→ Also haben wir die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d t}{d\tau} = const.$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} c^2 \partial_i h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00,i}$$

$$\Rightarrow g_{00} = 1 + h_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

Das bedeutet: Man kann die Gleichung

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

somit schreiben als

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G\rho}{c^2}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall haben wir damit eine Feldgleichung gefunden !

Allerdings: mit Hilfe des Kovarianzprinzips können wir die Einsteinschen Feldgleichungen nicht gewinnen. Es existiert im Lokalen Inertialsystem nämlich keine Ausgangsgleichung, von der die kovariante Verallgemeinerung zu finden wäre !

Man kann die Feldgleichungen weitgehend dadurch festlegen , dass sie kovariant und möglichst einfach sind und dass sie den newtonischen Grenzfall enthalten !

Wir haben den Grenzfall bereits diskutiert.

Etwas genauer schreibt man:

Der Newtonsche Grenzfall $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$

ist durch Beobachtungen im Sonnensystem gut bestätigt !

Also muss er sich als Grenzfall der aufzustellenden Theorie ergeben.

Aus dem nichtrelativistischen Grenzfall hatten wir

$$g_{00} = 1 + h_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

Der Energie- Impuls- Tensor folgt im Grenzfall gemäß

$$T^{00} \approx \rho c^2$$

$$\frac{T^{0i}}{\rho c^2} \approx \frac{v^i}{c} \ll 1$$

$$\frac{T^{ji}}{\rho c^2} \approx O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \ll 1$$

Also schreiben wir

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G\rho}{c^2}$$

$$\Rightarrow \Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

Den wegen $|g_{00} - 1| \ll 1 \Rightarrow T_{00} \approx T^{00}$

Die Feldgleichung lorentz invariant zu machen liegt nahe:

$$\# g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

Wir betrachten dies als eine vorläufige Form.

Wie bereits diskutiert sind auf der rechten Seite jedoch keine Beiträge des Gravitationsfeldes selbst enthalten. Da das Gravitationsfeld jedoch Energie trägt, was man an einem Gezeitenkraftwerk nutzt, muss der Energiebeitrag des Feldes selbst zum Energie- Impuls- Tensor hinzugefügt werden !

Wir werden ähnliche Gleichungen später als Grenzfall für schwache Felder gewinnen !

Im Gegensatz zu den analogen Gleichungen der E- Dynamik ist es aber gerade das Problem, dass jede Energieform einen Beitrag zum Feld selbst gibt.

Die Gleichung gilt nicht.

In der E-Dynamik konnte so die gesamte lorentzinvariante Theorie konstruiert werden !

Man könnte versuchen, den Beitrag des Feldes einfach hinzuzufügen:

$$\# g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}^{grav})$$

An dieser Stelle müssten wir dann zu einer kovarianten Form übergehen. Die obige Form ist ja nur im Minkowskiraum kovariant.

Genau an dieser Stelle aber kommt man nicht weiter. Einerseits ist der Beitrag des Feldes selbst unbekannt. der Ausdruck für den Energie- Impuls- Tensor muss erst noch aus der noch aufzustellenden Theorie abgeleitet werden.

Zum anderen:

$$\text{Würde man } \# g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}^{grav})$$

kovariant verallgemeinern, immerhin $\# g_{\alpha\beta} = -\eta^{\gamma\delta} g_{\alpha\beta,\gamma,\delta}$, so müsste man sich terme der Art

$$\# g_{\alpha\beta} = -\eta^{\gamma\delta} g_{\alpha\beta;\gamma;\delta} \text{ ansehen, jedoch ist } g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$$

-> feldgleichungen an die Metrik lassen sich nicht kovariant verallgemeinern !! Da die kovariante Ableitung der metrik verschwindet !

Möglichkeiten der Verallgemeinerung

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

prinzipiell hätten wir 2 Möglichkeiten, diese Gleichung zu verallgemeinern:

Wir suchen eine Verallgemeinerung dieser Gleichung, die es erlaubt, alle $g_{\alpha\beta}$ zu bestimmen:

Naheliegend:

$$\#_\eta g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

$$\#_\eta := \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$$

Dies widerspricht jedoch der Gleichung $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$

Alternative

$$\#_g g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

$$\#_g := g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu$$

wie gesagt- sinnlos, da

$$D_\mu g_{\alpha\beta} = 0$$

Wie löst man dieses Problem ?

Nun - wir können den ohnehin unbekannten Term des gravitativen Beitrags auf die linke Seite der Gleichung bringen und das dortige Resultat:

$$\#_g g_{\alpha\beta} + \frac{8\pi G}{c^4} t_{\alpha\beta}^{grav} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

formal verallgemeinern, derart, dass

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = \left(-\#_g g_{\alpha\beta} - \frac{8\pi G}{c^4} t_{\alpha\beta}^{grav} \right)_{\alpha\beta \rightarrow \mu\nu}$$

Dabei soll die etwas seltsame Schreibweise die unbekannte, aber erfolgte Verallgemeinerung des Ausdrucks darstellen.

Jedenfalls haben wir als Feldgleichung

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

mit dem jedoch unbekannten Riemannntensor $G_{\mu\nu}$!

In Analogie zu Elektrodynamik erwarten wir in $t_{\alpha\beta}^{grav}$ Terme, die quadratisch in den partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right)$ sind. Der Tensor $G_{\mu\nu}$ muss solche Terme enthalten.

Als kovariante Verallgemeinerung der Gleichung $\#_g g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}^{grav})$ sollte er jedoch linear in der zweiten Ableitung von $g_{\mu\nu}$ sein !

Also können wir die Forderungen an $G_{\mu\nu}$ auflisten. Sie sind teilweise notwendig, teilweise lediglich plausibel:

- 1) $G_{\mu\nu}$ ist Riemannntensor
- 2) $G_{\mu\nu}$ wird aus der ersten und zweiten Ableitung des metrischen Tensors gebildet. Dabei sollten die ersten Ableitungen quadratisch, die zweiten Ableitungen linear auftreten ! $G_{\mu\nu}$ sollte also linear in der zweiten und quadratisch in der ersten Ableitung sein .

Dabei sieht man die quadratische Form in der ersten Ableitung folgendermaßen:

$$T^{\mu\nu}_{em.} \sim B^2$$

$$B = \nabla \times \bar{A}$$

und wie wir gesehen haben, sind die $g_{\mu\nu}$ mit verallgemeinerten Potenzialen zu identifizieren !

3) Der Energie- Impuls- Tensor ist symmetrisch und es gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0, \text{ bzw. } T_{\mu\nu}^{;\mu} = 0$$

Wegen

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

übertragen sich diese Eigenschaften direkt auf $G_{\mu\nu}$

Also:

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$$

$$G_{\mu\nu}^{;\nu} = 0$$

Für ein schwaches, stationäres Feld sollte sich der Grenzfall ergeben, also

$$G_{00} \approx \Delta g_{00}$$

Ableitung der Feldgleichungen

Die Feldgleichungen können nun bereits aus den aufgestellten Forderungen abgeleitet werden:

$$R^m_{ikl} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^m_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^p_{ik} \Gamma^m_{pl} - \Gamma^p_{il} \Gamma^m_{pk}$$

erfüllt bereits die Bedingungen,

dass

- 1) die ersten Ableitungen quadratisch auftreten
- 2) die zweiten Ableitungen linear !
- 3) ist er natürlich ein Riemann- Tensor.

Was nicht übereinstimmt ist der rang !

Die Forderungen werden dann natürlich auch vom Ricci- Tensor und dem Krümmungsskalar erfüllt :

$$R^m_{iml} = R_{il} = g^{km} R_{kiml}$$

$$R = R^\mu_\mu$$

Alle Indices laufen hier von 0..3

Wegen

$$R_{\sigma\mu\rho\nu} + R_{\sigma\nu\mu\rho} + R_{\sigma\rho\nu\mu} = 0$$

$$R_{\sigma\mu\rho\nu} - R_{\sigma\nu\rho\mu} + R_{\sigma\rho\nu\mu} = 0$$

$$\Rightarrow R_{\sigma\mu\rho\nu} = R_{\sigma\nu\rho\mu} - R_{\sigma\rho\nu\mu}$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

der Ansatz

$$G_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu}$$

erfüllt also die Forderungen an Riemann- Tensor, Zahl der ersten / zweiten Ableitung und Symmetrie !

Wir werden die Konstanten a und b) nun aus den Forderungen

$$1) G_{\mu\nu}^{;\nu} = 0$$

Für ein schwaches, stationäres Feld sollte sich der Grenzfall ergeben, also

$$2) G_{00} \approx \Delta g_{00}$$

herleiten

Zur Auswertung des ersten Falls betrachten wir die Bianchi- Identitäten:

$$R_{\sigma\mu\rho\nu;\lambda} + R_{\sigma\mu\lambda\rho;\nu} + R_{\sigma\mu\nu\lambda;\rho} = 0$$

$$\Rightarrow R_{\sigma\mu\rho\nu;\lambda} - R_{\sigma\mu\rho\lambda;\nu} - R_{\sigma\mu\lambda\nu;\rho} = 0$$

Also:

$$\Rightarrow R_{\mu\nu;\lambda} - R_{\mu\lambda;\nu} - R^{\rho}_{\mu\lambda\nu;\rho} = 0$$

$$\Rightarrow R_{;\lambda} - 2R^{\rho}_{\lambda;\rho} = 0$$

Wobei zunächst über

$\sigma = \rho$ kontrahiert wurde und anschließend über

$\mu = \nu$!

$$R_{;\lambda} - 2R^{\rho}_{\lambda;\rho} = 0$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu}^{;\nu} = \frac{R_{;\mu}}{2}$$

Damit und wegen

$$g_{\mu\nu}^{;\nu} = 0$$

folgt wegen $G_{\mu\nu}^{;\nu} = 0$ für $G_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu}$

dass:

$$G_{\mu\nu}^{;\nu} = aR_{\mu\nu}^{;\nu} + bg_{\mu\nu}^{;\nu}R + bg_{\mu\nu}R^{;\nu} = \left(\frac{a}{2} + b\right)R_{;\mu} = 0$$

Also haben wir: $a = -2b$

oder $R_{;\mu} = 0$. Daraus würde jedoch folgen, dass $T_{;\mu} = 0$.

Dies ist jedoch für eine vorgegebene, inhomogene Massenverteilung in der Regel nicht der Fall !

Also nehmen wir an:

$$a = -2b$$

und:

$$G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right)$$

Der verbleibende Konstante gewinnen wir aus dem newtonschen Grenzfall. Betrachten wir schwache Felder

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

und nichtrelativistische Geschwindigkeiten, so dass

$$|T_{ik}| \ll T_{00}$$

$$\Rightarrow |G_{ik}| \ll |G_{00}|$$

Zunächst berechnen wir die Spur von $G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right)$, also die Kontraktion:

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = a(R - 2R) = -aR \approx G_{00} = a\left(R_{00} - \frac{R}{2}\right)$$

also : $R = -2R_{00}$

$$G_{00} = a\left(R_{00} - \frac{R}{2}\right) \approx 2aR_{00}$$

Für schwache Felder fallen die in $h_{\mu\nu}$ quadratischen Terme im Krümmungstensor weg und wir schreiben

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}$$

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

für schwache, stationäre Felder entfällt die Zeitabhängigkeit und wir erhalten daraus:

$$R_{00} = -\frac{\partial \Gamma^i_{00}}{\partial x^i}$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

Jetzt vergleichen wir

$$G_{00} = a\left(R_{00} - \frac{R}{2}\right) \approx 2aR_{00}$$

mit

$$G_{00} \approx \Delta g_{00}$$

Also muss $a=-1$

Also haben wir die **Einsteinschen Feldgleichungen**

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right) = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Diese Gleichungen wurde 1915 von Albert Einstein aufgestellt. Zusammen mit

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda$$

der Bewegungsgleichung, sind dies die Grundgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie !

Durch Kontraktion folgt:

$$\left(R^\mu_\mu - \frac{R}{2}\delta^\mu_\mu\right) = -\frac{8\pi G}{c^4}T^\mu_\mu$$

$$\Rightarrow R = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

$$\Rightarrow \left(R_{\mu\nu} - \frac{4\pi G}{c^4}Tg_{\mu\nu}\right) = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right)$$

Einsteinsche Feldgleichungen

Ohne Beweis stellen wir nun fest, dass die EFG durch die aufgestellten 4 Forderungen eindeutig festgelegt sind. Um dies zu zeigen, begibt man sich am besten in ein lokales Inertialsystem mit

$$\Gamma = 0$$

Dann ist

$G_{\mu\nu}$ alleine aus den parziellen Ableitungen des Christoffelsymbols zu bilden !

Die Forderung 1) nach einem Riemannschen Tensor lässt allerdings nur eine ganz bestimmte Kombination zu. Dies sind gerade die ersten beiden Terme auf der rechten Seite von

$$R^m{}_{ikl} = \frac{\partial \Gamma^m{}_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^m{}_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^p{}_{ik}\Gamma^m{}_{pl} - \Gamma^p{}_{il}\Gamma^m{}_{pk}.$$

Das bedeutet, der Krümmungstensor ist der allereinzige Tensor, aus dem ein Ausdruck gebildet werden kann, der linear in der zweiten Ableitung ist.

Um zu alternativen Gravitationstheorien zu kommen, muss man also von den gestellten Forderungen abweichen. Die erste Möglichkeit wäre, einen in $g_{\mu\nu}$ linearen Term zuzulassen. Daneben wäre die Einführung zusätzlicher Felder neben $g_{\mu\nu}$ möglich. Im Folgenden wollen wir beide Möglichkeiten diskutieren.

Kosmologische Konstante

Eine naheliegende Verallgemeinerung ist der angesprochene lineare Term in $g_{\mu\nu}$.

Dann lauten die Feldgleichungen

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

notwendig ist lediglich, dass Λ ein Riemann- Skalar ist. Die restlichen Bedingungen werden damit erfüllt.

Allerdings folgt dann für den Newtonschen Grenzfall:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho + \frac{c^2}{2}\Lambda$$

Wie uns bei den Maxwellgleichungen bereits begegnete, können wir die rechte Seite als
 $\Delta\Phi = 4\pi G(\rho + \rho_{vac.})$

$$\rho_{vac.} = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda$$

schreiben.

Somit entspricht die Konstante Λ der Energiedichte des leeren Raums (Vakuum).

Klar ist: der Zusatzterm in den Feldgleichungen muss so klein sein, dass er nicht im Widerspruch zur empirischen Verifikation der Newtonschen Feldgleichungen im Sonnensystem steht.

Das bedeutet, die Länge $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ muss groß gegen die Abmessungen des Sonnensystems sein:

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \gg \text{Durchmesser des Sonnensystems}$$

Ein möglicher Wert wäre $\Lambda^{-\frac{1}{2}} = 10^7 \text{ Lj}$. Damit würde der Term in unserem Sonnensystem keine und in der Milchstraße mit 100.000 Lichtjahren Durchmesser nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Jedoch könnte er in der Dynamik des Kosmos, der sich auf 10 Mrd. Lichtj. erstreckt wesentlichen Einfluss ausüben.

Man bezeichnet Λ als kosmologische Konstante. Wir werden diese Modifikation der Feldgleichungen bei der Behandlung der kosmologischen Modelle diskutieren.

Brans- Dicke- Theorie

Alle ernsthaft diskutierten Alternativen gehen heute vom Äquivalenzprinzip aus.

Hieraus folgt die ART- Bewegungsgleichung.

Die Metrik legt also die Bewegung der Körper fest.

Daneben muss man eine Verbindung zwischen der Metrik (dem Feld $g_{\mu\nu}$) und den Quellen der Gravitation herstellen. In diesem Zusammenhang könnten zusätzliche Felder eingeführt werden. Die einfachste Möglichkeit wäre die zusätzliche Einführung eines skalaren Feldes Ψ . Eine solche Skalar- Tensor- Theorie wurde von Brans und Dicke ausgearbeitet.

Als motivierende Idee betrachtet man den Zusammenhang

$$GM_K \sim c^2 R_K$$

zwischen der Masse und der Ausdehnung eines Körpers. (Masse Mk, Radius Rk).

Dabei ergibt sich dieser Zusammenhang aus der Bedingung, dass das Gravitationsfeld eines Objekts relativistisch ist, also

$$\Phi \sim \frac{GM_K}{R_K} \sim c^2$$

Ausgehend von diesem Zusammenhang liegt der Gedanke nahe, dass die Stärke G der Gravitationswechselwirkung durch die vorhandenen Massen des Kosmos bedingt wird. Dieser Gedanke kann als Erweiterung des Machschen Prinzips angesehen werden.

Wenn die Stärke des Gravitationsfeldes tatsächlich durch die Massen des Kosmos beeinflusst wird, dann sollte G keine Konstante sein. In der Skalar- Tensor- Theorie wird G durch ein skalares, langreichweitiges Feld Ψ ersetzt, welches durch die vorhandenen Massen bestimmt wird. Die einfachste Kovariante Feldgleichung für Ψ lautet

$$\Psi^{\nu}_{;\nu} = T = T^{\nu}_{\nu}$$

Dimensionsmäßig ergibt dies

$$\frac{\Psi}{R_K^2} \sim \frac{M_K c^2}{R_K^3}$$

Der Vergleich mit $GM_K \sim c^2 R_K$ zeigt dann:

$$\Psi \sim \frac{1}{G}. \text{ Man wählt die Konstanten in der feldgleichung so, dass}$$

$$G \sim \frac{1}{\langle \Psi \rangle}$$

Im Sonnensystem wäre das durch die kosmischen Massen hervorgerufene Feld $\Psi(\bar{r}, t)$ quasi konstant und könnte durch den Mittelwert 1/G ersetzt werden.

Die Skalar- Tensor- Theorie von Brans und Dike führt zu gekoppelten Feldgleichungen für $g_{\mu\nu}$ und $\Psi(\bar{r}, t)$.

Die Theorie enthält einen dimensionslosen Parameter ω mit der Bedeutung

$$\omega = \frac{\text{Einf luss } g_{\mu\nu}}{\text{Einf luss } \Psi(\bar{r}, t)}. \text{ Dies ist unendlich für den ART- Grenzfall und Ordnung1 für Fälle, in denen}$$

$\Psi(\bar{r}, t)$ wichtig wird. Die Brans- Dicke - Theorie legt den Parameter ω numerisch nicht fest. Sie enthält die ART als Grenzfall für $\omega \rightarrow \infty$. Dabei bedeutet $\omega = O(1)$, dass die vorgenommene Modifikation der Einsteinschen Feldgleichungen physikalisch wichtig ist. Nachdem neuere Experimente den möglichen Parameterbereich auf $\omega > 500$ einschränken, ist die Brans- Dicke- Theorie heute uninteressant.

Struktur der Feldgleichungen

Wir diskutieren nun einige formalen Eigenschaften der Einsteinschen Gleichungen. Für schwache Felder wird er Energie- Impuls- Tensor des Gravitationsfeldes aufgestellt. In diesem Grenzfall kann man die Feldgleichungen linearisieren und ihre allgemeine Lösung kann angegeben werden.

Anzahl der unabhängigen Gleichungen

Die Tensoren $G_{\mu\nu}$ und $T_{\mu\nu}$ sind symmetrisch und haben daher 10 unabhängige Komponenten. Die Feldgleichungen $\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right) = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ sind also 10 algebraisch unabhängige Gleichungen für die Größe $g_{\mu\nu}$. Man könnte nun meinen, dass diese Gleichungen ausreichen, um die 10 unabhängigen Komponenten des gesuchten Feldes $g_{\mu\nu}(x)$ zu bestimmen. Dies ist aber nicht der Fall, da wegen $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ 4 Bedingungen an die 10 Komponenten von $G_{\mu\nu}$ gestellt werden !

Das bedeutet, die Feldgleichungen können die 10 Funktionen $g_{\mu\nu}(x)$ nicht eindeutig festlegen. Die Unbestimmtheit in der Lösung $g_{\mu\nu}(x)$ ist eine unbedingte Folge der Kovarianz der Feldgleichungen. Denn aus einer Lösung $g_{\mu\nu}(x)$ ergibt sich durch eine allgemeine Koordinatentransformation

$x^\mu \rightarrow x'^\mu$ wiederum eine Lösung $g'^{\mu\nu}(x')$.

Eine Koordinatentransformation entspricht aber gerade der Wahl von 4 Funktionen $x^\mu = x^\mu(x')$.

Das heißt, die Feldgleichungen können und dürfen nur $10 - 4 = 6$ Funktionen festlegen.

Triviales Beispiel: die freien Feldgleichungen $R^{\mu\nu} = 0$ werden sowohl durch $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ gelöst, als auch

$$\text{durch } g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -\left(x^1\right)^2 & \\ & & & -\left(x^1 \sin x^2\right)^2 \end{pmatrix}$$

Dies ist gerade die Wahl von kartesischen und Kugelkoordinaten !

Man kann diese Freiheit nutzen, um die Lösung eines Problems durch die Wahl geeigneter Koordinaten zu vereinfachen.

Auch in der Edynamik sind die Potenziale nicht eindeutig durch die Feldgleichungen festgelegt.

Die Maxwellgleichungen

$$F^{\alpha\beta}_{,\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\beta$$

sind vier algebraisch unabhängige Gleichungen $\beta = 0,1,2,3$ für die vier unbekannten Felder

A^α dar. Für beliebige A^α erfüllen die Felder jedoch die Bedingung $F^{\alpha\beta}_{,\alpha,\beta} = 0$.

Also sind auch in $F^{\alpha\beta}_{,\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\beta$ nur $4-1=3$ funktional unabhängige Gleichungen enthalten !

Die Bedingungen $F^{\alpha\beta}_{,\alpha,\beta} = 0$ und $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ entsprechen den jeweiligen Erhaltungssätzen für die Quellterme der Feldgleichung.

In der ART wie in der Elektrodynamik gibt es Transformationen in den Potenzialen $g_{\mu\nu}, A_\alpha$, die die relevanten Größen $G^{\mu\nu}$ und $F^{\alpha\beta}_{,\alpha}$ in den Feldgleichungen kovariant lassen.

In der Edynamik gilt dies ja schon für die Felder $F^{\alpha\beta}$ selbst.

Dies sind in einem Fall die allgemeinen Koordinatentransformationen und im anderen Fall die Eichtrasos. Man kann diese Freiheit dazu nutzen, um durch eine geeignete Eichbedingung die Feldgleichungen zu entkoppeln.

In der Elektrodynamik geschieht dies durch die Lorentzezeichung

$$A^{\alpha}_{,\alpha} = 0$$

$$\text{Damit wird } F^{\alpha\beta}_{,\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\beta \text{ zu } \# A^\beta = \frac{4\pi}{c} j^\beta$$

also zu entkoppelten Feldgleichungen. Analog hierzu werden wir die Freiheit in den $g_{\mu\nu}$ benutzen, um die linearisierten Feldgleichungen zu entkoppeln !

Möglichkeiten zur Lösung der Feldgleichungen

Da die Feldgleichungen nichtlinear sind, gibt es kein Standardverfahren zur Lösung dieser Gleichungen bei gegebenen Quellen (im Gegensatz zu den retardierten Potenzialen der Elektrodynamik).

Jedoch gibt es:

- exakte Lösungen unter vereinfachten Annahmen (wie Isotropie und Zeitunabhängigkeit)
- Lösungen der linearisierten Feldgleichungen für schwache Felder
- Systematische Entwicklungen der Feld- und Bewegungsgleichungen für schwache Felder und langsam bewegte Teilchen !

Die Schwarzschildlösung ist die erste exakte (nichttriviale) Lösung. Weitere Lösungen folgen !
Gravitationswellen werden ausschließlich aus den linearisierten Feldgleichungen gefolgert !

Als letztes gibt es die Möglichkeit der **Post- Newtonschen Näherung**

Für die Geschwindigkeiten, die uns in Planeten- und Doppelsternsystemen begegnen gilt:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\Phi}{c^2}.$$

In niedrigster Näherung (linear in Φ) erhält man dann den Newtonschen Grenzfall. In der nächsten Ordnung folgt die erste Post- Newtonsche Näherung. Wir behandeln dieses Näherungsschema nicht explizit. Physikalische Effekte werden aber meist in dieser Näherung angegeben.

Energie- Impuls- Tensor des Gravitationsfeldes

Bei der Ableitung der Feldgleichungen ging ein, dass das Feld selbst eine Energieform darstellt und damit auch selbst eine Quelle des Feldes ist. Formal äußert sich das in einer Nichtlinearität der Feldgleichungen.

Für den Fall kleiner Abweichungen vom Minkowskitensor

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

mit $|h_{\mu\nu}| \ll 1$

kann man $G^{\mu\nu}$ nach Potenzen von $h_{\mu\nu}$ entwickeln. Die Terme erster Ordnung ergeben einfach eine lineare Wellengleichung. Bei Vernachlässigung der Terme 3. Ordnung ergeben die Terme 2. Ordnung den Energie-Impuls- Tensor des Gravitationsfeldes:

Wir bezeichnen die Terme verschiedener Ordnung in $h_{\mu\nu}$ gemäß

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots$$

$$\text{Natürlich ist } R_{\mu\nu}^{(0)} = 0$$

Wir haben gefunden, dass

$$R_{mikp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^i \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^i \partial x^k} \right) + g_{rs} \left(\Gamma^r{}_{km} \Gamma^s{}_{ip} - \Gamma^r{}_{pm} \Gamma^s{}_{ik} \right)$$

Also in linearer Ordnung in h:

$$\begin{aligned} R_{\rho\mu\sigma\nu} &= \frac{1}{2} (g_{\rho\sigma;\mu;\nu} + g_{\mu\nu;\rho;\sigma} - g_{\mu\sigma;\nu;\rho} - g_{\rho\nu;\sigma;\mu}) + O(h^2) \\ \Rightarrow R_{\mu\nu}^{(1)} &= R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\# h_{\mu\nu} + h^{\rho}{}_{\rho;\mu;\nu} - h^{\rho}{}_{\mu;\rho;\nu} - h^{\rho}{}_{\nu;\rho;\mu}) \end{aligned}$$

Die betrachteten Koordinaten sind Fast- Minkowski- Koordinaten.

Somit können wir mit

$$\partial^{\mu} \partial_{\mu} = \# + O(h) \text{ den d'Alembertoperator } \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \# einführen.$$

Der Krümmungsskalar ist in erster Ordnung in h durch

$$R^{(1)} = \eta^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}^{(1)} \text{ gegeben.}$$

Terme 2. Ordnung in h

Diese Terme werden zu einer Größe $t_{\mu\nu}$ zusammengefasst:

$$R_{\mu\nu}^{(2)} - \left(\frac{R g_{\mu\nu}}{2} \right)^{(2)} = \frac{8\pi G}{c^4} t_{\mu\nu}$$

Bringen wir diese auf die rechte Seite der Feldgleichungen, dann lauten die Einsteinschen Gleichungen in 2. Ordnung in h:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \left(\frac{R^{(1)}}{2} \right) \eta_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})$$

Dies ist eine in $h_{\mu\nu}$ lineare Wellengleichung mit den Quelltermen

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$$

Das heißt, wir können $\tau_{\mu\nu}$ als Energie- Impuls- Tensor auffassen wobei $t_{\mu\nu}$ der Beitrag des Gravitationsfeldes ist !

Dies ergibt sich aus folgender Überlegung:

$$\text{Wegen } G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \text{ gilt für die linke Seite von } R_{\mu\nu}^{(1)} - \left(\frac{R^{(1)}}{2} \right) \eta_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})$$

in der betrachteten Ordnung:

$$\left(R_{\mu\nu}^{(1)} - \left(\frac{R^{(1)}}{2} \right) \eta_{\mu\nu} \right)_{,\nu} = 0$$

Also gilt in den benutzten Fast- Minkowski- Koordinaten $(\tau_{\mu\nu})_{,\nu} = 0$.

In bekannter Weise folgt hieraus für ein abgeschlossenes System:

$$P_{\mu} = \int d^3 r \tau_{\mu 0} = \text{const.}$$

dieser Term also zeitlich konstant ist. Daraus folgt die Interpretation von $\tau_{\mu\nu}$ als Energie-/ Impuls- Tensor. Da $T_{\mu\nu}$ alle nichtgravitativen Anteile enthält, ist $t_{\mu\nu}$ notwendigerweise der Energie- Impuls- Tensor des Gravitationsfeldes !

$$t_{\mu\nu}^{grav} = \frac{c^4}{8\pi G} \left(R_{\mu\nu}^{(2)} - \left(\frac{Rg_{\mu\nu}}{2} \right)^{(2)} \right)$$

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Linearisierte Feldgleichungen

Wir stellen die Einsteinschen Feldgleichungen in erster Ordnung in h auf. Die Lösung der resultierenden linearisierten Feldgleichungen kann in der Form der retardierten Potenziale angegeben werden:

Mit

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\# h_{\mu\nu} + h^\rho{}_{\rho;\mu;\nu} - h^\rho{}_{\mu;\rho;\nu} - h^\rho{}_{\nu;\rho;\mu})$$

werden die Feldgleichungen in erster Ordnung in h zu

$$\# h_{\mu\nu} + h^\rho{}_{\rho;\mu;\nu} - h^\rho{}_{\mu;\rho;\nu} - h^\rho{}_{\nu;\rho;\mu} = 2(R_{\mu\nu}^{(1)} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}^{(1)}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

Mit der linken Seite ist auch die rechte erster Ordnung in h

Daher ist $g_{\mu\nu}$ durch $\eta_{\mu\nu}$ zu ersetzen.

Da die Feldgleichungen kovariant sind, steht es uns frei, eine Koordinatentransformation durchzuführen!

Da wir jedoch $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ voraussetzen, sind dabei nur kleine Abweichungen von den Minkowskikoordinaten zugelassen.

Also führen wir eine Trafo der Art

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \text{ mit kleinem } \varepsilon \text{ durch.}$$

Aus

$$g'^{\mu\nu} = \alpha^\mu{}_\lambda \alpha^\nu{}_\kappa g^{\lambda\kappa} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa} g^{\lambda\kappa}$$

leiten wir die Trafo der

$h^{\mu\nu}$ ab. Zunächst müssen wir beachten, dass in $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ verglichen mit $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ein Minuszeichen auftritt, da Index oben der Metrik = Inverses der Metrik mit Index unten, also

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\kappa} = \delta^\mu{}_\kappa$$

Man überprüft leicht, dass $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ diese Bedingung in erster Ordnung in h erfüllt!

Also:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda + \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\lambda}$$

Setzen wir dies in die Trafo $g'^{\mu\nu} = \alpha^\mu{}_\lambda \alpha^\nu{}_\kappa g^{\lambda\kappa} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa} g^{\lambda\kappa}$ ein, so folgt:

$$g'^{\mu\nu} = \left(\delta^\mu{}_\lambda + \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\lambda} \right) \left(\delta^\nu{}_\kappa + \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x^\kappa} \right) (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})$$

Dies ergibt gerade

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varepsilon^\nu}{\partial x_\mu}$$

Da dies bereits die erste Ordnung in h ist, können wir die Indices mit $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu}$ nach unten oder oben ziehen.

Damit gilt auch

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu}$$

In Analogie zur Elektrodynamik wird diese Transformation der Potenziale $g_{\mu\nu}$ als Eichtransformation bezeichnet. Die Koordinatentransformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ ändert nicht die Form der Feldgleichungen $\#h_{\mu\nu} + h^\rho{}_{\rho;\mu;\nu} - h^\rho{}_{\mu;\rho;\nu} - h^\rho{}_{\nu;\rho;\mu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$.

Die Möglichkeit, vier Funktionen $\varepsilon_\mu(x)$ frei zu wählen, erlaubt es, folgende vier Bedingungen an die Potenziale $h_{\mu\nu}$ zu stellen:

$$2h^\mu{}_{\nu;\mu} = h^\mu{}_{\mu;\nu}$$

Die Bedeutung der hierdurch festgelegten Koordinaten ergibt sich aus den physikalischen Abständen $ds^2 = (h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu$.

Ebenso wie in der Elektrodynamik sind physikalische Resultate von der Eichung (also von den benutzten Koordinaten) unabhängig. Wir setzen die Eichbedingungen $2h^\mu{}_{\nu;\mu} = h^\mu{}_{\mu;\nu}$ in

$$\#h_{\mu\nu} + h^\rho{}_{\rho;\mu;\nu} - h^\rho{}_{\mu;\rho;\nu} - h^\rho{}_{\nu;\rho;\mu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right) \text{ und erhalten die}$$

entkoppelten linearisierten Feldgleichungen:

$$\#h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Struktur wie die Feldgleichungen $\#A^\beta = \frac{4\pi}{c} j^\beta$

$$h_{\mu\nu}(\bar{r}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int d^3 r' \frac{S_{\mu\nu}\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c}\right)}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu}$$

Die Bedeutung des Zeitarguments in $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu}$ ist bekannt: Die Quellterme bei \bar{r}' beeinflussen das

Feld an der Stelle \bar{r} nur zu einer um $\frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c}$ späteren Zeit. Wenn sich die Quellterme an einer Stelle ändern,

dann breitet sich die dadurch hervorgerufene Störung des Felds mit Lichtgeschwindigkeit aus.

Formal sind auch die avancierten Potenziale Lösungen der linearisierten Feldgleichungen. Sie verletzen jedoch die Kausalitätsbedingung!

Isotrope statische Metrik

Der Teil VI befasst sich mit statischen Gravitationsfeldern. Die betrachteten Felder sind mit dem Coulombfeld einer homogen geladenen Kugel oder mit dem Magnetfeld einer rotierenden Kugel zu vergleichen.

Nach der Ableitung der statischen isotropen Metrik (Kapitel 23 und 24) diskutieren und berechnen wir eine Reihe von Effekten. Diese führen zu Vorhersagen, die im Sonnensystem überprüft werden können.

Form der Metrik

Viele Anwendungen beziehen sich auf das Gravitationsfeld der Erde und der Sonne. Sehen wir von der Drehung mit $v^i \ll c$ und der geringfügigen Abplatten ab, so sind die kugelsymmetrisch und statisch. Also sollte eine Lösung der Feldgleichungen existieren, die auch kugelsymmetrisch und statisch. Kugelsymmetrisch = isotrop ! Lösung wären passende $g_{\mu\nu}$, die die Feldgleichungen erfüllen.

Zuerst braucht man eine allgemeine Form einer isotropen statischen Metrik auf. Die Form ist dann für Schwarzschild der Ansatz.

für $r \rightarrow \infty$ geht das Garvapot. gegen Null ($\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$) Die gesuchte Metrik muss also asymptotisch gegen die Minkowski-Metrik gehen:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

$r \rightarrow \infty$

Hierin sind r, ϑ, φ Kugelkoordinaten. Die Zeit ist t .

Im Gravitationsfeld könnten nun Koeffizienten auftreten, die die Koordinaten "verzerren". Da das Gravitationspotenzial UND die Wahl der Koordinaten isotrop ist, können auch diese Koeffizienten nur vom Betrag r abhängen:

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - C(r)r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

Dass die Koeffizienten von t abhängen scheidet wegen Zeitunabhängigkeit aus. Es darf nicht abhängig davon sein, in welche Richtung die Winkel variiert werden. Da aber $\vartheta \pm d\vartheta$ auch mit unterschiedlichem Vorzeichen in das Differential eingeht, können die Koeffizienten nicht linear von den Winkeln abhängen. Einen möglichen Term der Form $D(r)drdt$ kann man durch Einführung einer neuen Zeitvariable

$t' = t + \Psi(r)$ eliminieren. Die Freiheit der Koordinatenwahl erlaubt eine neue Radiusvariable, so dass man einen Koeffizienten auf 1 normieren kann.

Allgemeiner also:

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

$$B(r) \rightarrow 1$$

$$A(r) \rightarrow 1$$

letzteres für r gegen unendlich !

Der Ansatz heißt Standardform.

Was bedeuten die Koordinaten ?

Freiheit andere Koordinaten zu wählen habne wir jetzt nur für t (Term $drdt$ eliminiert) und für r genutzt. Die Winkelkoordinaten bedeuten in $ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$ noch das alte.

Man kann die Winkel allerdings durch Fixsterne praktisch fixieren. Der Grenzfall, der Minkowskimetrik entspricht dem Zustand, den wir als ruhend gegen den Fixsternhimmel ansehen würden. Das bedeutet, z.B., dass in der Minkowskimetrik, also mit $A(r) = B(r) = 1$ auch die Zeit dt die Eigenzeit einer im Unendlichen ruhenden Uhr ist. Wegen dem ist dann auch r die übliche Abstandsordinate, wenn man ins unendliche gelangt ist, die Skalierung sollte deshalb asymptotisch gegen eine solche Abstandsordinate gehen.

Durch r sind Flächen charakterisiert. Das sind die Orte $\int_0^r dr' A^{1/2}$, also Orte festen Radius, die den gleichen Abstand zum Zentrum haben. Auf all denen muss die Lösung der Metrik identisch sein. Der Inhalt einer solchen Fläche ist $4\pi r^2$. Allerdings ist der Abstand der Punkte auf einer Kugeloberfläche mit Radius r nicht überall r zum Zentrum. Das heißt, die Oberflächen haben nicht alle Eigenschaften von Kugeloberflächen im euklidischen Raum !

ROBERTSONENTWICKLUNG

Wir haben bereits ohne Lösung der Feldgleichungen eine Entwicklung der Metrik für schwache Felder außerhalb der Massenverteilung selbst angegeben. Das Feld kann von der Gesamtmasse des betrachteten Objekts (Erde oder Sonne), vom Betrachten Ort r , von G und c als Konstanten abhängen.
 $A(r)$ und $B(r)$ sind dimensionslos und müssen von einer dimensionslosen Kombination der möglichen Parameter abhängen.

Klar ist, die Wahl der Naturkonstanten unsererseits ist eh willkürlich. Je nach der Festlegung dieser Naturkonstanten in einem koordinaten system gegen einen vergleichbaren Maßstab beinhaltet, dass wir eine Vorstellung vom Seins des Dings an sich implizieren, die die Physik allerdings nicht sucht. Statt dessen müssen wir uns kümmern, dass unsere Parameter von der richtigen Dimension sind, also

$$B(r) = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{c^2 r} \right)^2 + \dots$$

$$A(r) = 1 + 2\gamma \frac{GM}{c^2 r} + \dots$$

dies ist eine Entwicklung. Schnell konvergent ist sie, wenn

$$\frac{GM}{c^2 r} \ll 1 ..$$

Für diese Fälle allein kann die Lösung der Metrik und die raumzeitliche Vorstellung und Vorschriften, die man gewinnt, so aussehen, wie unser späteres Ergebnis !

Die Entwicklung für $B(r)$ beginnt mit

$$B(r) = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} \text{ für den Newtonschen Grenzfall. Eine Abweichung vom Koeffizienten 2 ist natürlich}$$

denkbar, wäre aber experimentell kaum festzustellen, weil die Masse von Himmelskörpern wie Sonne/ Erde praktisch über das asymptotische Gravitationsfeld bestimmt wird.

Der Ansatz war ursprünglich für die Isotrope Form mit $H=1-2x+2Beta x^2\dots$ und $J=1+2Gamma x$ angesetzt und die restlichen Faktoren haben historische Gründe.

Wesentlich ist nur, dass die Entwicklung mit

β, γ zwei Koeffizienten hat, nämlich A und B !

Sinn der Robertsonentwicklung:

Wir machen uns klar dass wir hier alles plattlinearisieren. jedoch reden wir von Effekten der Größenordnung

$$\frac{GM}{c^2 r} \ll \frac{GM}{c^2 R_O} \approx 2 \cdot 10^{-6}. \text{ Das ist vergleichbar mit den relativistischen SRT- Effekten der Größenordnung}$$

100 m/s. Also werden in erster , sehr guter Näherung nur die Terme mit den dimensionslosen Parametern β, γ überleben.

Die Auswertung von Experimenten ergeben dann Werte für diese Parameter, die mit den theoretischen Vorhersagen verglichen werden können. Für die ART gilt:

$$\begin{aligned} \beta &= 1 \\ \gamma &= 1 \end{aligned} \quad (\text{ART})$$

und für Newton:

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Newton})$$

Die ART - Werte folgen allerdings erst aus der Schwarzschildlösung !

In der Newtonschen Theorie wird ein dreidim. euklidischer Raum verwendet, also

$$A(r) = 1$$

$$\gamma = 0$$

$$B(r) = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r}$$

muss wegen dem newtonschen Grenzfall

$$g_{00} = B(r) = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} \approx 1 + 2 \frac{\Phi}{c^2}$$

gelten.

Also:

$$\beta = 0.$$

Die Newtonsche Himmelmechanik setzt also Beta und Gamma auf Null !

Als Bewegungsgleichungen der Ableitung der Gesetze der Himmelsmechanik dient der nichtrelativistische Fall der Bewegungsgleichungen ($v \ll c$) als Grenzfall.

In einer Korrektur, die über diese Vereinfachung hinausgeht, den Newtonschen Fall, sind die Terme der Robertsonentwicklung anzusetzen. Alle zusätzliche Information ist in der Metrik enthalten.

Also sind alle Korrekturen mit

$$B(r) = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{c^2 r} \right)^2 + \dots$$

berücksichtigt,

$$A(r) = 1 + 2\gamma \frac{GM}{c^2 r} + \dots$$

es sei denn sie sind quadratisch kleiner !

Wegen $v^2 \sim \frac{GM}{c^2 r}$ müssen in den bewegungsgleichungen gleichzeitig die Terme der Ordnung $\frac{v^2}{c^2}$

berücksichtigt werden. Für nichtrelativistische Teilchen muss die Entwicklung der Koeffizienten oben für $g_{00} = B(r)$ um eine Ordnung weiter geführt werden als für $g_{11} = A(r)$, denn die Terme

$$g_{00}(u^0)^2 \sim g_{00}c^2 \text{ und } g_{11}(u_1)^2 = g_{11}v^2 \text{ sollen in gleicher Ordnung in } v \text{ behandelt werden !}$$

Christoffelsymbole

Ricci Tensor

Schwarzschildmetrik

Wir bestimmen Gravitationspotenziale $g_{\mu\nu}$ außerhalb Massenverteilung, isotrop, statisch !

Nun setzen wir die $g_{\mu\nu}$ der Standardform in die freien Feldgleichungen, also $R_{\mu\nu} = 0$ ein und lösen die Feldgleichungen !

Vergleich mit der Elektrodynamik

Beispiel: EDyn !

Im sphärischen, statischen Fall ist die 4- Stromdichten von der Form $j^\mu = (c\rho_e(r), 0, 0, 0)$

Für das Viererpotenzial wird

$$A^\mu = (\Phi(r), 0, 0, 0)$$

Also: Wir haben nur Ladungen, keine Ströme !

Dies ist vergleichbar mit dem Ansatz der Standardform für die $g_{\mu\nu}$. Die Ladungsverteilung sei räumlich

begrenzt, also $\rho_e = 0$ für $r > r_0$!

Außerhalb der Ladungsverteilung sind die freien Maxwellgleichungen als Feldgleichungen mit diesem Ansatz zu lösen:

$$F^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d^2(r\Phi)}{dr^2} = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{a}{r} + b$$

Die Integrationskonstante a wird als Gesamtladung identifiziert. Die Konstante b kann willkürlich auf Null gesetzt werden.

Im Folgenden führen wir analoge Schritte in der ART vor:

Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen

Ausgangspunkt: statische, sphärische, begrenzte Massenverteilung:

$$\rho(r) = \begin{cases} \neq 0 & (r \leq r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases}$$

Der Druck innerhalb der Massenverteilung soll die gleiche Form haben. Das mittlere Geschwindigkeitsfeld in der Massenverteilung ist im statischen Fall gleich

$$u^\mu = \{u^0, 0, 0, 0\}$$

$$u^0 = \text{const}$$

Damit ist der Energie- Impuls- Tensor, also der Quellterm der Feldgleichungen zeitunabhängig und sphärisch ! Daher sollte es auch eine statische und isotrope Lösung geben.

Um sie zu finden, machen wir den Ansatz $\rho(r) = \begin{cases} \neq 0 & (r \leq r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases}$ für die Massenverteilung

$$\text{mit } g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} B(r) & & & \\ & -A(r) & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2 \sin^2 \Theta \end{pmatrix} (r \leq r_0)$$

Außerhalb der Massenverteilung

$$(r > r_0) \text{ muss gelten } R^{\mu\nu} = 0$$

Denn:

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = 0 \text{ außerhalb der Massenverteilung}$$

$$\Rightarrow \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) = 0 = g^{\nu\mu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) = R - 2R = -R$$

$$\Rightarrow R = 0$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$$

Die Quellterme treten hierbei nicht mehr explizit auf. Ihre Eigenschaften, sphärisch, statisch sind aber Voraussetzung für den Lösungsansatz !

Also unseren Ansatz

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} B(r) & & & \\ & -A(r) & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2 \sin^2 \Theta \end{pmatrix} (r \leq r_0)$$

Der Ansatz löst die Gleichung $R^{\mu\nu} = 0$ eindeutig. Durch eine Koordinatentrafo kommt man zu einer anderen, physikalisch gleichwertigen Lösung. Dies entspricht einer Eichtransformation wie im Fall der Elektrodynamik ! Daneben gibt es aber auch physikalisch andere Lösungen. beispielsweise könnte es zusätzlich zur statischen Lösung für die Metrik, also in der EDynamik für die obige Lösung der Maxwellgleichungen noch eine Welle geben.

Für den metrischen Tensor haben wir die $R_{\mu\nu}$ unter der leeren Überschrift oben ausgerechnet !

Für

$\mu \neq \nu$ ist die Lösung $R_{\mu\nu} = 0$ trivial erfüllt !

Wegen

$$R_{22} = 0 \Rightarrow R_{33} = 0$$

Also reduziert sich

$$R_{\mu\nu} = 0 \text{ auf}$$

$$R_{00} = R_{11} = R_{22} = 0$$

Aus den Darstellungsgleichungen für die Einträge des Riccitorsors gewinnen wir:

$$\begin{aligned} \frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} &= -\frac{1}{rA} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dr} \ln(AB) &= 0 \\ \Rightarrow A(r)B(r) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Aus dem Newtonschen Grenzfall folgt, dass für $r \rightarrow$ unendlich A und B gleich 1 werden. Also ist die Konstante gleich 1 !

Also:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}$$

Setzt man dies in die Ausdrücke für R_{11}, R_{22} ein, so folgt:

$$R_{22} = -1 + rB' + B = 0$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{rB} = \frac{rB'' + 2B'}{2rB} = \frac{1}{rB} \frac{dR_{22}}{dr} = 0$$

Also verschwindet R_{11} automatisch mit R_{22}

Wir haben also nur eine DGL zu lösen, nämlich

$$R_{22} = -1 + rB' + B = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d(rB)}{dr} = 1$$

$$rB = r + \text{const}$$

Bezeichnen wir die Konstante mit $-2a$, so ist das Gravitationsfeld gegeben durch

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r}$$

$$A(r) = \frac{1}{1 - 2\frac{a}{r}}$$

$$r \geq r_0$$

Diese Lösung fand Schwarzschild 1916. Das Wegelement der Schwarzschildmetrik schreibt sich folglich:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2a}{r}} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

Die Bedeutung der Integrationskonstanten a ergibt sich aus dem Newtonschen Grenzfall zu

$$g_{00} = B(r) \rightarrow r = \infty \rightarrow 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{2MG}{rc^2} = 1 - \frac{2a}{r}$$

$$\Rightarrow a = 2 \frac{GM}{c^2}$$

Man nennt diese Größe den Schwarzschildradius r_s :

$$a = 2 \frac{GM}{c^2} = r_s$$

Diskussion der Schwarzschildmetrik

Wir werden die Schwarzschildmetrik (SM) oft für die Sonne anwenden. Ihr Schwarzschildradius ist

$$a = 2 \frac{GM}{c^2} = r_s \approx 3km$$

Die Sonnenmassen von

$M_O = 2 \cdot 10^{30} kg$ ist experimentell durch das asymptotische Gravitationsfeld bestimmt. Der Schwarzschildradius ist viel kleiner als der Sonnenradius:

$$\frac{r_{SO}}{R_O} = \frac{2GM}{c^2 R_O} \approx 4 \cdot 10^{-6}$$

Für alle anderen Objekte im Sonnensystem ist der Wert kleiner !

Die schwarzschildmetrik gilt natürlich nur im Bereich $r \geq r_0$, wobei in unserem Sonnensystem $r \geq r_0 \gg r_s$.

Deshalb sind die im Sonnensystem auftretenden Abweichungen der SM von der Minkowskimetrik sehr klein. Wir bereits im letzten Kapitel diskutiert, haben die Winkelkoordinaten dieselbe Bedeutung wie im Euklidischen Raum. Die Koordinate t ist die Zeit, die eine im Unendlichen ruhende Uhr anzeigt. Für diese Uhr gilt:

$$d\tau = \frac{ds_{Uhr}}{c} = \sqrt{\left(1 - \frac{2a}{r}\right)} dt$$

aber $r \rightarrow$ unendlich, also

$$d\tau = \frac{ds_{Uhr}}{c} = dt$$

Auch die Bedeutung der r- Koordinate weicht wegen $g_{11} \neq -1$ von der entsprechenden Radiuskoordinate in der Minkowskimetrik ab. Wegen $r \geq r_0 \gg r_s$ ist diese Abweichung jedoch sehr klein.

Asymptotisch geht die SM in die Minkowskimetrik über. Daher können wir den Fixsternhimmel als Bezugsrahmen nehmen. Insbesondere sind die Winkeländerungen, die in der Metrik berechnet werden (Lichtablenkung, Periheldrehung, Präzession von Kreiseln) gleich den beobachtbaren Winkeländerungen gegen den Fixsternhimmel.

Die Koeffizienten des metrischen Tensors der SM werden bei

$r = r_s$ singulär. Das bedeutet aber nicht zwangsläufig eine Singularität des Raumes. Beschreibt man zum

Beispiel die Kugeloberfläche mit den gewöhnlichen Koordinaten $x_1 = \vartheta, x_2 = \varphi$, so ist g_{22} am Nordpol singulär, obwohl der Raum dort die gleichen Eigenschaften wie an jedem anderen Punkt hat. Tatsächlich ist auch der durch die Schwarzschildmetrik beschriebene Raum bei $r = r_s$ nicht singulär. Anders bei $r=0$!!

So tritt etwa in

$\frac{dr}{d\tau}$ für ein frei fallendes Teilchen keine Besonderheit auf. Der Radius r_s ist aber physikalisch ausgezeichnet:

Eine bei r ruhende Uhr zeigt die Zeit $d\tau = \sqrt{B}dt$ an, was heißt: $\frac{dt}{d\tau}$ divergiert für $r \rightarrow r_s$ (dabei ist t die Zeit einer im Unendlichen ruhenden Uhr).

Ein Photon, das bei $r = r_s$ emittiert wird, erleidet demnach eine unendlich große Rotverschiebung! Dies impliziert auch, dass t keine geeignete zeitkoordinate für Ereignisse im Bereich $r \leq r_s$ ist.

Ein Stern mit einem Radius $r \leq r_s$ heißt schwarzes Loch, weil von seiner Oberfläche keine Photonen nach außen (also in den Bereich $r > r_s$) eindringen können.

Die Singularität der Schwarzschildmetrik bei $r=0$ entspricht einer Punktmasse der Ausdehnung $r_0 = 0$ da ja $r \geq r_s$. Allerdings ist dies einerseits gleich dem Problem der Newtonschen Mechanik, wo Φ_e eine Singularität bei $r=0$ erleidet, andererseits existieren im Kosmos die Punktmassen wirklich, was das Singularitätsproblem der Schwarzen Löcher aufwirft.

Auf der anderen Seite wurde die Schwarzschildmetrik nicht nur für kleine Abweichungen von der Minkowskimetrik gemacht und kann über derartige Singularitätsprobleme mehr Aussagen machen als beispielsweise die Robertsonentwicklung, da an diesen Punkten die Metrik beliebig Steil an die tatsächliche Metrik anfängt.

Das Linienelement der SM kann nach Potenzen von $\frac{r}{r_s}$ entwickelt werden. Der Vergleich der Robertson-

Entwicklung ergibt

$$\begin{aligned}\beta &= 1 \\ \gamma &= 1\end{aligned}\quad \text{für die ART}$$

Die Newtonsche Gravitation impliziert $\begin{aligned}\beta &= 0 \\ \gamma &= 0\end{aligned}$

Die Feldtheorie von Brans- Dicke arbeitet mit
 $\beta = 1$

$$\gamma = \frac{\omega + 1}{\omega + 2}$$

Durchaus sind Abweichungen von $\begin{aligned}\beta &= 1 \\ \gamma &= 1\end{aligned}$ denkbar. Also sind diese Werte zu testende Voraussagen der ART!

Bewegung im Zentralfeld

Wir untersuchen die relativistische Verallgemeinerung des klassischen Keplerproblems. Die Diskussion gilt auch für Photonen!

Bewegungsgleichungen

Für die relativistische Bahn $\frac{d^2x^\kappa}{d\lambda^2} = -\Gamma^\kappa_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$

und

$$g_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = c^2 \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2$$

Für ein massives Teilchen können wir zur Vereinfachung dieser Gleichung

$d\tau$ als Bahnpараметер wählen. $d\lambda = d\tau$. Für ein masseloses Teilchen dagegen gilt:

$$ds = 0$$

Also kann man nicht die Eigenzeit als Bahnpараметер wählen. Man sollte sich nach einem anderen Parameter umsehen.

Also haben wir für massebehaftete Teilchen

$$g_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = c^2$$

und masselos:

$$g_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = c^2 \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 = 0$$

Das zentra尔斯ymmetrische Gravitationsfeld wird durch die Metrik

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

$$r \geq r_0$$

beschrieben. Für $A(r)$, $B(r)$ werden wir später die Schwarzschildlösung oder Robertsonentwicklung einsetzen.

Die verwendeten Koordinaten sind

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \vartheta, \varphi)$$

All diese Gleichungen definieren im Grunde das relativistische Keplerproblem, welches wir hier lösen wollen.

Mit den Christoffelsymbolen schreiben wir die einzelnen Komponenten von

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\lambda^2} = -\Gamma^\kappa_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

explizit an:

$$\frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} = -\frac{B'}{B} \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{B'}{2A} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 - \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{A} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\vartheta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - 2 \cot \vartheta \frac{d\vartheta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

Nun: Gleichung

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\vartheta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \text{ wird gelöst durch}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} = \text{const.}$$

Die Vielfalt der Lösungen wird dadurch nicht eingeschränkt: Zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 kann man das

Koordinatensystem so drehen, dass $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{d\vartheta}{d\lambda} = 0$. Das bedeutet, man dreht das Koordinatensystem so,

dass der Orts- und der Geschwindigkeitsvektor in der Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ liegen. Dann folgt $\frac{d^2 \vartheta}{d\lambda^2} = 0$ und somit

$\vartheta(\lambda) = \frac{\pi}{2}$. Das heißt: Wir nutzen die Isotropie des Problems aus und können damit die Bahn in die Äquatorebene legen. Dies ist analog zum nichtrelativistischen Keplerproblem. Dort argumentiert man folgendermaßen:

Wegen Isotropie gilt Drehimpulserhaltung. Da die Richtung des Drehimpulses konstant ist, kann ein Koordinatensystem gewählt werden, wo l parallel zur z -Achse zeigt.

Daraus folgt ebenfalls $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Es vereinfacht sich

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - 2 \cot \vartheta \frac{d\vartheta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \right) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} := l = \text{const.}$$

Auch hier kann man die Integrationskonstante l als Drehimpuls (pro Masse) interpretieren. Man kann $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

und die Gleichung für $r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} := l = \text{const.}$ als Konsequenz der Drehimpulserhaltung sehen, die aus der

Isotropie des Problems folgt. Dabei spiegelt $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die Konstanz der Richtung und $r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} := l = \text{const.}$ die

Konstanz des Betrags des Drehimpulses wider!

Wir schreiben $\frac{d^2x^0}{d\lambda^2} = -\frac{B'}{B} \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(\ln \frac{dx^0}{d\lambda} + \ln B \right) = 0$

$$\Rightarrow B \frac{dx^0}{d\lambda} = F = \text{const.}$$

und letztendlich setzen wir alle Ergebnisse in

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{B'}{2A} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 - \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{A} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \text{ ein:}$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{F^2 B'}{2AB^2} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{l^2}{Ar^3} = 0 \Big| \cdot 2A \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left[A \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} \right] = 0$$

Integration liefert:

$$A \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} = -\varepsilon = \text{const.}$$

Diese Radiusgleichung ist die zentrale Bewegungsgleichung. Die Winkelbewegung haben wir bereits gegeben

und der Zusammenhang zwischen t und λ folgt aus $B \frac{dx^0}{d\lambda} = F = \text{const.}$

Damit sind alle Bewegungsgleichungen einmal integriert! Eine weitere Integration von

$$A \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} = -\varepsilon = \text{const.} \text{ liefert dann die Bewegungsgleichung } r = r(\lambda) \text{ Setzt man diese}$$

Funktion dann in $B \frac{dx^0}{d\lambda} = F = const.$ und $r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} := l = const.$ ein, so ergibt die Integration Phi und t in Abhängigkeit von λ .

Zusammen mit unserem konstanten Winkel Theta ist dies die vollständige Lösung. Die auftretenden Integrale können aber allgemein nicht elementar gelöst werden. Für die SM können wir jedoch die Lösung näher diskutieren !

Werten wir noch das Linienelement im curved space aus:

$$g_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = c^2 \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2$$

$$\Rightarrow B \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 - A \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = \varepsilon$$

Dabei wurden die einfachen Differenziale der einzelnen Koordinaten alle eingesetzt und es ergibt sich das Epsilon auf der rechten Seite.

Es folgt:

$$\varepsilon = c^2, m \neq 0$$

$$\varepsilon = 0, m = 0$$

In den gesamten Gleichungen bleiben uns also effektiv nur 2 Integrationskonstanten, zwei echte Konstanten der Bewegung, nämlich F und l.

In der nichtrelativistischen Behandlung treten Energie E und Drehimpuls L als Integrationskonstanten auf.

Bahnkurve

Wir bestimmen die Bahn $\varphi = \varphi(r)$ in der Bewegungsebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Zunächst ergibt

$$A \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} = -\varepsilon = const.$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{\frac{\frac{F^2}{B} - \frac{l^2}{r^2} - \varepsilon}{A}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} = \frac{l}{r^2} \sqrt{\frac{\frac{A}{F^2} - \frac{l^2}{r^2}}{\frac{B}{F^2} - \frac{l^2}{r^2} - \varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \int \frac{dr}{r^2} l \sqrt{\frac{\frac{A}{F^2} - \frac{l^2}{r^2}}{\frac{B}{F^2} - \frac{l^2}{r^2} - \varepsilon}} = \int \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{B(r)l^2}{F^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\varepsilon}{l^2}}}$$

Also:

$$\varphi(r) = \int \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\varepsilon}{l^2}}}$$

Dies bestimmt die bahnkurve

$\varphi = \varphi(r)$ in der Bewegungsebene. Für ein massives Teilchen

$\varepsilon = c^2$ hängt dies von zwei Integrationskonstanten ab , nämlich F und Drehimpuls l. Für eine Streuung lassen sich diese Konstanten durch den Stoßparameter und die Anfangsgeschwindigkeit ausdrücken. Für masselose

Teilchen $\varepsilon = 0$ hängt die Bahn effektiv nur von einer Integrationskonstanten, nämlich $\frac{F}{l}$, dem Stoßparameter, ab.

Bewegung in der Schwarzschildmetrik

Wir verwenden jetzt die Schwarzschildlösung:

$$B(r) = A(r)^{-1} = 1 - \frac{2a}{r} = 1 - \frac{r_s}{r}$$

und die Abkürzungen

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda}$$

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\lambda}$$

Betrachten wir wieder die einfach integrierten Gleichungen, so können wir setzen:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

$$ct \left(1 - \frac{2a}{r} \right) = F$$

$$r^2 \dot{\phi} = l$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{a\varepsilon}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{al^2}{r^3} = \frac{F^2 - \varepsilon}{2} = const.$$

Durch den Winkel Theta ist die Bahnebene definiert. Die nächste Gleichung legt den Zusammenhang zwischen der zeit t der SM und dem von uns gewählten Parameter λ fest. Die nächste Gleichung kann als Drehimpulssatz

interpretiert werden und letztendlich: $\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{a\varepsilon}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{al^2}{r^3} = \frac{F^2 - \varepsilon}{2} = const.$ entspricht dem

Energiesatz !

Wir schreiben die Radialgleichung in der Form:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff.}(r) = const.$$

mit dem effektiven Potenzial

$$V_{eff.} = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMr^2}{c^2 r^3}, m \neq 0$$

$$V_{eff.} = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMr^2}{c^2 r^3}, m = 0$$

plottet man diese Potenziale, so folgt:

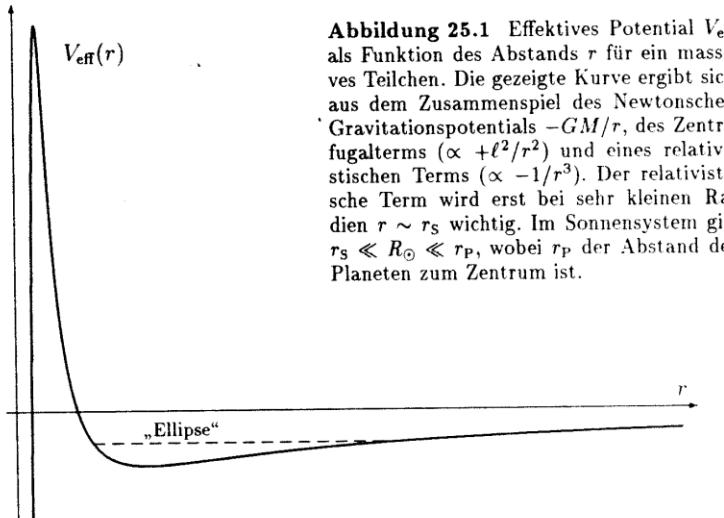


Abbildung 25.1 Effektives Potential V_{eff} als Funktion des Abstands r für ein massives Teilchen. Die gezeigte Kurve ergibt sich aus dem Zusammenspiel des Newtonschen Gravitationspotentials $-GM/r$, des Zentrifugalterms ($\propto +l^2/r^2$) und eines relativistischen Terms ($\propto -1/r^3$). Der relativistische Term wird erst bei sehr kleinen Radien $r \sim r_s$ wichtig. Im Sonnensystem gilt $r_s \ll R_\odot \ll r_p$, wobei r_p der Abstand des Planeten zum Zentrum ist.

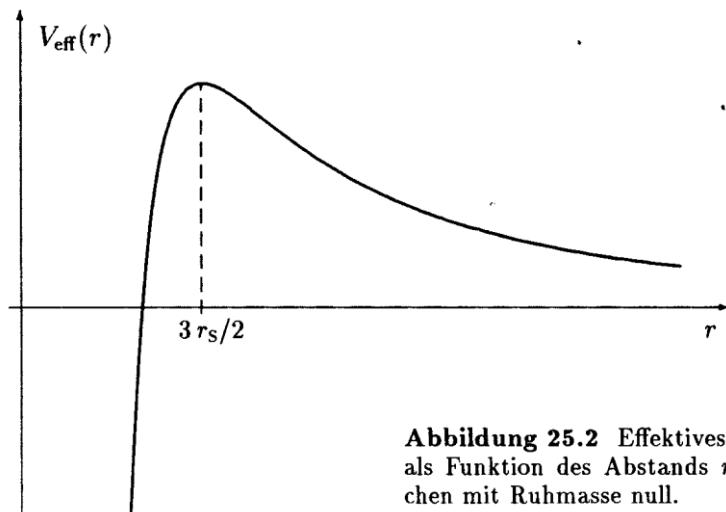


Abbildung 25.2 Effektives Potential V_{eff} als Funktion des Abstands r für ein Teilchen mit Ruhmasse null.

Betrachten wir Gleichung $\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{\text{eff.}}(r) = \text{const.}$, so können wir formal integrieren. Die formale Lösung

$$\lambda = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{2(\text{const.} - V_{\text{eff.}}(r))}}$$

wegen

$$V_{\text{eff.}} = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMr^2}{c^2 r^3}, m \neq 0$$

$$V_{\text{eff.}} = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMr^2}{c^2 r^3}, m = 0$$

hat $V_{\text{eff.}}$ den Term $\frac{1}{r^3}$ für massive wie masselose Teilchen. Das Integral ist elliptisch und kann daher nicht

durch elementare Funktionen gelöst werden. Der qualitative Verlauf der Lösung kann jedoch graphisch anhand der obigen Kizzen verstanden werden: Dazu zeichnet man eine horizontale Gerade mit dem Ordinatenwert const. ein.

Wegen $\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff.}(r) = const.$ ergibt der vertikale Abstand zu $V_{eff.}(r)$ dann die kinetische Energie $\frac{\dot{r}^2}{2}$.

Wir diskutieren $V_{eff.}$ für massebehaftete Teilchen:

Asymptotisch dominiert das attraktive Newtonsche Gravitationspotenzial $-\frac{GM}{r}$. Für kleiner werdende Radien

kommt das Zentrifugapotenzial $\frac{l^2}{2r^2}$ ins Spiel und führt dann - für nicht zu kleine l (Drehimpulse) zu

positiven Werten des effektiven Potenzials. Für noch kleinere Radien dominiert jedoch schließlich der attraktive relativistische term

$$-\frac{GM}{r} \frac{l^2}{c^2 r^2} \sim -\frac{GM}{r} \frac{v^2}{c^2}$$

Er ist linear zur kinetischen Energie und dem Newtonschen Potenzial und damit einfach als Folge der Energie-Masse-Äquivalenz zu verstehen. Zur Masse des Teilchens kommt auch der immer stärker werdende rotierende kinetische Energieterm dazu. Dies knickt schließlich den Verlauf der Zentrifugalkraft bei kleineren Radien und gewinnt einen gravitativ wechselwirkenden Anteil auf das rotierende Objekt, das dadurch doch wieder eingefangen wird!

Die Radialgleichung $\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff.}(r) = const.$ unterscheidet sich vom nichtrelativistischen Fall einmal durch den

Term $-\frac{GM}{r} \frac{l^2}{c^2 r^2} \sim -\frac{GM}{r} \frac{v^2}{c^2}$, andererseits aber auch dadurch, dass $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau}$ von $\frac{dr}{dt}$ abweicht. Beide

Abweichungen sind von der Größenordnung $\frac{v^2}{c^2}$.

Im Bereich des Minimums gibt es gebundene Lösungen. Die graphische Diskussion der Bewegung zeigt, dass es zwei Umkehrpunkte gibt, zwischen denen die Lösung oszilliert. Im nichtrelativistischen Fall ist die zugehörige Bahnkurve die bekannte Keplerellipse. Wegen der relativistischen Effekte ergeben sich Abweichungen, besonders die Periheldrehung. Als Spezialfall ist eine Kreisbewegung mit $\dot{r} = 0$ möglich, wenn die Konstante in $\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff.}(r) = const.$ gleich dem Potenzialwert im Minimum ist.

Die entsprechende Lösung am Maximum ist instabil, da kleine Auslenkungen zu exponentiell wachsendem \dot{r} führen. Wenn die Konstante dagegen positiv ist, so gewinnt man eine ungebundene Streulösung (Hyperbel im nichtrelativistischen Fall). Ist die Konstante größer als das Maximum des Potenzials, so überwiegt die Anziehung den Stoßparameter-Drehimpulsterm der kin. Energie und das Teilchen stürzt ins Zentrum

AM Minimum und Maximum gilt:

$$\frac{dV_{eff.}(r)}{dr} = 0. \text{ Für } m \neq 0 \text{ folgt hieraus}$$

$$\frac{c^2}{l^2} r^2 - 2 \frac{r}{r_s} + 3 = 0$$

Damit diese quadratische Gleichung für r zwei reelle Lösungen hat, muss $3 \frac{c^2}{l^2} < \frac{1}{r_s^2}$ gelten. Ein Minimum

und ein Maximum wie in der obigen Abbildung erhält man also nur, wenn der Drehimpuls l über dem kritischen Wert $l_{kr.} = \sqrt{3}r_s c$ liegt. Wenn sich der Drehimpuls an diesen kritischen Wert annähert, so wird die

Drehimpulsschwelle immer kleiner, bis Maximum und Minimum für $l_{kr.} = l$ zusammenfallen. Für $l < l_{kr.}$ fällt das Potenzial dann monoton zum Zentrum hin ab!

Für Photonen sind beide Terme in V_{eff} . proportional zu l^2 , so dass der skizzierte Verlauf des effektiven Potenzials nicht von l abhängt.

Auch das lässt sich anschaulich verstehen: Das Photon spürt quasi keine Anziehung der Ruhemasse sondern nur die eigene Zentrifugalbarriere wechselwirkt mit dem Potenzial. Das bedeutet, Schwere und Trägheit sind proportional zu l^2 , so dass sich das Photon auch alleine mit l^2 gegen die Anziehung widersetzt!. Also ist der Verlauf unabhängig von l^2 , wie er beim massebehafteten Teilchen unabhängig ist von der Ruhemasse des Teilchens !

Der Verlauf des Potenzials hängt also nicht vom Drehimpuls ab. Bei $r_{max.} = 3a = \frac{3r_s}{2}$

hat das Potenzial ein Maximum. An dieser Stelle können sich Photonen entlang einer Kreisbahn bewegen, die allerdings instabil ist ! Wenn die Konstante in $\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff.}(r) = const.$ kleiner als $V_{eff.}(r_{max.})$ ist, so wird ein von außen kommendes Photon gestreut. Ist sie größer, so wird das Photon eingefangen.

Die Bewegungsgleichung $\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff.}(r) = const.$ kann ohne Schwierigkeiten in den Bereich $r \leq r_S$ verfolgt werden. Für $r(\lambda)$ ist der Radius $r = r_S$ (in der Nähe des Maximums obiger Abbildung gelegen) offenbar nicht ausgezeichnet ! Insofern liegt die Vermutung nahe, dass es sich bei $r = r_S$ um eine Singularität der Koordinaten und nicht des Raums handelt. Die Schwarzschildmetrik selbst ist aber für $r < r_S$ nicht anwendbar, so wäre etwa für eine ruhende Uhr $ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 < 0$ m also $d\tau$ imaginär !

Wegen $r_S \leq r$ für den Gültigkeitsbereich der SM sind diese Fragen für normale Objekte mit $r_S \ll r_0$ nicht aktuell. Wir werden sie bei der Diskussion von Schwarzen Löchern wieder aufgreifen !

Lichtablenkung

MESSUNG: Licht eines Sterns oder Radiowellen eines Quasars, die knapp an der Sonne vorbeiführen

Die Bahnkurve $\varphi(r) = \varphi(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} \sqrt{\frac{A(r')}{F^2} - \frac{1}{B(r')l^2}}$ beschreibt damit auch $r = r(\varphi)$

Als Startpunkt der Integration dient der minimale Abstand r_0 und wir setzen $\varphi(r_0) = 0$ von r_0 bis $r = \infty$ ändert sich der Winkel um $\varphi(\infty)$.

Betrachten wir die Situation für ein Photon:

Entlang der skizzierten Bahn dreht sich der Radiusvektor um $2\varphi(\infty)$. Das wäre entlang einer geraden Bahn exakt gleich π . das heißt: die gesuchte Lichtablenkung $\Delta\varphi$ im Gravitationsfeld ergibt sich gerade als

$$2\varphi(\infty) - \pi = \Delta\varphi$$

$$\varphi(r_0) = 0$$

gleichzeitig ist $r(\varphi)$ minimal bei $r_0 \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{r_0} = 0$

Wegen:

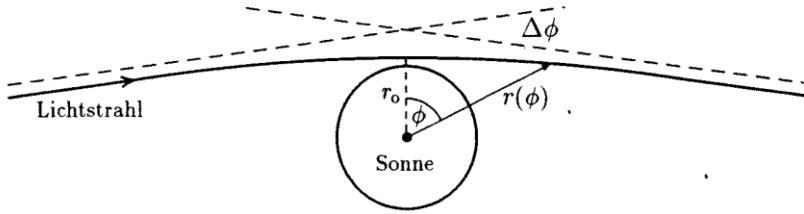


Abbildung 26.1 Im Gravitationsfeld der Sonne wird ein Lichtstrahl um den Winkel $\Delta\phi$ abgelenkt. Bezüglich des minimalen Abstands r_0 ist die Bahn symmetrisch. Der tatsächliche Ablenkungswinkel $\Delta\phi = 1.75''$ ist viel kleiner als in der Skizze.

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi(r)} \right)_{r_0} = 0 \Rightarrow \frac{F^2}{l^2} = \frac{B(r_0)}{{r_0}^2}$$

Also eliminieren wir $\frac{F^2}{l^2}$ durch den kürzesten Abstand r_0 :

$$\varphi(\infty) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{{r^2}}{r_0^2} \frac{B(r_0)}{B(r)} - 1}}$$

Dieses Integral kann berechnet werden, beispielsweise für die Koeffizienten $A(r), B(r)$ der Robertson-Entwicklung:

$$B(r) = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{c^2 r} \right)^2 + \dots = 1 - \frac{2a}{r}$$

$$A(r) = 1 + 2\gamma \frac{GM}{c^2 r} + \dots = 1 + \gamma \frac{2a}{r}$$

Also:

$$\frac{r^2}{r_0^2} \frac{B(r_0)}{B(r)} \approx \frac{r^2}{r_0^2} \left[1 + 2a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right] - 1 = \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{2ar}{r_0(r+r_0)} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi(\infty) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \frac{r_0}{r} \left(1 + \gamma \frac{a}{r} + \frac{ar}{r_0(r+r_0)} \right) = \left[\arccos \frac{r_0}{r} + \gamma \frac{a}{r_0} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} + \frac{a}{r_0} \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}} \right]_{r_0}^{\infty}$$

Dies ergibt

$$\varphi(\infty) = \frac{\pi}{2} + \gamma \frac{a}{r_0} + \frac{a}{r_0}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{4a}{r_0} \frac{1+\gamma}{2}$$

Also für die Lichtablenkung:

$$\Delta\varphi = \frac{4a}{r_0} \frac{1+\gamma}{2}$$

Für einen Lichtstrahl, der gerade an der Sonne vorbeistreift gewinnen wir:

$$r_0 \approx R_O \approx 7 \cdot 10^5 \text{ km}$$

$$a = \frac{GM_O}{c^2} \approx 1,5 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{4a}{r_0} \frac{1+\gamma}{2} = 1,75' \frac{1+\gamma}{2}$$

die klassische Beobachtungsmethode, erstmals erfolgt 29.05.1919, ist die Messung der Position von Sternen in der Nähe des Sonnenrandes während einer Sonnenfinsternis !

Eine Sonnenfinsternis ist nötig, damit die Sterne überhaupt zu sehen sind.

Position der Sterne erscheint dann um den Winkel $\Delta\varphi = \frac{4a}{r_0} \frac{1+\gamma}{2} = 1,75' \frac{1+\gamma}{2}$ gegen die Position der Fixsterne verschoben.

Neue Messungen nutzen Quasare. Sofern solche Quasare geeignet stehen, werden sie jedes Jahr einmal von der Sonne verdeckt. Sonnenfinsternis ist zur Beobachtung nicht nötig.

Messung von Licht von Sternen und Quasaren ergibt:

$$\gamma = \begin{cases} 0,9 \pm 0,2 (\text{Stern}) \\ 1,008 \pm 0,005 (\text{Quasar}) \end{cases}$$

Hauptschwierigkeit bei der Analyse der Experimente ist die Berücksichtigung der Beugung der Wellen in der Sonnenuhr.

Das experimentelle Resultat bestätigt den ART- Wert $\gamma = 1$ und schließt den Newtonschen Wert

$\gamma_N = 0$ aus !

Der Newtonsche Wert ergibt sich aus der Metrik mit $B = g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}; A = -g_{11} = 1$

(ebener dreidimensionaler Raum)

Im Rahmen der Newtonschen Mechanik könnte man die Lichtablenkung so berechnen: Man kürzt die Masse m in den Bewegungsgleichungen:

$m\ddot{\vec{r}} = -m\nabla\Phi$. Dann berechnet man die Ablenkung eines Objektes, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Das Kürzen der Massen (eigentlich ist sie ja Null für Photonen) wäre für Newton kein Problem gewesen, da er davon ausging, dass Licht aus Korpuskeln besteht.

Unsere Bahngleichung

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\lambda^2} = -\Gamma^\kappa_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad \text{dagegen beruht auf dem Äquivalenzprinzip, also auf der geradlinigen}$$

Ausbreitung im lokalen Inertialsystem !

Gravitationslinse

Zur Lichtablenkung gibt es den spektakulären Effekt der Gravitationslinse. Hierbei werden die Radiowellen eines Quasars an einer Galaxie zwischen uns und dem Quasar abgelenkt. 1979 beobachteten Walsh et. al. zwei nahe nebeneinanderstehende Quasare mit sehr ähnlichem Spektrum. Die Übereinstimmung im Spektrum war größer als für irgendein Paar der bekannten 1500 Quasare. Nachfolgende Untersuchungen zeigten, dass es sich um ein und dasselbe Objekt handelt.

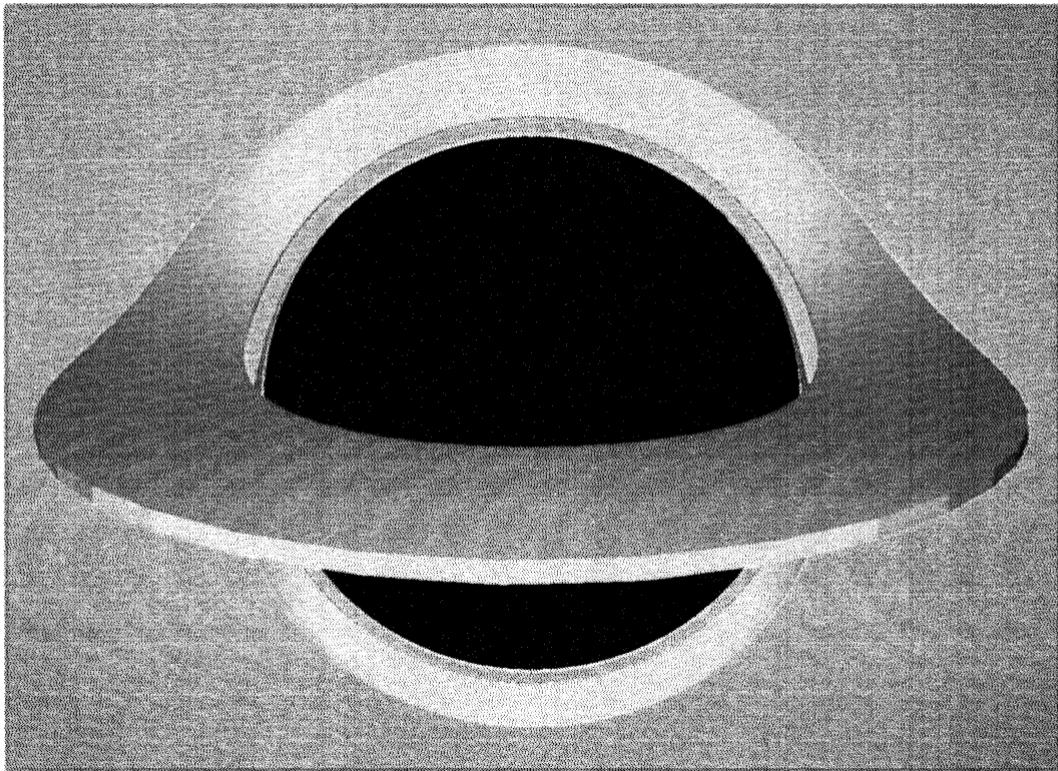
Da Quasare heller strahlen als Galaxien, konnte die ablenkende Galaxie erst später nachgewiesen werden !

Liegt das Zentrum des ablenkenden Gravitationsfeldes genau auf der Verbindungsgeraden von Erde und Quasar, so entsteht ein ringförmiges Abbild. Liegt es daneben, so können 2 oder mehr verzerrte Bilder entstehen.

Einstein selbst hatte bereits 1936 die Möglichkeit der Aufspaltung des Bildes eines entfernten Sterns durch einen nähergelegenen betrachtet.

der Effekt ist interessant bei schwarzen Löchern mit Aggregationsscheibe. Dabei sieht man den vorderen Teil der Scheibe vor dem schwarzen Loch weitgehend unverzerrt. Der hintere Teil dagegen wird durch das Gravitationsfeld des schwarzen Lochs stark abgelenkt und man sieht die Unterseite des Rings unter dem schwarzen Loch und die Oberseite über dem schwarzen Loch.

Eine Simulation dieses Effekts ergibt etwa folgendes Bild:



Periheldrehung

- in der Newtonschen Theorie beschreiben Planeten perfekte Ellipsen. Störungen des $1/r$ -Potenzials führen dagegen zu Abweichungen. Ist diese Abweichung klein, so kann sie als Drehung der Ellipse beschrieben werden. Experimentell beobachtet man die Änderung des Winkels des sonnennächsten Bahnpunktes, des Perihels.
- Auch relativistische Korrekturen verursachen eine Periheldrehung, da Körper beim Umlauf unterschiedlich viel Gravitationsfeld einschließen, welches als Energiedichte ja selbst ebenfalls wieder Quelle der Gravitation ist.

Zuerst betrachten wir die Bahnellipse eines Planeten um die Sonne:

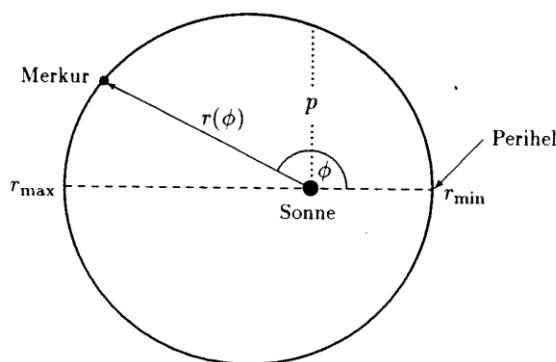


Abbildung 27.1 Im nichtrelativistischen Keplerproblem ist die Planetenbahn eine Ellipse, $p/r = 1 + \epsilon \cos \phi$. Für die abgebildete Ellipse ist die Exzentrizität $\epsilon = 1/3$, für die Merkurbahn gilt tatsächlich $\epsilon \approx 0.2$. Relativistische (und andere) Korrekturen führen zu einer Drehung dieser Ellipse, die als Periheldrehung bezeichnet wird.

Wir bezeichnen den minimalen und den maximalen Abstand zwischen Planet und Sonne mit

$$r_+ = r_{\max}$$

$$r_- = r_{\min}$$

und drücken entsprechend aus:

$$\varphi_{\pm} = \varphi(r_{\pm})$$

$$A_{\pm} = A(r_{\pm})$$

$$B_{\pm} = B(r_{\pm})$$

Für die relativistische Bahnkurve folgt aus dem Integral mit Epsilon = c² für Massenkörper:

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \int \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2}}} \\ \Rightarrow \varphi_+ - \varphi_- &= \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2}}} := \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{K(r)}}\end{aligned}$$

Für einen vollen Ellipsenumlauf ergibt sich eine Winkeländerung von 2Pi. Ein voller Umlauf geht durch die Bahnkurve r=r(Phi), beginnt etwa bei r_+ , läuft über r_- wieder zurück.

Also ergibt sich insgesamt:

$$\Delta\varphi = 2(\varphi_+ - \varphi_-) - 2\pi = 2 \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2}}} := \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{K(r)}} - 2\pi$$

wegen:

$$\frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2}}} = \frac{d\varphi}{dr}$$

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r_+/r_-} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{F^2}{B_+ l^2} - \frac{1}{r_+^2} - \frac{c^2}{l^2}$$

$$\frac{F^2}{B_- l^2} - \frac{1}{r_-^2} - \frac{c^2}{l^2}$$

$$\Rightarrow \frac{F^2}{B_+ l^2} = \frac{1}{r_+^2} + \frac{c^2}{l^2}, \frac{F^2}{B_- l^2} = \frac{1}{r_-^2} + \frac{c^2}{l^2}$$

Die Konstanten F und l können wieder eliminiert werden und zwar durch r_+ / r_- ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{F^2}{l^2} &= \frac{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}}{\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}} = \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)} \\
\Rightarrow \frac{c^2}{l^2} &= \frac{\frac{B_+}{r_+^2} - \frac{B_-}{r_-^2}}{\frac{B_+ - B_-}{r_+^2 r_-^2}} = \frac{\frac{r_+^2}{B_+} - \frac{r_-^2}{B_-}}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)} \\
\Rightarrow K(r) &= \frac{r_-^2 \left(\frac{1}{B(r)} - \frac{1}{B_-} \right) - r_+^2 \left(\frac{1}{B(r)} - \frac{1}{B_+} \right)}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)} - \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

Für A und B setzen wir natürlich wieder die Robertsonentwicklung an:

$$\begin{aligned}
B(r) &= 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{c^2 r} \right)^2 + \dots = 1 - \frac{2a}{r} + 2(\beta - \gamma) \frac{a^2}{r^2} \\
A(r) &= 1 + 2\gamma \frac{GM}{c^2 r} + \dots = 1 + \gamma \frac{2a}{r} \\
\frac{1}{B(r)} &= 1 + \frac{2a}{r} + 2(2 - \beta + \gamma) \frac{a^2}{r^2} + \dots
\end{aligned}$$

Für die Bewegung von Planeten im Gravitationsfeld gilt $\frac{v^2}{c^2} \sim \frac{a}{r}$.

Die Terme

$$g_{00} u^0 u^0 \sim B c^2$$

$$g_{11} u^1 u^1 \sim A v^2 \sim A c^2 \frac{a}{r}$$

treten in

$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ nebeneinander auf und müssen in der Ordnung $\frac{a}{r}$ behandelt werden.

Daher muss B um eine Ordnung in $\frac{a}{r}$ weiter entwickelt werden als A

mit $\frac{1}{B(r)} = 1 + \frac{2a}{r} + 2(2 - \beta + \gamma) \frac{a^2}{r^2} + \dots$ folgt für $K(r)$, dass K zu einer quadratischen Form in $1/r$ wird.

Da $\frac{d\varphi}{dr} = \infty$ für die Umkehrpunkte, muss dort $K_+ = K_- = 0$ gelten.

Das legt K bis auf eine Konstante fest:

$$K(r) = C \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right)$$

Die Konstante lässt sich leicht bestimmen aus dem Vergleich für

$r \rightarrow \infty$:

$$C = \frac{r_+^2 \left(1 - \frac{1}{B_+}\right) - r_-^2 \left(1 - \frac{1}{B_-}\right)}{r_+ r_- \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}\right)}$$

Wir setzen

$$\frac{1}{B(r)} = 1 + \frac{2a}{r} + 2(2 - \beta + \gamma) \frac{a^2}{r^2} + \dots \text{ ein und es folgt:}$$

$$C = 1 - (2 - \beta + \gamma) \left(\frac{a}{r_+} + \frac{a}{r_-} \right)$$

Da wir C in 1. Ordnung in $\frac{a}{r}$ wollten, musste $\frac{1}{B(r)}$ bis zur 2. Ordnung entwickelt werden.

Das zu lösende Integral lautet nun:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr'}{r'^2} \sqrt{\frac{A(r')}{\frac{F^2}{B(r')l^2} - \frac{1}{r'^2} - \frac{c^2}{l^2}}} = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{K(r)}}$$

$$\begin{aligned} A(r) &= 1 - \gamma \frac{2a}{r} \Rightarrow \sqrt{A(r)} \approx 1 + \gamma \frac{a}{r} \\ &= \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\left(1 - (2 - \beta + \gamma) \left(\frac{a}{r_+} + \frac{a}{r_-}\right)\right) \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \left(1 + \gamma \frac{a}{r}\right) \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

wir substituieren:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \sin \Psi$$

somit entspricht: $r = r_+$, $r = r_-$ den Werten

$$\Psi = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

Mit:

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-dr}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cos \Psi d\Psi$$

$$\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) (1 + \sin \Psi)$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) (1 - \sin \Psi)$$

Damit bekommt unser Integral die Form:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \left(1 + \gamma \frac{a}{r}\right) \left(\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\Psi \left[1 + \frac{\gamma a}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) + \frac{\gamma a}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \sin \Psi \right]$$

Wir führen den Parameter p der Ellipse ein:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}$$

Wobei die Bedeutung dieses Parameters in der obigen Skizze gezeigt ist.

Dieses Integral kann nun trivial integriert werden:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\pi}{\sqrt{C}} \left(1 + \gamma \frac{a}{p}\right) = \pi \left(1 + (2 - \beta + \gamma) \frac{a}{p}\right) \left(1 + \gamma \frac{a}{p}\right) = \pi \left(1 + (2 - \beta + 2\gamma) \frac{a}{p}\right)$$

Wobei immer nur lineare Terme in

$$\frac{a}{p} \text{ berücksichtigt wurden !}$$

Als periheldrehung

$$\Delta\varphi = 2(\varphi_+ - \varphi_-) - 2\pi = 2\pi \left((2 - \beta + 2\gamma) \frac{a}{p}\right)$$

ergibt sich

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi a}{p} \frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3}$$

p sollte also möglichst klein sein, damit der Effekt möglichst deutlich wird.

für den Merkur gilt:

$$p = 55 \text{ Mio. km}$$

a = 1,5 km (halber Schwarzschildradius der Sonne)

mit den ART- Werten $\gamma = \beta = 1$ folgt:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi a}{p} = 0,104'' \text{ pro Umlauf}$$

Im Jahrhundert umläuft Merkur die Sonne 415 mal, so das sich der Effekt auf $\Delta\varphi = 43,0''$ pro Jahrhundert summiert.

Für die weiter entfernte Erde beträgt die Periheldrehung nur $5''$ in einhundert Jahren !

Bemerkenswert:

Bereits 1882 hatte Newcomb eine Periheldrehung von $43''$ pro Jahrhundert bei Merkur gefunden. Dazu muss vom beobachteten Wert der Erde von $5600''$ zunächst auf ein IS umgerechnet werden. Es verbleiben $575''$. Von diesen muss dann der Anteil von $532''$ abgezogen werden, da er alleine durch die Störung der anderen Planeten verursacht wird. Dann bekommt man Werte, die mit dem ART- Reusltat zu vergleichen sind.

Wertet man die Daten aus, so folgt:

$$\frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3} = 1,003 \pm 0,005$$

Der Wert der Newtonschen Theorie für die Periheldrehung ist 0 !

Dies folgt jedoch nicht durch Einsetzen von $\beta = \gamma = 0$ in $\Delta\varphi = \frac{6\pi a}{p} \frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3}$

Grund ist, dass in die Berechnung dieses Drehwinkels nicht nur die relativistischen Effekte des Gravitationsfeldes eingehen sondern auch die der bewegungsgleichungen.

Aus der Analyse der Radarechoverzögerung ergibt sich

$$\gamma = 1,000 \pm 0,001$$

Setzt man dies ein, so folgt:

$$\beta = 0,99 \pm 0,02$$

Dies ist in völliger Übereinstimmung mit dem ART- Wert =1

Da β ein Koeffizient eines nichtlinearen Terms in der Robertsonentwicklung ist, testet dieser Effekt der Periheldrehung insbesondere die Nichtlinearität der Einsteinschen Feldgleichungen.

Quadrupolmoment der Sonne

Schwierig bei der Analyse der Periheldrehung ist das nicht genau bekannte Quadrupolmoment der Sonne . Quadrupolmoment Q:

$$Q = J_2 M_O R_O^2$$

$$J_2 = \frac{2}{5} \frac{R_{\parallel} - R_{\perp}}{R_O}$$

Dabei bezeichnen wir die Sonnenradien senkrecht zur Planetenebene und parallel zur Drehachse der Sonne mit R_{\perp} , während R_{\parallel} der dazu senkrechte Sonnenradius ist.

Die Korrektur des Newtonschen Gravitationspotenzials durch das Quadrupolmoment ist leicht berechenbar. In der Äquatorebene gewinnt man durch Multipolentwicklung das Gravitationspotenzial

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{GQ}{2r^3}$$

Der Term hat die gleiche Form wie der im relativistischen Potenzial

$$V_{eff.} - \frac{l^2}{2r^2} = -\frac{GM}{r} - \frac{GMr^2}{c^2 r^3}$$

mit $l \sim p v$ und $v^2 \sim \frac{GM}{p}$ können wir die relative Stärke der beiden Zusatzterme abschätzen:

$$\frac{GQ}{GM \frac{l^2}{c^2}} \sim \frac{J_2 R_O^2}{p^2 \frac{v^2}{c^2}} \sim \frac{J_2 R_O^2}{p \frac{GM}{c^2}} = \frac{J_2 R_O^2}{ap}$$

bis auf den numerischen Faktor haben wir somit als Gesamtausdruck für die Periheldrehung:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi a}{p} \left(\frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3} + \frac{J_2 R_O^2}{2ap} \right)$$

Die Abplattung kann man berechnen, wenn man die Materie als eine Flüssigkeit annimmt, die durch ihre Gravitation zusammengehalten wird. Man nimmt dann an, dass das System gleichmäßig mit der an der Oberfläche sichtbaren Drehfrequenz rotiert. Bei dieser Rotation entsteht dann ein hydrodynamisches Gleichgewicht zwischen den Zentrifugal- und den Gravitationskräften.

Ohne Drehung ist der Gleichgewichtszustand eine Kugel, ansonsten ergibt sich eine leichte Abplattung.

Das Quadrupolmoment ist von der Größenordnung

$$J_2 \sim 10^{-7}$$

etwa der doppelte Wert wird direkt durch Sonnenbeobachtungen gewonnen !

Somit ist $\frac{J_2 R_O^2}{2ap} \sim 5 \cdot 10^{-4}$, der Effekt geht also in den relativistischen Effekten total verloren, liegt noch innerhalb der Fehlergrenzen.

Man kann natürlich das Quadrupolmoment der Sonne auch als Parameter neben β, γ auffassen und dann aus der Analyse der Experimente das Quadrupolmoment bestimmen !

Radarechoverzögerung

Ein Signal von der Erde wird von anderen Planeten reflektiert und trifft bei uns wieder ein. passiert der Strahl dabei das Gravitationsfeld der Sonne, so trifft das Radarecho mit Verzögerung ein:

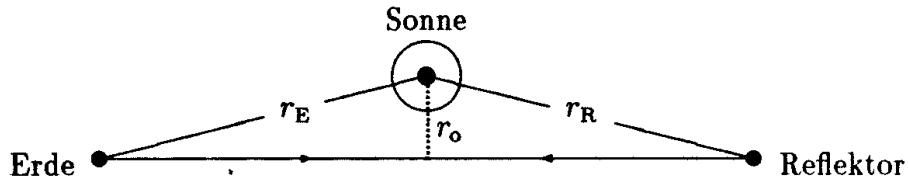


Abbildung 28.1 Ein Radarsignal wird von der Erde ausgesandt und von einem Reflektor (etwa der Venus) zurückgeworfen. Wenn die Sonne die Bahn des Radarsignals kreuzt, kommt es zu einer messbaren Verzögerung. Die Krümmung der Bahn des Radarechos (Kapitel 26) ist in dieser Skizze nicht angedeutet.

Zur Berechnung der Radarechoverzögerung gehen wir wieder von der Bahngleichung mit $\varepsilon = 0$ aus:

$$A\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} = 0$$

Nun folgt wegen

$$\begin{aligned} A\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} &= -\varepsilon = \text{const.} \\ \Rightarrow \frac{dr}{d\lambda} &= \sqrt{\frac{F^2}{B} - \frac{l^2}{r^2} - \varepsilon} = \frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \frac{dx^0}{d\lambda} \end{aligned}$$

$$B \frac{dx^0}{d\lambda} = F = \text{const.}$$

Somit:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} &= -\varepsilon = \text{const.} \\ \Rightarrow \frac{dr}{d\lambda} &= \sqrt{\frac{F^2}{B} - \frac{l^2}{r^2} - \varepsilon} = \frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \frac{F}{B} \\ \Rightarrow \frac{AF^2}{c^2 B^2 l^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{F^2}{Bl^2} &= 0 \end{aligned}$$

Beim minimalen Abstand r_0 von der Sonne gilt wieder:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{F^2}{l^2} = \frac{B(r_0)}{r_0^2}$$

Also:

$$\Rightarrow \frac{A}{c^2 B} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r_0^2}{r^2} \frac{B}{B(r_0)} - 1 = 0$$

diese Diffgleichung wird durch folgendes Integral gelöst:

$$\Rightarrow t(r, r_0) = \frac{1}{c} \int_{r_0}^r dr' \sqrt{\frac{A(r')}{B(r')}} \left[1 - \frac{r_0^2}{r'^2} \frac{B(r')}{B(r_0)} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

dabei ist

$t(r, r_0)$ die Zeit, die der Radarstrahl von r_0 bis r benötigt.

Die Zeit wird durch eine Uhr angezeigt, die im Unendlichen ruht ! Der Zusammenhang mit der zeit auf der Erdoberfläche kann leicht hergestellt werden. Für die zu beobachtende Verzögerung δt ist der Unterschied zwischen t und der Erdzeit irrelevant:

Robertsonentwicklung:

$$A(r) = 1 + \gamma \frac{2a}{r}$$

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r}$$

somit:

$$1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{B(r)}{B(r_0)} = 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left[1 + 2a \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right] = \left[1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right] \left[1 - \frac{2ar_0}{r(r+r_0)} \right]$$

also wird das Integral zu

$$\Rightarrow t(r, r_0) = \frac{1}{c} \int_{r_0}^r dr \left[1 - \frac{r_0^2}{r'^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{ar_0}{r'(r'+r_0)} + (1+\gamma) \frac{a}{r'} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{c} + \frac{a}{c} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} + (1+\gamma) \frac{a}{c} \ln \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} \right)$$

Der erste Term ,also

$\frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{c}$ gibt gerade die Laufzeit an, die beim passieren einer geradlinigen Trajektorie im Euklidischen

Raum geschieht ! Die anderen Terme geben daher die Verzögerung δt an, die aufgrund des Gravitationsfeldes der Sonne auftritt.

Für das skizzierte Experiment ist

$$\delta t = 2 \left[t(r_E, r_0) + t(r_R, r_0) - \frac{\sqrt{r_E^2 - r_0^2}}{c} - \frac{\sqrt{r_R^2 - r_0^2}}{c} \right]$$

Der Faktor 2 kommt, da der Radarstrahl hin und wieder zurücklaufen muss !

Erhebliche Laufzeitverzögerungen treten nur auf, wenn der Radarstrahl die Nähe der Sonne passiert, wenn also r_0 nur einige Sonnenradien groß ist !

Wegen

$r_E, r_R \gg R_O$ kann man sinnvoll nähern zu
 $\Rightarrow r_E, r_R \gg r_0$

$$\delta t = \frac{4a}{c} \left[1 + \frac{(1+\gamma)}{2} \ln \left(\frac{4r_E r_R}{r_0^2} \right) \right]$$

Der Ausdruck wird gerade maximal, wenn der Radarstrahl die Sonne gerade streift, also

$$r_{O,\min} = R_O$$

Dann:

$$\delta_{\max} t = \frac{4a}{c} \left[1 + \frac{(1+\gamma)}{2} \ln \left(\frac{4r_E r_R}{R_O^2} \right) \right] \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Dabei wurden 10^8 km für r_E und r_R eingesetzt weiter:

$$R_O = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$$

$$\ln(10^5) \sim 10$$

$$\frac{2a}{c} = 10^{-5} \text{ s}$$

Die Verzögerung kann man nicht durch Vergleich von Experiment und Messung berechnet werden. Dazu kennt man die Abstände der Planeten nicht genau genug. Jedoch kann man die Veränderung der Laufzeit feststellen, wenn der Radarstrahl durch die Bewegung von Erde und Planet über die Sonne fährt.

Das Experiment wurde 1964 von Shapiro vorgeschlagen und einige Jahre später durchgeführt.

Man beobachtete folgenden Verlauf:

Zum Vergleich mit den theoretischen Vorhersagen in

$\delta t = \frac{4a}{c} \left[1 + \frac{(1+\gamma)}{2} \ln \left(\frac{4r_E r_R}{r_0^2} \right) \right]$ setzt man den zeitabhängigen Abstand $r_0(t)$ ein, der sich aus der

bekannten Planetenbewegung ergibt !

Die Auswertung der messdaten mit der Formel verglichen ergibt $\gamma = 1,000 \pm 0,001$ in voller Übereinstimmung mit der ART

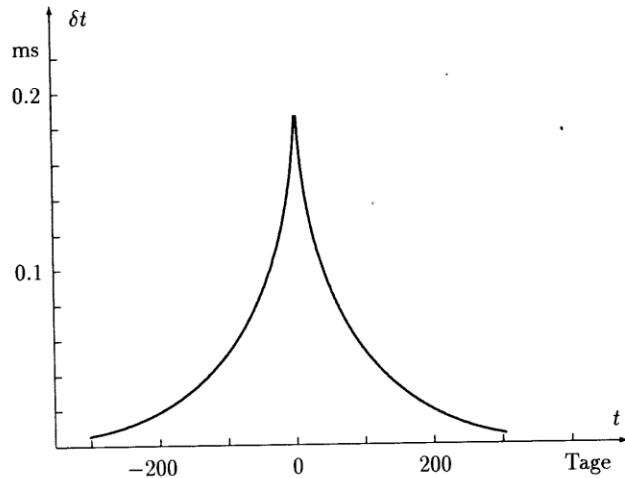


Abbildung 28.2 Schematische Darstellung der gemessenen Verzögerung δt eines Radarechos von der Venus als Funktion der Beobachtungszeit t . Dabei ist $t = 0$ der Zeitpunkt der Konjunktion von Erde-Sonne-Venus, also der Zeitpunkt, zu dem der Radarstrahl gerade die Sonne streift.

Geodätische Präzession

Gravitationskräfte können zur Präzession von Kreiseln führen. Wir untersuchen folgende Effekte im Gravitationsfeld der Erde:

- 1) geodätische Präzession: Präzession eines Kreisels, der im Gravitationsfeld frei fällt. Berechnung des Effektes für das isotrope Gravitationsfeld der Erde
- 2) Thirring- Lense- Effekt: Präzession eines Kreisels im Gravitationsfeld aufgrund der Rotation der Erde

Kreisel sind starre Körper, die Drehbewegungen ausführen können.

Die Drehbewegung hat einen Drehimpuls, dem ein Riemannvektor s^μ zugeordnet wird: Wenn außer der Gravitation keine weiteren Kräfte wirken, gilt im lokalen IS

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Ds^\mu}{D\tau} = 0$$

nach dem Kovarianzprinzip !

oder:

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\kappa\nu}s^\kappa u^\nu$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für den Spin oder Drehimpuls !

Berechnen wir hiermit die Präzession eines Kreisels in einem Erdsatelliten: (z.B. ein rotierender Satellit als Ganzes)

Im momentanen Ruhesystem des Satelliten gilt:

$$s^\alpha = (0, \bar{l})$$

mit dem Drehimpuls des Kreisels !

Wir sollten nun die Gravitationskräfte $\Gamma^\mu_{\kappa\nu}$ und die Geschwindigkeit u^ν des Satelliten spezifizieren. Wir verwenden dazu die Standardform der Metrik mit den Koordinaten

$$x^\mu = (ct, r, \vartheta, \varphi)$$

und den metrischen Koeffizienten

$$\begin{aligned}g_{00} &= B(r) \\g_{11} &= -A(r) \\g_{22} &= -r^2 \\g_{33} &= -r^2 \sin^2 \vartheta\end{aligned}$$

Später wird für A und B wieder die Schwarzschildlösung oder die Robertsonentwicklung eingesetzt !
Der Satellit bewege sich auf einer Kreisbahn:

$r = \text{const.}$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \omega_0 \tau$$

mit der Geschwindigkeit

$$u^\mu = \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = (u^0, 0, 0, u^3)$$

$$u^0 = \text{const.}$$

$$u^3 = \omega_0 = \text{const.}$$

Wir setzen in die Christoffelsymbole der statischen isotropen Metrik $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ein und es verschwinden alle

Christoffels außer:

$$\Gamma^1_{00} = \frac{B'}{2A}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{A'}{2A}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{r}{A}$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{r}{A}$$

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{B'}{2B}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$

Für die Komponenten der Bewegungsgleichung mit $u^1 = u^2 = 0, \Gamma^0_{00} = 0, \Gamma^0_{11} = 0, \dots$ gilt:

$$\frac{ds^0}{d\tau} = -\Gamma^0_{01} u^0 s^1$$

$$\frac{ds^1}{d\tau} = -\Gamma^1_{00} u^0 s^0 - \Gamma^1_{33} u^3 s^3$$

$$\frac{ds^2}{d\tau} = 0$$

$$\frac{ds^3}{d\tau} = -\Gamma^3_{31} u^3 s^1$$

Also:

$$s^2(\tau) = \text{const.}$$

Dies ist gerade die Komponente des Drehimpulses, die senkrecht zur Satellitenbahn steht. Wegen $r=\text{const.}$ sind überhaupt alle Koeffizienten des linearen Gleichungssystems

$$\frac{ds^0}{d\tau} = -\Gamma^0_{01}u^0s^1, \frac{ds^1}{d\tau} = -\Gamma^1_{00}u^0s^0 - \Gamma^1_{33}u^3s^3, \frac{ds^2}{d\tau} = 0, \frac{ds^3}{d\tau} = -\Gamma^3_{31}u^3s^1$$

konstant.

Wir differenzieren die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{ds^1}{d\tau}\right) &= \frac{d^2s^1}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(-\Gamma^1_{00}u^0s^0 - \Gamma^1_{33}u^3s^3\right) \\ &= \left[\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01}(u^0)^2 + \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{31}(u^3)^2\right]s^1 = -\omega^2 s^1 \end{aligned}$$

In der hierdurch definierten Größe ω^2 klammern wir den Faktor

$$(u^3)^2 = \omega_0^2 \text{ aus und es folgt:}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[-\frac{B'^2}{4AB} \left(\frac{u^0}{u^3} \right)^2 + \frac{1}{A} \right]$$

Die Geschwindigkeit $u^\mu = \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = (u^0, 0, 0, u^3)$ löst die Bahngleichung für die Bewegung im

Gravitationsfeld, also insbesondere

$$\begin{aligned} \frac{du^1}{d\tau} &= -\Gamma^1_{00}(u^0)^2 - \Gamma^1_{33}(u^3)^2 \\ &= -\frac{1}{2A} \left(B'(r)(u^0)^2 - 2r(u^3)^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Das Ergebnis

$$\frac{(u^0)^2}{(u^3)^2} = \frac{2r}{B'}$$

in

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[-\frac{B'^2}{4AB} \left(\frac{u^0}{u^3} \right)^2 + \frac{1}{A} \right]$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{A} \left(1 - \frac{rB'}{2B} \right)}$$

Mit

$$A(r) = 1 + \gamma \frac{2a}{r} + \dots \quad (\text{Robertsonentwicklung})$$

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r} + \dots$$

oder

$$A(r) = \frac{1}{1 - \frac{2a}{r}} \quad (\text{Schwarzschildmetrik})$$

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r}$$

wird dies zu

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{3a}{r}} \quad (\text{Schwarzschild})$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - (1 + 2\gamma) \frac{a}{r}} \quad (\text{Robertsonentwicklung})$$

Das Ergebnis der Schwarzschildmetrik ist exakt. Die Robertsonentwicklung wurde angeschrieben, um zu sehen, welcher metrische Koeffizient in einem Experiment getestet wird.

Die Anfangsbedingungen

$$s^1(0) = S$$

$$\dot{s}^1(0) = 0$$

ergeben:

$$s^1(\tau) = S \cos(\omega\tau)$$

$$s^2 = \text{const.}$$

$$s^3(\tau) = -\frac{S\omega_0}{\tau\omega} \sin(\omega\tau)$$

Dabei folgt der erste Teil aus

$$\frac{d^2 s^1}{d\tau^2} = \left[\Gamma^1_{00} \Gamma^0_{01} (u^0)^2 + \Gamma^1_{33} \Gamma^3_{31} (u^3)^2 \right] s^1 = -\omega^2 s^1, \text{ der zweite aus } s^2(\tau) = \text{const.}$$

und der dritte aus

$$\frac{ds^3}{d\tau} = -\Gamma^3_{31} u^3 s^1$$

Nun betrachten wir die Zeitabhängigkeit der Projektion (s^1, s^3) des Spinvektors auf die Bahnebene

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}. \text{ Dazu betrachten wir zunächst den konstanten Vektor } \bar{e}_x \text{ längs der Bahn des Satelliten:}$$

$$\bar{e}_x = \bar{e}_r \cos(\omega_0\tau) - \bar{e}_\phi \sin(\omega_0\tau)$$

$$\text{Die Umlaufdauer des Satelliten ist } \tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Nach jedem Umlauf wächst das Argument in $\bar{e}_x = \bar{e}_r \cos(\omega_0\tau) - \bar{e}_\phi \sin(\omega_0\tau)$ um 2π . Dagegen weicht die Phase in

$$s^1(\tau) = S \cos(\omega\tau)$$

$$s^2 = \text{const.}$$

$$s^3(\tau) = -\frac{S\omega_0}{\tau\omega} \sin(\omega\tau)$$

leicht ab. Sie wächst nämlich nur um $\omega\tau_0$

Somit ist die Phasendifferenz nach einem Umlauf

$$\Delta\alpha = (\omega_0 - \omega)\tau_0 = 2\pi - 2\pi\sqrt{1 - (1 + 2\gamma)\frac{a}{r}} \approx \pi(1 + 2\gamma)\frac{a}{r}$$

Dies ist zugleich der Winkel, um den sich der räumliche Spinvektor in der Bahnebene nach einem Umlauf dreht:

$$\Delta\alpha = \frac{3\pi a}{r} \frac{(1 + 2\gamma)}{3}$$

Dabei ergeben sich die Komponenten von $\bar{s} = s_r \bar{e}_r + s_\varphi \bar{e}_\varphi$ aus $-g_{11}s^1 s^1 = (s_r)^2, -g_{33}s^3 s^3 = (s_\varphi)^2$

Wertet man dieses Ergebnis für einen erdnahen Satelliten mit $r \sim R_E \sim 6400\text{ km}$ aus, so folgt aus

$$\omega^2 R_E = \frac{GM_E}{R_E^2} = g$$

die Umlaufzeit

$$\tau_0 = 2\pi \left(\frac{R_E}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$g \sim 10 \frac{m}{s^2}$$

Nach einer einjährigen Beobachtungszeit t ergibt sich somit eine Winkeländerung

$$\Delta\alpha(t) = \Delta\alpha \frac{t}{\tau_0} = 3\pi \frac{gR_E}{c^2} \frac{t}{2\pi \sqrt{\frac{R_E}{g}}} = 8''$$

für $t = 1\text{ a}$

Für Kreisel in Satelliten soll diese geodätische Präzession zusammen mit dem sogenannten Thirring- Lense-Effekt nachgewiesen werden:

De Sitter- Präzession des Mondes

Bezogen auf den gemeinsamen Schwerpunkt hat das System Erde- Mond einen bestimmten Bahndrehimpuls \bar{l} . Man kann dieses System daher als Gyroskop auffassen, das die Sonne umkreist. Der Drehimpuls hat Komponenten senkrecht und parallel zur Erdbahn, also

$$\bar{l} = \bar{l}_\perp + \bar{l}_\parallel$$

Da die Mondbahn um die Erde nur um etwa 5° gegenüber der Erdbahn um die Sonne geneigt ist, ist \bar{l}_\perp die Hauptkomponente. Sie entspricht der Spinkomponente s^2 und ist daher konstant. Dagegen zeigt die kleine Komponente \bar{l}_\parallel , die hier berechnete geodätische Präzession.

Der Drehimpuls \bar{l} ist im wesentlichen der Bahndrehimpuls des Mondes, die Drehung von \bar{l}_\parallel bedeutet, dass sich die Ebene der Mondbahn (die zur Erdbahn leicht geneigt ist) insgesamt langsam dreht. Die Mondbahn präzidiert. Diese Konsequenz der ART hat 1916 bereits De Sitter gesehen. Wir berechnen nun den Präzessionswinkel pro Jahrhundert, also nach hundert Umläufen des Kreisels Erde- Mond um die Sonne:

$$\Delta\alpha_{Sitter} = 100 \frac{3\pi a_O}{r_{ES}} \approx 2'' \text{ (pro Jahrhundert)}$$

Dabei haben wir $a_O = 1,5\text{ km}$ für die Sonne und $r_{ES} = c \cdot 8\text{ Minuten}$ für den Abstand Erde- Sonne eingesetzt.

Bereits in der Newtonschen Theorie erhält man eine Präzession der Mondbahn, da das System Mond- Erde nicht isoliert ist. Diese Newtonsche Präzession hat eine Periode von 18,6 Jahren und ist damit um den Faktor 10 Mio. größer als der De- Sitter- Effekt. Trotzdem konnte die de Sitter - Präzession von Shapiro et. al. nachgewiesen werden.

Dazu wurde die Mondbahn mit Hilfe von Laserechos in den Jahren 1970-1986 sehr genau vermessen. Das Laserlicht wird dabei an Spiegeln reflektiert, die 1969 von der Apollomission auf dem Mond installiert wurden. Die Analyse der Daten erfolgte dann auf Grundlage einer berechneten Bewegung von Erde und Mond, die alle anderen Effekte berücksichtigt. Es wurde das Ergebnis der ART mit einer Standardabweichung von 1 % bestätigt !

Thirring- lense - Effekt

Dies ist die Präzession eines Kreisels im Gravitationsfeld der Erde aufgrund der Eigenrotation der Erde. Das Gravitationsfeld der Schwarzschildmetrik entspricht dem Coulombfeld einer sphärischen Ladungsverteilung im Außenraum.

Beide Felder sind statisch/ isotrop.

Rotiert eine Ladungsverteilung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$, so erhält man zusätzlich ein statisches, nichtisotropes Magnetfeld. Die Rotation der Massenverteilung führt zu einem analogen gravitomagnetischen Feld

Metrik der rotierenden Erde

Der Effekt ist klein und wir begnügen uns mit den linearisierten Feldgleichungen

$$\# h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

Die Koordinaten

$$x^\mu = (cdt, x^i)$$

sind bis auf eine Korrektur der Ordnung h Minkowski- Koordinaten !

Den Energie- Impuls- Tensor nehmen wir ohne Druck

$$P \ll \rho c^2$$

Da auch die mit der Rotation der Erde verbundenen Geschwindigkeiten v klein gegenüber c sind, lassen wir Terme der Ordnung

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \text{ weg, also } T_{\mu\nu} \approx \rho c^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_i}{c} \\ \frac{v_i}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Terme proportional zu v_i erzeugen das gravitomagnetische Feld, ebenso wie Ströme ein Magnetfeld verursachen.

Die Massenverteilung der Erde wird genähert durch

$$\rho(\bar{r}) = \rho_0(r < R_E)$$

$$\rho(\bar{r}) = 0(r > R_E)$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist

$$\bar{\omega} = \omega \bar{e}_3$$

$$\omega = \frac{2\pi}{Tag}$$

Die Erde rotiert als starrer Körper, also mit dem Geschwindigkeitsfeld

$$\bar{v}(\bar{r}) = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

$$v_i = \epsilon_{ikn} \omega^k x^n$$

Damit ist

$T_{\mu\nu}$ stationär (zeitunabhängig). Die linearisierten Feldgleichungen müssten stationäre Lösungen haben.

Das heißt:

$$\# \rightarrow -\Delta$$

und damit:

$$\Delta h_{\mu\mu} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho(\bar{r})$$

$$\Delta h_{0i}(\bar{r}) = \frac{16\pi G}{c^3} \rho(\bar{r}) \epsilon_{ikn} \omega^k x^n$$

$$\Delta \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} = -4\pi \delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

prüft man leicht nach, dass die Integrale

$$h_{\mu\mu} = -\frac{2G}{c^2} \int d^3 r' \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

$$h_{0i}(\bar{r}) = -\frac{4G}{c^3} \epsilon_{ikn} \omega^k \int d^3 r' \frac{\rho(\bar{r}') x'^n}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

$$\Delta h_{\mu\mu} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho(\bar{r})$$

die stationäre Feldgleichung

lösen.

$$\Delta h_{0i}(\bar{r}) = \frac{16\pi G}{c^3} \rho(\bar{r}) \epsilon_{ikn} \omega^k x^n$$

Dieser Schritt ist aus der Elektrostatisik (homogen geladene Kugel) und der Magnetostatik (homogen geladene rotierende Kugel), bekannt.

Für den Außenbereich $r \geq R_E$ verwenden wir die Entwicklung in Kugelflächenfunktionen:

$$\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\hat{\bar{r}'}) Y_{lm}(\hat{\bar{r}}) = \frac{1}{r} - \frac{x^i x_j'}{r^3} + \dots (r > r')$$

Diese Entwicklung entspricht der Entwicklung nach Potenzen von x_j' . Für kartesische Komponenten gilt

$$x_i = g_{ik} x^k = (-x^i) + O(h)$$

Die Korrektur $O(h)$ wird weggelassen, weil die rechten Seiten der Feldstörungen

$$h_{\mu\mu} = -\frac{2G}{c^2} \int d^3 r' \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

bereits erster Ordnung in h sind

$$h_{0i}(\bar{r}) = -\frac{4G}{c^3} \epsilon_{ikn} \omega^k \int d^3 r' \frac{\rho(\bar{r}') x'^n}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$$

Da $\rho(\bar{r})$ sphärisch ist, trägt in der Multipolentwicklung für h nur der erste Term der Entwicklung bei:

$$h_{\mu\mu} = -\frac{2G}{c^2 r} \int d^3 r' \rho(\bar{r}') = -\frac{2GM}{c^2 r}$$

$$r \geq R_E$$

Wegen $\rho x'^n \propto Y_{1m}$ tragen nur die Terme mit $l=1$ in $h_{0i}(\bar{r}) = -\frac{4G}{c^3} \epsilon_{ikn} \omega^k \int d^3 r' \frac{\rho(\bar{r}') x'^n}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$ bei.

Dies ist gerade das Dipolmoment der Entwicklung des Abstandsbetrags:

$$h_{0i}(\bar{r}) = \frac{4G}{c^3} \frac{\varepsilon_{ikn} \omega^k x^j}{r^3} \int d^3 r' \rho(\bar{r}') x^n x'_j = -\frac{4GM R_E^2}{5c^3} \frac{\varepsilon_{ikn} \omega^k x^n}{r^3}$$

Dies gilt für Abstände größer Erdradius. Da die Dichte sphärisch ist, konnte im Integranden

$$x'^n x'_j = -\delta^n{}_j \frac{r'^2}{3} \text{ gesetzt werden.}$$

$$\Delta h_{\mu\mu} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho(\bar{r})$$

Wir stellen die Ausgangsgleichung

$$\Delta h_{0i}(\bar{r}) = \frac{16\pi G}{c^3} \rho(\bar{r}) \varepsilon_{ikn} \omega^k x^n$$

und das Ergebnis gegenüber:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{h}(\bar{r}) &= \frac{16\pi G}{c^2} \rho \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \Rightarrow \bar{h}(\bar{r}) &= \frac{4GM R_E^2}{5c^3} \frac{\bar{\omega} \times \bar{r}}{r^3} \end{aligned}$$

In der Magnetostatik ergibt eine mathematisch äquivalente Rechnung das Vektorpotenzial \bar{A} einer homogen geladenen Kugel (rotierend) mit der Ladung q und dem Radius R :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{A}(\bar{r}) &= -\frac{4\pi}{c} \rho_e \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \Rightarrow \bar{A}(\bar{r}) &= \frac{qR^2}{5c} \frac{\bar{\omega} \times \bar{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Die Lösung für \bar{h} kann man also direkt aus der bekannten magnetostatischen Lösung ablesen.
Die Ergebnisse

$$h_{\mu\mu} = -\frac{2G}{c^2 r} \int d^3 r' \rho(\bar{r}') = -\frac{2GM}{c^2 r}$$

$$r \geq R_E$$

$$h_{0i}(\bar{r}) = \frac{4G}{c^3} \frac{\varepsilon_{ikn} \omega^k x^j}{r^3} \int d^3 r' \rho(\bar{r}') x^n x'_j = -\frac{4GM R_E^2}{5c^3} \frac{\varepsilon_{ikn} \omega^k x^n}{r^3}$$

legen nun die Metrik der rotierenden Erde fest:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) d\bar{r}^2 + 2ch_{0i} dx^i dt$$

Dabei ist

$$d\bar{r}^2 = -dx^i dx_i \text{ das Ergebnis für } r \geq R_E. \text{ Diese Metrik reduziert sich in der Ordnung } \frac{GM}{c^2 r} \text{ und für } \bar{\omega} = 0$$

nicht auf die Schwarzschildmetrik, da $\# h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$ eine andere Koordinatenwahl als die

Standardform voraussetzt.

Asymptotisch geht $ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) d\bar{r}^2 + 2ch_{0i} dx^i dt$ dennoch in die

Minkowskimetrik über. Nach einer Transformation zu Kugelkoordinaten haben die Winkel in

$d\bar{r}^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$ daher die übliche Bedeutung. Insbesondere haben Fixsterne konstante Winkelwerte. Berechnete Winkeländerungen (wie die Spinpräzession) beziehen sich also auf Drehungen relativ zum Fixsternhimmel.

Drehung des Lokalen IS

Wir zeigen nun, dass die Metrik $ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) d\bar{r}^2 + 2ch_{0i}dx^i dt$ eine Drehung der Lokalen Inertialsysteme impliziert. Dazu betrachten wir eine Kreiselachse mit der Bewegung in der Metrik:

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\kappa\nu}s^\kappa u^\nu$$

Dies soll ausgewertet werden für einen ruhenden Kreisel mit

$$(s^\mu) = (0, s^i)$$

$$(u^\mu) = (c, 0)$$

An sich ist

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\kappa\nu}s^\kappa u^\nu \text{ auf einen Kreisel anzuwenden, auf den außer Gravitationskräften keine anderen Kräfte}$$

wirken, also auf einen frei fallenden Kreisel.

Zur Lagerung des Kreisels an einem festen Ort im Gravitationsfeld genügt eine zusätzliche Kraft auf den Schwerpunkt des Kreisels.

Diese ist dann ohne Einfluss auf die Spinpräzession, tritt also auf der rechten Seite von $\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\kappa\nu}s^\kappa u^\nu$

nicht auf !

Da wir nur Terme erster O in h anschauen, können wir

$$\frac{ds^i}{d\tau} \text{ durch } \frac{ds^i}{dt} \text{ ersetzen.}$$

Dann wird $\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\kappa\nu}s^\kappa u^\nu$ zu

$$\frac{ds^i}{dt} = -c\Gamma^i_{0j}s^j$$

da ja

$$(s^\mu) = (0, s^i)$$

$$(u^\mu) = (c, 0)$$

Für zeitunabhängige h gilt in erster Ordnung:

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{\eta^{ik}}{2} \left(\frac{\partial h_{0k}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{0j}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} (\partial_j h_0^i - \partial^i h_{0j})$$

Wir setzen dies in $\frac{ds^i}{dt} = -c\Gamma^i_{0j}s^j$ ein und ziehen auf beiden Seiten den Index i nach unten:

$$\begin{aligned}\frac{ds^i}{dt} &= -c\Gamma^i_{0j}s^j = -c\frac{1}{2}\left(\partial_j h_0^i - \partial^i h_{0j}\right)s^j \\ \Rightarrow \frac{ds_i}{dt} &= -c\frac{1}{2}\left(\partial_j h_{0i} - \partial_i h_{0j}\right)s^j = -c\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\left(\varepsilon^{kmn}\partial_m h_{0n}\right)s^l \\ \Rightarrow \frac{ds_i}{dt} &= \varepsilon_{ikl}\Omega^k s^l\end{aligned}$$

$$\bar{\Omega}(\bar{r}) = -\frac{c}{2}roth(\bar{r})$$

Mit unserem h aus

$$\bar{h}(\bar{r}) = \frac{4GMR_E^2}{5c^3} \frac{\bar{\omega} \times \bar{r}}{r^3}$$

folgt:

$$\bar{\Omega}(\bar{r}) = -\frac{c}{2}roth(\bar{r}) = \frac{2GMR_E^2}{5c^2} \frac{3(\bar{\omega} \cdot \bar{r})\bar{r} - \bar{\omega}r^2}{r^5}$$

Winkelgeschwindigkeit des Lokalen IS !

Das Feld $\bar{\Omega}(\bar{r})$ hat dieselbe Struktur wie das Magnetfeld

$\bar{B}(\bar{r}) = rot \bar{A}(\bar{r})$ einer homogen geladenen, rotierenden Kugel.

In Vektorform lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{ds_i}{dt} = \varepsilon_{ikl}\Omega^k s^l \text{ für den Spin:}$$

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{\Omega} \times \bar{s}$$

$$d\bar{s} = (\bar{\Omega} dt) \times \bar{s}$$

das bedeutet gerade eine Präzession des Spins/ Kreiselachse mit der Frequenz $\bar{\Omega}$. Sie wird verursacht durch die Rotation der Erde mit Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$. Die Präzession der Kreiselachse ist gleichbedeutend mit einer Drehung des lokalen IS, denn in dem Lokalen IS am Ort des Kreisels gilt: $\bar{s} = const.$

Also dreht sich das lokale IS mit der Winkelgesch. $\bar{\Omega}$ gegen das Globale KS der gefundenen Metrik:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right)d\bar{r}^2 + 2ch_{0i}dx^i dt$$

Dieses geht asymptotisch in ein IS über, also ein Bezugssystem, das sich gegenüber des Fixsternhimmels nicht dreht. Die physikalische Bedeutung von $\bar{\Omega}$ ist also:

Das Lokale IS dreht sich mit $\bar{\Omega}$ gegen den Fixsternhimmel !

Das bedeutet: Die Drehung der Erde zieht das lokale IS ein wenig mit ! Die GeodätischePräzession aus dem letzten Kapitel wird dagegen durch die Bewegung des Satelliten verursacht. Ein mit dem Satelliten verbundenes lokales IS dreht sich gegen den Fixsternhimmel einmal aufgrund der Satellitenbewegung im isotropen Feld und zusätzlich aufgrund der Drehbewegung der Erde (nichtisotropes Feld).

Wenn wir $r = \text{Erdradius}$ einsetzen und numerische Faktoren weglassen, wo gewinnen wir eine Größenordnung des Thirring- Lense- Effekts:

$$\bar{\Omega}(\bar{r}) \sim \frac{GM_E}{c^2 R_E} \omega = \frac{gR_E}{c^2} \omega \approx 10^{-9} \omega$$

An dieser Stelle sei an den newtonischen Eimerversuch in Kapitel 9 erinnert: Nach dem Machschen Prinzip müsste die Krümmung der Wasseroberfläche im rotierenden Eimer abnehmen, wenn die Eimerwände nur hinreichend dick sind.

Die jetzige Rechnung beschreibt GENAU DIESEN Effekt quantitativ ! Da der Effekt sehr klein ist, eignet sich der Eimerversuch (mit der Erde als Eimer, etwa ein mit Wasser gefülltes Loch am Nordpol) allerdings nicht zur Überprüfung des Resultats !

Wir geben $\bar{\Omega}(\bar{r})$ noch speziell an für Nordpol und Äquator:

Nordpol:

$$\bar{\Omega} = \frac{2GM}{5c^2 R_E} \cdot 2\bar{\omega} \text{ am Nordpol und}$$

$$\bar{\Omega} = -\frac{2GM}{5c^2 R_E} \cdot \bar{\omega} \text{ am Äquator}$$

Am Nordpol zieht die rotierende Masse das lokale IS mit. Am Äquator ergibt die Bewegung der benachbarten massen den entgegengesetzten Drehsinn Wir berechnen konkret, um welchen Winkel

$\Delta\varphi = \Omega \cdot 1a$ sich ein Foucaultsches Pendel am Nordpol während eines Jahres gegen den Fixsternhimmel dreht und es folgt:

$$\Delta\varphi = \Omega \cdot 1a = \frac{4GM}{5c^2 R_E} 2\pi \cdot 365 \approx 0,2''$$

(Thirring- Lense- Präzession während eines Jahres)

Thirring und Lense berechneten diesen Effekt 1918. Zu seiner Überprüfung sind Experimente in Vorbereitung. Ein solcher Kreisel unterliegt der geodätischen und der Thirring- Lense - Präzession. Beide Effekte sind winzige Korrekturen in der Metrik und addieren sich daher.

Im Experiment kann die um Faktor 40 größere geodätische Präzession ausgeschlossen werden, indem man den Drehimpuls \bar{s} senkrecht zur Bahnebene des Satelliten wählt,

In diesem Fall ist auf einer Äquatorroute $\bar{s} \parallel \bar{\omega} \parallel \bar{\Omega}$. Also würde der Thirring - Lense- Effekt nach

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{\Omega} \times \bar{s}$$

$$d\bar{s} = (\bar{\Omega} dt) \times \bar{s}$$

verschwinden. Also wählt man besser eine Polroute. Hierfür kompensieren sich nach $\bar{\Omega} = \frac{2GM}{5c^2 R_E} \cdot 2\bar{\omega}$ am

Nordpol und $\bar{\Omega} = -\frac{2GM}{5c^2 R_E} \cdot \bar{\omega}$ am Äquator die Effekte jedoch teilweise. Die Rechnung ergibt einen mittleren

Wert von $0,05''$ pro Jahr !

Gravitomagnetische Kräfte

Die Ableitung zeigte die formale Korrespondenz zwischen $\bar{h} = h_{0i} \bar{e}^i$ und dem Vektorpotenzial \bar{A} und zwischen der Drehfrequenz $\bar{\Omega}$ des lokalen IS und dem Magnetfeld \bar{B} .

Diese Korrespondenz gilt auch für die Kräfte auf bewegte Teilchen. Dazu betrachten wir die Bewegungsgleichung

$\frac{du^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\kappa\nu} u^\kappa u^\nu$ eines Teilchens in unserer Metrik der rotierenden Erde:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) d\bar{r}^2 + 2ch_{0i} dx^i dt$$

Wieder vernachlässigen wir Terme der Ordnung

$\frac{v^2}{c^2}$ und nehmen Terme der Ordnung $\frac{v}{c}$ mit. In dieser Näherung gilt:

$$d\tau \approx dt$$

$$(u^\nu) \approx (c, v^i)$$

Damit wird die Bewegungsgleichung zu

$$\frac{dv^i}{dt} = -\Gamma^i_{00}c^2 - 2c\Gamma^i_{0j}v^j + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ergibt

$-\Gamma^i_{00}c^2 = -\Phi_{,i}$ mit dem Newtonschen Gravitationspotenzial Φ . Dies entspricht dem newtonschen Grenzfall.

Wir haben in Abhandlung des Thirring- Lense- Effekts gezeigt, dass

$$-c\Gamma^i_{0j}v^j = (\bar{\Omega} \times \bar{v})^i$$

Also können wir schreiben:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\text{grad}\Phi(\bar{r}) - 2\bar{\Omega}(\bar{r}) \times \bar{v}$$

→ Bewegungsgleichung mit gravitomagnetischer Kraft.

→ Analog zur Lorentzkraft

→ $\bar{K} = q\left(\bar{E} + \frac{\bar{v} \times \bar{B}}{c}\right)$ kann man diese Kraft als gravitomagnetische Kraft bezeichnen. Die Form der magnetischen und der Gravitomagnetischen Kräfte ist gleich derjenigen von Corioliskräften, also den zur Drehfrequenz proportionalen Kräften in rotierenden Bezugssystemen !

Die Drehung der Ebene des Foucaultschen Pendels am Nordpol mit

$\bar{\Omega}$ wird durch die Corioliskraft $2\bar{v} \times \bar{\Omega}(\bar{r})$ auf die Pendelmasse hervorgerufen !

Wir berechnen noch das Gravitationsfeld einer mit konstanter Geschwindigkeit \bar{v} bewegten Masse. Dies entspricht dem elektromagnetischen Feld einer bewegten Ladung in der Elektrodynamik.

Wir gehen zunächst in ein Ruhesystem KS' des Teilchens. Koordinate sei

$$x'^\mu$$

Die linearisierten Feldgleichungen lösen wir wie

$$h_{\mu\mu} = -\frac{2G}{c^2 r} \int d^3 r' \rho(\bar{r}') = -\frac{2GM}{c^2 r}$$

$$r \geq R_E$$

$$h_{0i}(\bar{r}) = \frac{4G}{c^3} \frac{\varepsilon_{ikn} \omega^k x^j}{r^3} \int d^3 r' \rho(\bar{r}') x'^n x'_j = -\frac{4GMR_E^2}{5c^3} \frac{\varepsilon_{ikn} \omega^k x^n}{r^3}$$

aber:

$$\bar{v}' = 0$$

Somit folgt:

$$h'_{\mu\mu} = -\frac{2GM}{c^2 r}$$

$$h'_{\mu\nu} = 0$$

für

$$\mu \neq \nu$$

Da $h_{\mu\nu}$ ein Riemantensor ist, gilt in einem anderen Koordinatensystem KS (mit Koordinaten x^μ) die Trafo:

$$h_{\mu\nu} = \alpha^\kappa_\mu \alpha^\lambda_\nu h'_{\kappa\lambda}$$

Dabei ist Λ^κ_μ die Trafomatrix von KS in KS'. Die Transformation zu dem System KS, in dem sich das Teilchen mit \bar{v} bewegt, ist bis auf Terme der Ordnung h eine Lorentz- Transformation.
Denn die verwendeten Koordinaten sind bis auf Terme der Ordnung h Minkowskikoordinaten.
Diese Lorentzztransformation ist

$$\Lambda^\kappa_\mu = \Lambda(-\bar{v}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{v^i}{c} \\ \frac{v^i}{c} & 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Also:

$$h_{\mu\nu} = \Lambda^\kappa_\mu \Lambda^\lambda_\nu h'_{\kappa\lambda}$$

Also:

$$h_{\mu\mu} = h'_{\mu\mu} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$h_{0i} = 2\left(\frac{v_i}{c}\right)h_{00}' + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

vernachlässigen wir Terme der Ordnung $O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$, so folgt:

$$\bar{h} = -\frac{\bar{v}}{c} \frac{4GM}{c^2 r}$$

(gravitomagnetisches Feld einer bewegten Masse)

Wenn die Geschwindigkeit des Teilchens nicht konstant ist, so treten Retardierungseffekte auf.

In der Edynamik kommt es zur Abstrahlung von Wellen !

Auch oszillierende Massen strahlen Wellen ab ! Diskutieren wir nun die Rolle der gravitomagnetischen Kräfte im Zweikörperproblem, also etwa im System Sonne- Planet !

Relativ zum Newtonschen Gravitationspotenzial ist das vom ersten Körper hervorgerufene Feld \bar{h} von der Größe $O\left(\frac{v_1}{c}\right)$. Die Wirkung des zweiten Körpers gibt einen Term $O\left(\frac{v_2}{c}\right)$.

Also sind gravitomagnetische Kräfte von der Größenordnung

$$K_{gravitomaget.} \sim \frac{v_1 v_2}{c^2} K_{newt.Gravi}$$

In der Himmelsmechanik sind die relativistischen Bewegungsgleichungen und die Metrik konsistent mit einer bestimmten Genauigkeit zu behandeln. Eine solche systematische Entwicklung bis zu einer bestimmten Ordnung wird Post- Newtonian- Approximation genannt. Wir diskutieren für einige Fälle (Doppelsternsystem, Sonne- Planet und Erde- Satellit), ob die gravitomagnetischen Kräfte in niedrigster Post- Newtonscher Näherung zu berücksichtigen sind:

In einem Doppelsternsystem mit $m_1 \sim m_2$ gilt: $v_1 \sim v_2$ und

$$\frac{v_1 v_2}{c^2} = O\left(\frac{a}{r}\right)$$

Dann ist also die gravitomagnetische Kraft von der Ordnung $\left(\frac{a^2}{r^2}\right)$ und muss bei der Periheldrehung, bzw.

Periastrondrehung bei Doppelsternsystemen berücksichtigt werden.

Die Beobachtungsdaten des Systems PSR 1913+16 ergeben einen experimentellen Wert für die Periastrondrehung. Die berechneten Werte stimmen mit den experimentellen genau bei Berücksichtigung der

gravitomagnetischen Kräfte überein. Man kann sagen: Gravitomagnetische Kräfte sind indirekt bereits nachgewiesen !

Im System Sonne- Planet oder Erde- Satellit gilt $m_1 \gg m_2$. Wenn der gemeinsame Schwerpunkt im gewählten Bezugssystem ruht, dann ist die Geschwindigkeit des großen Partners klein,

$$v_1 = O\left(v_2 \frac{m_2}{m_1}\right)$$

Das heißt:

$$\frac{v_1 v_2}{c^2} \sim \left(\frac{a}{r} \frac{m_2}{m_1} \right) \ll \left(\frac{a}{r} \right)$$

Das heißt: Relativ zur ersten über Newton hinausgehende Korrektur ist die gravitomagnetische Kraft also von der Größe $\frac{m_1}{m_2} \ll 1$.

Daher durften wir die gravitomagnetischen Kräfte bei der Berechnung der Periheldrehung des Merkur außer Acht lassen.

im System Erde- Satellit oder Erde- Mond sind die gravitomagnetischen Kräfte wegen $m_1 \gg m_2$ ebenfalls vernachlässigbar, wenn wir vom Schwerpunktsystem mit $v_1 \approx 0$ ausgehen. Allerdings verwenden wir ein KS (etwa das der Schwarzschildmetrik), das asymptotisch in ein IS übergeht ! Die Identifikation dieses KS mit dem Schwerpunktsystem (praktisch das Ruhesystem der Erde) ist wegen der Bahnbewegung der Erde um die Sonne eine Näherung. In einer genaueren Behandlung müsste man von einem IS ausgehen, in dem die Sonne ruht. In diesem System ist v_1 dann nicht mehr vernachlässigbar klein. Das gravitomagnetische Feld der bewegten Erde führt dann zu merklichen Effekten in der Satellitenbewegung. In dem Maß, in dem die Erde näherungsweise als IS gesehen werden kann, wird das gravitomagnetische Feld durch andere Terme kompensiert. Dies muss so sein, denn durch den Übergang in das IS der Sonne können sich ja keine neuen physikalischen Effekte ergeben !

Tests der ART

Experimentell überprüfbar sind:

- Äquivalenzprinzip
- Gravitationsrotverschiebung
- Lichtableitung
- Periheldrehung
- Radarechoverzögerung
- Präzession von Kreiseln
- Gravitationswellen

Äquivalenzprinzip

Logische Voraussetzung der AT aber keine Vorhersage. Experimente sind in vielerlei Art und Weise möglich ! Alle Körper fallen gleich schnell heißt:

$\frac{m_t}{m_S}$ ist unabhängig vom Material. Getestet wurde die Gleichheit dieses Verhältnisses für versch. Materialien auf $10^{-11} - 10^{-12}$.

Nordtvedt- Effekt

Gleichheit von schwerer und träger Masse impliziert, dass alle möglichen Energiebeiträge ΔE etwa der elektromagnetischen oder der starken Wechselwirkung denselben Beitrag $\frac{\Delta E}{c^2}$ zu m_t und m_S liefern. Nach der ART gilt dies auch für den Beitrag der Gravitationswechselwirkung selbst !

Nordtvedt fand heraus, dass in alternativen Gravitationstheorien (wie Brans und Dicke) dies nicht der Fall ist !

um diese Frage zu testen, muss man große Körper betrachten (Wie die Erde und den Mond). Denn nur bei solchen Körpern ist der Beitrag der Gravitationswechselwirkung ΔE_{Grav} zur Masse hinreichend groß. Der relative Beitrag der Gravitationsenergie zur Masse der Erde ist 25 mal größer als beim Mond!.

Wenn nun ΔE_{Grav} unterschiedlich zu m_t und m_S beträgt, dann würden Erde und Mond im Feld der Sonne unterschiedlich schnell fallen. Dieser Effekt würde zu Abweichungen in der Mondbahn von der Größe eines Metres führen. Da die Mondbahn über Laserreflexion auf 10 cm genau vermessen werden kann, müssten derartige Effekte beobachtbar sein.

Analog zu γ, β kann man einen dimensionslosen Parameter η für die Stärke des Nordtvedt-Effekts definieren. Die Analyse der Mondbahndaten bestätigt den ART-Wert $\eta = 0$

auf 10^{-4} genau. Mit dieser Genauigkeit wird dann das Starke Äquivalenzprinzip verifiziert! Darunter versteht man das Einsteinsche Äquivalenzprinzip mit der expliziten Annahme, dass auch die Gravitationsbindungsenergie gleichermaßen zu träger und schwerer Masse beiträgt! In den oben zitierten Experimenten spielt dagegen der Beitrag der Gravitationsbindungsenergie keine Rolle. Deshalb spricht man von Test des schwachen Äquivalenzprinzips!

Robertson- Entwicklung

$$A(r) = 1 + \gamma \frac{2a}{r} + \dots = 1 + 2\gamma \frac{GM}{c^2 r} + \dots$$

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r} + 2(\beta - \gamma) \frac{a^2}{r^2} + \dots = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{c^2 r} \right)^2$$

Wesentlich: Die ART und die Newtonsche Theorie führen zu unterschiedlichen Vorhersagen für β, γ

so gilt:

$$\beta = \gamma = 1 \text{ (Einstein)}$$

und

$$\beta = \gamma = 0 \text{ (Newton)}$$

Daneben: Weitere Theorien, wie Brans-Dicke

Gravitationsrotverschiebung

Im statischen Feld ändert Licht auf dem Weg von A nach B seine Frequenz, nämlich

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \sqrt{\frac{B(\bar{r}_A)}{B(\bar{r}_B)}}$$

Dies ist in führender Ordnung unabhängig von den Koeffizienten β, γ . Der Effekt hängt daher nicht von der Feldgleichung der Gravitation ab, sondern er folgt aus dem Äquivalenzprinzip.

Also handelt es sich hierbei um einen Test des Äquivalenzprinzips.

Die Experimente bestätigen

$$\frac{\Delta \nu_{exp}}{\Delta \nu_{theo}} = 1 \pm \begin{cases} 0,06 & (\text{Sonnenlicht}) \\ 0,01 & (\text{Mößbauereffekt}) \\ 10^{-4} & (\text{Wasserstoffmaser}) \end{cases}$$

Lichtablenkung

Im Gravitationsfeld der Erde wird Licht um den Winkel

$$\Delta\varphi = \frac{4a}{r_0} \frac{1+\gamma}{2} = 1,75 \frac{1+\gamma}{2} \text{ abgelenkt}$$

$$a = \frac{GM_O}{c^2}$$

$$r_0 = R_O$$

letzteres der minimale Abstand von der Sonne

$$\gamma = \begin{cases} 0,9 \pm 0,2 (\text{Stern}) \\ 1,008 \pm 0,005 (\text{Quasar}) \end{cases}$$

als Messergebnis

Periheldrehung

Die Bahnellipse eines Planeten dreht pro Umlauf um

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi a}{p} \frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3}$$

$$a = \frac{GM_O}{c^2} \text{ und } p \text{ ist Parameter der Ellipse (s.o.=}$$

Analyse der Periheldrehung des Merkur ergibt

$$\frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3} = 1,003 \pm 0,005$$

Der Wert der Newtonschen Theorie für die Periheldrehung ist 0 !

$$\text{Dies folgt jedoch nicht durch Einsetzen von } \beta = \gamma = 0 \text{ in } \Delta\varphi = \frac{6\pi a}{p} \frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3}$$

Grund ist, dass in die Berechnung dieses Drehwinkels nicht nur die relativistischen Effekte des Gravitationsfeldes eingehen sondern auch die der Bewegungsgleichungen.

Aus der Analyse der Radarechoverzögerung ergibt sich

$$\gamma = 1,000 \pm 0,001$$

Setzt man dies ein, so folgt:

$$\beta = 0,99 \pm 0,02$$

Dies ist in völliger Übereinstimmung mit dem ART- Wert =1

Da β ein Koeffizient eines nichtlinearen Terms in der Robertsonentwicklung ist, testet dieser Effekt der Periheldrehung insbesondere die Nichtlinearität der Einsteinschen Feldgleichungen.

Radarechoverzögerung

$$\delta_{\max} t = \frac{4a}{c} \left[1 + \frac{(1 + \gamma)}{2} \ln \left(\frac{4r_E r_R}{R_O^2} \right) \right] \approx 2 \cdot 10^{-4} s$$

im Feld der Sonne für Radarmessung an der venus !

Dabei ist rE der Abstand Sonne- Erde und rR der Abstand SOnne- Reflektor

Messung am der Venus ergibt:

$$\gamma = 1,000 \pm 0,001$$

Kreiselpräzession

Der Thirring- Lense- Effekt wäre der erste direkte Nachweis des gravitomagnetischen Effekts. Metrik, die das beschreibt ist

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) d\bar{r}^2 + 2ch_{0i} dx^i dt$$

Analysiert man den Kreisel Erde- Mond im Feld der Sonne, so ergibt sich bereits eine Verifikation der geodätischen Präzession mit einer Genauigkeit von 1 % !

Gravitomagnetische Effekte

Analyse Astrometrischer Bahndaten (Satelliten, Monde, Planeten, Doppelsternsysteme...) erfolgt in Postnewtonscher Näherung. Das heißt: in konsistenter Weise werden alle Terme bis zu einer bestimmten Ordnung in

$\frac{a}{r}$ bzw. $\frac{v}{c}$ mitgenommen werden. Dies schließt besonders die Berücksichtigung gravitomagnetischer Effekte mit ein !

Um die Bahndaten - besonders Periastrondrehung des Doppelsternsystems PSR 1913+16 zu erklären, müssen gravitomagnetische Effekte berücksichtigt werden !

Die beobachtete Bahnbewegung bestätigt die Vorhersage der ART

Mondbahn

Unter Berücksichtigung der geodätischen Präzession und der gravitomagnetischen Kräfte kann man
 $\gamma = 1,000 \pm 0,001$

$\beta = 1,000 \pm 0,001$ bestimmen

Gravitationswellen

Beschleunigte Massen strahlen Gravitationswellen ab ! leider ist ein direkter Nachweis bisher nicht möglich ! Allerdings gibt es auch hier einen indirekten Nachweis über die beobachtete Abbremsung des Doppelsternsystems PSR 1913+16 ! Diese Beobachtungen bestätigen die Vorhersagen der ART mit einer Genauigkeit von 1%.

Summary

ART voll bestätigt

Experimente im Sonnensystem können die ART jedoch nur bis auf eine Genauigkeit von $\frac{\Phi}{c^2} \sim 10^{-6}$ für die

Sonne testen.

Durch Beobachtungen von Doppelsternsystemen kann dagegen der fall starker Felder getestet werden !

Ebene Wellen

Für schwache Felder, also

$|h_{\mu\nu}| = |g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| \ll 1$ reduzieren sich die Einsteinschen Feldgleichungen auf die linearisierten feldgleichungen, also

$$\# h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

Im Quellenfreien Raum

$$T_{\mu\nu} = 0$$

$$T = 0$$

(letzteres gewinnt man durch Spurbildung der ganzen Gleichung) gewinnt man

$$\# h_{\mu\nu} = 0$$

Einfachste Lösungen dieser Gleichung sind ebene Wellen, die wir hier ableiten und untersuchen.

Elektromagnetische Wellen

Hier eignen sich Analogien zur Edynamik besonders. Wir beginnen mit einem Rückblick auf elektromagnetische Wellen. Die Physikalischen Felder:

$$F^{\alpha\beta} = A^{\alpha,\beta} - A^{\beta,\alpha}$$

sind invariant gegen Eichtrafos der Art

$$A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \partial_\alpha \Psi$$

Somit kann eine Eichbedingung für die Potenziale gewählt werden, also

$$A^\alpha_{,\alpha} = 0, \text{ die Lorentzezeichung.}$$

Die Bedingung ist gerade so gewählt, dass die Maxwellgleichungen

$$F^{\alpha\beta}_{,\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \text{ entkoppeln, also die inhomogenen Maxwellgleichungen, die Erregungsgleichungen.}$$

Dann entkoppeln die Maxwellgleichungen zu

$$\# A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$$

Dies sind Gleichungen derselben Struktur wie

$$\# h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

eine partikuläre Lösung ist die Form der retardierten Potenziale

Wegen der Lorentzezeichung

$$A^\alpha_{,\alpha} = 0$$

sind nur drei der vier Felder in $\# A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha$ unabhängig !

Das heißt: Besonders für freie Felder, also

$$j^\alpha = 0 \text{ wird eine weitere Eichtransformation } A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \partial_\alpha \Psi \text{ zugelassen.}$$

Mit einem Ψ , welches selbst die Wellengleichung löst !

So können wir festlegen:

$$A^0 = 0$$

Somit folgen die Wellengleichungen:

$$\# A^\alpha = 0$$

$$A^0 = 0$$

$$A^i_{,i} = 0$$

Das bedeutet: Es gibt nur 2 unabhängige Felder !

Der ANsatz

$$A^\alpha = e^\alpha \exp(-ik_\beta x^\beta) + c.c = e^\alpha \exp(i(\bar{k}\bar{r} - \omega t)) + c.c$$

mit dem Lorentzvektor

$$k^\beta = \left(\frac{\omega}{c}, \bar{k} \right)$$

$$x^\beta = (ct, \bar{r})$$

Dies löst die Wellengleichung $\# A^\alpha = 0$ falls:

$$k^\beta k_\beta = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = k^2 c^2$$

Dabei ist

$$k = |\vec{k}|$$

Die angegebene Lösung ist eine reelle Welle, weil man das komplex konjugierte addiert ! Die AMplitude e^α der

$$\# A^\alpha = 0$$

Welle oder ihr räumlicher Anteil \bar{e} wird Polarisationsvektor genannt. Die Zusatzbedingungen $A^0 = 0$

$$A^i_{,i} = 0$$

schränken den Polarisationsvektor durch $e^\alpha = (0, \bar{e})$ ein.
 $\bar{e} \cdot \vec{k} = 0$

Wenn wir speziell die x^3 – Achse des Koordinatensystems in Richtung \vec{k} legen, dann sind die beiden unabhängigen Felder die 1 und die 2- Komponente von:

$$(A^\alpha) = (0, e^1, e^2, 0) \exp(ik(x^3 - ct)) + c.c$$

Damit sind 2 lineare Polarisationen der Welle möglich, beispielsweise

$$e^1 = A, e^2 = 0$$

oder

$$e^1 = 0, e^2 = A$$

Der Vektor \bar{A} und damit auch der elektrische Feldvektor \bar{E} , steht senkrecht zum Wellenvektor \vec{k} . Dafür gibt es zwei unabhängige Polarisations- Richtungen !

Folgende Linearkombinationen ergeben zirkular polarisierte Wellen:

$$(A^\alpha_{zirk}) = (0, 1, \pm i, 0) \exp(ik(x^3 - ct)) + c.c$$

Diese Lösung transformiert sich bei Drehung des Koordinatensystems um die x^3 – Achse um den Winkel φ gemäß:

$$(A^\alpha_{zirk}) \rightarrow \text{Drehung} \rightarrow \exp(\mp i\varphi) A^\alpha_{zirk}$$

In der quantisierten Theorie wird A^α zur Wellenfunktion der Feldquanten (Photonen). Dann bedeutet $(A^\alpha_{zirk}) \rightarrow \text{Drehung} \rightarrow \exp(\mp i\varphi) A^\alpha_{zirk}$, dass Photonen den Spin $\pm \hbar$ in Richtung ihres Impulses $\hbar \vec{k}$ haben.

Welle und Teilchen

ART = Edynamik = klassische Feldtheorie. Quantisierung der Gravitationswellen spielt praktisch keine Rolle ! Wegen des "Dualismus" sei kurz erwähnt, Welle und Teilchen, Wellengleichung und Energie- Impuls- Beziehung, wie Polarisation und SPin zusammenhängen:

Photonen wie Gravitonen haben keine Ruhemasse, denn:

$$\# A^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow k^\beta k_\beta = 0$$

$$E = \hbar \omega = \hbar c k^0$$

$$\bar{p} = \hbar \vec{k}$$

$$\Rightarrow E^2 = p^2 c^2$$

Allgemein gilt:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$\Rightarrow m = 0$$

Die Wellengleichung

$$\# h_{\mu\nu} = 0 \text{ führt entsprechend zu } \Rightarrow k^\beta k_\beta \Rightarrow m = 0$$

Der Polarisierung der klassischen Welle entspricht die Spineinstellung der Feldquanten. Der Betrag ist eine Eigenschaft der Teilchen (Photonen, Gravitonen). Variabel ist nur die Einstellung des Spins!

der Spinvektor eines massiven Teilchens wird durch die Festlegung $(s^\alpha) = (0, \bar{s})$ im Momentanen Ruhesystem IS' definiert! Für ein isoliertes Teilchen gilt Drehsymmetrie und $\bar{s}' = \text{const.}$

Für masselose Teilchen existiert kein Ruhesystem. Der Impulsvektor \bar{k} zeichnet eine Richtung aus. Für ein isoliertes Teilchen gilt Axialsymmetrie bezüglich der Achse $\bar{e}_{\bar{k}} = \frac{\bar{k}}{k}$. Dann ist die Spinprojektion $\bar{s} \cdot \bar{e}_{\bar{k}}$ eine Erhaltungsgröße.

Die Spinprojektion des Feldquants entspricht der Polarisierung der Welle. Dabei korrespondiert $\bar{s} \parallel \pm \bar{k}$ mit der zirkularen Polarisierung, also mit der Darstellung

$(A^\alpha_{zirk}) \rightarrow \text{Drehung} \rightarrow \exp(\mp i\varphi) A^\alpha_{zirk}$ im elektromagnetischen Fall. Die Felder für die anderen Polarisierungen können durch geeignete Eichtransformationen eliminiert werden. Sie sind physikalisch entsprechend ohne Bedeutung. Masselose Teilchen mit

$|\bar{s}| \neq 0$ können daher nur die beiden SPineinstellungen $\bar{s} \parallel \pm \bar{k}$ einnehmen.

In der klassischen feldtheorie (Elektrodynamik oder ART) gibt es dementsprechend nur je 2 unabhängige Felder und zwar unabhängig von der ursprünglichen Anzahl der Felder!

Vier A^α oder zehn $h_{\mu\nu}$!-> immer nur 2 bleiben übrig! Der Zusammenhang mit dem Spin wird am Transformationsverhalten einer polarisierten Welle unter Drehungen also an der Gleichung $(A^\alpha_{zirk}) \rightarrow \text{Drehung} \rightarrow \exp(\mp i\varphi) A^\alpha_{zirk}$ deutlich!

Gravitationswellen

In Analogie zur Elektrodynamik untersuchen wir jetzt ebene Gravitationswellen. Die Koordinatentrafo

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$$

führt zu einer Eichtransformation der Potenziale (vergl. linearisierte Feldgleichungen!):

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu}' = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}$$

Diese Trafo ist wieder ohne Einfluss auf physikalische Größen. Da die lin. Feldgleichungen nur für schwache Felder gelten, sind nur kleine Änderungen der Koordinaten zugelassen, also

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

$$|\varepsilon_{\mu,\nu}| \ll 1$$

Das heißt: wir werden im Folgenden immer nur die führende Ordnung in h und ε mitnehmen!

Der Übergang zwischen ko- und kontravarianten Komponenten erfolgt durch $\eta_{\mu\nu}$ und die kovariante Ableitung kann durch die partielle ersetzt werden!

In $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ können wir vier Funktionen $\varepsilon^\mu(x)$ frei wählen. Diese Freiheit ermöglicht es, die vier Eichbedingungen

$2h^{\mu}_{\nu,\mu} = h^{\mu}_{\mu,\nu}$ zu verlangen ! Diese Bedingung führt zur Entkopplung der linearisierten Feldgleichungen

$$\text{und damit zum Ergebnis } \#h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

Das heißt:

$2h^{\mu}_{\nu,\mu} = h^{\mu}_{\mu,\nu}$ ist die der Lorentz- Eichung der Elektrodynamik entsprechende Eichung !

Wegen der Symmetrie $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ sind nur 10 der 16 Komponenten voneinander unabhängig. Die vier Eichbedingungen reduzieren dies auf sechs unabhängige Komponenten. Für die freien Gleichungen $\#h_{\mu\nu} = 0$ sind vier zusätzliche Transformationen

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu}' = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu} \text{ möglich, sofern}$$

$\#\varepsilon^\mu = 0$, also die Koordinatenverschiebung die Wellengleichung erfüllt ! Dies reduziert die Zahl der unabhängigen Komponenten auf schließlich 2 !

Wir führen im Folgenden die Reduktion von 10 auf 2 Felder explizit vor:

Zunächst: Lösung der Wellengleichung als ebene Welle:

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(-ik_\beta x^\beta) + c.c = e_{\mu\nu} \exp(i(\bar{k}\bar{r} - \omega t)) + c.c$$

$$\Rightarrow \eta^{\lambda\kappa} k_\kappa k_\lambda = k^\lambda k_\lambda = 0 \Leftrightarrow k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2$$

$$k = |\bar{k}|$$

Die Amplituden $e_{\mu\nu}$ der ebenen Welle werden Polarisationsstensoren genannt. Wir setzen die Lösung

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(-ik_\beta x^\beta) + c.c$$

in die Eichbedingung ein und erhalten:

$$2k_\mu \eta^{\mu\rho} e_{\rho\nu} = k_\nu \eta^{\mu\rho} e_{\rho\mu}$$

Da es die $h_{\mu\nu}$ sind, ist auch der Polarisationsstensor symmetrisch:

Wir können weiter eine ebene Welle in x3- Richtung betrachten:

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(i k(x^3 - ct)) + c.c$$

mit den Komponenten des Wellenvektors:

$$k_1 = k_2 = 0$$

$$k_0 = -k_3 = k = \frac{\omega}{c}$$

Damit können die Bedingungen $2k_\mu \eta^{\mu\rho} e_{\rho\nu} = k_\nu \eta^{\mu\rho} e_{\rho\mu}$ ausgewertet werden:

$$e_{00} + e_{30} = \frac{(e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33})}{2}$$

$$e_{01} + e_{31} = 0$$

$$e_{02} + e_{32} = 0$$

$$e_{03} + e_{33} = -\frac{(e_{00} - e_{11} - e_{22} - e_{33})}{2}$$

Wegen der Symmetrie kann nun der Polarisationsstensor durch sechs unabhängige Komponenten festgelegt werden: (Symmetrie -> 10 Bedingungen, vier Eichbedingungen -> 6 Komponenten bleiben übrig !)

$$e_{00}, e_{11}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}$$

$$\Rightarrow e_{01} = -e_{31}$$

$$\Rightarrow e_{02} = -e_{32}$$

$$\Rightarrow e_{03} = -\frac{e_{33} + e_{00}}{2}$$

$$\Rightarrow e_{22} = -e_{11}$$

Nun kommt die zusätzliche Eichtransformation, die für Wellenlösungen möglich ist, ins Spiel. Das sind eben die genannten Trafos

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu} \text{ möglich, sofern}$$

$$\#\varepsilon^\mu = 0$$

Also:

$$\varepsilon^\mu(x) = \delta^\mu \exp(-ik_\beta x^\beta) + c.c$$

Nun werten wir die Eichbedingung

$$2h^\mu_{\nu,\mu} = h^\mu_{\mu,\nu}$$

für $h'_{\mu\nu}$ aus:

$$2h^\mu_{\nu,\mu} - 2[\varepsilon^\mu_{,\nu} + \varepsilon^\nu_{,\mu}]_\mu = h^\mu_{\mu,\nu} - [\varepsilon^\mu_{,\mu} + \varepsilon^\mu_{,\nu}]_\nu$$

$$\varepsilon^\mu_{,\nu,\mu} = \varepsilon^\mu_{\mu,\nu}$$

$$\varepsilon^\nu_{,\mu,\mu}$$

letzteres, weil ja die Eichfunktion Lösung der Wellengleichung ist!

Also ist die zusätzliche Eichtrafo $\varepsilon^\mu(x) = \delta^\mu \exp(-ik_\beta x^\beta) + c.c$ mit beliebigen Amplituden δ^μ verletzt also die alte Eichbedingung nicht (sehr wichtig !!)

Wählen wir nun k_β in $\varepsilon^\mu(x) = \delta^\mu \exp(-ik_\beta x^\beta) + c.c$ gleich dem Wellenvektor der freien Lösung $h_{\mu\nu}$

, so erhalten wir mit $h^{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}$ und

$\varepsilon^\mu(x) = \delta^\mu \exp(-ik_\beta x^\beta) + c.c$ eine neue Wellenlösung $h'_{\mu\nu}$. In dieser haben alle Terme den selben Exponenzialfaktor $\exp(-ik_\beta x^\beta)$. Das bedeutet, es werden nur die Amplituden transformiert:

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(ik(x^3 - ct)) + c.c$$

$$\Rightarrow e_{\mu\nu} \rightarrow e'_{\mu\nu}$$

Wegen $h^{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu} = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}$ erhalten wir für die neuen Amplituden:

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + ik_\mu \delta_\nu + ik_\nu \delta_\mu$$

Mit Gleichung

$$k_1 = k_2 = 0$$

$$k_0 = -k_3 = k = \frac{\omega}{c}$$

folgt dann für die 6 unabhängigen Amplituden:

$$\begin{aligned}
e_{11}' &= e_{11} \\
e_{12}' &= e_{12} \\
e_{13}' &= e_{13} - ik\delta_1 \\
e_{23}' &= e_{23} - ik\delta_2 \\
e_{33}' &= e_{33} - 2ik\delta_3 \\
e_{00}' &= e_{00} + 2ik\delta_0
\end{aligned}$$

Das heißt: 4 Amplituden können beliebig und unabhängig voneinander transformiert werden ! Die neue Lösung ist physikalisch absolut äquivalent zur alten. Somit können

$e_{13}', e_{23}', e_{33}', e_{00}'$ zu Null transformiert werden.

Physikalisch relevant sind also nur die Polarisierungen, die den Amplituden e_{11}', e_{12}' entsprechen !

Es genügt also für die allgemeinste Form der ebenen Welle, nur diese beiden Amplituden zu berücksichtigen:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & -e_{11} \end{pmatrix} \exp(ik(x^3 - ct)) + c.c$$

Diese ebene Welle ist mit $(A^\alpha) = (0, e^1, e^2, 0) \exp(ik(x^3 - ct)) + c.c$ direkt vergleichbar !

Helizität

Wir untersuchen nun das Verhalten von unserer gefundenen Lösung

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & -e_{11} \end{pmatrix} \exp(ik(x^3 - ct)) + c.c \text{ bei Drehung um die}$$

x^3 -Achse, also bei Drehung um die Richtung des Wellenvektors.

Da wir Fast-Minkowski-Metrik benutzen können, wir auch die Drehung über Allgemeine Lorentztrasfos beschreiben.

Für eine Drehung um den Winkel φ lautet die Transformationsmatrix:

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für kovariante Transformationen.

Der Polarisierungstensor transformiert gemäß

$$e_{\nu\mu}' = \Lambda_\nu^\rho \Lambda_\mu^\sigma e_{\rho\sigma}$$

betrachten wir noch einmal die sechs Amplituden

$$e_{00}, e_{11}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}$$

$$\Rightarrow e_{01} = -e_{31}$$

$$\Rightarrow e_{02} = -e_{32}$$

$$\Rightarrow e_{03} = -\frac{e_{33} + e_{00}}{2}$$

$$\Rightarrow e_{22} = -e_{11}$$

So können wir äquivalent zu diesen folgende sechs Amplituden angeben:

$$e_{00}, e_{33}$$

$$f_{\pm} = e_{13} \pm ie_{23}$$

$$e_{\pm} = e_{11} \pm ie_{12}$$

Wir können diese mit $e_{\nu\mu}' = \Lambda_{\nu}^{\rho} \Lambda_{\mu}^{\sigma} e_{\rho\sigma}$ transformieren und erhalten:

$$e_{00}' = e_{00}$$

$$e_{33}' = e_{33}$$

$$f_{\pm}' = \exp(\pm i\varphi) f_{\pm}$$

$$e_{\pm}' = \exp(\pm 2i\varphi) e_{\pm}$$

Insgesamt schreibt man für das Transformationsverhalten einer ebenen Welle:

$$\Psi' = \exp(iH\varphi)\Psi$$

Bei Drehungen um den Wellenvektor \mathbf{k} wird dieses Transformationsverhalten als "Helizität" H bezeichnet.

In einer quantisierten Theorie wird

$$h_{\mu\nu}' = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & -e_{11} \end{pmatrix} \exp(ik(x^3 - ct)) + c.c \text{ zur Wellenfunktion der Gravitonen.}$$

Dann bedeutet das skizzierte Transformationsverhalten einen Drehimpuls der Gravitonen mit Projektion $H\hbar$ auf die Impulsrichtung. Man kann dies mit der Schrödinger-Wellenfunktion vergleichen, die bei Drehsymmetrie um die x^3 -Achse proportional zu $\exp(im\varphi)$ ist, wobei $m\hbar$ die Projektion des Bahndrehimpulses auf die z-Achse, also x3-Achse ist!

Die auftretenden Werte

$$H = 0, \pm 1, \pm 2$$

zeigen, dass die Gravitonen Teilchen mit Spin 2 sind.

Wie wir oben gesehen haben, können wir die Beiträge mit $e_{00}, e_{33}, e_{13}, e_{23}$ durch geeignete Koordinatenwahl eliminieren.

Diese Beiträge sind dann physikalisch nicht relevant!

Nach

$$e_{00}, e_{33}$$

$$f_{\pm} = e_{13} \pm ie_{23}$$

$$e_{\pm} = e_{11} \pm ie_{12}$$

und

$$\Psi' = \exp(iH\varphi)\Psi$$

sind dies gerade die Helizitäten

$H=0$ und $H = \pm 1$. Im Teilchenbild bedeutet dies, dass wir Drehimpulskomponenten $0, \pm \hbar$ eliminieren. Die Stärke dieser Anteile kann willkürlich durch Koordinatentransformationen geändert werden. Insbesondere kann sie zu null gemacht werden. Dagegen bezeichnet

$H = \pm 2$ eine physikalische Polarisierung der Welle oder einen physikalischen Zustand eines Gravitons. Im Teilchenbild bedeutet dies, dass der Spinvektor parallel oder antiparallel zum Impuls ist.

Teilchen im Feld der Welle

$$h_{\mu\nu}(x^3, t) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & -e_{11} \end{pmatrix} \exp(ik(x^3 - ct)) + c.c$$

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^3, t)) dx^\nu dx^\mu$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} u^\nu u^\sigma$$

Letzteres die Bewegungsgleichungen für die Bahnen $x^\mu(\tau)$ von Teilchen im Gravitationsfeld.

Dabei kann man konsistent die $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$ aus den $h_{\mu\nu}$ ausrechnen !

Außer den Gravitationskräften wirken keine weiteren Kräfte auf die Teilchen.

Die drei gegebenen Gleichungen definieren unser Problem

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} = \frac{\eta^{\mu\lambda}}{2} (h_{\nu\lambda,\sigma} + h_{\lambda\sigma,\nu} - h_{\nu\sigma,\lambda}) + O(h^2)$$

Also:

$$\Gamma^i{}_{00} = -\frac{1}{2} (h_{0i,0} + h_{0i,0} - h_{00,i}) = 0$$

Als Anfangsbedingung wählen wir:

$$\begin{aligned} \dot{x}^i(0) &= \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right)_{\tau=0} = 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right)_{\tau=0} &= -\Gamma^i{}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu(0) \dot{x}^\nu(0) = -\Gamma^i{}_{00} \dot{x}^0(0) \dot{x}^0(0) = 0 \end{aligned}$$

In den verwendeten Koordinaten verschwindet also die Geschwindigkeit und die Beschleunigung. Damit ist die

Statische Sternmodelle

Astrophysik und Kosmologie haben in den 60-er Jahren besonderen Auftrieb durch zahlreiche Entdeckungen erhalten. Nennenswert sind 3 herausragende:

1. Entdeckung der Quasare als enorme Radioquellen (1963). Modell: Schwarze Löcher, die Materie anziehen !
2. Kosmische Hintergrundstrahlung (theoretisch: Gamov, 30- er Jahre), praktisch: Penzias, Wilson, 1965
3. Pulsare: 1967 entdeckt: Interpretation als Neutronensterne !. Es handelt sich um Sterne mit mehr als 1,8 Sonnenmassen. der Radius liegt bei maximal drei Schwarzschildradien !

Mit der Hintergrundstrahlung verlor die Kosmologie ihren Ruf als rein spekulative Theorie ! Spekulative neue Entdeckungen:

Gravitationslinse,

Gravitationsabremssung von Doppelsternsystemen (PSR 1913+16). Theoretisch wichtige Erkenntnisse betreffen insbesondere Schwarze Löcher und die Frühzeit des Universums.

Allgemeinrelativistisch sind insbesondere interessant: die relativistischen Gleichungen für den Gravitationsdruck und die Beschreibung des Kollaps zu einem Schwarzen Loch und für den Kosmos die Weltmodelle und das kosmologische Standardmodell !

Sterngleichgewicht

Unter einem Stern verstehen wir eine große Ansammlung von Materie, die durch Gravitation zusammengehalten wird. Diese tendiert dazu, den Stern weiter zu komprimieren !

Gleichgewicht entsteht, wenn der Druck der Materie dem Gravitationsdruck die Waage hält !

$$P_{grav} = P_{mat}$$

Wir werden nun den Gravitationsdruck einer Massenverteilung bestimmen ! und geben dann den Druck der Materie an: Sonne, Weißer Zwerg, Neutronenstern !

Als erste Anwendung betrachten wir den Druck an der Erdoberfläche: 1 bar !

Er wird als Gravitationsdruck der Luft verursacht. Der Druck komprimiert die Luft so weit, bis

$$P_{mat} = \frac{\rho k T}{m} = P_{Grav}$$

Von Sternen im engeren Sinn spricht man ab Sonnenmasse. Deuteriumbrennen zeigen jedoch auch schon die wesentlich leichteren braunen Zwerge mit 0,08 Sonnenmassen oder mehr !

Die im folgenden betrachteten Sternengleichgewichte können qualitativ als längerwährende Phasen oder Endstadium der Sternentwicklung gesehen werden. Ein Stern entsteht aus einer Wasserstoffwolke, die kontrahiert. Dabei wird Gravitationsenergie frei, die zur Aufheizung des Sterns führt ! Wenn die Masse hinreichend groß ist ! entstehen dabei im Sterneninneren so hohe Drücke und Temperaturen, dass Kernfusion zündet ! Es entsteht ein Sternengleichgewicht, wie das der Sonne, in dem der Materiedruck der kinetische Gasdruck des heißen Plasma ist. Fusion führt zu Helium und kann bis zum Eisen gehen. (stabilster Atomkern). Ein möglicher Gleichgewichtszustand nach der Phasen des nuklearen Brennens ist der Weiße Zwerg, in dem P_{mat} gleich dem Fermidruck der Elektronen ist. Eine andere Möglichkeit ist der Neutronenstern, in dem der Fermidruck der Neutronen dem Gravitationsdruck die Waage hält !

Wir behandeln hier die Sternengleichgewichte der Sonne, des Weißen Zwergs und des Neutronensterns. Jeweils nichtrelativistisch

Gravitationsdruck

Setzen wir $P_{mat} = \frac{\rho k T}{m} = P_{Grav}$ voraus, so gilt:

$$P = P_{mat} = P_{Grav}$$

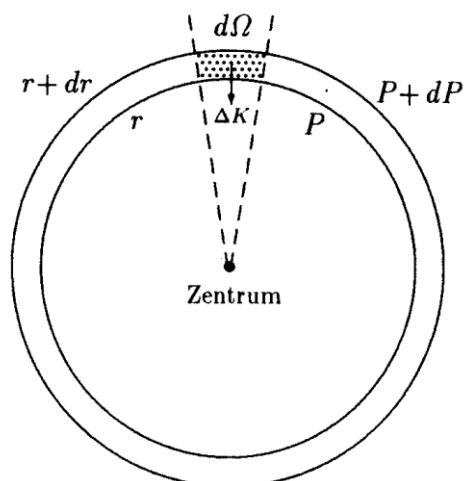


Abbildung 38.1 Auf das schattierte Massenelement (zwischen r und $r + dr$ und im Raumwinkel $d\Omega$) wirkt die Gravitationskraft ΔK . Im Gleichgewicht muß der Druckunterschied dP eine gleichgroße, entgegengesetzte Kraft ergeben.

Betrachten wir die Kraft auf ein Massenelement, so gilt für

$$\Delta m = \rho r^2 dr d\Omega$$

Im Bereich $r' < r$ befindet sich die Masse

$$M(r) = \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' d\Omega$$

Sie bewirkt die Gravitationskraft:

$$\Delta F = \frac{G\Delta m M(r)}{r^2} = G\rho dr d\Omega \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' d\Omega$$

Es ist bekannt, dass sich die Kräfte der äußeren Kugelschale aufheben.

Auf ein Flächenelement $r^2 d\Omega$ des Massenelements wirkt von außen der Druck

$$P(r+dr) = P(r) + dP$$

von innen dagegen:

$$P(r) = P$$

Also wird die gravitative Anziehung kompensiert durch

$$\Delta F' = dP r^2 d\Omega$$

Im Gleichgewicht

$$\Delta F' = dP r^2 d\Omega = \Delta F = \frac{G\Delta m M(r)}{r^2} = G\rho dr d\Omega M(r)$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r)$$

Um zu einem Sternmodell zu gelangen, muss diese DGL durch die Annahme einer Zustandsgleichung

$P = P(\rho)$ ergänzt werden ! Dies ist dann eine zusätzliche Annahme für den Materiedruck, während wir die Druckgleichung über

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \text{ für den Gravitationsdruck gewonnen haben.}$$

Ein Beispiel für eine sinnvolle Zustandsgleichung wäre das ideale Gasgesetz

Für eine erste Auswertung nehmen wir inkompressible Materie an, also

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{const.}$$

Dann folgt :

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{4\pi}{3} \rho_0^2 r$$

$$P(r) = P_0 - G \frac{2\pi}{3} \rho_0^2 r^2$$

Dabei ist

P_0 der Druck im zentrum !

Der Sternrand ist dadurch bestimmt, dass $\rho = 0$ im Bereich $r > R$

Damit verschwindet der Gravitationsdruck am Sternrand. Wegen $P@=0$ also:

$$P_0 = G \frac{2\pi}{3} \rho_0^2 R^2 = \rho_0 c^2 \frac{r_S}{4R}$$

$$r_S = 2 \frac{GM}{c^2}$$

Für den zentralen Druck (sicherlich nicht sinnvoll für den Verlauf des Drucks) können wir diesen Ansatz auch verwenden, um bei nicht konstanten Dichten eine Größenordnung abzuschätzen !

$$P_0 = \rho_0 c^2 \frac{r_S}{4R}$$

$$r_S = 2 \frac{GM}{c^2}$$

und im Verlauf dann:

$$P = \rho c^2 \frac{r_S}{4R}$$

Druck im Sterngleichgewicht. Dazu ist ein mittlerer Druck und eine mittlere Dichte einzusetzen. Mit einer Zustandsgleichung $P = P(\rho)$ erhalten wir aus

$$P = \rho c^2 \frac{r_S}{4R} \text{ einen Zusammenhang zwischen Masse und Radius eines Sterns !}$$

Das Verhältnis $\frac{r_S}{R}$ ist ein Maß für die Stärke der relativistischen Effekte

Sonne

Betrachten wir die Sonne. In einem solchen Stern hält der kinetische Druck der Temperaturbewegung der Gravitation stand.

$$P = \frac{\rho k T}{m}$$

Dabei ist m die Masse der Gasteilchen. Also erhalten wir

$$P = \rho c^2 \frac{r_S}{4R} = \rho \frac{kT}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{kT}{m} = c^2 \frac{r_S}{4R}$$

Die Sonne besteht überwiegend aus Wasserstoff mit Atomkernmassen

$$mc^2 \sim 1 \text{ GeV}$$

Die Temperatur im Inneren des Sterns liegt bei $\sim \text{keV} = kT$

Bei dieser Temperatur sind die Wasserstoffatome weitgehend ionisiert! Nach dem idealen Gasgesetz liefern dann die Elektronen und Protonen den gleichen Beitrag zum Druck

$$P = NkT/V$$

denn die Teilchendichte N/V ist für beide gleich! Dagegen ist der Beitrag der Elektronen zur Massendichte ρ zu vernachlässigen, so dass wir die folgende numerische Auswertung erhalten:

$$\frac{kT}{c^2 m} = \frac{r_S}{4R} \sim 10^{-6}$$

Für eine Sonnenmasse ist der Schwarzschildradius 3 km. Dann folgt der Sternradius zu

$$R = \frac{r_S}{4 \cdot 10^{-6}} \sim 750.000 \text{ km}.$$

Beobachtet werden etwa 700.000 km!

Wegen $r_S \ll R$ sind Allgemeinrelativistische Korrekturen für uns weitgehend vernachlässigbar!

Weißer Zwerg

Lassen Temperatur und Druck im Sterninneren es zu, so wird in einem Stern vom Typ Sonne zunächst Wasserstoff zu Helium verbrannt und dann schließen sich weitere Fusionszyklen an. Beispielsweise von Helium zu Kohlenstoff!

Dies kann bis zum Eisen führen ! Für das die Bindungsenergie pro Nukleon am größten ist ! Nach Ende der Fusion kühlt der Stern durch Abstrahlung aus ! Bei niedrigen Temperaturen (im Folgenden betrachten wir der Einfachheit $T = 0$), wird der Stern alleine durch den Fermidruck stabilisiert !

Man könnte zwar neutrale Atome erwarten, jedoch halten die Atomhüllen dem Gravitationsdruck nicht Stand. Es entsteht ein Elektronengas, dessen Fermidruck der Gravitation entgegenwirkt. Da die Atomrümpfe positive Hintergrundladungen bilden, spielen elektromagnetische Kräfte quasi keine Rolle !

Hält der Elektronendruck der Gravitation Stand, so spricht man vom Weißen Zwerg !
Elektronen unterliegen dem Pauliprinzip.

Das bedeutet, die Wellenfunktionen können sich nicht überlappen. der mittlere Abstand des vollständig entarteten Elektronengases ist also gleich der de-Broglie-Wellenlänge !

Wir schreiben etwa wegen:

$$p = k\hbar = \frac{\hbar}{\lambda} \sim \frac{\hbar}{\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Dies entspricht einem kinetischen Druck für $T=0$, der selbst temperaturunabhängig ist. Wir bestimmen das Sterngleichgewicht aus der Bedingung minimaler Energie.

Die Energie eines Elektrons ist nach der SRT:

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

für

$$p \ll mc$$

$$\varepsilon = m_e c^2 + \frac{p^2}{2m_e}$$

ART II

Zusammenfassende Darstellung der Grundlagen

Boltzmann: Eleganz ist Sache der Schneider und nicht der Physik !

1) Hamilton- Lagrange- Formalismus (Ableitung der Feldgleichungen aus einem Wirkungsprinzip)

Klassische ART:

Feld wird als klassisches Feld betrachtet, nicht quantisiert -> Wie Maxwellgleichungen. Quantisierung führte das Photon ein !

Schwierigkeiten

GUT: Vor der Vereinheitlichung muss eine Quantisierung geschafft werden !

Aber: ART ist keine übliche Eichtheorie

- ➔ sie ist geometrisch wegen dem Äquivalenzprinzip !
- ➔ lokal ist kein Energiebegriff zuordenbar (es existiert keine lokale Krümmung)
- ➔ das passt sich mit lokaler Portionierung des Feldes

→ wie will man da Energiedichten bestimmen ?

Lösung

Quantenfeldtheorien ummodelln, damit sie der ART ähnlich werden, wenns umgekehrt nicht klappt !
Wirkungsintegral: Geometrisierung der bestehenden Feldtheorien !

geometrisiert ist bisher nur " der gravitative Beitrag" der elektrischen Felder.

#Wirkungsintegral: Affinität, Wirkung, die von der Konnektion unabhängig ist.

Allgemeines Schema

Aufgabenstellung: Bewegungsgleichung, deren Lösungen

$q^i(t)$ zu finden sind !

Feldgleichungen:

$$\Phi^a(t, x^i)$$

Bewegungsgleichungen und Feldgleichungen sind dann in Raum und Zeit zu entwickeln !

Lagrangefunktion:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{q}^i(t) - V(q^i)$$

$$L = L(\Phi, \partial\Phi, \partial^2\Phi, \dots)$$

In der ART sind die

Φ durch die $g_{\mu\nu}$ gegeben !

→ in der Lagrangefunktion tauchen auch zweite Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ auf !

→ In der Edynamik gehen die Potenziale nur bis zur ersten Ableitung !

Als kovariante Verallgemeinerung der Gleichung $\# g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}^{grav})$ sollte $T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}^{grav}$

jedoch linear in der zweiten Ableitung von $g_{\mu\nu}$ sein !

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\Phi, \partial\Phi, \partial^2\Phi, \dots) dt$$

$$\delta S = 0$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\Phi, \partial\Phi, \partial^2\Phi, \dots) dt = 0$$

Über eine Legendre- Trafo kommen wir später auch zur Hamiltonfunktion H -> Hamiltonsche Gleichungen (Hamiltonsche bzw. kanonische Formulierung)

Erst L konstruieren, dann aus L -> H !

Grund:

Die Theorie selbst sollte Invarianzen haben unter Trafos

→ Lorentzgruppe in der SRT

→ Allgemeine Koordinatentransformationen in der ART !

in L

können die Invarianzen und damit die Symmetrierelationen gut eingebaut werden !

L muss gegenüber der Gruppentrafos invariant sein -> Bewegungsgleichungen sind auch symmetrisch 1

In H ist die Symmetrie dagegen nicht zu erkennen !

Also

Allgemeines Vorgehen: Symmetrieverlegungen -> L konstruieren -> H konstruieren

→ Symmetrie unsichtbar wegen der abgespaltenen Divergenzen !

Warum muss die ART im Hamilton- Lagrange- Formalismus formulierbar sein ?

Rechtfertigung:

Besonders Erfolg des Formalismus !

18. Jahrhundert: Newton, später d'Alembert und Euler / Lagrange

→ Lagrange- Formalismus (sogenannte analytische Mechanik) -> Mechanik ist formulierbar !

Aber: die ursprüngliche Mechanik ist verdreht !

Es gibt Probleme, die in Lagrange unlösbar sind !

Einsicht in die Physik steckt vor allem noch in der Newtonschen Mechanik ! -> dies steckt dann kristallisiert in Lagrange mit drin !

der konkrete Inhalt wie $L = T - V$ geht dagegen verloren !

Aber: die Denkart bleibt erhalten !

→ Beitrag zur Philosophie von Borszeskowski !

Systeme mit endlicher Zahl von FG (Mechanik)

Phasenraum: Impulse und Koordinaten

Geschwindigkeit- Phasenraum: Koordinaten und Geschwindigkeiten:

$$q^i(t)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Für Punkte: 1...3N

Festkörper: 1..6N

$$\dot{q}^i(t) := \frac{dq^i}{dt}$$

$$i = 1, \dots, N$$

Lagrange- Funktion

$$L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

explizite Zeitabhängigkeit -> nichtkonservative Systeme

Wirkungsintegral !

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t) dt$$

$$\delta S = 0$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t) dt = 0$$

prinzipiell: Hamiltonsches Prinzip : S ist stationär bezüglich Euler- Variation:

$$\delta(q^i(t_1)) = \delta(q^i(t_2)) = 0$$

$$\delta S = 0$$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t) dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

Die Euler- Lagrange- Gleichung dieser Art gilt auch für nichtkonservative Systeme.
Aber: Dann keine Erhaltungssätze für die Energie ableitbar !

Zusatzterme der Form

$$\frac{dF(q^i, t)}{dt} \text{ zu } L \text{ sind wirkungslos !}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} L(q^i, \dot{q}^i, t) &= L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{dF(q^i, t)}{dt} \\ \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{dF(q^i, t)}{dt} \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t) + F(q^i[t_2], t_2) - F(q^i[t_1], t_1) \\ \delta F(q^i[t_2], t_2) &= \delta F(q^i[t_1], t_1) = 0 \\ \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t) &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t) \end{aligned}$$

Für den Fall:

$$L(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i, t)$$

$$\Rightarrow \delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0, \delta \dot{q}^i(t_1) = \delta \dot{q}^i(t_2) = 0$$

Als Vorschrift für die Euler- Variation !

→ es gibt noch allgemeinere Terme, die wirkungslos sind, wie:

$$\frac{dF(q^i, \dot{q}^i, t)}{dt}$$

Systeme mit einer kontinuierlichen - unendlichen Anzahl von Feld- Gleichungen (Feldtheorie)

Geschwindigkeit- Phasenraum: Koordinaten und Geschwindigkeiten:

→ hier lebt **L**

Phasenraum mit Funktion H

Mechanik

$$q^i(t) = q(t, i)$$

dabei ist t ein Parameter - Variable der Abhängigkeit und i ist die Anzahl der Freiheitsgrade !

Wird ersetzt in einer Feldtheorie durch

$$\varphi(t, a, x^i) = \varphi^a(x^\mu)$$

dabei bezeichnet a die verschiedenen Felder (Edynamik: 0..3) oder 1..4, also die Feldkomponenten jeweils am Ort xi. Der Ort xi ist dagegen kontinuierlich !. Dies entspricht unendlich viel Freiheitsgraden für die Felder !

Mechanik:

$$\dot{q}^i(t)$$

→

Feldtheorie

$$\dot{\varphi}^a(x^\mu)$$

Mathematische Begriffe und Operationen für die weitere Konstruktion:

Vorher: $q, \dot{q}^i(t) \rightarrow$ nur Zeitableitungen

Jetzt: Ableitung in allen Komponenten !

Also:

$$\dot{q}^i(t) \dot{q}^i(t) \rightarrow \dot{\varphi}^a(x^\mu) \dot{\varphi}^a(x^\mu) \text{ mit kontinuierlichem } x \text{ und weiter:}$$

$$\sum_i \dot{q}^i(t) \dot{q}^i(t) \rightarrow \sum_a \int \dot{\varphi}^a(x^\mu) \dot{\varphi}^a(x^\mu) d^3x$$

Funktionen werden in der Feldtheorie durch Funktionale ersetzt:

$$f(q^i(t), \dot{q}^i(t)) \rightarrow F[\varphi^a(x^\mu), \dot{\varphi}^a(x^\mu)]$$

$$\frac{df}{dq^i} \rightarrow \frac{\delta F}{\delta \varphi^a}$$

Dabei kann man das totale Differenzial auch als Spezialfall einer trivialen Variation betrachten: q hängt eben nur von einem Parameter - der Zeit - ab !

→ nötig: Funktionenraum, in dem die linearen Funktionale definiert sind -> Banachraum !

$$\frac{df}{dq^i} \rightarrow \frac{\delta F}{\delta \dot{\varphi}^a}$$

Für die Lagrangefunktion:

$$L(q^i(t), \dot{q}^i(t)) \rightarrow L = \int \mathbf{L}[\varphi^a(x^\mu), \dot{\varphi}^a(x^\mu)] d^3x$$

Für $\mathbf{L}[\varphi^a(x^\mu), \dot{\varphi}^a(x^\mu)]$ haben wir die Abhängigkeit von den x^μ in φ

Da L aber das Feld an allen Orten enthalten soll gehen wir in diesem Fall so "kompliziert" über die Lagrangedichte, die integriert werden muss !

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i(t), \dot{q}^i(t)) \rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega_3} \mathbf{L}[\varphi^a(x^\mu), \dot{\varphi}^a(x^\mu)] d^3x = \int_{\Omega_4} \mathbf{L}[\varphi^a(x^\mu), \dot{\varphi}^a(x^\mu)] d^4x$$

mathematische Bezeichnung "Lagrangedichte", weil Transformationsverhalten WIE EINE DICHE !

Mechanisch / Klassisch:

$$L(q^i(t), \dot{q}^i(t)) = T - V \text{ (links)}$$

rechts: kinetische / potenzielle Energie gar nicht so einfach angebar ! -> Wir können nur Trafoverhalten reinstecken !

$$S = \int_{\Omega_4} \mathbf{L}[\varphi^a(x^\mu), \dot{\varphi}^a(x^\mu)] d^4x$$

$$\delta S = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^a} - \frac{\partial L}{\partial \varphi^a} = 0 \underset{, \mu}{\approx} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \varphi^a, \mu} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \varphi^a} = 0$$

Dabei muss im feldtheoretischen Fall über den Index μ summiert werden !

Die Auszeichnung der Zeit ist weg ! Die Euler- Lagrange- Gleichungen ändern sich nicht, wenn man einen Term der Form

$\partial_\nu K^\nu(\varphi^a)$ zu \mathbf{L} hinzufügt !

- Also: Divergenzen ! Die Divergenzen können durch den gaußschen Satz wegtransformiert werden !
- -> Grundsätzlich: Divergenzen lassen die feldtheoretischen Euler- Lagrange- Gleichungen invariant !

Zusammenfassende Darstellung der Grundlagen

1. Hamilton- Lagrange zur Ableitung der Feldgleichungen
- a) Allgemeines Schema
- b) Systeme mit endlichen Freiheitsgraden
- c) Systeme mit kontinuierlich unendlich vielen FG
- d) Ableitung der EFG durch Variation nach $g^{\mu\nu}$

Im Riemannschen Raum machen Integrale nur Sinn über SKALARE DICHTEN

Sei A ein Skalar und \mathbf{A} skalare Dichte:

$$A' = A$$

$$\mathbf{A}' = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \mathbf{A}$$

→

$$\int d^4x \mathbf{A}' = \int d^4x \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \mathbf{A} = \int \int \int \int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \mathbf{A}$$

- 1) Natürlich kommen nur skalare Objekte in Frage !

Anschaulich: Indices: Die Objekte transformieren an verschiedenen Orten verschieden ! ! Objekte, die jedoch an verschiedenen Raumzeitpunkten verschieden transformieren können nicht sinnvoll aufaddiert = auf integriert werden !

- 2) es dürfen keine "Genuine" Skalare sein (Skalare, die sich auch skalar transformieren !), da es sonst Probleme gibt !

Denn: das vierdimensionale Volumenelement ist natürlich nicht invariant unter Koordinatentrafos:

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \right| d^4x$$

- Volumenelemente sind keine Skalare (nicht invariant !!)

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

$$d^4x' = dx^0' dx^1' dx^2' dx^3' = \left(\frac{\partial x^0'}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \right) \left(\frac{\partial x^1'}{\partial x^\beta} dx^\beta \right) \dots$$

Dann aber:

$$\mathbf{A}' = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \mathbf{A}$$

$$\int d^4x' \mathbf{A}' = \int d^4x \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \mathbf{A} = \int d^4x \left| \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\delta} \right| \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \mathbf{A} = \int d^4x \mathbf{A}$$

Die skalare Dichte gewinnt man durch Multiplikation eines Skalars mit

$$\sqrt{-g}$$

wegen:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-g} \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \right|$$

Also:

$$S = \int_{\Omega_4} \sqrt{-g} \mathbf{L} [\varphi^a(x^\mu), \dot{\varphi}^a(x^\mu)] d^4x$$

Wichtig: Gaußsche Integralsatz in 4 Dimensionen, also:

$$d^4x -> d^3x$$

(rechts: Raum als Oberfläche der Raumzeit)

gilt nur für skalare Dichten, wie z.B.

$$J^\alpha_{;\alpha} \sqrt{-g}$$

Nicht jedoch für:

$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} \sqrt{-g} \quad (\text{dies ist ein Vektor})$$

Ableitung der Einsteinschen Gleichungen (1. Methode)

Lagrange- Funktion:

$$L(g_{\mu\nu}, \Phi_A)$$

→ Abhängigkeit der Lagrangefunktion vom Gravitationsfeld und von "Materiefeldern"

Man müsste die Lagrangefunktion zerlegen können in einen Gravitationsfeld- Lagrangian und einen Materie- Lagrangian:

$$L(g_{\mu\nu}, \Phi_A) = L_G(g_{\mu\nu}) + 2\kappa L_m(\Phi_A, g_{\mu\nu})$$

Falls die Materie auch an ein elektromagnetisches Feld ankoppelt:

$$L_M = \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$$

Der Materie- Lagrangian in der SRT !

→ Übergang zur ART:

$$L_M = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$$

Wegen Symmetrie der Christoffel- Konnexions heben sich die kovarianten Korrekturen heraus:

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$$

für den gravitativen Anteil erhalten wir im einfachsten Fall:

$$L_G = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R^\beta_\beta = R$$

$$R_{\alpha\beta}$$

als Ricci- tensor !

Einstein- Hilbert- Wirkungsintegral:

$$S_{EH} = \int \mathbf{L}_G + \mathbf{L}_M = \int_{V^4} (R + 2\kappa L_M) \sqrt{-g} d^4x$$

$$(R + 2\kappa L_M) \sqrt{-g} := \mathbf{L}_{EH}$$

Nun: Variation nach $g^{\mu\nu}$, was bedeutet:

$$g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$$

$$\delta g^{\mu\nu} \Big|_{\partial V_4} = 0$$

Nun:

R ist aus $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ gebildet !, also:

$$R = R(g^{\alpha\beta}, \gamma, \delta)$$

Somit brauchen wir auch:

$$\delta g^{\mu\nu, \lambda} \Big|_{\partial V_4} = 0$$

Also:

Einsteinsche Feldgleichung:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} &= -\kappa T_{\mu\nu} \\ T_{\mu\nu} &:= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \\ \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} &= -\kappa T_{\mu\nu} = -\kappa \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \end{aligned}$$

Historisch:

Zunächst waren die Feldgleichungen ohne Variation gebildet worden. Aber: Variation deckte sich in den Ergebnissen ! Variation nach den Φ_A -> Materiefeldgleichungen (Elektrodynamik -> Maxwellgleichungen , usw...)

Ableitung der Einsteinschen Gleichungen (2. Methode):

Für Vakuum:

$$L_M = 0$$

wegen der 2.Ableitung in R könnte man befürchten, dass Feldgleichungen höherer Ordnung entstehen ! Das passiert jedoch nicht !

Aber: Wir dürfen nicht R unter $\frac{\delta}{\delta} \Big|_{\partial V_4} = 0$ variieren:

Sondern:

$$L_G = L_{EH} = R = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} \left(-g^{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} \Gamma^\nu_{\mu\nu} \right) \right]_\alpha + g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\tau\rho} - \Gamma^\tau_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\tau} \right)$$

Divergenzen können schamlos weggelassen werden, also:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} \left(-g^{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} \Gamma^\nu_{\mu\nu} \right) \right]_\alpha = x^\alpha_{,\alpha}$$

$$\Rightarrow L_{EH} = g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\tau\rho} - \Gamma^\tau_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\tau} \right)$$

und das Einsteinsche Wirkungsintegral folgt zu:

$$S_E = \int L_{EH} \sqrt{-g} d^4x = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\tau\rho} - \Gamma^\tau_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\tau} \right)$$

Variation nach der Metrik:

$$g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$$

$$\delta g^{\mu\nu} \Big|_{\partial V_4} = 0$$

→ es folgen die Einsteinschen feldgleichungen !

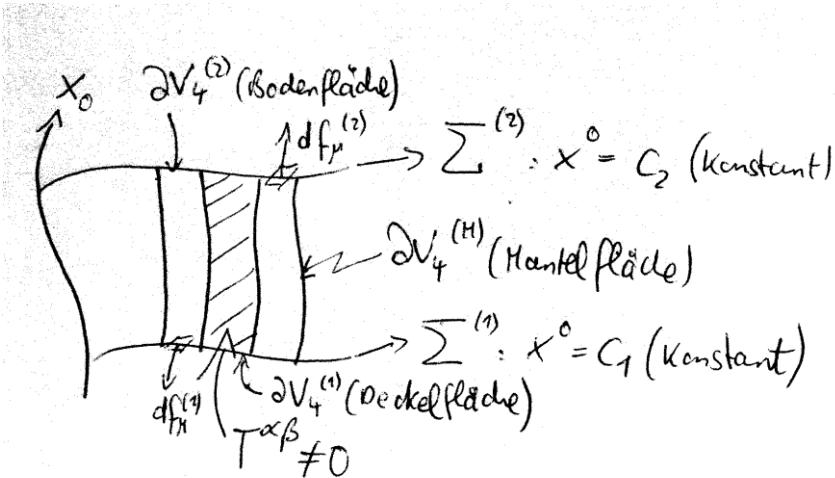
Bemerkenswert: Die Lagrangefunktion mit den abgespaltenen Divergenzen erfüllt die Symmetrieeigenschaften nicht mehr !! (kein Skalar, nicht kovariant etc...) Die Gleichungen selbst sind dann jedoch kovariant !!

Divergenzen egal, also:

Vergleichbar mit:

$$\begin{aligned} L(q^i, \dot{q}^i, t) &= L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{dF(q^i, t)}{dt} \\ \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{dF(q^i, t)}{dt} \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t) + F(q^i[t_2], t_2) - F(q^i[t_1], t_1) \\ \delta F(q^i[t_2], t_2) &= \delta F(q^i[t_1], t_1) = 0 \\ \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t) &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t) \end{aligned}$$

2. Erhaltungssätze und Bewegungsgleichungen in der ART:



$$\partial V_4 = \partial V_4^{(1)} + \partial V_4^{(2)} + \partial V_4^{(H)}$$

SRT:

Alle Objekte, die irgendwie beschreibbar sind, besitzen einen divergenzfreien Energie- Impuls- tensor:
 $T^{\alpha\beta}$

$$T^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$$

dies entspricht integralen Erhaltungssätzen.

Vorgriff:

$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0 \text{ führt NICHT auf integrale Erhaltungssätze !}$$

Wir können jedoch differentielle Erhaltungssätze formulieren:

Vergl. Skizze:

$$\partial V_4 = \partial V_4^M + \partial V_4^{(1)} + \partial V_4^{(2)}$$

dabei sind

$df_\mu^{(1)}, df_\mu^{(2)}$ infinitesimale Oberflächenelemente, die senkrechte Vektoren auf ∂V_4 repräsentieren !

Merke: Der Gaußsche Integralsatz gilt nicht für Vektoren des Riemannschen Raums, aber:

$$\int d^4x T^{\alpha\beta}_{,\alpha} \text{ ist kein Vektor !}$$

$$\int d^4x T^{\alpha\beta}_{,\alpha} = \int T^{\alpha\beta} df_\alpha$$

Nun können wir das Integral so wählen, also die Abgrenzung unseres räumlichen Bereiches derart wählen, dass $T^{\alpha\beta}$ zu mindest im Mantelbereich verschwindet:

$$\int_{\partial V_4} T^{\alpha\beta} df_\alpha = \int_{\partial V_4^M} T^{\alpha\beta} df_\alpha + \int_{\partial V_4^{(1)}} T^{\alpha\beta} df_\alpha^{(1)} + \int_{\partial V_4^{(2)}} T^{\alpha\beta} df_\alpha^{(2)} = 0$$

$$\int_{\partial V_4^M} T^{\alpha\beta} df_\alpha = 0$$

Also:

$$\int_{\partial V_4} T^{\alpha\beta} df_\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial V_4^{(1)}} T^{\alpha\beta} df_\alpha^{(1)} = - \int_{\partial V_4^{(2)}} T^{\alpha\beta} df_\alpha^{(2)}$$

Aber:

$d\bar{f}_\alpha^{(1)}$ ist immer nach außen gerichtet !

Also:

$$d\bar{f}_\alpha^{(1)} = -d\bar{f}_\alpha^{(2)}$$

$$\int_{\partial V_4^{(1)}} T^{\alpha\beta} d\bar{f}_\alpha^{(1)} = \int_{\partial V_4^{(2)}} T^{\alpha\beta} d\bar{f}_\alpha^{(1)}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial V_4} T^{\alpha\beta} d\bar{f}_\alpha = \text{const.}$$

für beliebige Zeitschnitte !

Setze:

$$\int_{\partial V_4} T^{\alpha\beta} d\bar{f}_\alpha = \text{const.} := cp^\mu$$

(Energie- Impuls- Vektor !)

Dies ist äquivalent zur Energie- Impuls- Erhaltung !

Sei:

$$df_\alpha = \delta^0_\alpha df$$

$$\Rightarrow cp^\mu = \int_{\partial V_4} T^{0\beta} df = \text{const.}$$

ART:

$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0$ ist KEIN Erhaltungssatz !

Für

$$\int d^4x T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0 \text{ existiert kein Gaußscher Satz !}$$

ALternativen:

$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} \sqrt{-g} \text{ als "Vektordichte"}$$

Jedenfalls ist $T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0$ eine **Bewegungsgleichung** für Energie und Impuls !

Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} \text{ entspricht den Maxwellgleichungen}$$

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}^\mu \text{ reichte nicht } \rightarrow \text{Aussage, welche Ströme welche Felder verursachen !}$$

Zusätzlich nötig:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \sim qu_\nu F^{\mu\nu}$$

instein:

Zusätzlich zu

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

mit

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right)_\nu = \left(-\kappa T_{\mu\nu} \right)_\nu = 0 \text{ (Bianchi- Identitäten)}$$

noch

$$\frac{D^2 x^\mu}{D\tau^2} = 0 \text{ entsprechend: } T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

Also: In der SRT gilt:

$$T^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$$

$$\int_{\partial V_4 \Leftrightarrow (x_0 = \text{const})} T^{\alpha\beta} df_\alpha = \text{const.} := c p^\mu$$

(Erhaltungssatz)

In der ART führt das auf eine Bewegungsgleichung

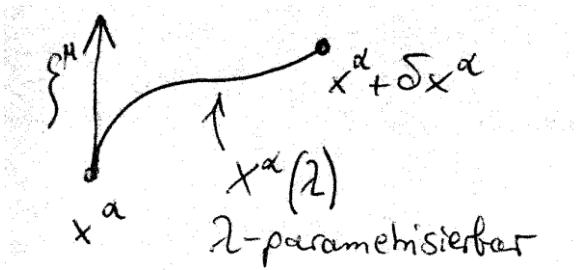
Besser:

$$\xi^\mu(x^\lambda)$$

Als sogenanntes "Killing-Vektorfeld", wenn sich ds^2 bei Ableitung in Richtung ξ^μ nicht ändert!

Killingvektoren und Symmetrien

$\xi^\mu(x^\lambda)$ ist Killingvektorfeld, wenn sich in dessen Richtung ds^2 nicht ändert!



Also: eine Verschiebung des Vektors x^α stellen wir folgendermaßen dar:

$$x^\alpha \rightarrow \bar{x}^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha d\lambda$$

$$\Rightarrow \delta x^\alpha = \xi^\alpha d\lambda$$

$$\delta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,\rho} \delta x^\rho$$

Variation und Differential sind prinzipiell vertauschbar:

$$\delta(dx^\alpha) = d(\delta x^\alpha) = d(\xi^\alpha d\lambda) = \xi^\alpha_{,\rho} dx^\rho d\lambda$$

also:

$$\delta(ds^2) = \delta(g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)$$

$$= (\delta g_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\beta + g_{\alpha\beta} \delta(dx^\alpha) dx^\beta + g_{\alpha\beta} dx^\alpha \delta(dx^\beta)$$

$$= g_{\alpha\beta,\rho} \xi^\rho d\lambda dx^\alpha dx^\beta + g_{\alpha\beta} \xi^\alpha_{,\rho} dx^\rho d\lambda dx^\beta + g_{\alpha\beta} dx^\alpha \xi^\beta_{,\rho} dx^\rho d\lambda = 0$$

$$g_{\alpha\beta} \xi^\alpha_{,\rho} dx^\rho d\lambda dx^\beta = g_{\rho\beta} \xi^\rho_{,\alpha} dx^\alpha d\lambda dx^\beta$$

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha \xi^\beta_{,\rho} dx^\rho d\lambda = g_{\alpha\rho} dx^\alpha \xi^\rho_{,\beta} dx^\beta d\lambda$$

$$g_{\alpha\beta,\rho} \xi^\rho d\lambda dx^\alpha dx^\beta + g_{\rho\beta} \xi^\rho_{,\alpha} dx^\alpha d\lambda dx^\beta + g_{\alpha\rho} dx^\alpha \xi^\rho_{,\beta} dx^\beta d\lambda = 0$$

da die x und Lambda beliebig variierbar sind:

$$g_{\alpha\beta,\rho}\xi^\rho d\lambda dx^\alpha dx^\beta + g_{\rho\beta}\xi^\rho,_\alpha dx^\alpha d\lambda dx^\beta + g_{\alpha\rho}dx^\alpha\xi^\rho,_\beta dx^\beta d\lambda = 0$$

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta,\rho}\xi^\rho + g_{\rho\beta}\xi^\rho,_\alpha + g_{\alpha\rho}dx^\alpha\xi^\rho,_\beta$$

Dies, also

$g_{\alpha\beta,\rho}\xi^\rho + g_{\rho\beta}\xi^\rho,_\alpha + g_{\alpha\rho}dx^\alpha\xi^\rho,_\beta$ ist aber gleich der kovarianten Ableitung, wie sich unschwer zeigen lässt über die Definition

$$A^\alpha;_\beta = A^\alpha,_\beta + \Gamma^\alpha{}_\beta{}^\rho A^\rho$$

Also:

$$g_{\alpha\beta,\rho}\xi^\rho + g_{\rho\beta}\xi^\rho,_\alpha + g_{\alpha\rho}dx^\alpha\xi^\rho,_\beta$$

$$\Rightarrow \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$$

Definitionsgleichung für Killingvektoren -> Killing- Gleichung !

Die Ableitung entlang eines Killingvektors ist als Richtungsableitung, bzw. Lie- Ableitung zu verstehen !

In der Art, dass:

$$L_\xi g_{\alpha\beta} = 0$$

dies ist eine Richtungsableitung, nämlich: Lie- Ableitung entlang Richtung ξ !

In der SRT gibt es 10 Lösungen

$$\xi_{(A)}^\alpha \text{ der Killing- Gleichung (A=1...10)}$$

$$\xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} = 0$$

Dies entspricht 4 Invarianzen für Zeit- und Raumtranslation

3 Invarianzen für räumliche Drehungen

3 Invarianzen für Bewegung der Inertialsysteme gegeneinander !

Wiederholung:

Ausgangspunkt war

$$T^{\alpha\beta},_\alpha = 0$$

$$\xi_\nu :=$$

"Killing- Vektor"

SRT:

Das heißt: Der Symmetrisierte Anteil verschwindet:

$$\xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} = 0 = \xi_{(\alpha,\beta)}$$

$$\xi_{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2}(\xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha})$$

Also:

$$(\xi_\nu T^{\mu\nu}),_\mu = \xi_{\nu,\mu} T^{\mu\nu} + \xi_\nu T^{\mu\nu},_\mu$$

$$= \xi_{(\nu,\mu)} T^{\mu\nu} + \xi_{[\nu,\mu]} T^{\mu\nu} + \xi_\nu T^{\mu\nu},_\mu$$

$$\xi_\nu T^{\mu\nu},_\mu = 0$$

$$\xi_{(\nu,\mu)} T^{\mu\nu} = 0$$

$$\xi_{[\nu,\mu]} T^{\mu\nu} = 0$$

erstes: Eulergleichungen/ Divergenzfreiheit EI- tensor

zweites: Killing- Gleichung

letzteres: antisymmetrischer Anteil -> verschwindet !

Zu jedem Killing- Vektor folgt in der SRT damit ein integraler Erhaltungssatz der Form:

$$(\xi_\nu T^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$$

→ dies sind die eigentlichen integralen Erhaltungssätze !

→ In der SRT gibt es genau 10 Killing- Vektoren

-> $(\xi_\nu T^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$ bzw. $(\xi_\nu^{(a)} T^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$ sollte für a=1..10 10 Erhaltungssätze produzieren !

Beispiel:

$$\xi^\nu = \delta_\nu^0$$

→ es folgt (siehe oben):

$$df_\alpha = \delta^0_\alpha df$$

$$\Rightarrow cp^\mu = \int_{\partial V_4} T^{0\beta} df = const.$$

ART: Killing- Gleichung:

$$g_{\alpha\beta,\rho} \xi^\rho + g_{\rho\beta} \xi^\rho_{,\alpha} + g_{\alpha\rho} dx^\alpha \xi^\rho_{,\beta}$$

$$\Rightarrow \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$$

Gibt es hier Killing- Vektoren ?

$$(\xi_\nu T^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \xi_{\nu;\mu} T^{\mu\nu} + \xi_\nu T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

Wegen der Killinggleichung ist $\xi_{\nu;\mu}$ total antisymmetrisch. $T^{\mu\nu}$ dagegen ist symmetrisch.

Also:

$$\xi_{\nu;\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

Somit:

$$\xi_\nu T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

In der ART folgt also:

$$(\xi_\nu T^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \xi_\nu$$

ist ein Killing- Vektor !

Das heißt, der richtige Erhaltungssatz lautet:

$$(\xi_\nu T^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$$

und nicht:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

Denn: Aus $(\xi_\nu T^{\mu\nu})_{;\mu} = 0$ folgt ein integrabler Erhaltungssatz, aus $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ dagegen nicht !

Denn:

∫ $T^{\mu\nu}_{;\mu}$ ist nicht umzuwandeln über den Gaußschen Integralsatz !!

Merke:

Bei Semikolon (kovariante Ableitung) gilt der Gaußsche Integralsatz nur, wenn es sich (ohne Ableitung) um Skalare oder EINSTUFIGE Tensoren handelt !

Aber:

$$(\xi_\nu T^{\mu\nu})_{;\mu} = 0 \Leftrightarrow A^\nu_{;\nu} = 0$$

Somit lassen sich integrale Erhaltungsgrößen finden !

Es folgt insbesondere:

$$\int \xi_\nu T^{\mu\nu} df_\mu = const.$$

Vorgehen zum Finden integraler Erhaltungssätze:

Schreibe ein Differenzial so um, dass ein Integral folgt, welches zeitlich erhalten bleibt !!

Lineare Näherung der Feldgleichungen

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

wir haben die leere Feldgleichung

$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$, die Gravitation steckt im Semikolon ! Den: Übergang zur kovarianten Ableitung wegen der raumkrümmung (die durch die Gravitation kommt !)

Bemerkungen zur Edynamik

$$F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$$

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

sind die vier Maxwellgleichungen (feldgleichungen)

→ 4 algebraisch unabhängige Feldgleichungen Diffgleichungen !

Weiter: 1 Differentialidentität (Schiefsymmetrie des feldstärketensors:)

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})$$

Ebenso sofort ersichtlich ist die Kontinuitätsgleichung als eine weitere Differentialidentität:

$$F^{\mu\nu}_{,\mu,\nu} = 0$$

$$\Leftrightarrow j^\mu_{,\mu} = 0$$

Dabei kann man $F^{\mu\nu}_{,\mu,\nu} = 0$ sofort sehen, da ein schiefsymmetrisches mit einem symmetrischen Indexpaar überschoben wird !

(Bei Kontraktion eines schiefsymmetrischen mit einem symmetrischen Tensor ergibt sich immer Null !)

Eigentlich haben wir also nur 4-1=3 funktional unabhängige Maxwellgleichungen (die Erregungsgleichungen). Die inneren Feldgleichungen kriegt man schon alleine aus verschwindenden Ableitungen von F:

$$\nabla \times B = 0$$

Die 3 Feldgleichungen sind unter Trafos der Art

$$A^\mu \rightarrow \bar{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

ART

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\kappa T^{\mu\nu}$$

→ 10 algebraisch unabhängige Diffgleichungen

→ aber die Differentialidentitäten (Bianchi) folgen aus der Struktur des Riemannschen Raumes !

→ Somit:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0$$

was impliziert, dass $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \rightarrow$ gilt jedoch nicht als Erhaltungssatz !

Wir haben wegen:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\kappa T^{\mu\nu} \rightarrow 10$$

weniger 4 wegen

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0$$

funktional unabhängige Gleichungen, also 6 funktional Unabhängige !

Wir sprechen von 6 Feld- Freiheitsgraden !

Wegen:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu = f^\mu(x^\lambda)$$

Linearisierung

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\kappa T^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow R - 2R = -\kappa T$$

$$\Rightarrow R = \kappa T$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) := S_{\mu\nu}$$

Diese Formulierung ist zunächst einmal völlig äquivalent !

Ansatz: Linearisierte Form: Linearer Term zur Minkowski- Metrik

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$|h_{\mu\nu}| << |\eta_{\mu\nu}|$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \dots$$

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$$

→ Indices werden durch die lineare Metrik $\eta^{\mu\nu}$ gezogen !

Betrachte: Ricci- Tensor:

Lineare Entwicklung:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots$$

Dabei gilt in der Minkowski- Metrik:

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = 0$$

Die Linearisierung (siehe oben) liefert:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\# h_{\mu\nu} + h^\rho{}_{\rho,\mu,\nu} - h^\rho{}_{\mu,\rho,\nu} - h^\rho{}_{\nu,\rho,\mu})$$

$$\# = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$$

$$h^\rho{}_\rho = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$$

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = \dots$$

1. Näherung

$$\# h_{\mu\nu} + h^\rho{}_{\rho,\mu,\nu} - h^\rho{}_{\mu,\rho,\nu} - h^\rho{}_{\nu,\rho,\mu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$$

in einer allgemeinen kovarianten Theorie sind ALLE Koordinatentransformationen erlaubt ! Durch die Linearisierung schränken wir dagegen den Bereich der zulässigen Koordinatentrafos deutlich ein !

→ Wir müssen die Koordinatentrafos auf "lineare" Trafos beschränken, um den Ansatz nicht zu zerstören !

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon^\mu$$

$$|\varepsilon^\mu| \ll 1$$

Wie transformiert sich dieser Ansatz ?

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon^\mu$$

→ Trafo von $h_{\mu\nu}$ unter $|\varepsilon^\mu| \ll 1$:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}$$

Also:

$$(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu} \right) (\eta'_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu} \right) (\eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta})$$

$$\eta = \eta'$$

$$\Rightarrow h_{\mu\nu}' = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}$$

Wir haben hier η als eine Hintergrundmetrik zu verstehen, auf der sich die Störung dann ausbreitet ! Darauf haben wir ein Feld $h_{\mu\nu}$, welches der obigen Eichtransformation unterworfen werden kann !

Eichtrafo:

$$h_{\mu\nu}' = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}$$

→ Eichbedingung:

$$\rightarrow h^\mu{}_{\mu,\nu} = 2h^\mu{}_{\nu,\mu}$$

Finale Wellengleichung in der linearen Näherung:

$$\# h_{\mu\nu} + h^\rho{}_{\rho,\mu,\nu} - h^\rho{}_{\mu,\rho,\nu} - h^\rho{}_{\nu,\rho,\mu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$$

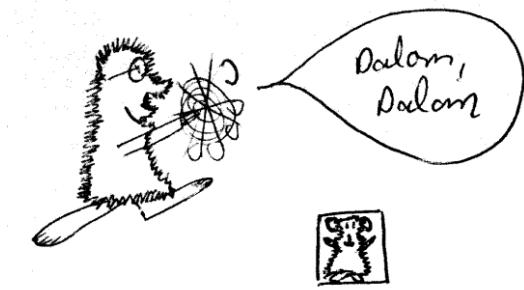
Eichbedingung ->

$$\# h_{\mu\nu} = \frac{-4\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$$

Dabei gilt streng genommen (siehe obige Definition):

$$\#_\eta h_{\mu\nu} + h^\rho{}_{\rho,\mu,\nu} - h^\rho{}_{\mu,\rho,\nu} - h^\rho{}_{\nu,\rho,\mu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$$

$$\#_\eta h_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$$



Die Gleichung $\#_\eta h_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$ ist invariant unter der Trafo der Form

$$h_{\mu\nu}' = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}$$

Eichtrafos der Form lassen also die Einsteinschen Feldgleichungen in erster Näherung invariant !

Wichtig: Die Eichtrafo $h^\mu{}_{\mu,\nu} = 2h^\mu{}_{\nu,\mu}$ wird benötigt, um die Gleichung $\#_\eta h_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$ zu gewinnen!

In der Edynamik gilt:

$$\#_\eta A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Lösung

retardierte Potenziale, also:

$$h_{\mu\nu} = -\frac{4\pi G}{c^4} \int d^3x' \frac{S_{\mu\nu}\left(x^i, t - \frac{|x^i - x^{i'}|}{c}\right)}{|x^i - x^{i'}|}$$

Dabei beschreibt

$$S_{\mu\nu}\left(x^i, t - \frac{|x^i - x^{i'}|}{c}\right)$$

eine dreidimensionale Materieverteilung. Die Integration über $x^{i'}$ ist die Integration

über das Gebiet der Verteilung, während x^i die Koordinaten zum Aufpunkt sind !

Also:

$$h_{\mu\nu}(x^i, t) = -\frac{4\pi G}{c^4} \int d^3x' \frac{S_{\mu\nu}\left(x^i, t - \frac{|x^i - x^{i'}|}{c}\right)}{|x^i - x^{i'}|}$$

wird gewonnen durch die vorherige Integration zum Zeitpunkt $t - \frac{|x^i - x^{i'}|}{c}$!

Retardierung wegen Ausbreitung der Wirkung mit Lichteschw.

Merke:

$$\#_\eta h_{\mu\nu} = 0$$

$$\# A^\mu = 0$$

für das Vakuum !

Wichtig: Bei den Näherungen sind immer nur die gleichen Ordnungen zu vergleichen !

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\kappa T^{\mu\nu} =$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Mit der 2. ordnung wird dies zu

$$\left(R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} R)^{(1)} \right) + \left(R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} R)^{(2)} \right) + \dots = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

unter Berücksichtigung

$$\#_\eta h_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$$

und der Bianci Identität

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0$$

welche dann erzwingt, dass

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0 \Rightarrow \left(R^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} R)^{(2)} \right)_{,\nu} = 0$$

Mit

$$at^{\mu\nu} = \left(R^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} R)^{(2)} \right)$$

$$\Rightarrow t^{\mu\nu}_{,\nu} = \left(R^{(2)\mu\nu} - \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} R)^{(2)} \right)_{,\nu} = 0$$

ist ein Erhaltungssatz für den gravitativen E-I- Tensor in der linearisierten Form der ART !

Mit:

$$(T^{\mu\nu} + at^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \text{ (wie bei Feldgleichungen der Elektrodynamik)}$$

erhalten wir einen Erhaltungssatz für die Summe von Gravitativer und kinetischer Energie !

Elektrodynamik (in feldstärke- Darstellung)

$$F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$$

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0$$

Wegen der Darstellung von $F^{\mu\nu}$ als Rotation verschwinden alle bis auf 4 Feldgleichungen:

$$F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$$

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Differentialidentität (gleich der Kontinuitätsgleichung):

$$F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} = 0$$

$$\Leftrightarrow j^\mu_{,\mu} = 0$$

Als Folge der Eichfreiheit

$$\bar{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

Potenzialdarstellung der Elektrodynamik:

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\Rightarrow \# A^\mu - A^{\rho,\mu}_{,\rho} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$$

$$\text{wegen } F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

mit $A^\mu_{,\mu} = 0$ (Lorentzeichnung)

folgt:

$$\# A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Analog gehen wir in der ART vor:

10 DGL:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\kappa T^{\mu\nu} =$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

mit 4 Differentialidentitäten:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0$$

Womit dann der Nicht- Erhaltungssatz

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \text{ folgt.}$$

Folge der Eichfreiheit aller differenzierbaren Koordinatentrafos auf M (bijektiv) , also Diff(M).
Dabei: Diffeomorphismus = Differenzierbare (bijektive) Abbildung !

Lineare Näherung:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$|h_{\mu\nu}| << |\eta_{\mu\nu}|$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \dots$$

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$$

10 Feldgleichungen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Damit:

$$\# h_{\mu\nu} + h^\rho{}_{\rho,\mu,\nu} - h^\rho{}_{\mu,\rho,\nu} - h^\rho{}_{\nu,\rho,\mu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$$

Dann: Eichfreiheit:

$$h_{\mu\nu}' = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}$$

Eichtrafos der Form lassen also die Einsteinschen Feldgleichungen in erster Näherung invariant !

Wichtig: Die Eichtrafo $h^\mu{}_{\mu,\nu} = 2h^\mu{}_{\nu,\mu}$ wird benötigt, um die Gleichung

$$\#_\eta h_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)} \text{ zu bekommen !}$$

Fazit:

$$\#_\eta h_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$$

Aber:

Edynamik:

$$\# A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \text{ exakt mit verwendeter Eichung: Lorentz- Eichung: } A^\mu{}_{,\mu} = 0$$

Linearisierte ART:

$$\#_\eta h_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)} \text{ mit verwendeter Eichung } h^\mu{}_{\mu,\nu} = 2h^\mu{}_{\nu,\mu}$$

Die Eichtrafos der SRT haben die EFGL auf diese Form gebracht. Es wurde eine lineare Näherung gemacht !

Problem: Was lernt man daraus für die exakte Theorie ?

EDynamik: Die lineare Form erlaubt die exakte Behandlung von Strahlung

Gravitation: erst hier in der linearisierten Form greifen begriffe, die vorher ziemlich sinnlos waren !

→ Interpretation nötig !

→ Interpretation im Geist der exakten Theorie ist oft unklar !

Die Eichung $h^\mu{}_{\mu,\nu} = 2h^\mu{}_{\nu,\mu}$ in $\# h_{\mu\nu} + h^\rho{}_{\rho,\mu,\nu} - h^\rho{}_{\mu,\rho,\nu} - h^\rho{}_{\nu,\rho,\mu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$, die die

zweiten partiellen Ableitungen an den h verschwinden lässt, verändert auch dir Koordinaten in h und S !

Also:

$\#_\eta h_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$ ist dann näherungsweise richtig in den Koordinaten der zu grunde liegenden

Metrik (Die Koordinaten sind die des Minkowski- Raums !) Die Eichung verändert die Koordinaten. Aber: man bezieht sich auf infinitesimale koordinatentrafos im flachen Raum. Diese lassen die Metrik unbehelligt !

In erster Näherung geht nur η ein !

Also: rechts in $S_{\mu\nu}$ ist man quasi nur mit η vertreten ! Die Verrückung $h \ll 1$ geht hier gar nicht ein !

Experimente zur ART

Vorbemerkung zum Äquivalenzprinzip:

- Newton: mt und mp (träge und schwere Masse)

$$\bar{F} = m_t \bar{a} \quad (\text{2. Axiom})$$

$$\bar{F} = m_p g \quad (\text{gewicht im Gravitationsfeld})$$

Also:

$$\bar{F} = m_t \bar{a} = m_p g$$

Mehr oder weniger Erfahrungstatsache: $m_t = m_p$

aus Galileischem Fallgesetz: $\bar{a} = g$

Schwaches Äquivalenzprinzip (SÄP)

Die Trajektorie eines Probekörpers im äußeren Gravitationsfeld hängt NICHT von seiner inneren Struktur und Zusammensetzung ab

Idealisierung: Probekörper: Elektrisch neutral; Eigengravitation vernachlässigbar, so klein, dass die Inhomogenitäten des äußeren Feldes vernachlässigbar sind!

Hilfreich:

Betrachtung eines Körpers, der selbst ein vernachlässigbares Feld hat und damit **keine** Inhomogenitäten des äußeren Feldes verursacht!

Erst bei **vernachlässigbaren** Inhomogenitäten fallen alle Teile eines freifallenden Fahrstuhls gleich schnell!

-> Bahnbewegung wird von Energien wie von Massen beeinflusst

Einstinsches Äquivalenzprinzip

Lokales (-> das heißt: Inhomogenitäten vernachlässigbar), nicht gravitatives System genügt den Gesetzen der ART

nichtgravitativ -> keine Eigengravitation!

Experiment im Labor:

Alle Wechselwirkungen, aber ohne Gravitationswechselwirkung der Teile unter sich -> wird im Starken Äquivalenzprinzip schließlich auch noch mit einbezogen!

Also: Lokales (keine Inhomogenitäten) und nichtgravitatives (keine Eigengravitation) System genügt den Gesetzen der SRT!

→ Alle physikalischen Gesetze lassen sich durch das freifallende System wie im IS beschreiben!

Experimente, die das Einstinsche Äquivalenzprinzip testen, besagen, dass die Gravitationstheorie metrisch sein muss! (falls sie denn positiv ausfallen)

Das heißt: $g^{\mu\nu}$ ist zumindest ein Bestandteil der Beschreibung des Gravitationsfeldes!

Also: Die Metrik eines "gekrümmten" Raumes

→ Somit existiert ein lokales Inertialsystem -> der Raum muss gekrümmt sein! verschiedene Stellen müssen verschiedene (zueinander verdrehte) Minkowskiräume haben!

Newton's Pendelversuche zeigten:

$m=M$

wegen

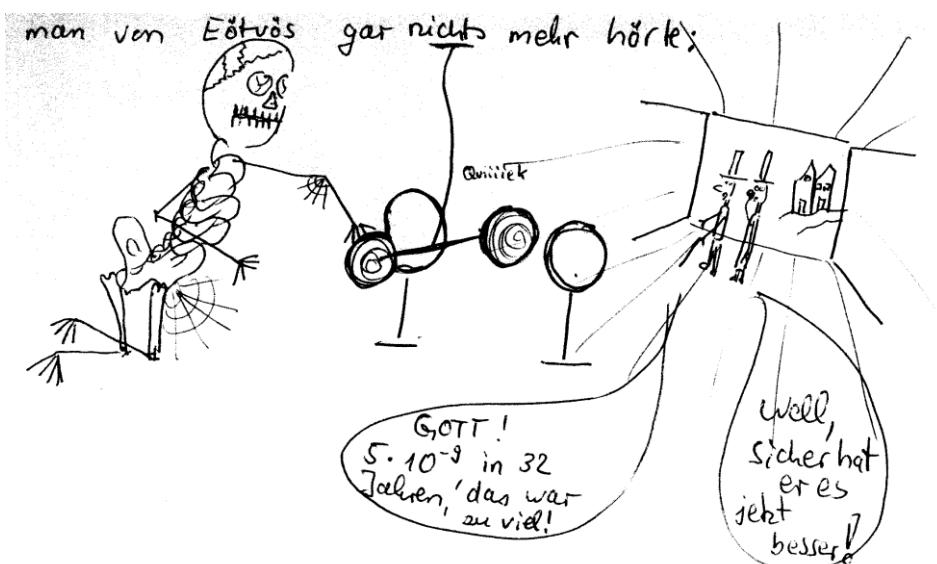
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{l}{g}$$

dass $m=M$ konnte Newton mit einer Genauigkeit von 10^{-3} zeigen, er maß lediglich, dass verschiedene Körper die gleiche Schwingungsdauer ergeben !
(verschiedene schwere Massen)

$$\Delta m = \frac{m_t - m_p}{m_p}$$

Eötvös baute 1890 sein Torsionswaagenexperiment auf und konnte 1922 damit Genauigkeiten von $5 \cdot 10^{-9}$ erreichen !

Neue Experimente dieses Typs, meist Fallturmexperimente, erreichen Genauigkeiten von $10^{-11} - 10^{-12}$. Dabei werden Ringe fallengelassen, deren Kapazität gemessen wird. Die ineinandergeschachtelten Ringe bestehen aus verschiedenen schweren Materialien und unterschiedliche Fallgeschwindigkeiten äußern sich empfindlich in einer Veränderung der Kapazität des Ringkondensators !



Fazit:

$$m = M = (Mm)$$

Dieses Äquivalenzprinzip ist eine Besonderheit der Gravitation !!

All die beschriebenen pendelversuche sind Tests des Schwachen ÄP

Was heißt das ?

Also: Einfluss auf ein System, das so klein ist, dass Inhomogenitäten des äußeren Gravitationsfeldes werden können und die **Eigengravitation** vernachlässigt werden kann !

Aussage des schwachen ÄP:

" Es gibt kein lokales, frei fallendes Bezugssystem derart, dass das äußere Gravitationsfeld keine Auswirkung hat "

Gravitationsrotverschiebung

Koordinaten- und Eigenzeit

SRT:

IS: $v \neq 0$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$d\tau = \frac{1}{c} ds$$

$$ds^2 \geq 0$$

Die Eigenzeit τ wird gemessen mittels einer in einem Inertialsystem ruhenden Uhr !

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - d\bar{x}^2} = \sqrt{dt^2 - \frac{d\bar{x}^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Im Gegensatz dazu in der ART:

Nichtlokales Inertialsystem:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \sqrt{g_{00} - 2v \frac{1}{c} + \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Damit gilt für die ruhende Uhr ($v=0$):

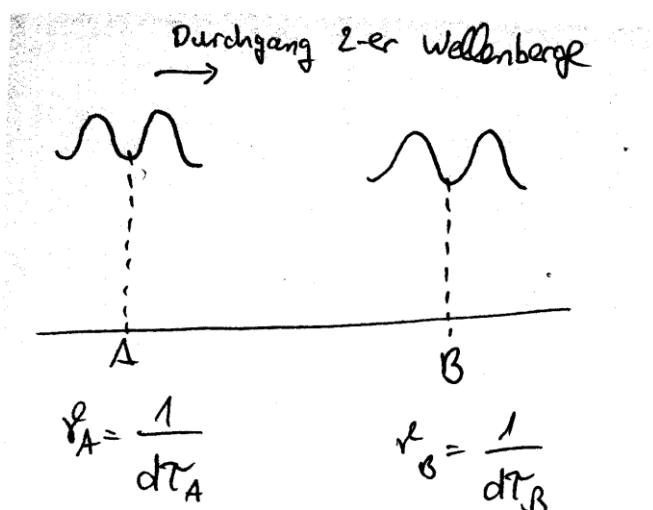
$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \sqrt{g_{00}} dt$$

In der ART erfolgt die Messung jedoch nicht durch eine ruhende Uhr sondern durch eine frei fallende Uhr -> Verbunden über die Koordinatenzeit !

g_{00} ist allerdings eine Funktion der Raumpunkte

→ die Eigenzeit ändert sich mit dem Feld !

Gravitationsrotverschiebung



Dabei bezeichnet $d\tau_i$ das jeweilige Zeitintervall (kein Differenzial)
und ν_A ist die "Eigenfrequenz"

Also:

$$d\tau_A = \sqrt{g_{00}(A)} dt_A$$

$$d\tau_B = \sqrt{g_{00}(B)} dt_B$$

$$dt_A = dt_B$$

→ zeitunabhängiges Gravitationsfeld angenommen !

→ -> Alles, was zwischen A und B liegt, macht auf beide Wellenberge den gleichen Mist -> Koordinatenzeit ändert sich nicht !

Rotverschiebungsparameter:

$$z := \frac{\nu_A - \nu_B}{\nu_B} = \frac{\nu_A}{\nu_B} - 1 = \sqrt{\frac{g_{00}(B)}{g_{00}(A)}} - 1$$

Schwache Gravitationsfelder:

Geodäten sind in erster Näherung Geraden !

→ in 2. Näherung Newtonsche Trajektorie !

schwaches Gravitationsfeld:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

$$z = \frac{\Phi(B) - \Phi(A)}{c^2}$$

Beweis:

$$z = \sqrt{\frac{1 + \frac{2\Phi(B)}{c^2}}{1 + \frac{2\Phi(A)}{c^2}}} - 1 \Rightarrow z \sqrt{1 + \frac{2\Phi(A)}{c^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\Phi(B)}{c^2}} - \sqrt{1 + \frac{2\Phi(A)}{c^2}}$$

$$\Rightarrow z + \frac{z\Phi(A)}{c^2} = \frac{\Phi(B)}{c^2} - \frac{\Phi(A)}{c^2}$$

$$\Rightarrow z \approx \frac{\Phi(B)}{c^2} - \frac{\Phi(A)}{c^2}$$

Annahme: Gravitationsfeld stark -> Eigenzeit kleiner -> Frequenz größer !

betrachte Erde:

$$z \approx \frac{\Phi(B) - \Phi(A)}{c^2} = \frac{g(h_B - h_A)}{c^2}$$

Veranschaulichung: Energieverlust durch Anstieg im Gravitationsfeld ! -> trifft zwar hier zu , ist aber ungenau ! -> nicht allgemein ! Eigentlicher Grund ist die Abhängigkeit der Zeit vom Gravitationspotenzial -> Eigenzeit ist die freifallende Zeit ! (lokales IS , ruhend)

Jedenfalls:

$$\frac{\Delta\nu_{theoret.}}{\Delta\nu_{exp.}} = 1,00 \pm 0,01$$

mit dem Rotverschiebungsparameter z

Wesentlich:

Es geht nicht um den Einfluss der Gravitation auf das Licht sondern um die Bestimmung der Eigenzeit !

→ Tests für Einsteinsches ÄP

→ Indirekt: Test für die SRT -> Theorie frei fallender Uhren !

Licht von der Sonne

Problem: Auch Dopplereffekt wegen Relativgeschwindigkeit
 Auch: Dopplereffekt durch Konvektion in der Sonne ! -> Linienverbreiterung !

→ ähnliche Genauigkeiten erzielbar

Weitere Tests

→ Tests des starken Äquivalenzprinzips !
 → Schwaches ÄP wird da gleich mitgetestet !

jedenfalls: ART steht und fällt mit den Abstufungen des ÄP

Beim Starken ÄP wird die Eigengravitation nicht mehr vernachlässigt !

→ Einfluss eines äußeren Gravitationsfeldes auf ein System, das
 → so klein ist, dass Inhomogenitäten vernachlässigbar sind !
 → so groß ist, dass die Selbstgravitation bzw. die gravitative WW im System berücksichtigt werden kann !!

Aussage des starken ÄP: Auch für diese Systeme macht sich das äußere Gravitationsfeld im Falle freien Fallens nicht bemerkbar !

Nun: Es könnte Felder geben, die nicht an das System koppeln, aber:

$g_{\mu\nu}$ erzeugt Φ -> Im System: Wechselwirkungs - $g_{\mu\nu}$ erzeugt Φ'

→ Φ und Φ' könnten koppeln !
 → Das wird vom starken Äquivalenzprinzip zerstört

- streng genommen lassen sich hier Feld und Körper nicht mehr trennen -> sie sind ein und dieselbe Sache !
 Das Feld ist sozusagen das zeitliche Echo des Gegenstandes !

Also: $g_{\mu\nu}$ ist nicht nur das Feld, welches den Einfluss von Gravitationsfeldern auf Nichtgravitationsfelder beschreibt, sondern es ist das EINZIGE Feld !!
 → Ergebnis des starken Äquivalenzprinzips !

Tests des starken Äquivalenzprinzips:

(Einstinsche Gleichungen !)

Die Einstinschen Gleichungen und ihre Vorhersagen testen das starke ÄP !

Lösung für den kugelsymmetrischen Fall:
 Einstinsche Gleichungen mit Schwarzschild- Metrik lösen !

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2a}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Ansatz:

$$ds^2 = B c^2 dt^2 - A dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

mit Reihenentwicklung:

$$B(r) = g_{00} = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r}$$

$$A(r) = -g_{11} = 1 + \frac{GM}{c^2 r}$$

Annahme: ART nicht gültig !

Betrachte: Robertsonentwicklung:

$$B(r) = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{c^2 r} \right)^2 + \dots = 1 - \frac{2a}{r} + 2(\beta - \gamma) \frac{a^2}{r^2}$$

$$A(r) = 1 + 2\gamma \frac{GM}{c^2 r} + \dots = 1 + \gamma \frac{2a}{r}.$$

Dabei ergibt sich der erste Term B zwangsläufig aus der Forderung nach Erfüllung des Newtonschen Grenzwerts ! und in A, um im frei fallenden System zur Minkowski- Metrik zurückzukehren !!

$$2 \frac{GM}{c^2 r} = \frac{2\Phi}{c^2}$$

Bei Einstein:

$$\beta = \gamma = 1$$

Newton:

$$\beta = \gamma = 0$$

Lichtablenkung

MESSUNG: Licht eines Sterns oder Radiowellen eines Quasars, die knapp an der Sonne vorbeiführen

$$\text{Die Bahnkurve } \varphi(r) = \varphi(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} \sqrt{\frac{A(r')}{F^2} - \frac{1}{r'^2}}$$

beschreibt damit auch $r = r(\varphi)$

Als Startpunkt der Integration dient der minimale Abstand r_0 und wir setzen $\varphi(r_0) = 0$ von r_0 bis $r = \infty$ ändert sich der Winkel um $\varphi(\infty)$.

Betrachten wir die Situation für ein Photon:

Entlang der skizzierten Bahn dreht sich der Radiusvektor um $2\varphi(\infty)$. Das wäre entlang einer geraden Bahn exakt gleich π . das heißt: die gesuchte Lichtablenkung $\Delta\varphi$ im Gravitationsfeld ergibt sich gerade als

$$2\varphi(\infty) - \pi = \Delta\varphi$$

$$\varphi(r_0) = 0$$

$$\text{gleichzeitig ist } r(\varphi) \text{ minimal bei } r_0 \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)_{r_0} = 0$$

Wegen:

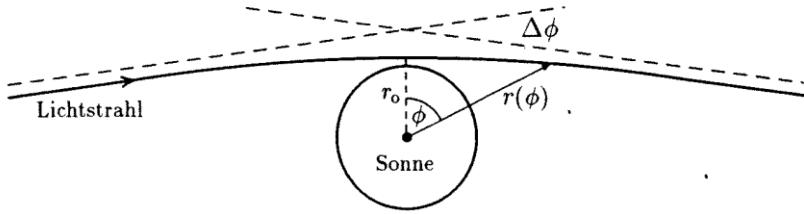


Abbildung 26.1 Im Gravitationsfeld der Sonne wird ein Lichtstrahl um den Winkel $\Delta\phi$ abgelenkt. Bezüglich des minimalen Abstands r_0 ist die Bahn symmetrisch. Der tatsächliche Ablenkungswinkel $\Delta\phi = 1.75''$ ist viel kleiner als in der Skizze.

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi(r)} \right)_{r_0} = 0 \Rightarrow \frac{F^2}{l^2} = \frac{B(r_0)}{{r_0}^2}$$

Also eliminieren wir $\frac{F^2}{l^2}$ durch den kürzesten Abstand r_0 :

$$\varphi(\infty) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{{r^2}}{r_0^2} \frac{B(r_0)}{B(r)} - 1}}$$

Dieses Integral kann berechnet werden, beispielsweise für die Koeffizienten $A(r), B(r)$ der Robertson-Entwicklung:

$$B(r) = 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{c^2 r} \right)^2 + \dots = 1 - \frac{2a}{r}$$

$$A(r) = 1 + 2\gamma \frac{GM}{c^2 r} + \dots = 1 + \gamma \frac{2a}{r}$$

Also:

$$\frac{r^2}{r_0^2} \frac{B(r_0)}{B(r)} \approx \frac{r^2}{r_0^2} \left[1 + 2a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right] - 1 = \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) \left(1 - \frac{2ar}{r_0(r+r_0)} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi(\infty) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \frac{r_0}{r} \left(1 + \gamma \frac{a}{r} + \frac{ar}{r_0(r+r_0)} \right) = \left[\arccos \frac{r_0}{r} + \gamma \frac{a}{r_0} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} + \frac{a}{r_0} \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}} \right]_{r_0}^{\infty}$$

Dies ergibt

$$\varphi(\infty) = \frac{\pi}{2} + \gamma \frac{a}{r_0} + \frac{a}{r_0}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{4a}{r_0} \frac{1+\gamma}{2}$$

Also für die Lichtablenkung:

$$\Delta\varphi = \frac{4a}{r_0} \frac{1+\gamma}{2}$$

Für einen Lichtstrahl, der gerade an der Sonne vorbeistreift gewinnen wir:

$$r_0 \approx R_O \approx 7 \cdot 10^5 \text{ km}$$

$$a = \frac{GM_O}{c^2} \approx 1,5 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{4a}{r_0} \frac{1+\gamma}{2} = 1,75' \frac{1+\gamma}{2}$$

die klassische Beobachtungsmethode, erstmals erfolgt 29.05.1919, ist die Messung der Position von Sternen in der Nähe des Sonnenrandes während einer Sonnenfinsternis !

Eine Sonnenfinsternis ist nötig, damit die Sterne überhaupt zu sehen sind.

Position der Sterne erscheint dann um den Winkel $\Delta\varphi = \frac{4a}{r_0} \frac{1+\gamma}{2} = 1,75' \frac{1+\gamma}{2}$ gegen die Position der Fixsterne verschoben.

Neue Messungen nutzen Quasare. Sofern solche Quasare geeignet stehen, werden sie jedes Jahr einmal von der Sonne verdeckt. Sonnenfinsternis ist zur Beobachtung nicht nötig.

Messung von Licht von Sternen und Quasaren ergibt:

$$\gamma = \begin{cases} 0,9 \pm 0,2 (\text{Stern}) \\ 1,008 \pm 0,005 (\text{Quasar}) \end{cases}$$

Hauptschwierigkeit bei der Analyse der Experimente ist die Berücksichtigung der Beugung der Wellen in der Sonnenuhr.

Das experimentelle Resultat bestätigt den ART- Wert $\gamma = 1$ und schließt den Newtonschen Wert

$\gamma_N = 0$ aus !

Der Newtonsche Wert ergibt sich aus der Metrik mit $B = g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}; A = -g_{11} = 1$

(ebener dreidimensionaler Raum)

Im Rahmen der Newtonschen Mechanik könnte man die Lichtablenkung so berechnen: Man kürzt die Masse m in den Bewegungsgleichungen:

$m\ddot{\vec{r}} = -m\nabla\Phi$. Dann berechnet man die Ablenkung eines Objektes, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Das Kürzen der Massen (eigentlich ist sie ja Null für Photonen) wäre für Newton kein Problem gewesen, da er davon ausging, dass Licht aus Korpuskeln besteht.

Unsere Bahngleichung

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\lambda^2} = -\Gamma^\kappa_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad \text{dagegen beruht auf dem Äquivalenzprinzip, also auf der geradlinigen}$$

Ausbreitung im lokalen Inertialsystem !

Gravitationslinse

Zur Lichtablenkung gibt es den spektakulären Effekt der Gravitationslinse. Hierbei werden die Radiowellen eines Quasars an einer Galaxie zwischen uns und dem Quasar abgelenkt. 1979 beobachteten Walsh et. al. zwei nahe nebeneinanderstehende Quasare mit sehr ähnlichem Spektrum. Die Übereinstimmung im Spektrum war größer als für irgendein Paar der bekannten 1500 Quasare. Nachfolgende Untersuchungen zeigten, dass es sich um ein und dasselbe Objekt handelt.

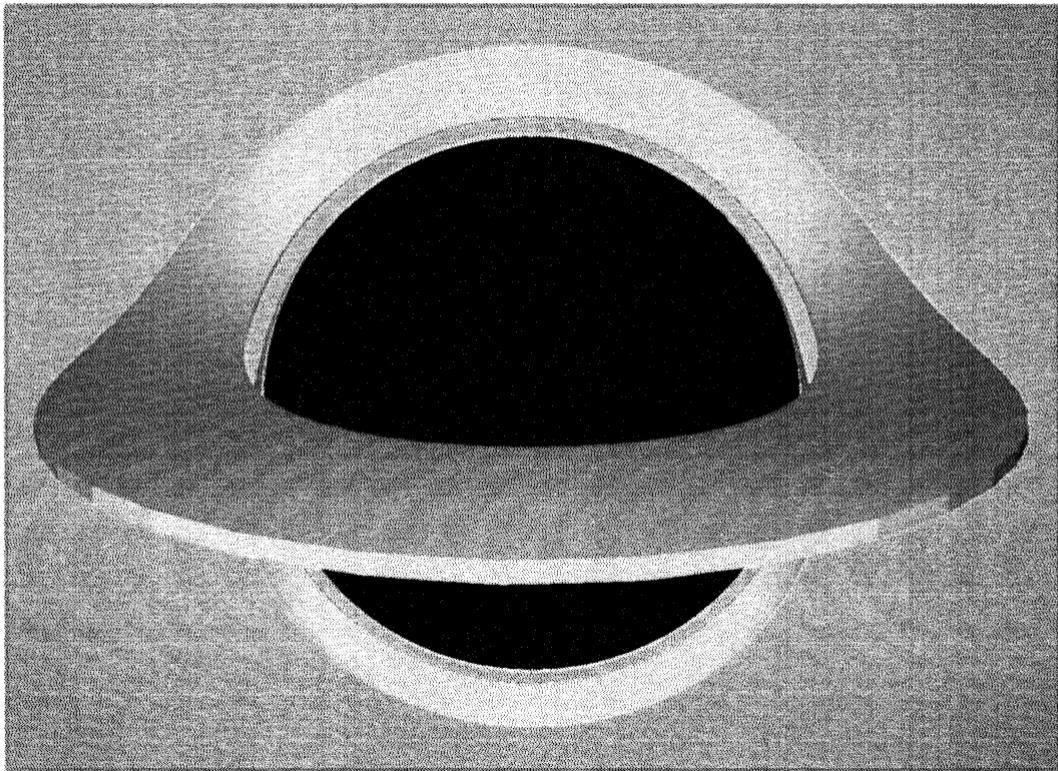
Da Quasare heller strahlen als Galaxien, konnte die ablenkende Galaxie erst später nachgewiesen werden !

Liegt das Zentrum des ablenkenden Gravitationsfeldes genau auf der Verbindungsgeraden von Erde und Quasar, so entsteht ein ringförmiges Abbild. Liegt es daneben, so können 2 oder mehr verzerrte Bilder entstehen.

Einstein selbst hatte bereits 1936 die Möglichkeit der Aufspaltung des Bildes eines entfernten Sterns durch einen nähergelegenen betrachtet.

der Effekt ist interessant bei schwarzen Löchern mit Aggregationsscheibe. Dabei sieht man den vorderen Teil der Scheibe vor dem schwarzen Loch weitgehend unverzerrt. Der hintere Teil dagegen wird durch das Gravitationsfeld des schwarzen Lochs stark abgelenkt und man sieht die Unterseite des Rings unter dem schwarzen Loch und die Oberseite über dem schwarzen Loch.

Eine Simulation dieses Effekts ergibt etwa folgendes Bild:



Wegen der Helligkeit der Sonne mussten erste Beobachtungen des direkt an der Sonne vorbeistreifenden Sternenlichtes bei einer Sonnenfinsternis durchgeführt werden ! Dazu wollte Einstein mit einer britischen Expedition 1919 auf die Krim .

Jedoch hatte sich Einstein um einen Faktor 2 verrechnet -> er hatte Glück, dass erster Weltkrieg war ! Einstein musste die Expedition abbrechen, rechnete nochmal nach und fand den Fehler
→ großer Triumph der ART !

Periheldrehung

- in der Newtonschen Theorie beschreiben Planeten perfekte Ellipsen. Störungen des $1/r$ - Potenzials führen dagegen zu Abweichungen. Ist diese Abweichung klein, so kann sie als Drehung der Ellipse beschrieben werden. Experimentell beobachtet man die Änderung des Winkels des sonnennächsten Bahnpunktes, des Perihels.
- Auch relativistische Korrekturen verursachen eine Periheldrehung, da Körper beim Umlauf unterschiedlich viel Gravitationsfeld einschließen, welches als Energiedichte ja selbst ebenfalls wieder Quelle der Gravitation ist.

Zuerst betrachten wir die Bahnellipse eines Planeten um die Sonne:

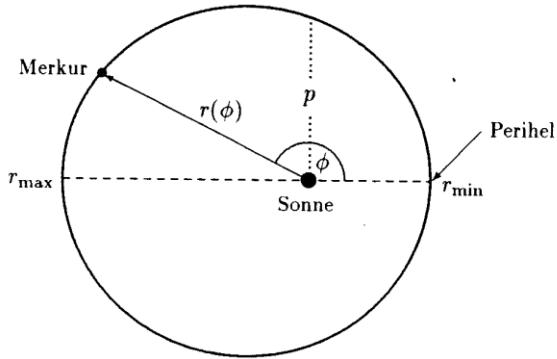


Abbildung 27.1 Im nichtrelativistischen Keplerproblem ist die Planetenbahn eine Ellipse, $p/r = 1 + \epsilon \cos \phi$. Für die abgebildete Ellipse ist die Exzentrizität $\epsilon = 1/3$, für die Merkurbahn gilt tatsächlich $\epsilon \approx 0.2$. Relativistische (und andere) Korrekturen führen zu einer Drehung dieser Ellipse, die als Periheldrehung bezeichnet wird.

Wir bezeichnen den minimalen und den maximalen Abstand zwischen Planet und Sonne mit

$$r_+ = r_{\max}$$

$$r_- = r_{\min}$$

und drücken entsprechend aus:

$$\varphi_{\pm} = \varphi(r_{\pm})$$

$$A_{\pm} = A(r_{\pm})$$

$$B_{\pm} = B(r_{\pm})$$

Für die relativistische Bahnkurve folgt aus dem Integral mit Epsilon = c² für Massekörper:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2}}} \\ \Rightarrow \varphi_+ - \varphi_- &= \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2}}} := \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{K(r)}} \end{aligned}$$

Für einen vollen Ellipsenumlauf ergibt sich eine Winkeländerung von 2π . Ein voller Umlauf geht durch die Bahnkurve $r=r(\Phi)$, beginnt etwa bei r_+ , läuft über r_- wieder zurück.

Also ergibt sich insgesamt:

$$\Delta\varphi = 2(\varphi_+ - \varphi_-) - 2\pi = 2 \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2}}} := \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{K(r)}} - 2\pi$$

wegen:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{\frac{F^2}{B(r)l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{c^2}{l^2}}} = \frac{d\varphi}{dr} \\
& \left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r_+/r_-} = 0 \\
& \Rightarrow \frac{F^2}{B_+l^2} - \frac{1}{r_+^2} - \frac{c^2}{l^2} \\
& \quad \frac{F^2}{B_-l^2} - \frac{1}{r_-^2} - \frac{c^2}{l^2} \\
& \Rightarrow \frac{F^2}{B_+l^2} = \frac{1}{r_+^2} + \frac{c^2}{l^2}, \frac{F^2}{B_-l^2} = \frac{1}{r_-^2} + \frac{c^2}{l^2}
\end{aligned}$$

Die Konstanten F und l können wieder eliminiert werden und zwar durch r_+ / r_- ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
& \frac{F^2}{l^2} = \frac{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}}{\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-}} = \frac{r_-^2 - r_+^2}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)} \\
& \Rightarrow \frac{c^2}{l^2} = \frac{\frac{B_+}{r_+^2} - \frac{B_-}{r_-^2}}{\frac{B_+ - B_-}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)}} = \frac{\frac{r_+^2}{B_+} - \frac{r_-^2}{B_-}}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)} \\
& \Rightarrow K(r) = \frac{r_-^2 \left(\frac{1}{B(r)} - \frac{1}{B_-} \right) - r_+^2 \left(\frac{1}{B(r)} - \frac{1}{B_+} \right)}{r_+^2 r_-^2 \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)} - \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

Für A und B setzen wir natürlich wieder die Robertsonentwicklung an:

$$\begin{aligned}
B(r) &= 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma) \left(\frac{GM}{c^2 r} \right)^2 + \dots = 1 - \frac{2a}{r} + 2(\beta - \gamma) \frac{a^2}{r^2} \\
A(r) &= 1 + 2\gamma \frac{GM}{c^2 r} + \dots = 1 + \gamma \frac{2a}{r} \\
\frac{1}{B(r)} &= 1 + \frac{2a}{r} + 2(2 - \beta + \gamma) \frac{a^2}{r^2} + \dots
\end{aligned}$$

Für die Bewegung von Planeten im Gravitationsfeld gilt $\frac{v^2}{c^2} \sim \frac{a}{r}$.

Die Terme

$$g_{00} u^0 u^0 \sim B c^2$$

$$g_{11} u^1 u^1 \sim A v^2 \sim A c^2 \frac{a}{r}$$

treten in

$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ nebeneinander auf und müssen in der Ordnung $\frac{a}{r}$ behandelt werden.

Daher muss B um eine Ordnung in $\frac{a}{r}$ weiter entwickelt werden als A

mit $\frac{1}{B(r)} = 1 + \frac{2a}{r} + 2(2 - \beta + \gamma) \frac{a^2}{r^2} + \dots$ folgt für K(r), dass K zu einer quadratischen Form in 1/r wird.

Da $\frac{d\varphi}{dr} = \infty$ für die Umkehrpunkte, muss dort $K_+ = K_- = 0$ gelten.

Das legt K bis auf eine Konstante fest:

$$K(r) = C \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right)$$

Die Konstante lässt sich leicht bestimmen aus dem Vergleich für

$r \rightarrow \infty$:

$$C = \frac{r_+^2 \left(1 - \frac{1}{B_+} \right) - r_-^2 \left(1 - \frac{1}{B_-} \right)}{r_+ r_- \left(\frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)}$$

Wir setzen

$$\frac{1}{B(r)} = 1 + \frac{2a}{r} + 2(2 - \beta + \gamma) \frac{a^2}{r^2} + \dots \text{ ein und es folgt:}$$

$$C = 1 - (2 - \beta + \gamma) \left(\frac{a}{r_+} + \frac{a}{r_-} \right)$$

Da wir C in 1. Ordnung in $\frac{a}{r}$ wollten, musste $\frac{1}{B(r)}$ bis zur 2. Ordnung entwickelt werden.

Das zu lösende Integral lautet nun:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr'}{r'^2} \sqrt{\frac{A(r')}{F^2 - \frac{1}{r'^2} - \frac{c^2}{l^2}}} = \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{A(r)}{K(r)}}$$

$$A(r) = 1 - \gamma \frac{2a}{r} \Rightarrow \sqrt{A(r)} \approx 1 + \gamma \frac{a}{r}$$

$$= \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \sqrt{\left(1 - (2 - \beta + \gamma) \left(\frac{a}{r_+} + \frac{a}{r_-} \right) \right) \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \left(1 + \gamma \frac{a}{r} \right) \left(\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

wir substituieren:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \sin \Psi$$

somit entspricht: $r = r_+, r = r_-$ den Werten

$$\Psi = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

Mit:

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-dr}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cos \Psi d\Psi$$

$$\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) (1 + \sin \Psi)$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) (1 - \sin \Psi)$$

Damit bekommt unser Integral die Form:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \left(1 + \gamma \frac{a}{r} \right) \left(\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\Psi \left[1 + \frac{\gamma a}{2} \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) + \frac{\gamma a}{2} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \sin \Psi \right]$$

Wir führen den Parameter p der Ellipse ein:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}$$

Wobei die Bedeutung dieses Parameters in der obigen Skizze gezeigt ist.
Dieses Integral kann nun trivial integriert werden:

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\pi}{\sqrt{C}} \left(1 + \gamma \frac{a}{p} \right) = \pi \left(1 + (2 - \beta + \gamma) \frac{a}{p} \right) \left(1 + \gamma \frac{a}{p} \right) = \pi \left(1 + (2 - \beta + 2\gamma) \frac{a}{p} \right)$$

Wobei immer nur lineare Terme in

$$\frac{a}{p}$$
 berücksichtigt wurden !

Als periheldrehung

$$\Delta\varphi = 2(\varphi_+ - \varphi_-) - 2\pi = 2\pi \left((2 - \beta + 2\gamma) \frac{a}{p} \right)$$

ergibt sich

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi a}{p} \frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3}$$

p sollte also möglichst klein sein, damit der Effekt möglichst deutlich wird.

für den Merkur gilt:

$$p = 55 \text{ Mio. km}$$

$a = 1,5 \text{ km}$ (halber Schwarzschildradius der Sonne)

mit den ART- Werten $\gamma = \beta = 1$ folgt:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi a}{p} = 0,104'' \text{ pro Umlauf}$$

Im Jahrhundert umläuft Merkur die Sonne 415 mal, so dass sich der Effekt auf $\Delta\varphi = 43,0''$ pro Jahrhundert summiert.

Für die weiter entfernte Erde beträgt die Periheldrehung nur $5''$ in einhundert Jahren !

Bemerkenswert:

Bereits 1882 hatte Newcomb eine Periheldrehung von $43''$ pro Jahrhundert bei Merkur gefunden. Dazu muss vom beobachteten Wert der Erde von $5600''$ zunächst auf ein IS umgerechnet werden. Es verbleiben $575''$. Von diesen muss dann der Anteil von $532''$ abgezogen werden, da er alleine durch die Störung der anderen Planeten verursacht wird. Dann bekommt man Werte, die mit dem ART- Resultat zu vergleichen sind.

Wertet man die Daten aus, so folgt:

$$\frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3} = 1,003 \pm 0,005$$

Der Wert der Newtonschen Theorie für die Periheldrehung ist $0''$!

$$\text{Dies folgt jedoch nicht durch Einsetzen von } \beta = \gamma = 0 \text{ in } \Delta\varphi = \frac{6\pi a}{p} \frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3}$$

Grund ist, dass in die Berechnung dieses Drehwinkels nicht nur die relativistischen Effekte des Gravitationsfeldes eingehen sondern auch die der Bewegungsgleichungen.

Aus der Analyse der Radarechoverzögerung ergibt sich

$$\gamma = 1,000 \pm 0,001$$

Setzt man dies ein, so folgt:

$$\beta = 0,99 \pm 0,02$$

Dies ist in völliger Übereinstimmung mit dem ART- Wert = 1

Da β ein Koeffizient eines nichtlinearen Terms in der Robertsonentwicklung ist, testet dieser Effekt der Periheldrehung insbesondere die Nichtlinearität der Einsteinschen Feldgleichungen.

Quadrupolmoment der Sonne

Schwierig bei der Analyse der Periheldrehung ist das nicht genau bekannte Quadrupolmoment der Sonne .

Quadrupolmoment Q:

$$Q = J_2 M_O R_O^2$$

$$J_2 = \frac{2}{5} \frac{R_{||} - R_{\perp}}{R_O}$$

Dabei bezeichnen wir die Sonnenradien senkrecht zur Planetenebene und parallel zur Drehachse der Sonne mit R_{\perp} , während $R_{||}$ der dazu senkrechte Sonnenradius ist.

Die Korrektur des Newtonschen Gravitationspotenzials durch das Quadrupolmoment ist leicht berechenbar. In der Äquatorebene gewinnt man durch Multipolentwicklung das Gravitationspotenzial

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{GQ}{2r^3}$$

Der Term hat die gleiche Form wie der im relativistischen Potenzial

$$V_{eff.} - \frac{l^2}{2r^2} = -\frac{GM}{r} - \frac{GMI^2}{c^2 r^3}$$

mit $l \sim p v$ und $v^2 \sim \frac{GM}{p}$ können wir die relative Stärke der beiden Zusatzterme abschätzen:

$$\frac{GQ}{GM \frac{l^2}{c^2}} \sim \frac{J_2 R_O^2}{p^2 \frac{v^2}{c^2}} \sim \frac{J_2 R_O^2}{p \frac{GM}{c^2}} = \frac{J_2 R_O^2}{ap}$$

bis auf den numerischen Faktor haben wir somit als Gesamtausdruck für die Periheldrehung:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi a}{p} \left(\frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3} + \frac{J_2 R_O^2}{2ap} \right)$$

Die Abplattung kann man berechnen, wenn man die Materie als eine Flüssigkeit annimmt, die durch ihre Gravitation zusammengehalten wird. Man nimmt dann an, dass das System gleichmäßig mit der an der Oberfläche sichtbaren Drehfrequenz rotiert. Bei dieser Rotation entsteht dann ein hydrodynamisches Gleichgewicht zwischen den Zentrifugal- und den Gravitationskräften.

Ohne Drehung ist der Gleichgewichtszustand eine Kugel, ansonsten ergibt sich eine leichte Abplattung.

Das Quadrupolmoment ist von der Größenordnung

$$J_2 \sim 10^{-7}$$

etwa der doppelte Wert wird direkt durch Sonnenbeobachtungen gewonnen !

Somit ist $\frac{J_2 R_O^2}{2ap} \sim 5 \cdot 10^{-4}$, der Effekt geht also in den relativistischen Effekten total verloren, liegt noch innerhalb der Fehlergrenzen.

Man kann natürlich das Quadrupolmoment der Sonne auch als Parameter neben β, γ auffassen und dann aus der Analyse der Experimente das Quadrupolmoment bestimmen !

Radarechoverzögerung

Ein Signal von der Erde wird von anderen Planeten reflektiert und trifft bei uns wieder ein. passiert der Strahl dabei das Gravitationsfeld der Sonne, so trifft das Radarecho mit Verzögerung ein:

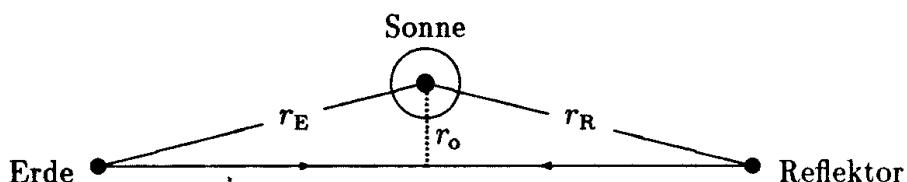


Abbildung 28.1 Ein Radarsignal wird von der Erde ausgesandt und von einem Reflektor (etwa der Venus) zurückgeworfen. Wenn die Sonne die Bahn des Radarsignals kreuzt, kommt es zu einer meßbaren Verzögerung. Die Krümmung der Bahn des Radarechos (Kapitel 26) ist in dieser Skizze nicht angedeutet.

Zur Berechnung der Radarechoverzögerung gehen wir wieder von der Bahngleichung mit $\varepsilon = 0$ aus:

$$A \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} = 0$$

Nun folgt wegen

$$A\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} = -\varepsilon = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{\frac{\frac{F^2}{B} - \frac{l^2}{r^2} - \varepsilon}{A}} = \frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \frac{dx^0}{d\lambda}$$

$$B \frac{dx^0}{d\lambda} = F = \text{const.}$$

Somit:

$$A\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2}{B} = -\varepsilon = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{\frac{\frac{F^2}{B} - \frac{l^2}{r^2} - \varepsilon}{A}} = \frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \frac{F}{B}$$

$$\Rightarrow \frac{AF^2}{c^2 B^2 l^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{F^2}{Bl^2} = 0$$

Beim minimalen Abstand r_0 von der Sonne gilt wieder:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{F^2}{l^2} &= \frac{B(r_0)}{r_0^2} \end{aligned}$$

Also:

$$\Rightarrow \frac{A}{c^2 B} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r_0^2}{r^2} \frac{B}{B(r_0)} - 1 = 0$$

diese Differenzialgleichung wird durch folgendes Integral gelöst:

$$\Rightarrow t(r, r_0) = \frac{1}{c} \int_{r_0}^r dr' \sqrt{\frac{A(r')}{B(r')}} \left[1 - \frac{r_0^2}{r'^2} \frac{B(r')}{B(r_0)} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

dabei ist

$t(r, r_0)$ die Zeit, die der Radarstrahl von r_0 bis r benötigt.

Die Zeit wird durch eine Uhr angezeigt, die im Unendlichen ruht! Der Zusammenhang mit der Zeit auf der Erdoberfläche kann leicht hergestellt werden. Für die zu beobachtende Verzögerung δt ist der Unterschied zwischen t und der Erdzeit irrelevant:

Robertsonentwicklung:

$$A(r) = 1 + \gamma \frac{2a}{r}$$

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r}$$

somit:

$$1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{B(r)}{B(r_0)} = 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left[1 + 2a \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right] = \left[1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right] \left[1 - \frac{2ar_0}{r(r+r_0)} \right]$$

also wird das Integral zu

$$\Rightarrow t(r, r_0) = \frac{1}{c} \int_{r_0}^r dr \left[1 - \frac{r_0^2}{r'^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{ar_0}{r'(r'+r_0)} + (1+\gamma) \frac{a}{r'} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{c} + \frac{a}{c} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} + (1+\gamma) \frac{a}{c} \ln \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} \right)$$

Der erste Term ,also

$$\frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{c}$$

gibt gerade die Laufzeit an, die beim passieren einer geradlinigen Trajektorie im Euklidischen

Raum geschieht ! Die anderen Terme geben daher die Verzögerung δt an, die aufgrund des Gravitationsfeldes der Sonne auftritt.

Für das skizzierte Experiment ist

$$\delta t = 2 \left[t(r_E, r_0) + t(r_R, r_0) - \frac{\sqrt{r_E^2 - r_0^2}}{c} - \frac{\sqrt{r_R^2 - r_0^2}}{c} \right]$$

Der Faktor 2 kommt, da der Radarstrahl hin und wieder zurücklaufen muss !

Erhebliche Laufzeitverzögerungen treten nur auf, wenn der Radarstrahl die Nähe der Sonne passiert, wenn also r_0 nur einige Sonnenradien groß ist !

Wegen

$$r_E, r_R \gg R_O \quad \text{kann man sinnvoll nähern zu}$$

$$\Rightarrow r_E, r_R \gg r_0$$

$$\delta t = \frac{4a}{c} \left[1 + \frac{(1+\gamma)}{2} \ln \left(\frac{4r_E r_R}{r_0^2} \right) \right]$$

Der Ausdruck wird gerade maximal, wenn der Radarstrahl die Sonne gerade streift, also

$$r_{O,\min} = R_O$$

Dann:

$$\delta_{\max} t = \frac{4a}{c} \left[1 + \frac{(1+\gamma)}{2} \ln \left(\frac{4r_E r_R}{R_O^2} \right) \right] \approx 2 \cdot 10^{-4} s$$

Dabei wurden $10^8 km$ für rE und rr eingesetzt weiter:

$$R_O = 7 \cdot 10^5 km$$

$$\ln(10^5) \sim 10$$

$$\frac{2a}{c} = 10^{-5} s$$

Die Verzögerung kann man nicht durch Vergleich von Experiment und Messung berechnet werden. Dazu kennt man die Abstände der Planeten nicht genau genug. Jedoch kann man die Veränderung der Laufzeit feststellen, wenn der Radarstrahl durch die Bewegung von Erde und Planet über die Sonne fährt.

Das Experiment wurde 1964 von Shapiro vorgeschlagen und einige Jahre später durchgeführt.
Man beobachtete folgenden Verlauf:

Zum Vergleich mit den theoretischen Vorhersagen in

$\delta t = \frac{4a}{c} \left[1 + \frac{(1+\gamma)}{2} \ln \left(\frac{4r_E r_R}{r_0^2} \right) \right]$ setzt man den zeitabhängigen Abstand $r_0(t)$ ein, der sich aus der bekannten Planetenbewegung ergibt !

Die Auswertung der messdaten mit der Formel verglichen ergibt $\gamma = 1,000 \pm 0,001$ in voller Übereinstimmung mit der ART

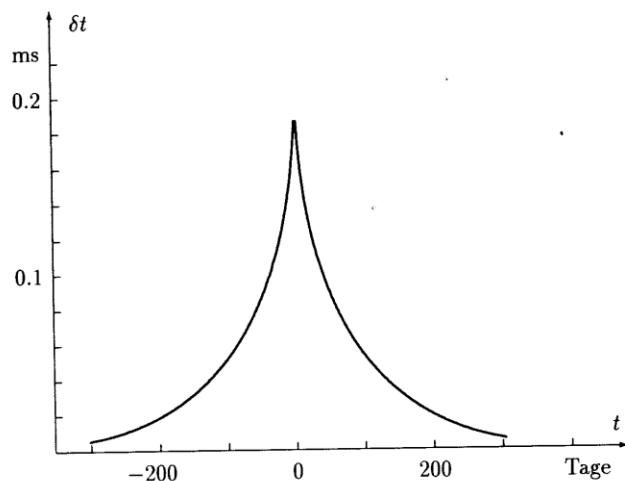


Abbildung 28.2 Schematische Darstellung der gemessenen Verzögerung δt eines Radarechos von der Venus als Funktion der Beobachtungszeit t . Dabei ist $t = 0$ der Zeitpunkt der Konjunktion von Erde-Sonne-Venus, also der Zeitpunkt, zu dem der Radarstrahl gerade die Sonne streift.

Nordtvedt- Effekt

Gleichheit von schwerer und träger Masse impliziert, dass alle möglichen Energiebeiträge ΔE etwa der elektromagnetischen oder der starken Wechselwirkung denselben Beitrag $\frac{\Delta E}{c^2}$ zu m_t und m_S liefern. Nach der

ART gilt dies auch für den Beitrag der Gravitationswechselwirkung selbst !

Nordtvedt fand heraus, dass in alternativen Gravitationstheorien (wie Brans und Dicke) dies nicht der Fall ist !

um diese Frage zu testen , muss man große Körper betrachten (Wie die Erde und den Mond). Denn nur bei solchen Körpern ist der Beitrag der Gravitationswechselwirkung ΔE_{Grav} zur Masse hinreichend groß. Der relative Beitrag der Gravitationsenergie zur Masse der Erde ist 25 mal größer als beim Mond !.

Wenn nun ΔE_{Grav} unterschiedlich zu m_t und m_S beiträgt, dann würden Erde und Mond im Feld der Sonne unterschiedlich schnell fallen. Dieser Effekt würde zu Abweichungen in der Mondbahn von der Größe eines Meters führen. Da die Mondbahn über Laserreflexion auf 10 cm genau vermessen werden kann, müssten derartige Effekte beobachtbar sein.

Analog zu γ, β kann man einen dimensionslosen Parameter η für die Stärke des Nordtvedt- Effekts definieren. Die Analyse der Mondbahndaten bestätigt den ART- Wert $\eta = 0$

auf 10^{-4} genau. Mit dieser Genauigkeit wird dann das Starke Äquivalenzprinzip verifiziert ! Darunter versteht man das Einsteinsche Äquivalenzprinzip mit der expliziten Annahme, dass auch die Gravitationsbindungsenergie gleichermaßen zu träger und schwerer Masse beiträgt ! In den oben zitierten Experimenten spielt dagegen der Beitrag der Gravitationsbindungsenergie keine Rolle. Deshalb spricht man von Test des schwachen Äquivalenzprinzips !

Gravitationswellen

Elektrodynamik (in Feldstärke-Darstellung)

$$F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$$

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0$$

Wegen der Darstellung von $F^{\mu\nu}$ als Rotation verschwinden alle bis auf 4 Feldgleichungen:

$$F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$$

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Differentialidentität (gleich der Kontinuitätsgleichung):

$$F^{\mu\nu}_{,\nu\mu} = 0$$

$$\Leftrightarrow j^{\mu}_{,\mu} = 0$$

Als Folge der Eichfreiheit

$$\bar{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

mit (wobei)

$$\#\chi = 0$$

Potenzialdarstellung der Elektrodynamik:

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\Rightarrow \# A^\mu - A^{\rho,\mu}_{,\rho} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$$

wegen

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

mit $A^{\mu,\mu} = 0$ (Lorentzzeichnung)

folgt:

$$\# A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

Möglichkeit der Umeichung, so dass:

$$A^0 = 0$$

$$\bar{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

$$\Rightarrow A^0 = -\partial^\mu \chi$$

Analog gehen wir in der ART vor:

10 DGL:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\kappa T^{\mu\nu} =$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

mit 4 Differentialidentitäten:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\nu} = 0$$

Womit dann der Nicht- Erhaltungssatz

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \text{ folgt.}$$

Folge der Eichfreiheit aller differenzierbaren Koordinatentrafos auf M (bijektiv) , also Diff(M).
Dabei: Diffeomorphismus = Differenzierbare (bijektive) Abbildung !

Lineare Näherung:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$|h_{\mu\nu}| << |\eta_{\mu\nu}|$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \dots$$

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$$

10 Feldgleichungen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Damit:

$$\# h_{\mu\nu} + h^\rho_{\rho,\mu,\nu} - h^\rho_{\mu,\rho,\nu} - h^\rho_{\nu,\rho,\mu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$$

Dann: Eichfreiheit:

$$h_{\mu\nu}' = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}$$

Eichtrafos der Form lassen also die Einsteinschen Feldgleichungen in erster Näherung invariant !

Wichtig: Die Eichtrafo $h^\mu_{\mu,\nu} = 2h^\mu_{\nu,\mu}$ (sogenannte Hilbert- Eichung) wird benötigt, um die Gleichung

$$\#_\eta h_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)} \text{ zu bekommen !}$$

Dabei ebenfalls:

$$h_{\mu\nu}' = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu} \text{ mit } \# \varepsilon_\mu = 0$$

Fazit:

$$\#_\eta h_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}^{(1)}$$

Im Vakuum:

$$\#_\eta h_{\mu\nu} = 0$$

Die Hilbert- Eichung

Ganz Allgemein:

Hilbert- bedingung:

$$\Psi^\mu_{\nu,\mu} = \left(h^\mu_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^\mu_{\nu} h^\rho_{\rho} \right)_{,\mu} = 0$$

Diese Hilbert- Bedingung folgt durch lineare Näherung aus der De Donder Eichung:

$$\left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \right)_{,\mu} = 0$$

→ geht durch Linearisierung in die Hilbertreichung über !

Intermezzo zu Ludwig Lorenz:

Große Frage seiner Zeit war: Ist Licht elektromagnetische Welle ?

→ Nicht aus den Maxwell- Gleichungen sondern aus den Bla- Blubb- leckmichamarschgleichungen

gewann Lorentz:

$$\# A^\mu - A^{\rho,\mu}_{,\rho} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

→ Einführung einer Eichbedingung:

$$A^\mu' = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

Suche: Wellen, die

$$\# h_{\mu\nu} = 0$$

erfüllen !

In der Edyn:

$$\# A^\mu = 0 \text{ bedingt die Form: } e^{i(kx - \omega t)}$$

Grundlage der ganzen Wellenscheiße:

$$\# A^\mu = 0$$

$$A^\mu_{,\mu} = 0$$

$$A^0 = 0$$

Wegen: $A^0 = 0 \rightarrow$ Ansatz ebener Wellen: $A^\mu = e^\mu(x^\mu) \exp(-ik_\beta x^\beta) + c.c.$

$$k^\beta = \left(\frac{\omega}{c}, \bar{k} \right)$$

$$x^\beta = (ct, \bar{r})$$

$$|\bar{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Auswertung der Forderungen:

$$\# A^\alpha = 0$$

$$1) \quad \Rightarrow k^\beta k_\beta = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2$$

$$k^2 = k_i k^i$$

$$2) \quad A^0 = 0 \Rightarrow e^\alpha = (0, e^i)$$

$$3) \quad A^\nu_{,\nu} = 0 \Rightarrow e^\alpha k_\alpha = e^i k_i = 0$$

Anwendung:

Welle in x3- Richtung

($k_1=0, k_2=0, k_3 \neq 0$)

$$A^\alpha = (0, e^1, e^2, 0) \exp[-i(\omega t - k_3 x^3)]$$

$$k := k_3$$

$$\Rightarrow A^\alpha = (0, e^1, e^2, 0) \exp[ik(x^3 - ct)]$$

Dabei ergeben sich
 $e^\alpha = (0, e^1, e^2, 0)$ aus obigen Überlegungen als POLARISATION. Die Polarisation ist in diesem Fall Rein transversal ! (rein transversale Dipolstrahlung).

Wegen der Forderungen 1), 2) und 3) verbleiben nur 2 Freiheitsgrade, nämlich e^1, e^2 !

ART:

- 1) $\# h_{\mu\nu} = 0$
- 2) $2h^{\mu}_{\nu,\mu} = h^{\mu}_{\mu,\nu}$
- 3) $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu}' = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$

Ansatz (ebene Gravitationswelle)

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}(x^\alpha) \exp[ik(x^3 - ct)] + c.c.$$

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = c^2 k^2$$

$$2\eta^{\mu\rho}e_{\rho\nu}k_\mu = e_{\rho\mu}\eta^{\mu\rho}k_\nu$$

$$2e^\mu_\nu k_\mu = e^\mu_\mu k_\nu$$

$$\Rightarrow 2h^{\mu}_{\nu,\mu} = h^{\mu}_{\mu,\nu}$$

Fazit:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & -e_{11} \end{pmatrix} \exp[ik(x^3 - ct)] + c.c$$

transversale Dipolstrahlung mit nur noch 2 Freiheitsgraden !

->

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & -e_{11} \end{pmatrix} \exp[ik(x^3 - ct)] + c.c$$

Energie- Impuls- Tensor ebener Wellen

Bianchi in linearer Näherung:

$$\left(R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}R)^{(2)} \right)^{\nu} = 0$$

Also:

$\eta_{\mu\nu}$ + Korrektur -> ergibt unendliche Reihe ! In kovarianter Schreibweise:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \dots$$

$$\eta^{\mu\nu} = (0)$$

$$g^{\mu\nu} = (1)$$

→ Einsteinsche Feldgleichungen bis 2. Ordnung !

→ Nun:

$\rightarrow \left(R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}R)^{(2)} \right)^{\nu} = 0$ Dabei wird $\left(R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}R)^{(2)} \right) \sim t_{\mu\nu}$ in 2. Näherung aus den $h^{\mu\nu}$ konstruiert. Es genügt dann, die Divergenzrelation mit Komma zu schreiben !

Also:

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} \left(R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}R)^{(2)} \right)$$

wird aus h und ihren Ableitungen gebildet !

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} k_\mu k_\nu (|e_{11}|^2 + |e_{12}|^2)$$

$$\Rightarrow T_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu (|e_{11}|^2 + |e_{12}|^2)$$

für beliebige Ausbreitungsrichtung !

$$h_{\mu\nu} = -\frac{4\pi G}{c^4} \int d^3x' \frac{S_{\mu\nu}\left(x'^i, t - \frac{|x^i - x'^i|}{c}\right)}{|x^i - x'^i|}$$

Im Gegensatz zur EDynamik existiert keine Dipolstrahlung !

EDynamik: Dipolstrahlung. Dipolmoment:

$$p^i := \frac{\int d^3x \rho_e(x) x^i}{\int d^3x \rho_e(x)}$$

Punktladung:

$$p_p^i := \frac{\sum_i e_i x^i}{\sum_i e_i}$$

ART: Dipolstrahlung:

$$p^i := \frac{\int d^3x \rho_m(x) x^i}{\int d^3x \rho_m(x)} = 0 \rightarrow \text{dies kann immer Null werden, wenn der Schwerpunkt des Systems strikt in den Ursprung gelegt wird !}$$

Grund für Quadrupolcharakter: Es existieren keine negativen Massen !

Quellen und Nachweis der Gravitationsstrahlung

Rotierender Balken:

Kein Dipolmoment !
Rotationsfrequenz Ω

Leistung:

$$P = \frac{32G\Omega^6}{5c^5} \varepsilon^2 I^2$$

bei einem Quadrupolmoment:

$$Q^{ij} = \frac{\int d^3x \rho(x^i) x^i x^j}{\int d^3x \rho(x^i)}$$

$$Q^{ij} = \begin{pmatrix} J^1 & & \\ & J^2 & \\ & & J^3 \end{pmatrix}$$

Beispiel: $M = 500 \text{ t}$

$L = 20 \text{ M}$

$\Omega = 30/\text{s}$

folgt:

$$P = 2,4 \cdot 10^{-29} \text{ W}$$

Dopplesternsystem:

$$P = \frac{32G^4}{5c^5 r^5} M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)$$

Wobei r den Abstand zwischen den massen charakterisiert !

Beispiel: PSR 1913+16 (Doppel- Neutronenstern !)

Änderung der Pulse -> Änderung der Bahnperiode T

→ starke Gravitation !

$$\frac{dT}{dt} = -(2,425 \pm 0,010) \cdot 10^{-12}$$

ebenso: Abstrahlung der Rotationspulse wird verlängert (verstärkte Gravitation ! -> langsamere Uhren !)

Indirekt: Beweis der Gravitationsstrahlung !

Nachweis

Punktteilchen spürt Inhomogenitäten nicht... es fällt entlang Geodäten -> frei fallendes System kompensiert sich vollständig

→ Nimm 2 Punktteilchen -> Inhomogenität ! des Feldes dazwischen ! -> relative Beschleunigung der Teilchen gegeneinander !

SRT: beschleunigte Bewegungen haben absolute Bedeutung (messbare Kräfte) -> konstante Bewegungen werden relativiert !

ART: Beschleunigungen werden auch relativiert !

Resonante Detektoren !

Solen zu Resonanzschwingungen angeregt werden ! -> Weber: Aluminiumzylinder ! Schwingungen über Piezo-Effekt messbar !

Weber (1970) $L = 1 \text{ m}$, $m = 1000 \text{ kg}$
relative Abstandsänderung

$$h \approx 10^{-22} \text{ erwartet !}$$

- keine reproduzierbaren Ergebnisse -> Lösung: mehrere Detektoren in Abständen !

Interferometer

- interferometrische Anordnung von Satelliten
- -> Hoffnung auf Ringsystemverschiebung ! -> es sollten Wellen nachgewiesen werden ! Problem: es kann gar keine Lösung der exakten ART geben, die Wellenrepräsentiert -> Ausbreitung der Wellen erfolgt vor einem gewissen (als flach angenommenen) Hintergrund
- dies ist streng genommen nicht im Geiste der ART !

In der ART existiert kein Hintergrund ! Feld ist Quelle der Raumzeit !
Energie- Impuls- Transport ist in der ART gar nicht definiert !
-> Nachweis eines Objekts (Gravitationsstrahlung), welches in der ART gar nicht definiert ist !

Kosmologische Lösungen der Einstein- Gleichungen

Grundlagen / wichtigste Weltmodelle

Metagalaxis: Raumzeitlicher Bereich, von dem Daten existieren !

$$R \approx 10^{10} Lj$$

Dabei:

$$1Lj = 9,46 \cdot 10^{17} cm$$

$$M_O = 2 \cdot 10^{33} g$$

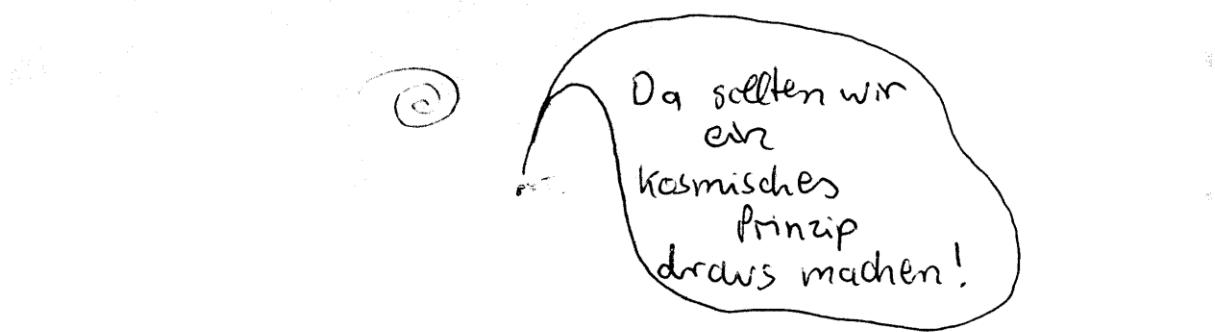
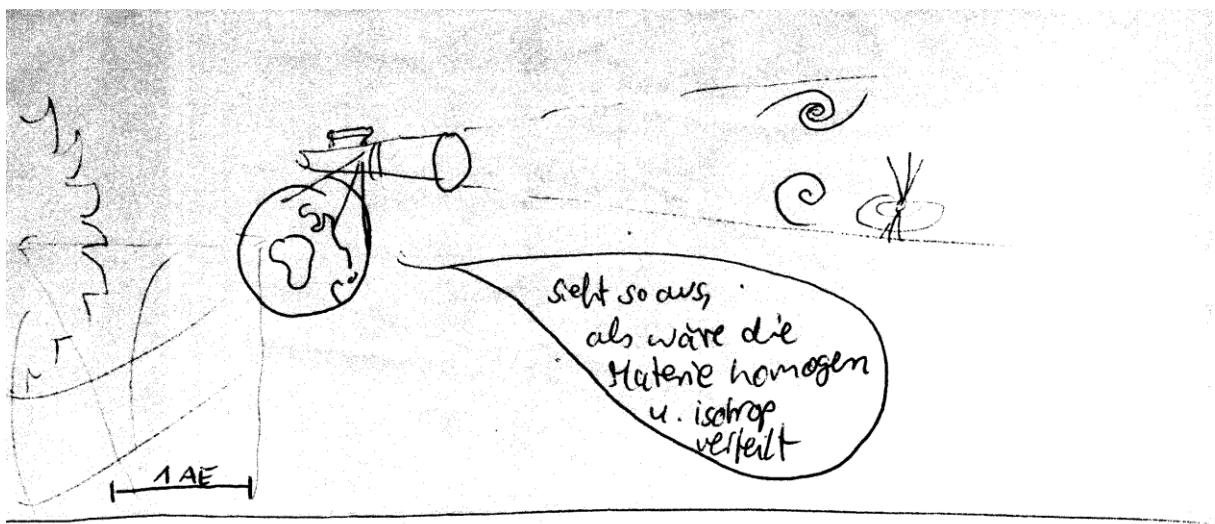
$$1pc = 3,26Lj$$

Eine Galaxie besteht aus 10 Mrd. Sonnenmassen
Durchmesser im Schnitt: 100000 Lj,
Bilden Cluster aus meist 200 Sonnenmassen
Radius etwa 10 Mio. Lichtjahre

Über ein Raster von 100 Mio. Lichtjahren ist die Materie homogen und isotrop !
→ kopernikanisches Prinzip ... kosmologisches Prinzip !

Homogen entspricht in der Philosophie auch einem göttlichen Prinzip: jeder Punkt ist gleich weit von Gott entfernt !

Diese Feststellung für die Metagalaxis wird übertragen/ erweitert auf das gesamte Universum !



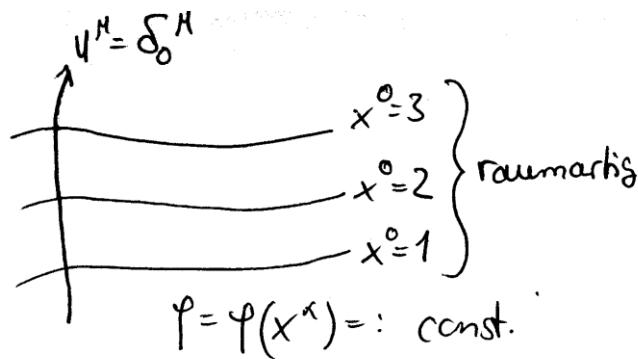
Materie- Ansatz für die Metrik

1) Kontinuumsmodell:

(ideales Gas oder ideale Flüssigkeit):

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P$$

2) es existiert ein durch $x^0 = \text{const.}$ gekennzeichnetes momentanes Ruhesystem der Materie (mitbewegtes Bezugssystem !)



$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \delta_0^\mu$$

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} c dt$$

$$cdt = dx^0$$

Die Zeit sei global konstant:

$$u_\mu = g_{\mu\alpha} h^\alpha = g_{\mu 0}$$

Der G

Geschwindigkeitsvektor soll weiter immer senkrecht auf die Raumzeitschnitte stehen:

$$u_\mu \perp (x^0 = \text{const.})$$

$$n_\mu := \delta_\mu^0$$

Setze:

$$u_\mu = \lambda n_\mu := \lambda \delta_\mu^0$$

$$g_{0\mu} = \lambda \delta_\mu^0$$

$$\Rightarrow g_{0i} = 0$$

$$g_{00,i} = 0$$

Dies vereinfacht den metrischen Ansatz stark !

Also:

Wesentliche Annahme: es existiert ein durch $x^0 = \text{const.}$ gekennzeichnetes momentanes Ruhesystem der Materie (mitbewegtes Bezugssystem !)

Ansatz:

$$ds^2 = g_{00}(x^0, x^i) c^2 dt^2 + g_{0i} \dots + g_{ik} dx^i dx^k$$

$$= g_{00}(x^0, x^i) c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k$$

3. Voraussetzung:

Weltlinien der Materie sind zeitartige geodätische ! (selbstverständlich für Monopole !)

Also:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (\text{Geodätengleichung !})$$

$$ds^2 = g_{00}(x^0) c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k$$

Dabei ist der Anteil

$g_{ik} dx^i dx^k$ die Metrik der dreidimensionalen Raumschnitte ! Dabei wird vorausgesetzt, dass die Feldbewegung der Teilchen nicht von Inhomogenitäten im Feld abhängt ! -> Keine WW der Teilchen ist sowieso Voraussetzung !

Trafo:

$$\bar{x}^0 \rightarrow \bar{x}^0(x^0)$$

$$\Rightarrow \bar{g}_{00}(\bar{x}^0) = 1$$

→ eine Trafo, die $\bar{g}_{00}(\bar{x}^0) = 1$ macht !

Also: Das Feld wird hier nur durch die GLOBALE STRUKTUR beeinflusst ! Außer Acht gelassen ist die Clusterung und Wechselwirkungen !

Zu Annahme 3: Geodätische Bewegung der Materie:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma^0{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \frac{d^2 x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \dots$$

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma^0{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \delta^\alpha{}_0 \delta^\beta{}_0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma^0{}_{00} = 0$$

$$\Gamma^0{}_{00} := \frac{1}{2} g^{0\rho} (g_{\rho 0,0} + g_{0\rho,0} - g_{00,\rho}) = \frac{1}{2} g^{0\rho} (2g_{\rho 0,0} - g_{00,\rho})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{0\rho} (2g_{\rho 0,0} - g_{00,\rho}) = 0$$

Insgesamt gewinnen wir so einen Satz Gleichungen mit verschiedenen termen, auch der Form

g_{0i} :

$$\frac{d^2 x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^1}{d\tau^2} + \dots g_{0i} = 0$$

Dies liefert uns Bedingungsgleichungen mit

$$g_{00}, g_{0i}$$

Diese Bedingungsgleichungen können zu Ableitungen verwendet werden. Man gewinnt:

$$g_{0i} = 0$$

$$u = \delta$$

$$\Rightarrow g_{00,i} = 0$$

Für unser kosmologisches Modell ist also g_{00} prinzipiell von x^i unabhängig !

$$x^i = x^i(t)$$

zeitartige Geodäten -> geradlinige Bewegungsbahnen der Planeten !

Bewegung auf Geodäten ist für Punktteilchen selbstverständlich !

Also: $\int T^{\alpha\beta} d^3x$ charakterisiert die Teilchen vollständig !

Falls:

$$\int x^\mu T^{\alpha\beta} d^3x \neq 0$$

$$\int x^\mu x^\nu T^{\alpha\beta} d^3x \neq 0$$

- Teilcheneigenschaften wie Bahndrehimpuls / Spin stecken mit drin ! -> Ganz andere Bewegungsbahnen ! Geodäten sind nur selbstverständlich für Punktteilchen, die die Inhomogenitäten des Gravitationsfeldes nicht spüren !
- Und (als Punktteilchen selbstverständlich) keine innere Struktur aufweisen ! (wobei letzteres vom Äquivalenzprinzip geplättet wird, wenn lediglich die fehlende Inhomogenität des äußeren Feldes gewahrt bleibt !)

4. Voraussetzung: Der Hubble- Fluss ist homogen und isotrop !

Das heißt: Das Verhältnis der Raumschnitte $x^0 = \text{const.}$ zu verschiedenen zeiten ! x^0 und $x^0 + dx^0$ ist lediglich eine Funktion der Zeit , also von x^0 !

Das heißt: Der Hubble- Fluss ändert sich nur zeitlich !

$$\frac{ds^2}{ds^2} \Big|_{x^0+dx^0} = 1 + h(x^0)dx^0 + O((dx^0)^2)$$

Somit sollte die Metrik separierbar sein:

$$g_{ik}(x^0, x^j) = S^2(x^0) \gamma_{ik}(x^j)$$

Dabei ist

$S^2(x^0)$ ein Skalar der zeit und $\gamma_{ik}(x^j)$ der zweistufiger Tensor der Ortskoordinaten ! (die Flächen hängen über den Zeitskalar von der zeit und über die Verteilung der Ortskoordinaten im Raumtensor auch vom Raumpunkt ab !)

Also:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + S^2(x^0) \gamma_{ik}(x^j) dx^i dx^k$$

4) Homogenität der Raumschnitte ($x^0 = \text{const.}$)

→ dreidimensionale Raumschnitte sind Räume konstanter Krümmung !

Also:

$$\gamma_{ik}(x^j) dx^i dx^k$$

Lösung:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + S^2(x^0) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{k}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2}$$

Linienelement der Friedmann- Robertson- Walker- Metrik

Ansatz für die Materie !

Jede Lösung, die aus diesem Ansatz gewonnen werden kann ist ein Weltmodell !

In sphärischen Koordinaten:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + S^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

Unterschied zur Schwarzschildmetrik:

Die Schwarzschildmetrik löst eine kugelsymmetrische Materieverteilung -> das Feld ist isotrop !

→ ein Zentrum existiert, bezüglich dem die Verteilung isotrop ist !

Robertson Walker dagegen : Ist an jedem Punkt isotrop !

Mögliche Ergebnisse für die Krümmung:

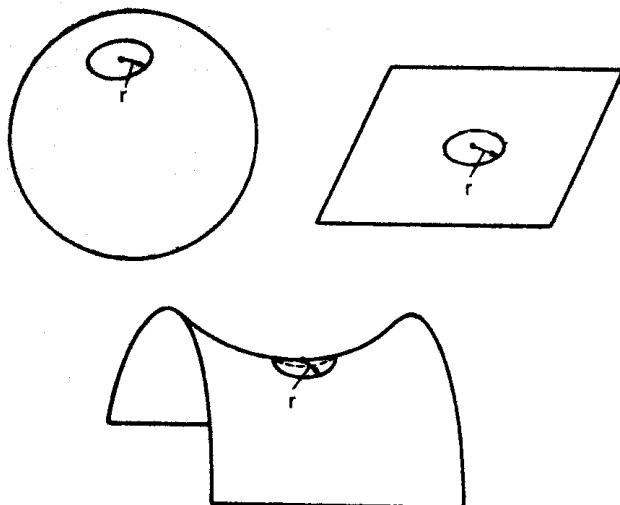


Abb. 13.1. Flächen (d. h. zweidimensionale Räume) mit Krümmungen $k > 0$, $= 0$, < 0 als Modelle gekrümmter Räume

Krümmung k der Fläche:	$k > 0$	$k = 0$	$k < 0$
Geometrie:	Sphärisch oder elliptisch	Euklidisch	Hyperbolisch
Umfang des Kreises:	$< 2\pi r$	$= 2\pi r$	$> 2\pi r$
Fläche des Kreises:	$< \pi r^2$	$= \pi r^2$	$> \pi r^2$

Kleine Störungen durch Lokale Inhomogenitäten: -> bleiben diese lokalen Störungen bei allen Modellen klein unter zeitlicher Entwicklung ?

Was passiert mit diesen Störungen beim Hubble- Fluss !

Ziel: Aus den Anfangsstörungen sollen die Galaxien entstehen !

Fazit:

Kosmologie macht letztendlich so viele Aussagen wie Voraussetzungen !

→ Testes für Selbstkonsistenz !

Die Physik kommt voran -> die Weltformel ist nicht in Sicht !

Weltmodelle

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = \frac{-8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

mit $g_{\mu\nu}$ aus zehn unabhängigen Komponenten !

- Aus einer Metrik können dann:
- 1) die Christoffels ausgerechnet werden
- 2) die $R_{\mu\nu}$ gewonnen werden. Damit lassen sich dann die exakten Koeffizienten der Metrik bestimmen !

Reinstecken für nicht- Vakuum- Lösungen: T der idealen Flüssigkeit oder Strahlung !

Ergebnis:

2 Gleichungen für $S(t), \rho(t), p(t)$

Zusätzlich nötig: Zustandsgleichung: $\rho = \rho(P)$

Kant:

Die Gesamtheit aller Erfahrung kann niemals Gegenstand der Erfahrung sein !

Kosmologische Lösungen:

- 1) Metagalaxis mit 10 Mrd. Lichtjahren Durchmesser
- 2) Materie u FRW- Metrik

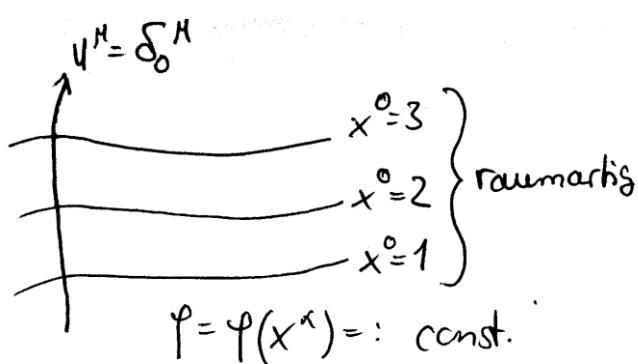
Dazu:

- 1) Kontinuumsmodell:

(ideales Gas oder ideale Flüssigkeit):

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P$$

- 2) es existiert ein durch $x^0 = \text{const.}$ gekennzeichnetes momentanes Ruhesystem der Materie (mitbewegtes Bezugssystem !)



Dabei: $g_{0i} = 0$

- 3) x^0 - Linien der Materie sind geodätische !

Also:

->

$$g_{00,i} = 0$$

Ergebnis: Stark eingeschränkte FRW- metrik:

$$ds^2 = g_{00}(x^0) c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k$$

4) der Hubble- Fluss ist homogen und isotrop !

$$g_{ik}(x^0, x^i) = S^2(x^0) \cdot \gamma_{ik}(x^i)$$

→ Separierbarkeit der Metrik !

5) die raumartigen Hyperflächen $x^0 = \text{const.}$ sind homogen !

Somit sind die dreidimensionalen Raumschnitte Räume konstanter Krümmung !

$$\gamma_{ik} = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{\left[1 + \frac{k}{4}((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)\right]^2}$$

$$K = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

für k=1: vierdimensionaler, euklidischer Raum : x,y,z,w:

Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$$

FRW:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{\left[1 + \frac{k}{4}((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)\right]^2}$$

als Standard- Form

In Kugelkoordinaten:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) \left[\frac{dr^2}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} \right]$$

bzw:

$$ds^2 := c^2 dt^2 - S^2(t) \left[\frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \right]$$

für

$$\rho = r \left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^{-1}$$

in sphärischen Koordinaten !

Üblicherweise schreibt man jedoch einfach:

$$ds^2 := c^2 dt^2 - S^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

Weltmodelle sind Lösungen der Einsteinschen Gleichungen:

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = \frac{-8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

mit:

$$x^0 = ct$$

$$x^1 = \rho := r$$

$$x^2 = \theta$$

$$x^3 = \varphi$$

dann folgt:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{-S^2(t)}{1-kr^2} & & \\ & & -S^2(t)r^2 & \\ & & & -S^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & & & \\ & \frac{PS^2(t)}{1-kr^2} & & \\ & & PS^2(t)r^2 & \\ & & & PS^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Aus der Metrik gewinnen wir:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Gamma^\rho_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu}$$

dann können die Einsteinschen Feldgleichungen Komponente für Komponente ausgewertet werden:

Zeit- Zeit- Komponente (00- Komponente):

$$\ddot{S}(t) - \lambda S = \frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3P) S$$

Die Raum- Raum- Komponenten sind alle Gleich: 11 = 22 = 33

$$S\ddot{S}(t) + 2\dot{S}^2 + 2k - \lambda S^2 = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) S^2$$

bei diesem hochsymmetrischen Ansatz in Metrik und Energie / Impuls liefern die allgemeinen 10 Gleichungen beim Einsetzen in die Einsteinschen Feldgleichungen liefert der allgemeine Ansatz der 10 Gleichungen also nur 2 Gleichungen für

$$S(t), \rho(t), P(t)$$

Daher: brauchen wir noch eine weitere Gleichung -> Zustandsgleichung:

$$P = P(\rho)$$

Es gilt:

$$P = P(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{für ersteres: inkohärente Materie (Staub) in einer materiedominierten Phase (heutige} \\ \frac{\rho c^2}{3} & \end{cases}$$

Epoche: Nur noch Bewegung im Gravitationspotenzial) und letzteres: Strahlung : Strahlungsdominierte Phase !

Lösung des DGL- Systems:

$$\ddot{S}(t) - \lambda S = \frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3P) S \quad \text{nach } \ddot{S}(t) \text{ auflösen und in}$$

$$S\ddot{S}(t) + 2\dot{S}^2 + 2k - \lambda S^2 = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) S^2 \quad \text{liefert:}$$

$$\dot{S}^2 + k - \frac{1}{3} \lambda S^2 = \frac{8\pi G}{c^4} \rho S^2$$

Die letzte Gleichung kann man ableiten und es folgt:

$$\begin{aligned} 2\dot{S}\ddot{S} - \frac{2}{3} \lambda S\dot{S} &= \frac{8\pi G}{c^4} (2\rho S\dot{S} + \dot{\rho} S^2) \cdot \frac{2}{3} \dot{S} \\ \Rightarrow 2\ddot{S}\dot{S} - \frac{2}{3} \lambda S\dot{S} &= \frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3P) S\dot{S} \end{aligned}$$

Subtrahiert man diese Gleichungen, so folgt:

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{S}}{S} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right)$$

Weltmodelle als Lösungen der Einsteinschen Gleichungen

Für materiedominiertes Universum: $P=0$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3 \frac{\dot{S}}{S} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \ln \rho + \frac{d}{dt} \ln S^3 = 0$$

$$\Rightarrow \ln \rho + \ln S^3 = const$$

$$\Rightarrow \rho_M S^3 = const.$$

für den Materiefall und

für Strahlung:

$$P = \frac{\rho c^2}{3}$$

→ ... →

$$\rightarrow \rho_S S^4 = const. \rightarrow \text{Effekt der Rotverschiebung}$$

Bleibt auszuwerten:

$$\rho_M S^3 = const., \rho_S S^4 = const. \text{ und Gleichung}$$

$$\dot{S}^2 + k - \frac{1}{3} \lambda S^2 = \frac{8\pi G}{c^4} \rho S^2$$

$k=1, 0, -1$

Schreibe:

$$\dot{S}^2 + k - \frac{1}{3} \lambda S^2 = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_S S^2 + \frac{8\pi G}{c^4} \rho_M S^2$$

$$\Rightarrow \dot{S}^2 + V(S) = -k$$

$$V(S) = -\frac{K_S}{S^2} - \frac{K_M}{S} - \frac{1}{3} \lambda S^2$$

Mit $K_S = 0$

kann die Friedmanngleichung auf die Form

$$\frac{M}{2} \dot{S}^2 - \frac{GM^2}{S} = \text{const.}$$

gebracht werden, also:

$$\dot{S}^2 + V(S) = -k$$

$$\Rightarrow \dot{S}^2 = -k - V(S) \geq 0$$

$$\Rightarrow -k \geq V(S)$$

Man spricht hier auch von einem "effektiven Potenzial". Dieses Effektive Potenzial genügt der Gleichung

$$V(S) = -\frac{K_S}{S^2} - \frac{K_M}{S} - \frac{1}{3} \lambda S^2$$

Mit $R := S$

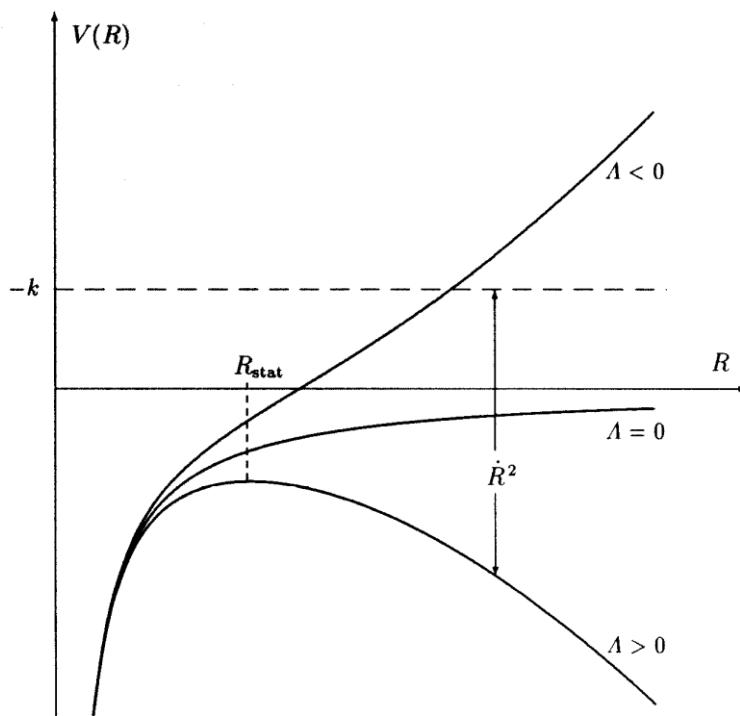


Abbildung 52.1 Das effektive Potential $V(R)$ für die kosmologische Bewegungsgleichung $\dot{R}^2 + V(R) = -k$. Der Abstand zwischen der Horizontalen bei $-k$ (in der Abbildung wurde $k < 0$ angenommen) und $V(R)$ ergibt \dot{R}^2 . Die möglichen Bewegungsformen hängen vom Vorzeichen der kosmologischen Konstanten Λ ab. Für $\Lambda > 0$ ist eine statische (aber instabile) Lösung $R(t) = R_{\text{stat}}$ am Maximum des Potentials möglich.

Die Gleichung

$$\dot{S}^2 + k - \frac{1}{3} \lambda S^2 = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_S S^2 + \frac{8\pi G}{c^4} \rho_M S^2$$

$$\Rightarrow \dot{S}^2 + V(S) = -k$$

$$V(S) = -\frac{K_S}{S^2} - \frac{K_M}{S} - \frac{1}{3} \lambda S^2$$

$$K_M = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_M S^3 = \text{const.}$$

$$K_S = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_M S^4 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \dot{S}^2 - \frac{K_S}{S^2} - \frac{K_M}{S} - \frac{1}{3} \lambda S^2 = -k$$

Also die Gleichung

$$\dot{S}^2 - \frac{K_S}{S^2} - \frac{K_M}{S} - \frac{1}{3} \lambda S^2 = -k$$

ist die Friedmann-Gleichung!

Sie kann gelöst werden und liefert folgende Weltmodelle. Bei allen gezeigten Lösungen wurde

$K_S = 0$ gesetzt. Jedoch sind die Verläufe für endliche Strahlungsdichten qualitativ identisch. Zumal die Strahlungsdichte nur in der Frühphase der Kosmen eine Rolle spielt, die in den Graphen gar nicht gezeigt wird (bzw. in der Skalierung untergeht):

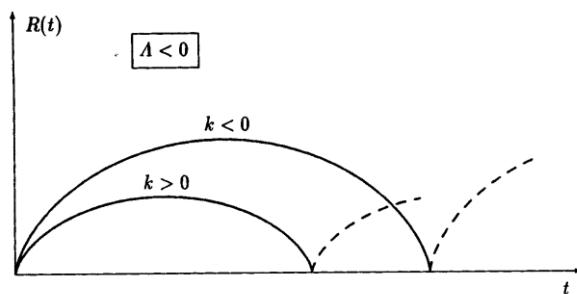


Abbildung 52.2 Qualitativer Verlauf der Lösung $R(t)$ für $\Lambda < 0$. Eine Expansion geht schließlich immer in eine Kontraktion über.

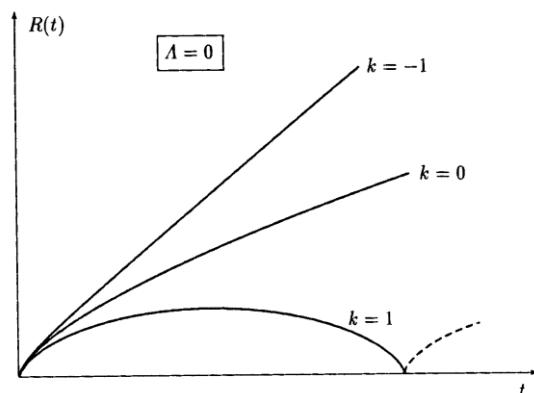


Abbildung 52.3 Zeitabhängigkeit der Lösungen $R(t)$ für $\Lambda = 0$. Die Fälle $k = 1$, $k = 0$ und $k = -1$ entsprechen im analogen Zweikörperproblem der Ellipsen-, der Parabel- und der Hyperbelbahn. Das Weltmodell für $\Lambda = 0$ und $k = 0$ heißt Einstein-de Sitter-Universum.

Der Graph für $k=0$ und $\Lambda = 0$ heisst Einstein- de- Sitter Universum.
Dabei geht die Expansionsgeschwindigkeit asymptotisch gegen Null.

Einstein selbst hatte $\Lambda = \Lambda_{krit} > 0$ eingeführt, um eine Lösung zu erhalten, die statisch ist und $k=1$ trägt .
Dies muss las " negative Vakuumenergiedichte " gedeutet werden, die gegen die Gravitation den Kosmos stabilisiert. Allerdings kann man zeigen, dass der so konstruierte Einstekosmos instabil gegen kleinste Störungen ist !

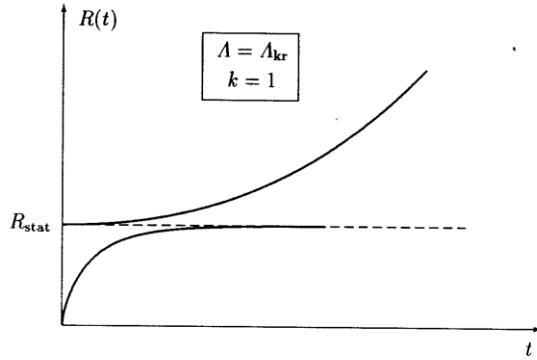


Abbildung 52.4 Verlauf der Lösungen $R(t)$ für $\Lambda = \Lambda_{kr}$ und $k = 1$. Das statische Einstein-Universum (gestrichelte Linie) ist instabil, kleine Auslenkungen leiten eine Expansion oder Kontraktion ein. Die ungebundene Bewegung verläuft schließlich exponentiell, $R \propto \exp((3\Lambda)^{1/2}t)$; dies gilt generell für $\Lambda > 0$.

Weitere Fälle:

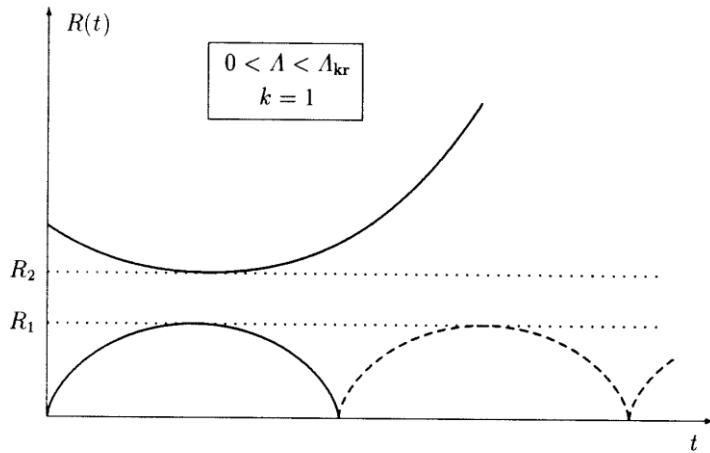


Abbildung 52.5 Qualitativer Verlauf der Lösungen $R(t)$ für $0 < \Lambda < \Lambda_{kr}$ und $k = 1$. Für diesen Λ -Wert schneidet die Horizontale bei -1 die Kurve $V(R)$ in Abbildung 52.1 zweimal.

und schließlich (zu interpretieren als negative Vakuumdichte, die sogar gegen die Gravitation siegt):

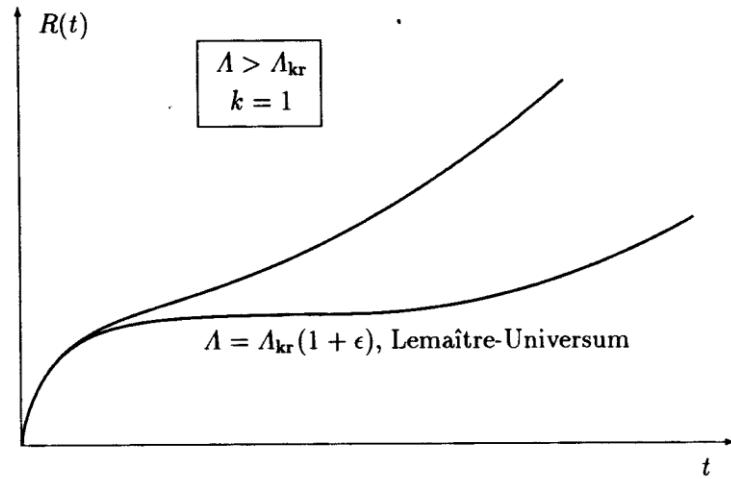


Abbildung 52.6 Qualitativer Verlauf der Lösungen $R(t)$ für $\Lambda > \Lambda_{\text{kr}}$ und $k = 1$. Falls Λ sehr nahe bei Λ_{kr} liegt, gibt es eine länger dauernde, annähernd stationäre Phase (Lemaître-Universum). Die obere Kurve gibt auch den qualitativen Verlauf für $\Lambda > 0$ und $k = 0, -1$ wieder.

Alle Möglichkeiten mit $\Lambda > 0$ und $k=0$ oder -1 sind diesem letzten Fall sehr ähnlich. Da der Kosmos jedoch für den flachen oder negativ gekrümmten Fall auch ohne kosmologische Konstante expandiert, ist hier die Abbremsung im Bereich des Maximums geringer !

Einstein selbst glaubte nicht an die Hubbleflucht. Er wollte einen statischen Kosmos als Modell ! Auch fand er den sphärisch geschlossenen Kosmos besonders attraktiv !

Heute:

$$\lambda \approx 0$$

$$k \approx 1$$

aber: darüber muss man nochmal reden !

Eigenschaften des FRW- Modells und (scheinbare) Paradoxien !

Ausdehnung:

Die Fluchtgeschwindigkeit ist proportional zum Abstand
 → Bereiche entfernen sich von uns mit Überlichtgeschwindigkeit !

Setze:

$$r = \begin{cases} \sin \chi & k = 1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh \chi & k = -1 \end{cases}$$

$$ds^2 := c^2 dt^2 - S^2(t) \left[d\chi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2 \chi \end{pmatrix} d\Omega^2 \right]$$

Bei lichtartigen Abständen:

$$ds^2 = 0$$

$$c^2 dt^2 = S^2(t) \left[d\chi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2 \chi \end{pmatrix} d\Omega^2 \right]$$

bei rein radialer Ausbreitung:

$$\begin{pmatrix} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2 \chi \end{pmatrix} d\Omega^2 = 0$$

Also:

$$ds^2 = 0$$

$$\Rightarrow c^2 dt^2 = S^2(t) d\chi^2$$

und damit:

$$\int d\chi(t) = \chi(t) = r(t) = \int_t^{t_0} \frac{c}{S(t')} dt'$$

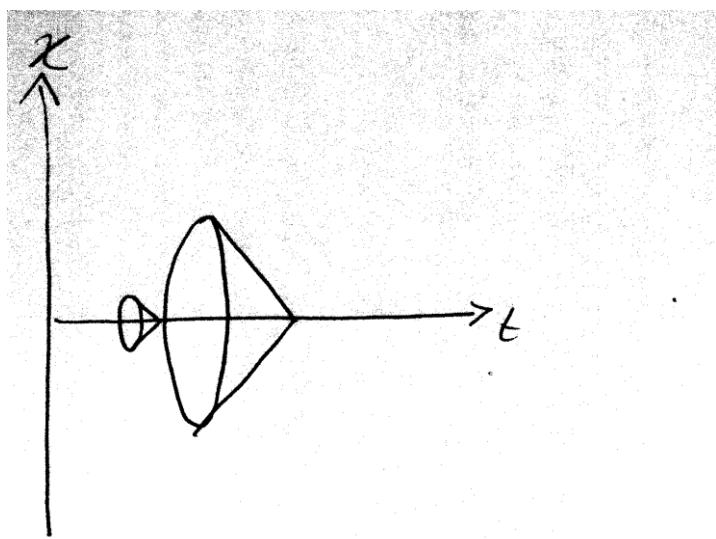
Dabei ist es möglich, dass ein "Ereignishorizont" entsteht! -> Vergangenheitsereignishorizont!

Der **Ereignishorizont** der kausal möglichen Einflüsse der Vergangenheit auf unseren Punkt der Raumzeit: existiert genau dann, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int d\chi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t_0} \frac{c}{S(t')} dt' < \infty$$

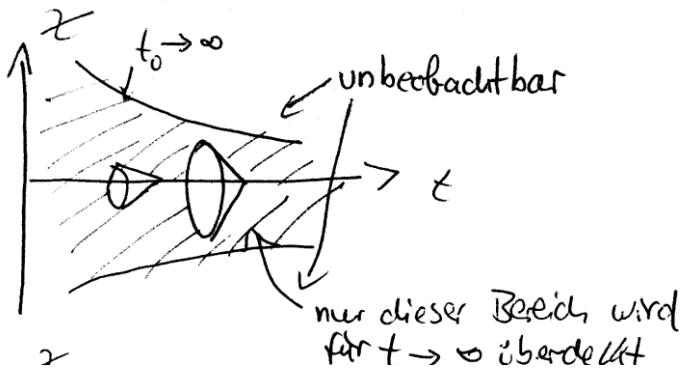
Also: Wenn das Abstands- Integral konvergiert!

In der SRT überdeckt der Vergangenheitslichtkegel für $t \rightarrow \infty$ die gesamte Raumzeit:



In der ART dagegen schrumpft die beeinflussbare Raumzeit durch die Ausdehnung:

Das Gesichtsfeld ist hier beschränkt auf den schraffierten Bereich innerhalb der Hyperbeln:



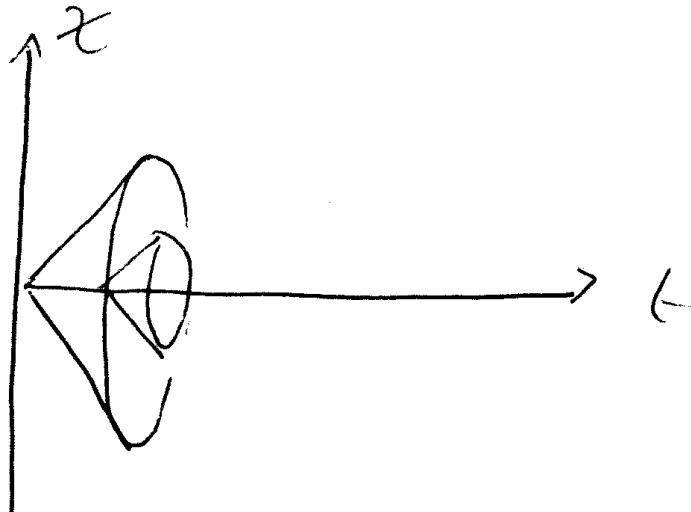
Partikelhorizont !

er existiert, wenn eine Singularität bei $t=0$ existiert, derart, dass gleichzeitig

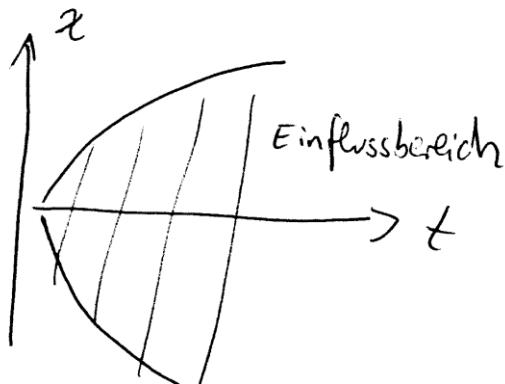
$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \int d\chi(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \chi(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \int_t^{t_0} \frac{c}{S(t')} dt' < \infty$$

Wenn also das Integral konvergiert !

Der Zukunftslichtkegel der SRT überdeckt wieder die gesamte Raumzeit:



In der ART dagegen:



Der Bereich, der hier schraffierten Bereich und unbeeinflussbaren Bereich trennt ist der sogenannte Partikelhorizont !

Es handelt sich außerhalb der Schraffur wieder um das Gebiet der unbeeinflussbaren raumzeitpunkte !

Problem angesichts der Horizonte:

Homogenität ist nur durch Inflation zu retten !

Kosmologische Lösungen

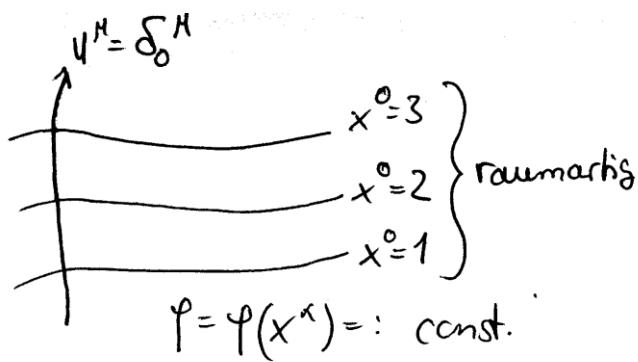
Materie- Ansatz für die Metrik- Wiederholung

6) Kontinuumsmodell:

(ideales gas oder ideale Flüssigkeit):

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P$$

2) es existiert ein durch $x^0 = \text{const.}$ gekennzeichnetes momentanes Ruhesystem der Materie (mitbewegtes Bezugssystem !)



$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \delta_0^\mu$$

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} c dt$$

$$cdt = dx^0$$

Die Zeit sei global konstant:

$$u_\mu = g_{\mu\alpha} h^\alpha = g_{\mu 0}$$

Der G

Geschwindigkeitsvektor soll weiter immer senkrecht auf die Raumzeitschnitte stehen:

$$u_\mu \perp (x^0 = \text{const.})$$

$$n_\mu := \delta_\mu^0$$

Setze:

$$u_\mu = \lambda n_\mu := \lambda \delta_\mu^0$$

$$g_{0\mu} = \lambda \delta_\mu^0$$

$$\Rightarrow g_{0i} = 0$$

Dies vereinfacht den metrischen Ansatz stark !

Also:

Wesentliche Annahme: es existiert ein durch $x^0 = \text{const.}$ gekennzeichnetes momentanes Ruhesystem der Materie (mitbewegtes Bezugssystem !) $\Rightarrow g_{0i} = 0$

Ansatz:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}(x^0, x^i) c^2 dt^2 + g_{0i} \dots + g_{ik} dx^i dx^k \\ &= g_{00}(x^0, x^i) c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k \end{aligned}$$

3. Voraussetzung:

Weltlinien der Materie sind zeitartige geodätische ! (selbstverständlich für Monopole !)

$$\Rightarrow g_{00,i} = 0$$

Also:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (\text{Geodätengleichung !})$$

$$ds^2 = g_{00}(x^0) c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k$$

Dabei ist der Anteil

$g_{ik} dx^i dx^k$ die Metrik der dreidimensionalen Raumschnitte ! Dabei wird vorausgesetzt, dass die Feldbewegung der Teilchen nicht von Inhomogenitäten im Feld abhängt ! -> Keine WW der Teilchen ist sowieso Voraussetzung !

Trafo:

$$\bar{x}^0 \rightarrow \bar{x}^0(x^0)$$

$$\Rightarrow \bar{g}_{00}(\bar{x}^0) = 1$$

→ eine Trafo, die $\bar{g}_{00}(\bar{x}^0) = 1$ macht !

Also: Das Feld wird hier nur durch die GLOBALE STRUKTUR beeinflusst ! Außer Acht gelassen ist die Clusterung und Wechselwirkungen !

Zu Annahme 3: Geodätische Bewegung der Materie:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0$$

$$du^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\beta} dx^\beta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} u^\alpha \right) \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

$$\Rightarrow u^\mu_{;\beta} u^\beta = 0 \Big| \cdot g_{\alpha\mu} \Rightarrow u_{\alpha;\beta} u^\beta = 0$$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \delta_0^\mu = u^\mu$$

$$c := 1$$

$$u^\alpha u_\alpha = 1$$

$$\Rightarrow u_\alpha = \sqrt{g_{00}} \delta_\alpha^0$$

Also ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} u^\alpha \right) \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

$$\Rightarrow u_{\alpha;\beta} u^\beta$$

$$\Rightarrow (\sqrt{g_{00}} \delta_\alpha^0)_{;\beta} u^\beta = 0 = \sqrt{g_{00}} \delta_\alpha^0 u^\beta + \sqrt{g_{00}} (\delta_\alpha^0)_{;\beta} u^\beta$$

$$\Rightarrow \sqrt{g_{00}} (\delta_\alpha^0)_{,\beta} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} \delta_\rho^0 = -\Gamma^0{}_{\alpha 0} = 0$$

$$\Gamma^0{}_{\alpha 0} = \frac{1}{2} g^{0\rho} (g_{\rho\alpha,0} + g_{0\rho,\alpha} - g_{\alpha 0,\rho}) = 0$$

Bereits wegen der Forderung 2! : Es existiert ein momentanes Ruhesystem mit konstanter Zeitkoordinate: bereits deshalb gilt:

$$g^{0i} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma^0{}_{\alpha 0} = \frac{1}{2} g^{00} (g_{0\alpha,0} - g_{\alpha 0,0} + g_{00,\alpha}) = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow g_{00,\alpha} = 0$$

Insgesamt gewinnen wir so einen Satz Gleichungen mit verschiedenen Termen, auch der Form

$$g_{0i} :$$

$$\frac{d^2 x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^1}{d\tau^2} + \dots g_{0i} = 0$$

Dies liefert uns Bedingungsgleichungen mit

$$g_{00}, g_{0i}$$

Diese Bedingungsgleichungen können zu Ableitungen verwendet werden. Man gewinnt:

$$g_{0i} = 0$$

$$u = \delta$$

$$\Rightarrow g_{00,i} = 0$$

Für unser kosmologisches Modell ist also g_{00} prinzipiell von x^i unabhängig !

$$x^i = x^i(t)$$

zeitartige Geodäten -> geradlinige Bewegungsbahnen der Planeten !
Bewegung auf Geodäten ist für Punktteilchen selbstverständlich !

Also: $\int T^{\alpha\beta} d^3x$ charakterisiert die Teilchen vollständig !

Falls:

$$\int x^\mu T^{\alpha\beta} d^3x \neq 0$$

$$\int x^\mu x^\nu T^{\alpha\beta} d^3x \neq 0$$

- Teilcheneigenschaften wie Bahndrehimpuls / Spin stecken mit drin ! -> Ganz andere Bewegungsbahnen !
Geodäten sind nur selbstverständlich für Punktteilchen, die die Inhomogenitäten des Gravitationsfeldes nicht spüren !
- Und (als Punktteilchen selbstverständlich) keine innere Struktur aufweisen ! (wobei letzteres vom Äquivalenzprinzip geplättet wird, wenn lediglich die fehlende Inhomogenität des äußeren Feldes gewahrt bleibt !)

Voraussetzungen 1-3:

Linienelement ist von der Form:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}(x^0, x^i) c^2 dt^2 + 2g_{0i}(x^\lambda) c dt dx^i + g_{ik}(x^\lambda) dx^i dx^k \\ &= g_{00}(x^0, x^i) c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k \end{aligned}$$

Für das Ziel

$$ds^2 = g_{00}(x^0, x^i) c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k$$

waren nun 4 Bedingungen nötig !

Beispiel:

$$g_{00}=1$$

$$g_{0i}=0$$

→ sogenannte synchronisierte Koordinaten !

4. Voraussetzung: Der Hubble- Fluss ist homogen und isotrop !

Das heißt: Das Verhältnis der Raumschnitte $x^0 = \text{const.}$ zu verschiedenen Zeiten ! x^0 und $x^0 + dx^0$ ist lediglich eine Funktion der Zeit, also von x^0 !

Das heißt: Der Hubble- Fluss ändert sich nur zeitlich !

$$\frac{ds^2}{ds^2} \Big|_{x^0}^{x^0+dx^0} = 1 + h(x^0) dx^0 + O((dx^0)^2)$$

Somit sollte die Metrik separierbar sein:

$$g_{ik}(x^0, x^j) = S^2(x^0) \gamma_{ik}(x^j)$$

Dabei ist

$S^2(x^0)$ ein Skalar der zeit und $\gamma_{ik}(x^j)$ der zweistufiger Tensor der Ortskoordinaten ! (die Flächen hängen über den Zeitskalar von der zeit und über die Verteilung der Ortskoordinaten im Raumtensor auch vom Raumpunkt ab !)

Also:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + S^2(x^0) \gamma_{ik}(x^j) dx^i dx^k$$

5) Homogenität der Raumschnitte ($x^0 = \text{const.}$)

→ dreidimensionale Raumschnitte sind Räume konstanter Krümmung !

Also:

$\gamma_{ik}(x^j)dx^i dx^k$ sollte einen Raum konstanter Krümmung beschreiben !

Lösung:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + S^2(x^0) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{k}{4}(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2}$$

Linienelement der Friedmann- Robertson- Walker- Metrik

Ansatz für die Materie !

Jede Lösung, die aus diesem Ansatz gewonnen werden kann ist ein Weltmodell !

In sphärischen Koordinaten:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + S^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

Ergebnis:

Friedmann - Robertson- Walker- Metrik nach Auswertung der KOORDINATENBEDINGUNGEN !

Einsteinsche Gleichungen:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Weiteres Gebastel an der Metrik:

Fock- Bedingung:

$$\#_g x^\rho = 0$$

- wurde nicht akzeptiert ! Das hat ihm keiner geglaubt !
- sogenannte " harmonische Koordinaten "

Besser: Hilbert De- Donder:

$$\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

Wesentlicher Schritt: Mit Koordinatentrafos, die die Kovarianz ersetzen, bleibt die Kovarianz trotzdem irgendwie erhalten !

1913: Entwurf- Arbeit von Einstein / Großmann

- zahlreiche Versuche Einsteins hatten zu viel festgelegt ! Durch Divergenzfreiheit etc... kamen oft neue Gleichungen dazu, die dann " zu viel festlegen ". So beispielsweise ging die freie Koordinatenwahl verloren

Fazit: Einstein kämpfte damals selbst mit ähnlichen Problemen wie man sie heute hat beim versuch, die ART zu quantisieren ! -> Auch bei der Quantisierung geht die Eichfreiheit verloren !

Die Quantisierung war gemacht ! Der Kommutator aufgestellt !
So weit war alles angedacht, doch gab es noch etwas das fehlt:

Freiheit ! Eich- Fra-ha-ha-heit war das Einzige das Fehlt !

Als Hauptbedingung, die sich zwangsläufig ergab:

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

Physikalische Motivation Einsteins: Machsches Prinzip !

Annahme einer Vakuum- Blase in einem Gebiet:

Im Inneren der Blase gilt:

$$T_{\mu\nu} = 0$$

$$G_{\mu\nu} = 0$$

Im Außenraum dagegen:

$$T_{\mu\nu} \neq 0$$

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Vakuumblase: Gebiet I

Außenraum: Gebiet II

Vakuumblase: Koordinaten: x^μ :

$$T_{\mu\nu} = 0$$

$$G_{\mu\nu} = 0$$

$$g_{\alpha\beta}^I = g_{\alpha\beta}^I(x^\mu)$$

Außenraum:

$$T_{\mu\nu} \neq 0$$

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

$$g_{\alpha\beta}^I = g_{\alpha\beta}^I(x^\mu)$$

→ natürlich eine andere Koordinatenfunktion als $g_{\alpha\beta}^I$!

Durchführen einer Transformation in Gebiet I:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$$

$$T_{\mu\nu} = 0$$

$$g_{\alpha\beta}^I = g_{\alpha\beta}^I(x^{\mu'})$$

Damit:

Alte Lösung

$$g_{\alpha\beta}^I = g_{\alpha\beta}^I(x^\mu)$$

$$g_{\alpha\beta}^I = g_{\alpha\beta}^I(x^{\mu'})$$

geht formal in eine neue Lösung über:

$$g_{\alpha\beta}^I(x^{\mu'})$$

$$g_{\alpha\beta}^I(x^\mu)$$

Dies ist also formal eine andere Lösung !

Das Machsche Prinzip ging jedoch davon aus, dass die Materieverteilung alleine die Raumzeit EINDEUTIG bestimmt !

Hier in der ART: 4 Funktionen der Metrik blieben NICHT eindeutig bestimmt -> Freiheit
Mit dem Kovarianzprinzip ist derart die ART nicht dem Machschen Prinzip gerecht !

→ Einstein und Großmann wollten das MP erfüllen !

Aus

$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ ergaben sich nun 4 neue Gleichungen, 4 zusätzliche Bedingungen, die nicht ad hoc wie Focks harmonische Koordinaten vom Himmel fielen sondern sich physikalisch ergaben !

→ mit der Divergenzfreiheit (Eulergleichung, Energieerhaltung etc... siehe oben)

Später

Wurde das Machsche Prinzip dann vollständig zu Gunsten des Kovarianzprinzips aufgegeben !

Schließlich zeigte sich: Machsches Prinzip und Kovarianzprinzip sind unvereinbar !

Beispiel: Für einen konstanten Raumzeitschnitt gilt:

$$R = R(\rho)$$

→ hier ist R eindeutig durch die Materieverteilung bestimmt !

Einstiens vergnügen: Die geometrische Größe R ist alleine durch die Materieverteilung bestimmt ! -> Das wollte er auch so !

Weyl: In der ART gibt es im Allgemeinen eine Übermacht des Gravitationsäthers !

Aber: (sehr schade): $R = R(\rho)$ gilt nur im statischen Kosmos ! und der existiert ja gerade nicht !

Letztendlich wurde das Machsche Prinzip vollständig aufgegeben !

Letzte Zusammenstellung: Übersicht über die Grundlagen: (Standard-Modell)

- a) Metagalaxis
- b) Ansatz: $S(t), \rho(t), P(t)$

Mit $P=0$ (Staub) und $P(t) = \frac{\rho c^2}{3}$ (Strahlung)

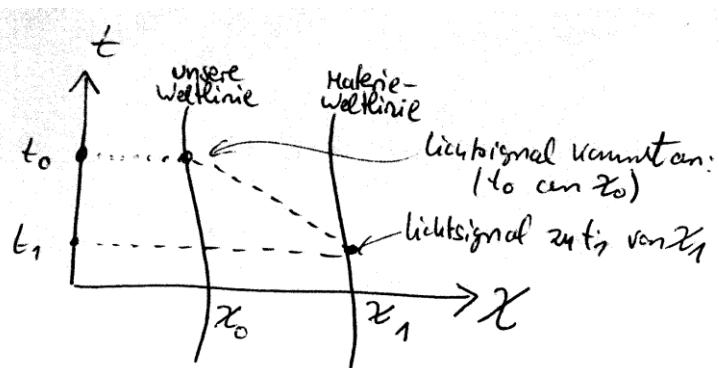
- c) Weltmodelle: 2 Gleichungen: $P = P(\rho)$
- d) Eigenschaften des FRW-Modells und scheinbare Paradoxien !
- e) Weltmodelle und Erfahrungen !

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) \left[d\chi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2 \chi \end{pmatrix} d\Omega^2 \right]$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Eigenschaften des FRW-Modells

- Horizonte (siehe oben)
- Kosmologische Rotverschiebung



In

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) \left[d\chi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2 \chi \end{pmatrix} d\Omega^2 \right]$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

bezeichnet

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) d\chi^2$$

radiale, raumzeitliche Abstände. Dabei ist χ der Koordinatenabstand.

Bestimmung des Abstands aus der Laufzeit des Lichtsignals:

von t_1 / χ_1 nach t_0 / χ_0

Der Lichtabstand ist:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) d\chi^2 = 0$$

$$\Rightarrow c^2 dt^2 = S^2(t) d\chi^2$$

$$\Rightarrow d\chi = \frac{cdt}{S(t)}$$

Dies ist der Abstand nicht in der dreidimensionalen Hyperfläche sondern im vierdimensionalen Raum !

→ Bestimmung des Abstandes, der von der Laufzeit des Lichtsignals abhängt !

$$d\chi = \frac{cdt}{S(t)}$$

$$\Rightarrow \chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{S(t)}$$

ein mittels Licht bestimmbarer Abstand !

Annahme: während der Lichtsignallaufzeit ändert sich $S(t)$ kaum:

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{S(t)} \approx \frac{1}{S(t_0)} \int_{t_1}^{t_0} cdt$$

→ Lösungsmöglichkeit für nahegelegene Sender / Empfänger !

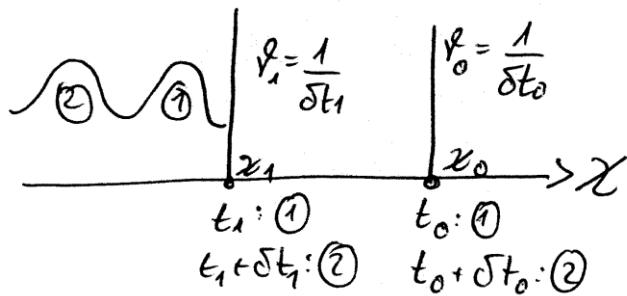
Physikalischer Abstand

$$D := S(t) \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt'}{S(t')} = D(t)$$

betrachte:

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{S(t)}$$

für den Durchlauf zweier Lichtwellen durch einen Raumzeitpunkt gilt:



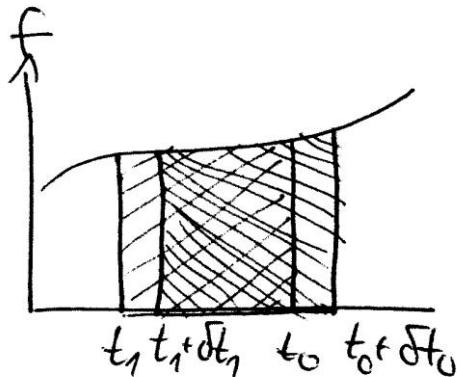
Also:

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{S(t)} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{S(t)}$$

Also:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{S(t)} - \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{S(t)} = 0$$

Betrachte:



→ Die Differenz der großen Flächen ist gleich der Differenz der Pfostenstücke !

Also:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{S(t)} - \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{S(t)} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{cdt}{S(t)} - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{S(t)} = 0$$

Nun kann innerhalb der Laufzeit zweier Wellenberge (1/f!) die Metrik näherungsweise konstant gesehen werden:

$$\Rightarrow \frac{1}{(S(t_1))} \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} cdt - \frac{1}{(S(t_0))} \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} cdt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c \delta t_1}{(S(t_1))} = \frac{c \delta t_0}{(S(t_0))}$$

Weiter: Nach δt_1 kommt der "zweite Berg"

Somit:

$$v_1 = \frac{1}{\delta t_1}$$

$$v_0 = \frac{1}{\delta t_0}$$

Also:

$$\frac{c\delta t_1}{(S(t_1))} = \frac{c\delta t_0}{(S(t_0))} \Rightarrow S(t_1)v_1 = S(t_0)v_0$$

$$S(t)v(t) = \text{const.}$$

mit

$$S(t_0) > S(t_1)$$

$$\Rightarrow v_1(t) > v_0(t)$$

Man kann den Rotverschiebungsparameter einführen:

$$z = \frac{v_{\text{Quelle}} - v_{\text{Empfänger}}}{v_{\text{Empfänger}}}$$

Kosmologische Rotverschiebung:

$$z_{KRV} = \frac{v_1}{v_0} - 1 = \frac{S(t_0)}{S(t_1)} - 1$$

Gravitative Rotverschiebung:

$$z_{GRV} = \frac{\sqrt{g_{00}(\bar{x}_0)}}{\sqrt{g_{00}(\bar{x}_1)}} - 1 = \frac{v_1}{v_0} - 1$$

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$$

$$v = \frac{1}{\delta\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}} dt}$$

kommt immer dann zu Stande, wenn lokale Gravitationsfelder Galaxie <-> Erde unterschiedlich !

Doppler- Effekt

$$z_{Doppler} = \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} - 1$$

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$$

Wir sehen nur gravitationsrotverschobenes Licht, weil wir so leicht sind ! \rightarrow es existiert nur Gravitationsrotverschiebung !

Scheinbare Paradoxien der ART:

$$\frac{d(S\chi)}{dt} = \frac{dS}{dt} \chi$$

$$\frac{dS}{dt} = \text{const.} = H_0$$

Somit existiert ein Abstand χ , in dem

$\frac{d(S\chi)}{dt}$ die Lichtgeschwindigkeit überschreitet !

→ kein Widerspruch zu SRT: " Was sich gegen den Hintergrund bewegt kann die Lichtgeschwindigkeit nicht überschreiten !)

ART: Es gibt keinen Hintergrund -> Relativbewegungen unendlich weit entfernter Sterne kann beliebig schnell sein ! -> kein Widerspruch zur SRT !

→ Überlichtgeschwindigkeiten möglich !

Nur:

Falls der Kosmos ein **globales** Inertialsystem ist, so gibt es einen Widerspruch !

→ Wir finden kein solches globales Inertialsystem, ansonsten gäbe es keinen Horizont !

→ das Horizontproblem hat mit der SRT nichts zu tun !

Es werden hier die Prinzipien verschiedener Theorien gemischt !

Weltalter:

15 Mrd. Jahre - unklar ist: bezüglich welchen Ursprung ? In welchem Koordinatensystem ?

→ die Hubblekonstante löst dieses Problem !!

→ Weltalter : scheint paradox - ist es aber nicht !!

→ Nur: Die Paradoxien der Singularität bleiben !

Paradoxa der Newtonschen Theorie, welche durch die ART aufgelöst werden

Newton'sches Paradoxon: (es gelte das kosmologische Prinzip):

Kraft, welche die unendlich ausgedehnte und homogen verteilte Materie auf ein Objekt der Masse m ausübt:

$$\begin{aligned}\bar{K} &= -m \cdot \text{grad} \varphi(\bar{x}) = -m \cdot \text{grad} \left(G \int \frac{\rho(x)}{|\bar{x} - \bar{x}|} d^3x \right) \\ &= -m \cdot \text{grad} \left(G \int \frac{\rho(r)}{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \right)\end{aligned}$$

mit

$$d^3x = \sqrt{g^3} dr d\theta d\varphi$$

$$\sqrt{g^3} = r^2 \sin \theta$$

Also:

$$\varphi(\bar{x}) = 4\pi G \rho \int_0^r r dr$$

somit:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(\bar{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi G \rho \int_0^r r dr \rightarrow \infty$$

Das Potenzial ist also unendlich groß an jedem Raumpunkt !

Eine inselartige Verteilung dagegen müsste kollabieren !

Die ART dagegen kennt dieses Problem nicht und ist verträglich mit dem kosmologischen Prinzip !

Das Olberssche Paradoxon

Betrachte man einen Stern mit Radius R_O so gilt:

$$F_O = \pi R_O^2 \text{ für seine Fläche !}$$

mit Fläche der Himmelskugel, die einen solchen Stern im Abstand r beherbergt:

$$F_K = 4\pi r^2$$

Weiter gilt für die Zahl der Sterne:

$$N(r) \sim r^2$$

Somit:

$$\frac{F_{ges}}{F_K} = c \frac{\pi R_O^2}{4\pi} = const$$

Dabei ist n die Sternendichte auf der Kugel

ein Stern bedeckt somit:

$$\frac{F_O}{F_K} = \frac{R_O^2}{4r^2}$$

für eine Schale ergibt sich der bedeckte Teil durch Integration:

$$\int n \frac{R_O^2}{4r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Dies Gesamtüberdeckung folgt dann als:

$$L = \int n \frac{R_O^2}{4r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

als Ende vom Lied dann:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L = \lim_{r \rightarrow \infty} \int n \frac{R_O^2}{4r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \infty$$

der Nachthimmel wäre also unendlich hell !

Dabei ist es nicht die Krümmung, die uns hilft

→ Licht läuft auch hier immer im Kreis !! -> nicht endlich oder so, sondern... unendlich heiss !

Vermeidung des Paradoxons

geschieht durch die ART - durch Rotverschiebung und Horizonte !

es existiert ein Horizont von Licht, das uns erreichen kann

- das Licht ist zudem rotverschoben !

Kosmologisches Standardmodell

Weltzustand

Taylorentwicklung -> nicht sehr sinnvoll für echt große Entfernungen !

Taylorentwicklung des Skalenparameters:

$$S(t) = S(t_0) \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right]$$

mit der Hubble- Konstanten:

$$H_0 := \frac{c \dot{S}(t_0)}{S(t_0)}$$

und dem Beschleunigungsparameter

$$q_0 := \frac{\ddot{S}(t_0)S(t_0)}{\dot{S}^2(t_0)}$$

$$\cdot = \frac{d}{d(ct)}$$

Also:

$$S(t) = S(t_0) \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right]$$

Weiter:

$$z_{KRV} = \frac{v_1}{v_0} - 1 = \frac{S(t_0)}{S(t_1)} - 1 = H_0(t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t_1)^2 + \dots$$

$$z_{KRV} := \frac{H_0}{c} D + \frac{(1+q_0)H_0^2}{2c^2} D^2 + \dots$$

$$D := S(t_0) \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt'}{S(t')}$$

man sieht: diese Entwicklung ist so lange sinnvoll, wie

$$\frac{H_0}{c} D \ll 1$$

$$\Rightarrow D \ll 6 \text{ Gpc}$$

Helligkeitsabstand D_L mit:

$$D_L := \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}$$

mit der scheinbaren Helligkeit l (empfangene Energiestromdichte)
und der absoluten Helligkeit L: ausgesandte Leistung !

Bestimmung von H_0, q_0 ! Wichtige Annahme: es existieren in der näheren Umgebung immer genügend Sterne derart, dass l und D_L unabhängig bestimmbar sind !

Beispiel: Triangulation:

$$L = L(l, D_L) \rightarrow \text{leicht zu bestimmen und sehr exakt für nahe Objekte !}$$

Für entfernte Sterne gleichen Typs kann man

$$D_L = D_L(l, L) \text{ bestimmen:}$$

$$D_L \approx D$$

bei bekanntem D ! wird dann z gemessen

→ H_0 und q_0 bestimmbar !

Nun:

$$H_0 = 50 - 100 \frac{\text{km}}{\text{Mpc}} \frac{s}{Mpc}$$

$$0 \leq q_0 \leq 1$$

Weltzustand

Friedmanngleichung mit $K_S = 0$:

$$\dot{S}^2 - \frac{K_M}{S} - \frac{1}{3} \lambda S^2 = -k$$

$$t \approx t_0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{3H_0^2}{2c^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_{kr.}} - 2q_0 \right)$$

mit

$$\rho_{kr.}(t = t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\frac{k}{S_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} \left(\frac{3}{2} \frac{\rho_0}{\rho_{kr.}(t_0)} - q_0 - 1 \right)$$

einfachste, plausibelste, mit den Beobachtungen verträgliche Wahl der Parameter:
 $\lambda = 0, k = 0$

$$\Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho_{kr.}(t_0)} = 1$$

$$q_0 = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{kr.}(t_0) = 10^{-30} \frac{g}{cm^3}$$

Einstein- De- Sitter- Kosmos:

$$\frac{S(t)}{S(t_0)} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Strahlungskosmos:

$$\frac{S(t)}{S(t_0)} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Hauptproblem: Wie sind die Expansionskurven richtig zu skalieren ??

→ schwierig !

→ gerade H_0 und q_0 erlauben derartige Aussagen eigentlich gar nicht !

Weltzustand

Weltalter

$$\frac{S(t)}{S(t_0)} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Somit Friedmann:

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} S(t_0) \\
 \Rightarrow \dot{S}(t) &= \frac{1}{c} \left(\frac{1}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}} S(t_0) \\
 \dot{S}(t_0) &= \frac{2}{3c} S(t_0) \frac{1}{t_0} \\
 \Rightarrow t_0 &= \frac{2}{3} \frac{S(t_0)}{c \dot{S}(t_0)} \\
 t_0 &= \frac{2}{3H_0} \approx 1,3 \cdot 10^{10} a
 \end{aligned}$$

Probleme

Erkenntnistheoretische Probleme und Entschlüsse (vergl. Kant):

- 1) Unklar: Ist die Materieverteilung, die wir in der Metagalaxis betrachten repräsentativ für den Kosmos ?

Licht:

- Ist auf einem riesigen Vergangenheitslichtkegel ! Wir beobachten: wenige tausend Jahre !

Also: wir haben vom Mantel des Vergangenheitslichtkegels (Mantel = wir beobachten nur Licht !!) wir haben von diesem Mantel gerade die letzte Spitze gesehen !
 ➔ nur die kleine Spitze am Ende unseres Vergangenheitslichtkegels

Bewegungsgesetz des Kosmos ist dasselbe wie das seiner Untersysteme ! (Einsteinsche Gleichungen)

Kosmos ist Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen !

Gesetz:

Vergleich verschiedener Systeme -> das Gemeinsame wird als Gesetz aufgeschrieben !
 ➔ nötig: Ensemble -> beim Kosmos unmöglich !
 ➔ willkürliche Annahme: Gesamtsystem unterliegt den gleichen Gesetzen wie die Teilsysteme !

Wesentlich: Die kosmologische Lösung ist durch das kosmologische Prinzip bestimmt !

Annahmen bei der Modellierung:
 kosmisches Substrat = ideales Gas !
 kosmisches Substrat bildet laminare Strömung !
 kosmisches Substrat rotiert nicht

Positive Resultate

- 1) Erklärung des Hubble- Flusses
- 2) Erklärung der 3K- Strahlung (entstand , als die Strahlung vom Rest der Materie abkoppelte und kühlte dann ab):

$$T \sim \frac{1}{S}$$
- 3) beseitigt zahlreiche Paradoxa
- 4) Verteilung leichter Elemente

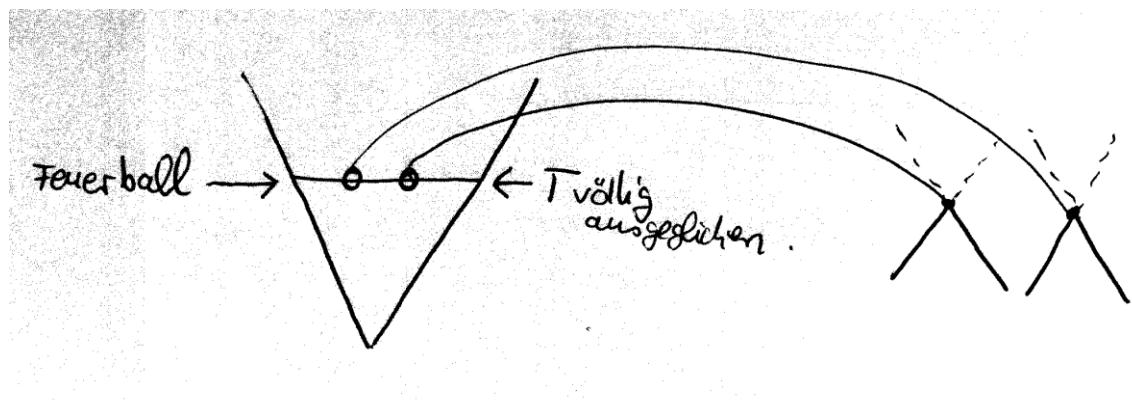
offene Probleme

- Modell macht keine quantitativen Aussagen

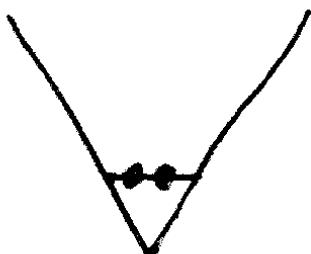
- Singularitätsproblem
- Horizontproblem
- Flachheitsproblem
- Inhomogenitätsproblem (Problem der Galaxienentstehung!)

Problem: Inflationsphase: Denn: zum Zeitpunkt der Entkopplung von Strahlung und Materie muss die Temperatur vollständig ausgeglichen gewesen sein !

Zum Zeitpunkt der Entkopplung auf dem Feuerball sind die Ausgleichsprozesse nur dann möglich gewesen, wenn der Schnittpunkt der Vergangenheitslichtkegel verschiedener Punkte auf dem Feuerball ungleich Null ist ! Da die Temperatur völlig ausgeglichen war müsste also alle Vergangenheitslichtkegel endliche Schnittmengen haben. Zum Zeitpunkt der Entkopplung war dies jedoch nicht mehr möglich:



Lösung: Homogenität und Isotropie müssen früher / vorher erreicht worden sein :



In diesem Fall schneiden sich die Lichtkegel (In Wahrheit stammt diese Grafik aus der Mitgliederversammlung des KKK. gezeigt ist das invertierte Bild von Mitglied Udo S., der eine Sonnenbrille trägt, um nicht identifiziert zu werden !) (KKK - took my baby away !)

Aber: Die heutige Expansionsgeschwindigkeit (Friedmann- Lösung) zurückgerechnet erlaubt nicht, dass die Entkopplungsphase schon wesentlich früher erreicht wurde.. Der Ausgleich muss zu

10^{-35} Sekunden stattgefunden haben !

Damit das Universum dennoch so groß wurde, wie es ist, muss es dann eine inflationäre Phase gegeben haben !

Erklärung: Inflationsphase hat S auf unseren heutigen Wert gebracht !

Konkret- pamphlet:

Während der Epoche der GUT findet im Kosmos, etwa 10^{-36} Sekunden nach der Singularität ein Phasenübergang bei der Symmetriebrechung der fundamentalen Wechselwirkung statt. Hierbei muss das ursprünglich energiereiche Vakuum (Higgsfeld) in den heutigen (sehr energiearmen) Zustand übergegangen sein ! Dies könnte grundsätzlich die kinetische Energie geliefert haben für ein äußerst rasches, exponentiell verlaufendes "Aufblähen " des Kosmos, die Inflation !

Anschließend, bei etwa 10^{-33} Sekunden mündet dann die Inflation wieder in die Evolution nach dem Standardmodell ! Dabei überträgt dann das Higgsfeld seine Energie auf die Elementarteilchen des Kosmos (X- Bosonen, Quarks, Leptonen und Photonen !)

Genauere Berechnung der auftretenden Fluktuationen im Kosmos machen es unwahrscheinlich, dass das Higgsfeld selbst hinreichend stark an die Materie ankoppelt, um die Inflation zu bewirken ! Dies wird dann einem neuartigen, rein hypothetischen skalaren Feld zugeschrieben, dem Inflatonfeld !

Wir überzeugen uns, dass für eine als konstant angenommene Vakuum- Energiedichte $\rho_{Vac}c^2 \gg \rho c^2$ sowie $k=0$ die Friedmann- Lemaitre- Gleichung, also

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 = -k \frac{c^2}{S^2} + \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\lambda)$$

mit

$$\rho_\lambda = \rho_{Vac}$$

folgende Form erhält:

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{Vac} = const.$$

Dabei ist die Expansion exponenziell anwachsend, also:

$$S(t) = S_1 e^{Ht}$$

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{Vac}} = \sqrt{\frac{c^2 \Lambda}{3}}$$

als kurzzeitige Hubblekonstante !

mit

$$S_1 = S(t = 10^{-33} s)$$

Die kurzzeitige Hubblekonstante ist etwa vom Wert $H = 10^{35} s^{-1}$. Die Inflationsphase dauert nur $10^{-33} s$, dabei ändert der Kosmos jedoch seine Dimension um den Faktor $10^{30} - 10^{45}$!

Über $H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{Vac}} = \sqrt{\frac{c^2 \Lambda}{3}}$ wird die kosmologische Konstante also mit der Physik der fundamentalen Wechselwirkungen verknüpft. Dies leistet die inflationäre Theorie.

Anschaulich: Das Higgs- bzw. Inflatonfeld wirkt für kurze Zeit wie ein positives Λ !

Durch die Inflation wird prinzipiell die Isotropie der 3K Hintergrundstrahlung erklärt !. Die heute beobachtbare Welt nahm also vor der Inflation einen so kleinen Raum ein, dass alle Teile miteinander wechselwirken konnten ! Außerdem wird das Flachheitsproblem angeschnitten ! Jede ursprüngliche Krümmung / Abweichung vom euklidischen Fall wurde rasch eingebnet und es stellte sich

$$\Omega + \Omega_\Lambda = 1 \text{ ein !}$$

$$\Omega = \frac{\rho(t)}{\rho_C(t)}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda(t)}{\rho_C(t)} = \frac{c^2 \Lambda}{3H(t)^2}$$

sind beides Dichteparameter und zwar einmal für die Materie/ Strahlungsdichte und einmal für den Anteil der kosmologischen Konstante !

Dabei gilt für den Zusammenhang mit der Krümmung:

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = k \frac{c^2}{H^2 R^2}$$

Die Inflation macht besonders Probleme bei quantitativen Versuchen der Beschreibung und beim Übergang in das Standardmodell !

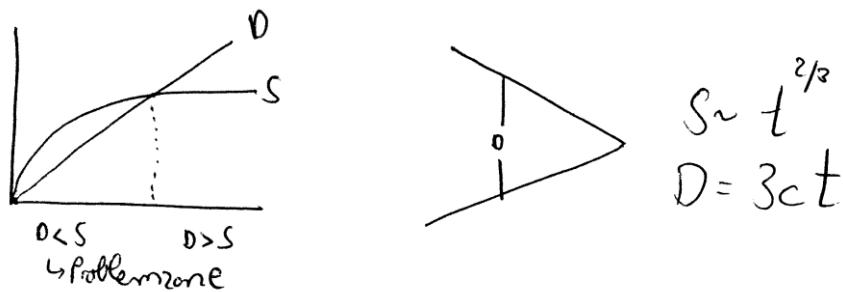
da während der Inflation anfangs sehr kleine Bereiche rasch riesige Dimensionen erreichen ! und dann nicht mehr miteinander wechselwirken können, wäre es im Rahmen der inflationären Hypothese durchaus möglich, dass das kosmologische Postulat nicht uneingeschränkt gilt und nur für einen Teilbereich des Kosmos erfüllt ist ! Unsere beobachtbare Welt würde dann lediglich eine "Blase" in einer größeren Mannigfaltigkeit, also ein Universum unter vielen Universen darstellen !

Die Inflation

Vakuumenergie entspricht negativem Druck (poincaré-Druck):

$p = -\rho c^2$ -> dieser negative Druck fördert die Expansion !

- exponenzielle "Explosion", die uns die heutigen Werte von S liefert !
- Horizontproblem gelöst !
- durch Einführen einer neuen "Phase"



rechts haben wir den Durchmesser des Universums ($S(t) \sim t^{2/3}$) skizziert ! D ist dagegen der Durchmesser des Lichtkegels !

Wesentlich: Im Bereich $D < S$ haben wir das Horizontproblem -> es existieren getrennte Bereiche INNERHALB des heutigen Radius S zur damaligen Zeit !

Für $D > S$ hat sich alles durch kausale Wechselwirkung homogenisieren können !

Phasen des Kosmos:

Standard-Modell des heißen Universums

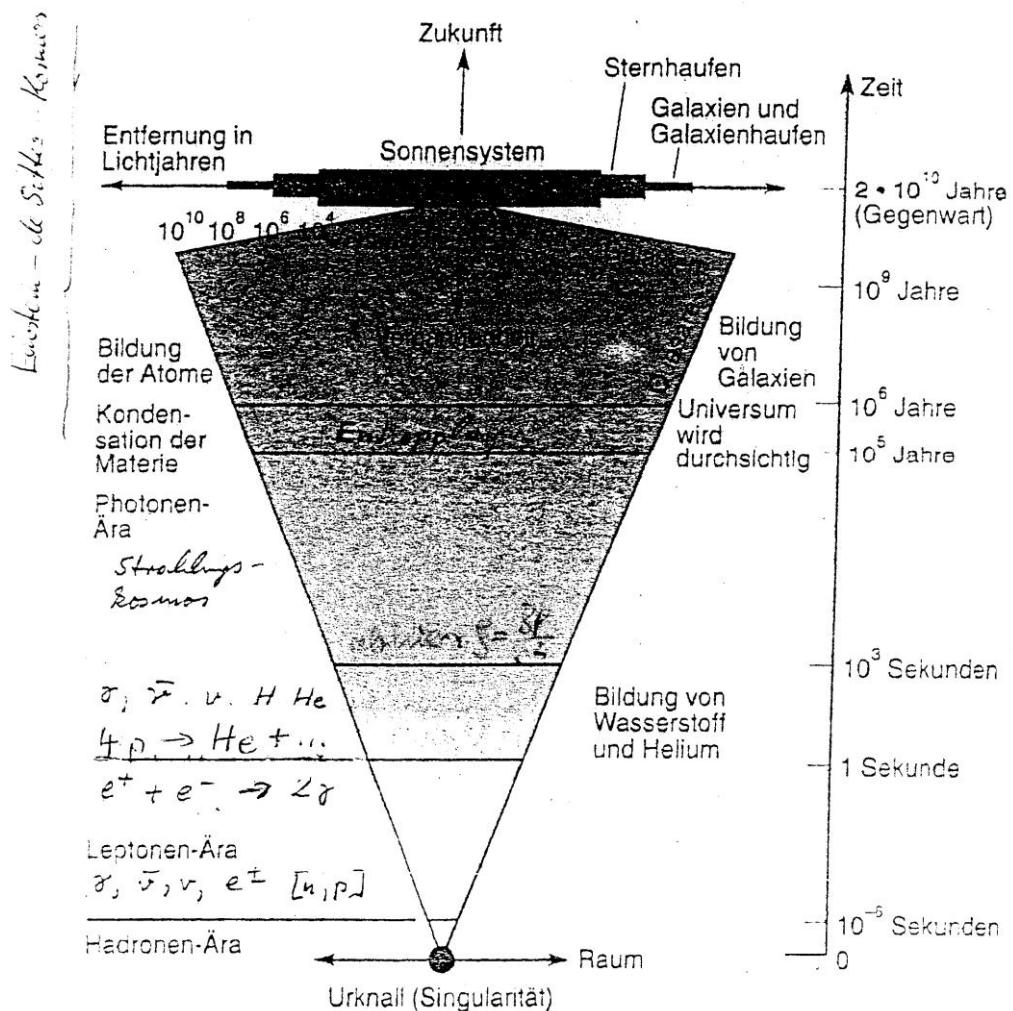


Abb. 0.1. Raum-Zeit-Diagramm des Kosmos (aus: J.D. Barrow und J. Silk, Raum und Zeit, in: Kosmologie, Spektrum Akademischer Verlag 1985) bzw. Eckenroth, Einführung in die Kosmologie (Spektrum, 1994)

Tabelle 13.4. Folge der verschiedenen Zeitalter und Temperaturverlauf bei der Evolution des Kosmos nach dem Standardmodell. Teilchen und Antiteilchen der Ruhmasse m

Zeitalter	t [s]	T [K]	kT [GeV]	m [GeVc $^{-2}$]		Hadronen	Leptonen
				Feldquanten, Quarks	Baryonen		
„Große Vereinigung“	10^{-43}	10^{32}	10^{19}	$10^{14}?$	X?		
	10^{-35}	10^{27}	10^{14}				
	10^{-10}	10^{15}	10^2	175 92 80	t Z W		
Quark-Ära				4.7 1.5	b c	5.3 3.1 1.67 Ω \vdots	B J/ψ 1.78 τ
	10^{-6}	10^{13}	1			1.12 0.940 0.938	Λ n p
Hadronen-Ära						0.50 0.14	K π μ
	10^{-4}	10^{12}	10^{-1}	0.15 0.01	s d		
Leptonen-Ära				0.005	u		
	1 3 $2 \cdot 10^2$	10^{10} $5 \cdot 10^9$ $9 \cdot 10^8$	10^{-3} $5 \cdot 10^{-4}$			$5 \cdot 10^{-4}$	e
Protonen-Ära		$2 \cdot 10^{13}$ $6 \cdot 10^{13}$ $1 \cdot 10^{15}$	$3 \cdot 10^3$ $2 \cdot 10^3$ $3 \cdot 10^2$	$z \approx 1000$ 600 100			Auskoppeln der Neutrinos Elementensynthese (${}^4\text{He}$)
Materie-Ära	$6 \cdot 10^{17}$	2.7	0				Auskoppeln der Photonen Entstehung der Galaxien heute
							3 K 2 K

Nachtrag zur Kosmologie

Problematische Fragestellung ist eine genauere Behandlung der kosmischen Materie -> wie kann man ein Gravitationsfeld eines Sterns in die Friedmann-Lösung einflicken?

→ Beispiel: Stern -> Schwarzschildlösung in die Friedmann-Lösung einbauen!

Beispiel:

Einstein-Kosmos:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2]$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Führe ein:

$$\lambda = \frac{1}{s^2}$$

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

$$r = s \cos \chi$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{s}\right)^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Dabei könnte man Sterne mit Radius r_i betrachten und dann in Bereichen $r < r_i$ "Anflicken" dazu:

annihilieren jeweils, wenn die mittlere Energie $kT \leq mc^2$ wird. Die Temperaturen unterhalb $T \leq 5 \cdot 10^9$ K beziehen sich auf das Photonengas

$$ds^2 = \left(1 - \lambda r_i^2\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{s}\right)^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

in dem Bereich des Sterns, also

$r < r_i$ kann man versuchen, aneinanderzuflicken, Damit bekommt man, z.B.:

Weyl- Trefftz- Lösung:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r^2} - \frac{1}{2} \lambda r^2\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{2} \lambda r^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

im Bereich $r < r_i$.

Außerhalb muss die Vakuum- Lösung gelten, also

$$ds^2 = \left(1 - \lambda r_i^2\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{s}\right)^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \text{ für alle } r > r_i$$

$$r_i < s$$

am Sternenrand bekommt man eine Anschlussbedingung für $r = r_i$, also:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \lambda r^2\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{s}\right)^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r^2} - \frac{1}{2} \lambda r^2\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{2} \lambda r^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ &\Rightarrow \left(1 - \lambda r^2\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{s}\right)^2} = \left(1 - \frac{2m}{r^2} - \frac{1}{2} \lambda r^2\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{2} \lambda r^2} \end{aligned}$$

Probleme

- A) erkenntnistheoretische Probleme / Entschlüsse
- B) - wie groß ist die Metagalaxis ?
- C) Bewegungsgleichungen sind die Einsteingleichungen -> die Materie ist emag. neutral ! -> keine elektromagnetischer Effekt bemerkbar !
- D) Kosmologisches Prinzip

1. Phase

B) Annahmen bei der Modellbildung: 1. Phase: $t \geq 3 \text{ min}$.

- Kosmisches Substrat ist ideales Gas
- Kosmisches Substrat bildet laminare Strömung
- Kosmisches Substrat rotiert nicht !

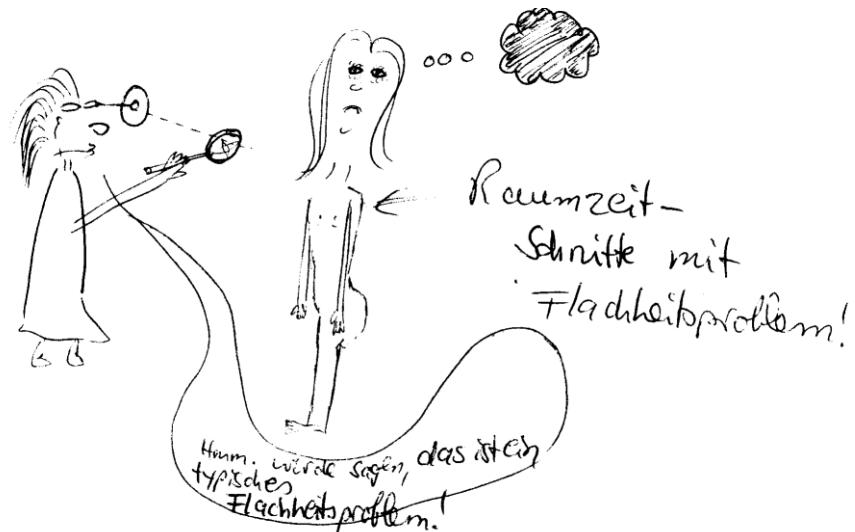
Positiv:

Ergebnisse sind verträglich mit Hubble- Fluss und 3K- Hintergrund !

Beseitigung des Gravitations- und Olbersschen Paradoxons 1

Offen:

- 1) Singularität !
- 2) Horizontproblem
- 3) Flachheitsproblem
- 4) Problem bei Galaxienentstehung !



2. Phase: $3 \text{ min} . \geq t \geq 10^{-35} \text{ s}$

- GUT ist gültig !
- Zustandsgleichungen erlauben, dass für $S -> 0 \Rightarrow T \rightarrow \infty$
- Materie ist im thermodynamischen Gleichgewicht !
- Gravitation ist ein äußeres Feld: Kopplung wird nicht berücksichtigt ! (wie ein äußeres klassisches Feld !)

Es gibt eine inflationäre Phase

$$S(t) = S_1 e^{Ht}$$

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{Vac.}} = \sqrt{\frac{c^2 \Lambda}{3}}$$

Positiv: Verträglichkeit des Modells mit der Verteilung der Elemente !
Lösung des Flachheitsproblems/ Horizontproblems/ Homogenitätsproblems

→ Auch: Unterdrückung der magnetischen Monopole, die aus der GUT folgen !



Offene Probleme

- Skalares Feld Φ
- $p = -\rho c^2$
- $\rho = \text{const.}$

Also: $\lambda(\rho) \Rightarrow \lambda(\rho)g_{\mu\nu}$ in Einsteinsche Gleichungen

→ Zerfall des falschen Vakuums !

Offen ist die Singularität -> Quantenkosmologie !

Offen ist: Galaxienbildung !

Das Machsche Prinzip

1) Ursprung

Newton'sche Definition für Masse:

$$m = \rho V$$

Weiter:

$$m = \frac{F}{g}$$

→ diese beiden Punkte sind massive Kritikpunkte -> keine Wägevorschrift -> wie will man wiegen ?

Mach: Unangenehm: absoluter Raum als Phantom

→ andere Vorschrift für Definition des Raums!

Vorschlag: anderer Raum zu definieren und andere Masse definieren !

Einstein versteht: eine völlig neue Theorie muss her ! Newton ist scheiße und lügt wie gedruckt

Einstein / Mach: Trägheit als Folge der gravitativen Wirkung der kosmischen Massen !

Bezugssystem bzw. Raumzeit wird völlig durch die Gesamtheit der kosmischen Massen bestimmt !

$m(\text{Träge})$ ist Funktional der gravitativen massen aller kosmischen Objekte

→ Körper an sich hat gar keine inhärenten Eigenschaften !

→ Naheliegender Gedanke angesichts der Äquivalenz von schwerer und träger Masse !

Einstein / Mach.

$$m_T = F(m_g^i)$$

-> Suche nach statischem, räumlich geschlossenem Kosmos !

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2]$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Führe ein:

$$\lambda = \frac{1}{s^2} = \frac{\rho \kappa}{2}$$

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

$$r = s \cos \chi$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{s}\right)^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$



Nachtrag

Vergl. Bondi:

Extrapolatorische Kosmologie: Lokale Physik durch kosmologische Prinzipien zur Kosmologie machen ...

Deduktive Kosmologie:

Kosmologische Annahmen machen und daraus die lokale Physik herausarbeiten !

→ Beispiel: Mach Prinzip -> Lokale Bewegungsgesetze ableiten

Mach- Einstein- Doktrin:

$$(m_T)_i = f(m_S)$$

→ träge Masse als Funktional der schweren

Jedenfalls: man kann auch deduktiv rangehen statt induktiv !

ART und Quantentheorie

Axiome

1. Zustandsfunktion

Für ein gegebenes physikalisches System S gibt es eine Zustandsfunktion $|\Psi\rangle$, die alles zusammenfasst, was man von dem System wissen kann !

$$|\Psi\rangle \in H$$

Der Hilbertraum ist ein unendlichdimensionaler, komplexer, vollständiger und separabler Vektorraum !

1. **Linearität**

$$\alpha_1 |\Psi_1\rangle + \alpha_2 |\Psi_2\rangle = |\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2\rangle$$

2. Skalarprodukt:

$$\langle \Psi | \varphi \rangle = \langle \varphi | \Psi \rangle^*$$

$$\|\Psi\|^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle$$

ist Wahrscheinlichkeit !

Wellenfunktion

$$|\Psi\rangle := \Psi(q^1, \dots, q^m, s^1, \dots, s^m, t)$$

→ klassische Freiheitsgrade, quantenmechanische Freiheitsgrade

→ Spin kommt erst in der Diracgleichung raus !

Dann:

$$\|\Psi(q^1, \dots, q^m, s^1, \dots, s^m, t)\|^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle = \int \Psi^*(...) \Psi(...) dq^1 \dots dq^m$$

Als Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System zum Zeitpunkt t die Werte q^1, \dots, q^m aufweist !

2) jeder physikalischen Observablen Ω wird ein linearer, hermitescher (selbstadjungiert) Operator $\hat{\Omega}$ zugeordnet mit:

$$\hat{\Omega}(\alpha_1 |\Psi_1\rangle + \alpha_2 |\Psi_2\rangle) = \alpha_1 \hat{\Omega}|\Psi_1\rangle + \alpha_2 \hat{\Omega}|\Psi_2\rangle$$

Def.: Adjungierter Operator: es existiert ein Operator derart, dass das selbe Ergebnis erzielt wird bei Anwendung auf die komplexe konjugierte Wellenfunktion:

$$\langle \Psi | \hat{\Omega} \varphi \rangle = \langle \hat{\Omega}^+ \varphi | \Psi \rangle$$

$$\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^+$$

um zu sichern, dass alle Eigenwerte reell sind !

Ortsdarstellung der QM:

$$p_i \rightarrow \hat{p}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

$$\hat{\Omega}_S : \int \Psi^* \Omega \varphi dq^1 \dots dq^n = \int (\Omega \Psi)^* \varphi dq^1 \dots dq^n = \int \Omega^* \Psi^* \varphi dq^1 \dots dq^n$$

$$3) |\varphi_n\rangle$$

ist Eigenzustand von $\hat{\Omega}$, falls

$$\hat{\Omega}|\varphi_n\rangle = \omega_n |\varphi_n\rangle \rightarrow \text{Ein Messergebnis der Observablen } \hat{\Omega} \text{ ist ein Eigenwert von } \hat{\Omega} !$$

4) Entwicklungssatz:

Jedes $|\Psi\rangle$ kann bezüglich einer Basis von H in einer unendlichen Reihe entwickelt werden:

$$|\Psi\rangle = \sum_n a_n |\varphi_n\rangle$$

$$a_n \in C$$

Dabei ist $|\varphi_n\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen ! eines vollständigen Satzes von vertauschbaren Observablen !

Anleitung zur Quantisierung:

Nimm alle Operatoren, die vertauschen und die zu diesem Satz gehörenden Eigenvektoren bilden dann ein O-N-System des unendlichdimensionalen Hilbertraumes !

5) Die WSK der Messung eines Eigenwertes einer physikalischen Observablen ist

$$|a_n|^2$$

der Mittelwert über viele Messungen eines Eigenwertes ergibt sich als:

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \Psi | \hat{\Omega} | \Psi \rangle$$

Ortsdarstellung:

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \sum_s \int \Psi * (q^1, \dots, q^m, s^1, \dots, s^m, t) \hat{\Omega} \Psi (q^1, \dots, q^m, s^1, \dots, s^m, t) dq^1 \dots dq^m$$

Bei Spin : folgen dann z.B. hieraus die Pauli- Gleichungen !

Wesentlich hier: q ist kontinuierlich ! s ist diskret ! -> Summation !

6) zeitliche Entwicklung

Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle$$

H linear -> Superpositionsprinzip !

- $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$ seien Lösungen der Schrödinger-Gleichung

→

$a|\Psi_1\rangle + b|\Psi_2\rangle$ ist auch Lösung der Schrödinger-Gleichung

Hermitizität von H wahrt dann die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeit, weil der Zeitentwicklungsoperator unitär ist !

$$\frac{d\langle \Psi | \Psi \rangle}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = -i \frac{1}{\hbar} H |\Psi\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi | = i \frac{1}{\hbar} \langle H \Psi |$$

Schrödinger-Bild:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle_S = H |\Psi\rangle_S$$

→ die Operatoren sind zeitunabhängig !

Durch unitäre Transformationen kommt man von einem zum anderen Bild !

Unitär:

$$U = U^+ = U^{-1}$$

Heisenberg-Bild

$$\frac{d}{dt} \hat{\Omega}_H = \frac{i}{\hbar} [H, \hat{\Omega}]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle_H = 0$$

→ die Zustände sind also zeitunabhängig !

Wechselwirkungsbild

$$H = H_0 + H_{WW}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle_{WW} = H_W |\Psi\rangle_{WW}$$

→ Operatoren und Zustände sind jeweils teilweise zeitabhängig !

Es folgt:

$$\frac{d}{dt} \hat{\Omega}_H = \frac{i}{\hbar} [H_0, \hat{\Omega}]$$

Nun kommen irgendwelche Felder dazu:

- emagnetisch
- Gravitation etc...

→ wir haben ein morphogenetisches Feld ! -> des kollektiven Bewusstseins ! -> ist dieses quantisierbar ? Sind Gedanken quantisiert ?

Quantisierung in der KM

Seien $q^i(t)$ irgendwelche Koordinaten !

Dann:

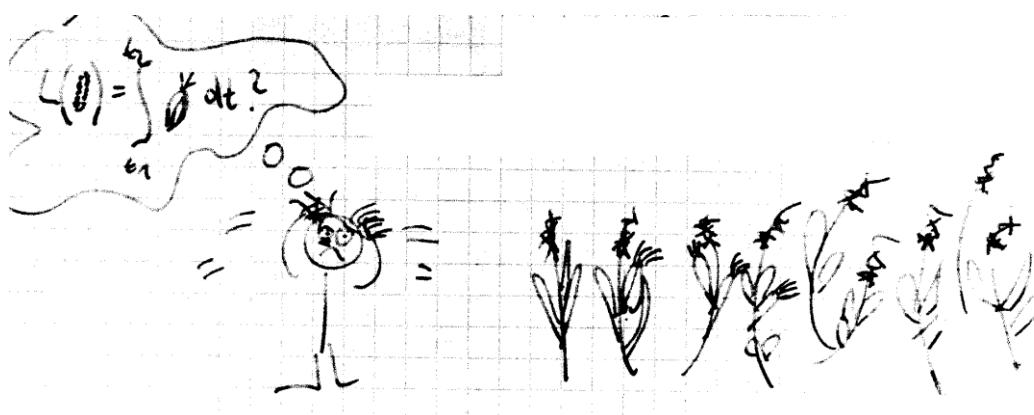
$$\dot{q}^i(t) = \frac{dq^i(t)}{dt} \text{ ist verallgemeinerte Geschwindigkeit}$$

Die Lagrangefunktion:

$$L(q^i(t), \dot{q}^i(t))$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i(t), \dot{q}^i(t)) dt$$

Nach mehreren vergeblichen Versuchen verzweifelte Bauer Emil an der Quantisierung seines Maisfeldes:



Nun setzen wir ein Wirkungsprinzip ein:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q^i(t), \dot{q}^i(t)) dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

→ Legendre- Trafo:
 $(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow (q_i, p_i)$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$$

$$\{q^i, p_k\} = \delta^i{}_k$$

$$\{q^i, q^j\} = 0$$

$$\{p_i, p_j\} = 0$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = \{H, q^i\}$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial L}{\partial p_i} = \{H, p^i\}$$

Nun: Quantisierung -> Vertauschungsrelationen

$$\{ \} \rightarrow []$$

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar$$

$$q^i \rightarrow \hat{q}^i$$

$$p_k \rightarrow \hat{p}_k = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q^k}$$

$$H \rightarrow \hat{H} := H$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle$$

Quantisierung des Maxwellschen Feldes und anderer Tensorfelder im Minkowskiraum

Somit:

$$L \rightarrow SL(2, C)$$

(in Spinordarstellung):

Lorentzgruppe -> spezielle Lorentzgruppe

→ Durch Spinorfelder werden die Fermionen dargestellt (Spin 1/2 - Teilchen)

→ Bosonen: Beschreibung durch Tensoren, die dann durch spezielle Spinorkombinationen gewonnen werden !

Seien die Felder:

$$\varphi^A(x^i, t) \dot{\varphi}^A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial (\varphi^A, _\mu)} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \varphi^A} = 0$$

→ Legendre- Trafo:

$$(\varphi^A, \dot{\varphi}^A) \rightarrow (\varphi^A, \pi_A)$$

$$\pi_A = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\varphi}^A}$$

Quantisierung:

$$\varphi^A \rightarrow \hat{\varphi}^A$$

$$\pi_A \rightarrow \hat{\pi}_A$$

$$\{ \} \rightarrow []$$

$$[\hat{\varphi}^A(\bar{x}^i, t), \hat{\varphi}^B(\bar{x}^i, t)] = 0$$

$$[\hat{\pi}^A(x^i, t), \hat{\pi}^B(x^i, t)] = 0$$

$$[\hat{\pi}^A(x^i, t), \hat{\varphi}^B(\bar{x}^i, t)] = i\hbar \delta_A^B (\bar{x}^i - x^i)$$

i=1..3 (dabei ist der mit Strich gekennzeichnete Ort von dem nicht mit Strich gekennzeichneten prinzipiell verschieden !)

Besser: Heisenbergbild!

ART und Quantentheorie

Problem: Axiome

Nichtrelativistische Mechanik und QT: -> nichtrelativistische Mechanik geht durch kanonische Quantisierung in die Quantenmechanik über !

Klassische Feldtheorie: Theorien der Tensorfelder, insbesondere des Maxwellschen Feldes !

- kanonische Quantisierung -> Quantenfeldtheorien -> Feldquanten, insbesondere Photonen von ganzzahligem Spin (0,1,...) (Bosonen)
- Quantenfeldtheorie der tensorfelder
- nötig: Antikommutatoren für fermionen !
- Sogenannte Tensorpartikel im Gegensatz zu Spinpartikel !
- Tensorstufe: Ist abhängig vom Tensor, der quantisiert wurde !
- Tensorstufe entspricht Spin !

Skalares Feld -> Spin 0

T^μ (Elektrodynamik) -> Spin 1

$G^{\mu\nu}$ (Gravitationstheorie) -> Spin 2

Statistiken für diese Teilchen: Bose / Einstein - Statistik !

Somit:

$$\bar{N} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_\mu}{e^{kT}} - 1}$$

für alle Tensorfelder ! (nicht nur Bosonen !)

Bemerkungen:

Theorien für Spinorfelder (insbesondere Diracfelder):

- Zweite Quantisierung -> Quantenfeldtheorie (insbesondere Diracsche) !
- Feldquanten mit halbzahligem Spin : 1/2, 3/2, ...
- Fermi-Dirac-Statistik:

$$\rightarrow \bar{N} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_\mu}{kT}} + 1} \text{ (Pauli-Prinzip)}$$

Diracgleichung: Dirachsches Spinorfeld gg. Maxwellsches Tensorfeld

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - \kappa)\Psi = 0$$

$$\kappa = \frac{mc}{\hbar}$$

Spinoren beschreiben Fermionen !

Sei Ψ antisymmetrische Wellenfunktion !

\rightarrow Definition der Diracmatrizen:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$$

Zweite Quantisierung (Kommutatoren) -> Quantenfeldtheorie der Spinorfelder !

QED

$$A_\mu \rightarrow \hat{A}_\mu$$

[]

$$\hat{F}^{\alpha\beta}_{,\beta} = \frac{4\pi}{c} \hat{j}^\mu$$

im Heisenbergbild !

Bewegung der Elektronen unter dem Einfluss eines Maxwellschen Feldes !

$$(i\hbar\gamma^\mu [\partial_\mu - ieA_\mu] - \kappa)\Psi = 0$$

$$\hat{j}^\alpha = \hat{j}^\alpha [\Psi]$$

\rightarrow Diracgleichungen statt klassischer Elektronentheorie !

\rightarrow Das elektrische Feld der Elektronen koppelt an das elektromagnetische Feld !

Jedenfalls:

$$F^{\alpha\beta}_{,\beta} = \frac{4\pi}{c} \hat{j}^\mu \text{ macht als Ansatz keinen Sinn, da Operatoren und Felder unterschiedlich transformieren !}$$

Einstein'sche Feldgleichungen

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \hat{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \hat{R} = -\frac{8\pi G}{c^4} \hat{T}_{\alpha\beta}$$

Kovariante Materiegleichungen !

Schreibe:

$$(i\hbar\gamma^\mu \nabla_\mu - \kappa)\Psi = 0$$

Argumente für die Quantisierung der ART

- Selbstkonsistenz der Einstein-Gleichungen
- epistemologisches Argument (erkenntnistheoretisch):
- Prinzip der Vereinheitlichung der Physik
- speziell relativistische Quantenfeldtheorie zeigt Divergenzen, die durch Quantisierung der Gravitation beseitigt werden könnten

- Gravitationskollaps (-> Singularität) vermeidbar !
- kosmologische Singularität vermeidbar !
- Endstadium der Hawking- Strahlung, was passiert mit schwarzen Löchern, nachdem sie zerfallen sind ?

Neue, noch gar nicht gedachte Fragen

Was passiert nach dem, das nach dem Tod passiert ?

Was ist imaginäre Zeit ?

Ist die Weltformel nur für den Augenblick gültig , der verstrich bevor sie entdeckt wurde ?

Gibt es negative Größe ?

Wer schuf das Schaffen, damit die Welt geschaffen werden konnte ?

Ist die Unschärfe, mit der die Unschärfe gemessen wird selbst auch unscharf ?

QART

- Schwierige Lage der Quanten- ART: Aus den Naturkonstanten G,c, \hbar folgen:

$$l_P = \left(\frac{hG}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} = 10^{-33} \text{ cm}$$

$$l_P = \left(\frac{hG}{c^5} \right)^{\frac{1}{2}} = 10^{-43} \text{ s}$$

$$m_P = \left(\frac{hc}{G} \right)^{\frac{1}{2}} = 10^{-5} \text{ g}$$

$$E_p = m_p c^2 = l_P = \left(\frac{hc^5}{G} \right)^{\frac{1}{2}} = 10^{19} \text{ GeV}$$

GUT will bei 10^{15} GeV funktionieren !

→ keine Experimente möglich !

→ Hoffnung: Störungen im Sternspektrum durch den körnigen Rand der Metagalaxis

Semiklassische Gravitationstheorie

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \hat{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \hat{R} = -\frac{8\pi G}{c^4} \hat{T}_{\alpha\beta}$$

Schreibe:

$$E_{\alpha\beta} = \hat{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \hat{R}$$

→ Analogie zur Dirac- Gleichung !

Möller:

$$E_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \langle \Phi | \hat{T}_{\mu\nu} | \Phi \rangle$$

Kibble: Schrödingerbild:

$$S[g, \Phi] = S_{EH}[g] + S_M[g, \Phi]$$

Wenn man derartige Integrale variiert, so kommt man tatsächlich auf $E_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \langle \Phi | \hat{T}_{\mu\nu} | \Phi \rangle$

Aber: es entsteht eine nichtlineare SGL !

Kanonische Quantisierung der ART

in holonomen Variablen

Problem: meist treten Nebenbedingungen (constraints) auf !

Beispiel:

Skalares Feld $\Phi(x^\mu)$ im M4 (Minkowskiraum) -> zunächst keine Constraints !

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + \kappa^2 \Phi^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\Phi}^2 - \delta^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} + \kappa^2 \Phi^2 \right)$$

$$\kappa := i \frac{mc}{\hbar}$$

mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\Phi} = \pi = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\Phi}}$$

Als Hamiltonsche Dichte folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \dot{\Phi} \pi - \mathbf{L} \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi^2 + \delta^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - \kappa^2 \Phi^2 \right) \\ \delta^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} &= (\delta^{ik} \Phi \Phi_{,k})_{,i} - \Phi \Delta \Phi \\ \Rightarrow \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} \Phi \Delta \Phi - \frac{1}{2} \kappa^2 \Phi^2 \end{aligned}$$

Die Divergenz bei L und H (Lagrangedichte und Hamiltondichte) verschwindet beim Übergang (Divergenzen -> Eichinvarianz, siehe oben !)

Merke:

$$H' = H + Div$$

$$\Rightarrow \delta I' = \delta I + \int_{\partial V} dt$$

$$\Rightarrow \delta H' = \delta H + Oberfl.term$$

Hamiltonsche Gleichungen

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \pi} = \pi$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Phi} = \Delta \Phi + \kappa^2 \Phi^2 = \ddot{\Phi}$$

$$\Rightarrow (\# + \kappa^2) \Phi = 0$$

$$\mathbf{H} = \dot{\Phi} \pi - \mathbf{L}$$

2. Beispiel: elektromagentisches Feld A^μ im M_4 -> 1 Constraint !!

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} = \frac{1}{2} (\bar{B}^2 - \bar{E}^2) = \frac{1}{2} (rot \bar{A})^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} \partial_t \bar{A} - \nabla V \right)$$

$$V = A_0, A^i$$

$$\pi_V = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{V}} = 0$$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{A}_i} = -E_i = \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \partial_i V$$

$$\mathbf{H} = \pi^i \dot{A}_i - \mathbf{L} = -\frac{1}{2} (\pi^2 + \bar{B}^2) + V \partial_i \pi^i - \partial_i (V \pi^i)$$

Feldgleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \pi}$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q}$$

$$\dot{V} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \pi_V}$$

Die Hamiltonschen Gleichungen entsprechen dann den Maxwellgleichungen
Als Zwangsbedingung folgt:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \pi}, \dot{V} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \pi_V}$$

$$\Rightarrow \partial_i \pi^i = 0$$

(Zwangsbedingung (Constraint))

Eich-Invarianz ! (Wahlfreiheit für (A_0, A_1, A_2, A_3))

$$A_\mu \rightarrow \bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$$

$$C = 0$$

$$\hat{C}\Psi = 0$$

- Man kann in der Edynamik die Eichfreiheit nutzen, um A_0 zu eliminieren !
- nur noch 3 Hamiltonsche Gleichungen !
- der freien Eichbedingung entspricht die Zwangsbedingung !

Dirachsche Quantisierung: $\partial_i \pi^i$ auf $|\Psi\rangle$ anwenden:

$$\partial_i \pi^i |\Psi\rangle = 0$$

Problem: Transformationsgruppe der Lorentztrafos ist auch die Eichgruppe !

Diffeomorphismengruppe, die die $g^{\mu\nu}$ transformiert ist auch Eichgruppe !

Zu den Beispielen:

$$L = \int d^3x \mathbf{L} \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathbf{L} = 0$$

$$H = \int \mathbf{H} d^3x$$

- es folgen die hamiltonschen Gleichungen!
- Man definiert sich:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt H$$

Anwendung des Variationsprinzips:

$$\mathbf{H} = \dot{\Phi} \pi - \mathbf{L}$$

$$= \frac{1}{2} (\pi^2 + \delta^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - \kappa^2 \Phi^2)$$

$$\delta^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} = (\delta^{ik} \Phi \Phi_{,k})_{,i} - \Phi \Delta \Phi$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} \Phi \Delta \Phi - \frac{1}{2} \kappa^2 \Phi^2$$

$$\delta \mathbf{H} = \delta \left[\frac{1}{2} (\pi^2 - \kappa^2 \Phi^2) + \delta \left(\frac{1}{2} \delta^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} \right) \right]$$

$$\delta \left(\frac{1}{2} \delta^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} \right) = \delta^{ik} \Phi_{,i} (\delta \Phi_{,k}) = \delta^{ik} \Phi_{,i} (\delta \Phi)_{,k} = \partial_k (\delta^{ik} \Phi_{,i} \delta \Phi_k) - \Phi \Delta \Phi$$

Unter dem Integral gilt:

$$\partial_k (\delta^{ik} \Phi_{,i} \delta \Phi_k) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \delta \left(\frac{1}{2} \delta^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} \right) \rightarrow -\Phi \Delta \Phi$$

$$\delta \mathbf{H} \rightarrow \delta \frac{1}{2} (\pi^2 - \kappa^2 \Phi^2 - \Phi \Delta \Phi)$$

Constraints

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \pi}, \dot{V} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \pi_V}$$

$$\Rightarrow \partial_i \pi^i = 0$$

Dabei ist $\partial_i \pi^i = 0$ eine rheonome Zwangsbedingung !

Behandlung von Zwangsbedingungen:

Lösung der Zwangsbedingung auf klassischer Ebene

➤ Feldfunktionen

➤ echte Freiheitsgrade > Quantisierung für echte Freiheitsgrade !

➤ Reduktion des Phasenraumes durch Äquivalenzklassenbildung !

$$A_\mu \rightarrow \bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$$

$$\Rightarrow [A_\mu]$$

Quantenebene:

Dirac- Quantisierung, das heißt: Zwangsbedingung als Bedingung an die $|\Psi\rangle$ -Funktion auffassen !

Äquivalenzklassenbildung:

$$A_\mu \rightarrow \bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$$

Damit bilde:

$[A_\mu]$ und ebenso $[\pi^i]$

ART:

Hier tauchen noch weitere Zwangsbedingungen auf !! -> eine davon bleibt

- > Man ist auf das Diracsche Verfahren angewiesen !
- > Kommutatoren für Felder UND Kommutatoren für Zwangsbedingungen !
- > Dirac- Quantisierung -> Zwangsbedingungen als Bedingungen an die Wellenfunktion auffassen !
- > Jede Art der Feldquantisierung ist " 2. Quantisierung"

Kanonische und 2. Quantisierung

Oft: Feldquantisierung las 2. Quantisierung.

Wesentlich: Antikommator -> Spinorquantisierung, -> keine kanonische Quantisierung, besser: 2. Quantisierung !

Tensorfelder mit Kommutatoren -> " kanonische Quantisierung"

ADM- Formalismus (Arnowitt - Deser- Misner)

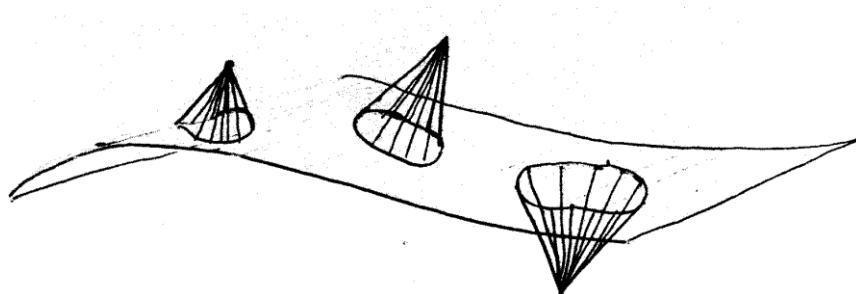
Foliation:

Sogenannte " Foliation" oder Blätterung der Raumzeit ! (Foliation = Raum- zeit- Zerlegung)

Foliation ist möglich, wenn die Raumzeit global hyperbolisch ist -> eine globale Cauchy- Fläche besitzt !

Dann ist die Raumzeit $V^4 \cong R \times \Sigma$ (äquivalent zu $R \times \Sigma$), wobei Σ eine raumartige Fläche ist:

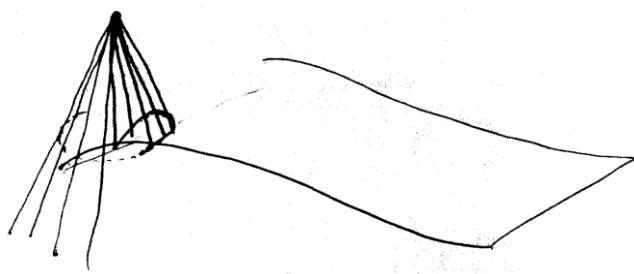
Wichtigstes Kriterium:



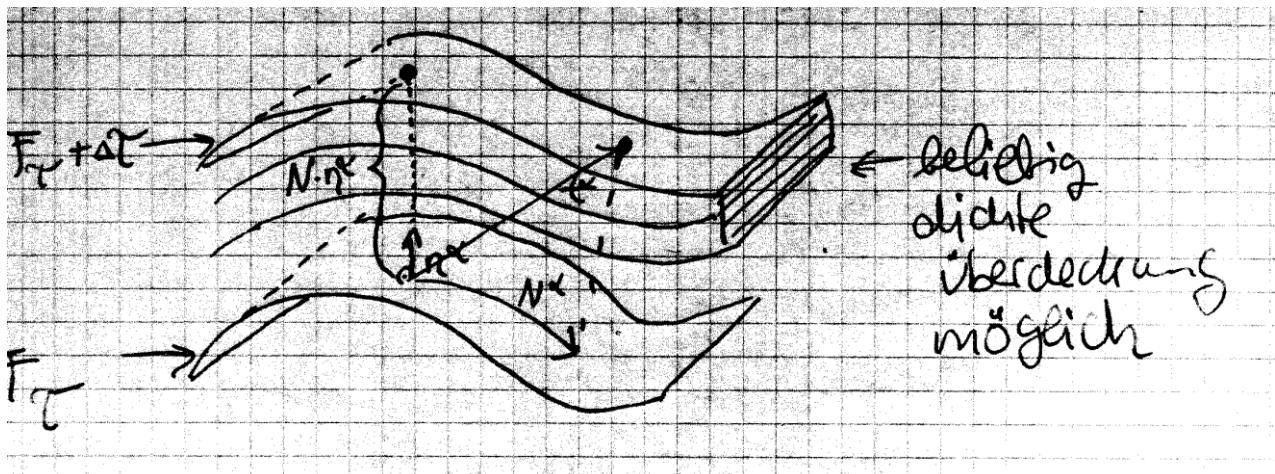
Alle Punkte müssen mit Σ kausal verbunden sein -> Das " Abhängigkeitsgebiet" der raumartigen Hyperfläche soll gleich der Raumzeit sein !

-> es existiert somit kein Punkt, der kausal von außerhalb der Fläche erreicht werden kann !
Ansonsten wäre das Cauchy- Problem unlösbar !

Also: Schematisch: Es wird folgende Situation erzwungen wie oben und folgende verboten:



Fazit: Es muss eine δ -artige Überdeckung von Σ durch Feldfunktionen möglich sein !
 Dann ist auch Foliation möglich !



Dabei bezeichnet:

$N \cdot n^\alpha$: Normalenabstand bis zur nächsten Fläche

t^α : einen beliebigen, zeitartigen Vektor ! (kausale Verbindung möglich !)

Zerlegungsvorschrift:

$$t^\alpha = N \cdot n^\alpha + N^\alpha$$

Mit:

$$N = t^\alpha n_\alpha \text{ ("Lapse-Funktion")}$$

$$N^\alpha = h^\alpha{}_\beta t^\beta \text{ Shift-Vektor !}$$

Dabei ist

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta \text{ der Projektionstensor und}$$

$$h_\alpha{}^\beta := \delta_\alpha{}^\beta - n_\alpha n^\beta$$

Dabei ist

$$h_{\alpha\beta} \text{ die von } g_{\alpha\beta} \text{ auf } F_\tau \text{ (räumliche Mannigfaltigkeit) "induzierte" Metrik !}$$

Denn:

$$g_{\alpha\beta} h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu = h_{\mu\nu}$$

Merke: Foliation geht nur für hyperbolische (sattelförmige) Raumzeiten !

Wenn man die Hyperflächen F_τ und $F_{\tau+\Delta\tau}$ durch den Diffeomorphismus identifiziert, der dadurch entsteht, dass man den Integralkurven an das Vektorfeld $t^\alpha(x^\mu)$ folgt, dann ist das die zeitliche "Bewegung" von F_τ in $F_{\tau+\Delta\tau}$ bzw. von $h_{\alpha\beta}(\tau)$ in $h_{\alpha\beta}(\tau + \Delta\tau)$

Wichtig:

Foliation durchführen ohne vorher schon über die Metrik zu erden !

→ Hilfsbegriff der Foliation für kanonischen Formalismus ohne Rückgriff auf irgend etwas bekanntes

→ -> sehr mutiger schritt !

Konstruktion der Metrik aus :

$h^{\alpha\beta}$ (Projektor)

$$N^\alpha = h^\alpha_\beta t^\beta \quad \text{Shift- Vektor !} = \text{Raumanteil von } t^\alpha$$

und Lapse- Funktion

N (Zeitanteil)

Dabei:

$$\begin{aligned} n^\alpha &= N^{-1}(t^\alpha - N^\alpha) \\ g^{\alpha\beta} &= h^{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta = h^{\alpha\beta} + N^{-2}(t^\alpha - N^\alpha)(t^\beta - N^\beta) \\ t^\alpha &= \delta_0^\alpha \end{aligned}$$

Das Linienelement folgt damit gemäß:

$$ds^2 = (N^2 - g_{ij}N^i N^j)$$

$$\text{Darstellung von } \mathbf{L}_{EH} = \sqrt{-g}R$$

durch die $h^{\alpha\beta}, n^\alpha, N$ und deren Ableitungen (Vergl. Wald)

Umformung erfolgt mittels der Gauß- Codacci- Relationen !

→ Beziehungen zwischen der dreidimensionalen und der vierdimensionalen Krümmung !

Vierdimensionale Krümmung

$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma} A_\delta = 2\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}A_\gamma$$

Dreidimensionale Krümmung:

$$(3) R_{\alpha\beta\gamma}^\delta \omega_\delta = 2D_{[\alpha} D_{\beta]} \omega_\gamma$$

Gauß- Codacci- Relation

$$(3) R_{\alpha\beta\gamma}^\delta = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu h_\gamma^\rho h_\sigma^\delta R_{\mu\nu\rho}^\sigma - K_{\alpha\gamma} K_\beta^\delta + K_{\beta\gamma} K_\alpha^\delta$$

Dabei bezeichnet

$$K_{\alpha\beta} = h_\alpha^\mu h_\beta^\lambda n_{(\mu;\lambda)}$$

die äußere Krümmung

$$\text{und mit } D_\alpha := h_\alpha^\beta \nabla_\beta$$

folgt als zweite Gauß- Codacci- Relation:

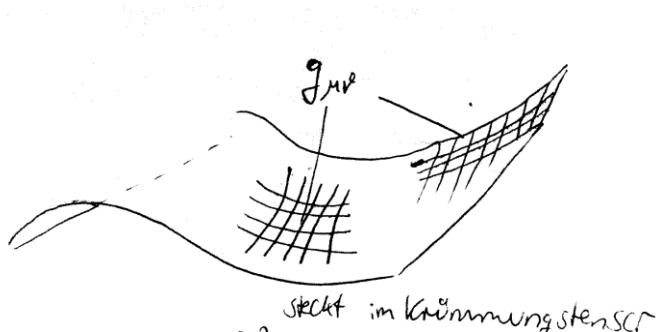
$$D_\alpha R^\alpha_\beta - D_\beta K^\alpha_\alpha = R_{\gamma\delta} n^\delta h_\beta^\gamma$$

Man betrachte die äußere gegen die innere Krümmung anschaulich :

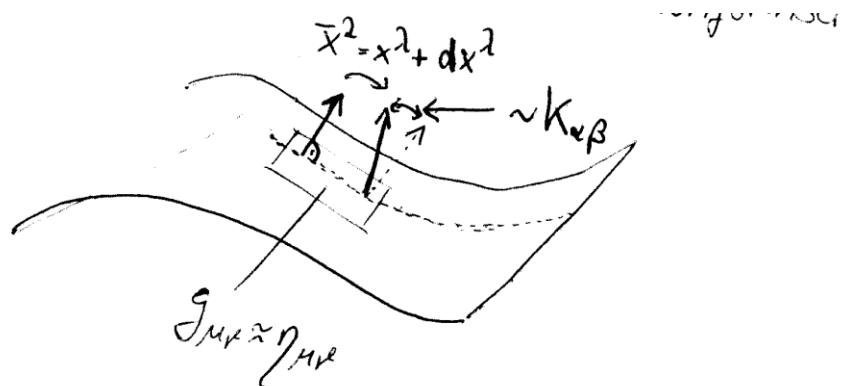
Die innere Krümmung, im Krümmungstensor enthalten wird durch Abweichungen beim Paralleltransport eines Tangentenvektors bestimmt. Dabei schaut man, wenn man einen Vektor tangenzial an die Mannigfaltigkeit legt und bewegt, wie stark dann Originalvektor und transportierter Vektor voneinander abweichen !

Man sieht, dass die Abweichung entlang von Geodäten verschwindet, man setzt diese Abweichung proportional zum Krümmungstensor und die nötige Korrektur bei Ableitungen ergibt sich gerade als "Geodätengleichung", die kovariante Ableitung:

All dies sind Effekte der Inneren Krümmung . Sie ist in den g, in der Metrik und ebenso im Riemann tensor enthalten:



Wenn man dagegen einen Normalenvektor entlang einer Geodäten transportiert (Geodäte auf der Hyperfläche), so kann es dennoch zu Abweichungen kommen. Die Differenz zwischen dem parallel transportierten Normalenvektor (der bei nichtverschwindender äußerer Krümmung kein Normalenvektor mehr ist) und einem neu anzubringenden Normalenvektor ist dann die "Äußere Krümmung":



Mit $\gamma := \det(h_{\alpha\beta})$

gewinnen wir die Lagragedichte

$$\mathbf{L}_{EH} = N \sqrt{\gamma} \left[{}^{(3)}R + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - K^2 \right] + \text{Div.}$$

$$\gamma := \det(h_{\alpha\beta})$$

Wie gewohnt sind die Bewegungsgleichungen wieder invariant gegen Umeichung der Lagragedichte mit reinen Divergenztermen !

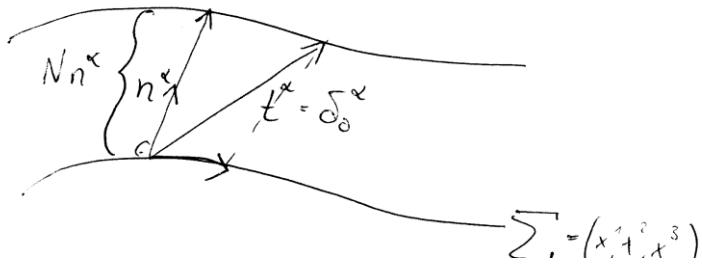
Dabei ist

$$K = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$$

→ Ergebnisse: Hamiltonsche Formulierung

→ Wheeler- De- Witte- Gleichung !

Also: Betrachte Blätterung:



$N \cdot n^\alpha$: Normalenabstand bis zur nächsten Fläche

$N = t^\alpha n_\alpha$ ("Lapse-Funktion")

$N^\alpha = h^\alpha{}_\beta t^\beta$ Shift-Vektor!

t^α : beliebiger, zeitartiger Vektor! (kausale Verbindung möglich!)

zerlegungsvorschrift:

$$t^\alpha = N \cdot n^\alpha + N^\alpha$$

Ehemals:

$$\mathbf{L}_{EH} = \sqrt{-g} R[g_{\alpha\beta}] + (\mathbf{L}_M[g_{\alpha\beta}, \Phi^A])$$

Ersteres wäre bei Beschränkung auf das reine Gravitationsfeld!

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{EH} &= N \sqrt{\gamma} \left[{}^{(3)}R + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - K^2 \right] + \text{Div.} \\ \gamma &:= \det(h_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

Die Impulsdichten aus \mathbf{L}_{EH} werden so verallgemeinert um die zu $h_{\alpha\beta}$ kanonisch konjugierten Impulsdichten!

Eigentlich:

$$\pi_{\alpha\beta} := \frac{\partial \mathbf{L}_{EH}}{\partial \dot{h}_{\alpha\beta}}$$

Dabei ist die Zeitableitung hier eigentlich eine Richtungsableitung entlang des zeitartigen Vektors t^α !

Lie-Ableitung zur kovarianten Definition der Zeitableitung:

$$\nabla_{Lie-t^\alpha} h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta,\sigma} t^\sigma - h_{\sigma\beta} t^\sigma,_\alpha - h_{\alpha\sigma} t^\sigma,_\beta$$

Unterschied zur echt kovarianten Ableitung:

Die Lie-Ableitung produziert aus einem Tensor n. Stufe wieder einen Tensor n. Stufe !! Und zwar als KOVARIante Ableitung!

Im Gegensatz dazu erhöht ja die kovariante Ableitung selbst die Stufe des Tensors um 1 !!

Remember:

$$\nabla_{Lie-t^\alpha} h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta,0} \text{ in speziellen Koordinaten!}$$

$$\nabla_\sigma h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta,\sigma} + \Gamma \dots$$

Also:

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} N^{-1} (h_{\alpha\beta} - 2D_{(\alpha} N_{\beta)}) = \frac{1}{2} N^{-1} (\nabla_{Lie-t^a} h_{\alpha\beta} - 2D_{(\alpha} N_{\beta})$$

Impulse und Hamiltonsche Dichte

$$\pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{L}_{EH}}{\partial h^{\alpha\beta}} = \frac{\partial \mathbf{L}_{EH}}{\partial K_{\kappa\lambda}} \frac{\partial K_{\kappa\lambda}}{\partial h^{\alpha\beta}}$$

$$\Rightarrow \pi_{\alpha\beta} = N \sqrt{\gamma} 2(K_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} K) \frac{1}{2} N^{-1} = \sqrt{\gamma} (K_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} K)$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = \pi_{\alpha\beta} \dot{h}^{\alpha\beta} - \mathbf{L}_{EH} = \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \sqrt{\gamma} N^{(3)} R + 2\pi^{\alpha\beta} D_\alpha N_\beta$$

Weiter gilt:

$$2\pi^{\alpha\beta} D_\alpha N_\beta = 2D_\alpha (\pi^{\alpha\beta} N_\beta) - 2N_\beta D_\alpha \pi^{\alpha\beta}$$

$$2N_\beta D_\alpha \pi^{\alpha\beta} = 2\sqrt{\gamma} N_\beta D_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \pi^{\alpha\beta} \right)$$

Da wir später uns wieder nur für die Wirkung interessieren, kann man $D_\alpha (\pi^{\alpha\beta} N_\beta)$ als reine Divergenz weglassen!

Also:

$$\mathbf{H} = \pi_{\alpha\beta} \dot{h}^{\alpha\beta} - \mathbf{L}_{EH} = \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - \sqrt{\gamma} N^{(3)} R + 2\pi^{\alpha\beta} D_\alpha N_\beta$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = -\sqrt{\gamma} N^{(3)} R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - 2\sqrt{\gamma} N^\beta D_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \pi^\alpha_\beta \right)$$

Als Hamiltonsche Gleichungen folgt:

$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta N} = 0 \Rightarrow -\sqrt{\gamma} N^{(3)} R + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) = 0$$

$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta N^\beta} = 0 \Rightarrow D_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \pi^\alpha_\beta \right) = 0$$

geschlossenes Universum \rightarrow es existiert kein Rand \rightarrow Divergenzen fallen Weg!

\rightarrow eventuell erster Problemfall!

Jedenfalls identifizieren wir:

$$\dot{\pi}_N = \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta N} = 0 \Rightarrow -\sqrt{\gamma} N^{(3)} R + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) = 0$$

$$\dot{\pi}_{N^\beta} = \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta N^\beta} = 0 \Rightarrow D_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \pi^\alpha_\beta \right) = 0$$

Wir erhalten 2 Constraints, nämlich

$$-\sqrt{\gamma}N^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi^2\right) = 0$$

$$D_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\pi^\alpha{}_\beta\right) = 0$$

Nun:

$$\dot{\pi}_{\alpha\beta} = -\frac{\delta \mathbf{L}_{EH}}{\delta h^{\alpha\beta}}$$

$$h^{\alpha\beta} = \frac{\delta \mathbf{L}_{EH}}{\delta \pi^{\alpha\beta}}$$

Aber: Es existiert gar kein

$$\pi_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}}$$

$$\pi_{N^a} = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_a}$$

Wenn nun unsere Constraints in jedem Punkt von V4 erfüllt sind (Vierdim. Mannigfaltigkeit), dann gelten die Einsteinschen Gleichungen überall !

Remember: Cauchy- Anfangswertproblem:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R := E$$

$$G_{\nu\mu} = 0$$

Cauchy- Anfangswertproblem: Wir geben eine Fläche vor und versuchen , die Einsteinschen Feldgleichungen damit (mit dieser vorgegebenen Fläche) zu lösen !

Das heißt, wir müssen die EFG lösen mit diverse Zwangsbedingungen :

$$G_{\nu\mu} = 0$$

$$G_\nu{}^\mu = 0$$

$$\Rightarrow G^0{}_0 = 0, G^0{}_i = 0$$

letzteres als " Zwangsbedingungen "

und $G^k{}_i = 0$ als dynamische Gleichung

Constraints

$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta N} = 0 \Rightarrow -\sqrt{\gamma}N^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi^2\right) = 0$$

$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta N^\beta} = 0 \Rightarrow D_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\pi^\alpha{}_\beta\right) = 0$$

Dabei ist

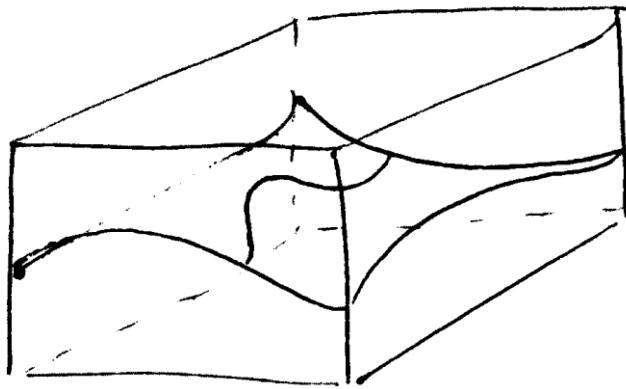
$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta N} = 0 \Rightarrow -\sqrt{\gamma}N^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\pi^2\right) = 0$$

eine skalare Zwangsbedingung (Energie- Zwangsbedingung) und

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial N^\beta} = 0 \Rightarrow D_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \pi^\alpha{}_\beta \right) = 0$$

eine vektorielle Zwangsbedingung, die Impuls- Zwangsbedingung !

Betrachte natürlichen, unendlichdimensionalen Phasenraum:



Zunächst ist die Bewegung durch die Zwangsbedingungen auf die dargestellte Hyperfläche eingeschränkt !
Die Linie entspricht nun dem immer noch unendlichdimensionalen Phasenraum, der als reduzierter Phasenraum die vektoriellen Zwangsbedingungen erfüllt !

Dabei gewinnt man 12 jeweils unendlichdimensionale Komponenten der Feldfunktionen !

Zur Wahrung der Erhaltungssätze bewegen wir uns entlang eines Killing- Vektors:

$$x^\alpha' = x^\alpha + \xi^\alpha$$

$$g_{\alpha\beta}' = g_{\alpha\beta} + \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha}$$

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + 2D_{(\alpha}\eta_{\beta)}$$

$$\eta_\beta = h_\beta^\sigma \xi_\sigma$$

Zum reduzierten Phasenraum gelangt man durch Zusammenfassen der möglichen Transformationen zu Äquivalenzklassen !

→ reduzierter Phasenraum !

$[h_{\alpha\beta}]$ im reduzierten Phasenraum !

Also:

$$\mathbf{H} = -\sqrt{\gamma} N^{(3)} R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) - 2\sqrt{\gamma} N^\beta D_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \pi^\alpha{}_\beta \right)$$

Quantisierung

$$h^{\alpha\beta} \rightarrow \hat{h}^{\alpha\beta}$$

$$\pi_{\alpha\beta} \rightarrow \hat{\pi}_{\alpha\beta}$$

$$\{h_{\alpha\beta}(x^i, t), \pi^{\kappa\lambda}(\bar{x}^i, t)\} = i\hbar \delta^\kappa{}_{(\alpha} \delta^\lambda{}_{\beta)} \delta^{(3)}(x^i - \bar{x}^i)$$

Weiter:

$$\begin{aligned}\{h_{\alpha\beta}(x^i, t), h^{\kappa\lambda}(\bar{x}^i, t)\} &= 0 \\ \{\pi_{\alpha\beta}(x^i, t), \pi^{\kappa\lambda}(\bar{x}^i, t)\} &= 0\end{aligned}$$

Möglichkeiten der Quantisierung

- Berücksichtigung der Zwangsbedingungen vor Quantisierung
- Berücksichtigung der ZB vor der Lösung

Ergebnis

Wheeler- DeWitt- Gleichung

$$\hat{H}\Psi = 0$$

Nimm: Stationäre Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi = E\Psi = \frac{k^2\hbar^2}{2m}\Psi$$

Nur noch Phase Ψ -> Stationäre Schrödingergleichung

- Superräume aus
- $(h_{\alpha\beta}, \pi_{\alpha\beta})$

Robertson- Walker: S(t): Mini- Superraum !

Problem: Wheeler De Witte ist schwer lösbar !

- WDW ist nicht linear !
- In der WDW treten Produkte von Differentialoperatoren am gleichen Raum- zeit- Punkt auf
- Divergenzen !!

Verschiedene Foliationen führen hier nicht zu denselben Quantenformalismen

- Problem der zeit !

Verallgemeinerte Geometrische Feldtheorien

Gründe für eine Verallgemeinerung

- a) Faszination des Programms der ART ! -> " gewöhnliche" Physik beruht auf "Dualismen "

Geometrie + Dynamik = Poincarésche Summe

Dynamik = Feldgleichungen + Bewegungsgleichungen !

Die ART löst das auf:

Hoffnung: einheitliche geometrische Feldtheorien

- 5dimensionale Erweiterung bei Kaluza- Klein

Verallgemeinerung der ART als Gravitationstheorie

- Gravitationskollaps
- Kosmologische Singularität
- Quantisierung der Gravitation !

Alternative Theorien im Interesse experimenteller Tests der ART

Mathematische Forderungen

Prägeometrische Forderungen:

RaumZeit ist:

- Eine Punktmenge M mit folgenden Strukturen:

- 1) M ist zusammenhängende Mannigfaltigkeit und homöomorph zu R^n

2) M ist Hausorff- Raum, also ein topologischer Raum T

→ Menge T, in der eine Familie F von Untermengen ausgezeichnet ist, die folgenden Bedingungen genügt:

$$U_i \cap U_j \in F \forall U_i, U_j$$

$$U_i \cup U_j \in F \forall U_i, U_j$$

→ disjunkte Elemente von T haben disjunkte Umgebungen !

3) M ist vollständig separabel -> das heißt: Es gibt eine abzählbare Basis B

4) M ist diffbare Mannigfaltigkeit

5) auf M kann eine globale (die gesamte Mannigfaltigkeit überdeckende) Lorentzmetrik eingeführt werden !

Physik der Festlegung einer Metrik: erlaubt nicht unbedingt, Lorentzmetrik zu konstruieren !

(global)

Wichtig ist ZUSÄTZLICH das Hausdorff- Trennbarkeitsaxiom / Trennungsaxiom:

Die Metrik alleine kann pathologische Fälle beinhalten ! deshalb: Trennungsaxiom !

Geometrische Voraussetzungen der ART:

1) Vierdimensionale Mannigfaltigkeit

2) Riemannsche Mannigfaltigkeit (Signatur -2)

Daher:

$$\Gamma^\lambda_{\beta\rho} = \left\{ \lambda_{\beta\rho} \right\} \rightarrow \text{Christoffel- Konnektion}$$

$$T^\lambda_{\beta\rho} = \frac{1}{2} \left(\Gamma^\lambda_{\beta\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\beta} \right) = 0 \text{ Torsion !}$$

$Q_{\alpha\beta\gamma} := -D_\alpha g_{\beta\gamma} = 0 \rightarrow$ Verschwindende Nichtmetrizität:

Krümmung:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha(\beta\gamma\delta)} = 0$$

$$R_{\alpha\beta(\gamma\delta,\rho)} = 0$$

3) Differentialgleichung 2. Ordnung !

4) Newtonscher Grenzfall: $G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$

Die kosmologische Konstante verstößt NICHT gegen die geometrischen Forderungen ! -> Lambda- Term kann mit dazu !

5) Feldgleichungen folgen aus Variationsprinzip !

Verallgemeinerungen, die aus Abschwächungen oder Ersetzungen einer oder mehrerer der im letzten Kapitel angesprochenen Forderungen folgen:

Zu Variationsprinzip

Einstein, 1919/23:

$$\text{Abschwächung der Feldgleichungen: } R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

$$\text{Verschärfung: } R_{\alpha\beta\gamma\delta} = F_{\alpha\beta\gamma\delta}[A_\alpha]$$

Problem der DGL 2. Ordnung: Weyl / Eddington / Einstein (nach 1919):

Aktueller Anlass: Renormierung der Quanten ART:

$$R \rightarrow R + aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$$

Statt 4 dim. Mannigfaltigkeit

5- dimensionale Mannigfaltigkeit !

Kaluza (19219 , Klein (1926), Jordon (1947,57), Einstein, bergmann (1938)

$g_{ab}(x^i)$ als fundamentales geometrisches Feld
 $a,b=0,1,2,3,4$

$$g_{ab}(x^i) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + S^2 \Phi_\mu \Phi_\nu & \\ & S^2 \Phi_\mu \\ S^2 \Phi_\nu & S^2 \end{pmatrix}$$

mit:

$g^4_{\mu\nu}$ als metrischer Tensor in V_4

und

$g_{ab,4} = 0$ als Zylinderbedingung !

Dann:

$$\delta \int R^5 \sqrt{-g^5} d^5x = 0$$

→ simultan: Einsteinsche Feldgleichungen und Maxwellsche Vakuumgleichungen !

Sollte dann mathematisch äquivalent sein zu dem alten Mist !

Riemannsche Mannigfaltigkeit

Statt der Riemannschen Mannigfaltigkeit könnte man neben der Metrik $g_{\mu\nu}$ eine davon unabhängige

Konnektion $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ eingeführt :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

mit:

$$V^\lambda_{,\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} V^\alpha = 0$$

Mit der Änderung des Vektors beim Paralleltransport:

$$\delta V^\lambda = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} V^\alpha$$

$$\delta V_\lambda = \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} V_\alpha$$

Im Allgemeinen gilt:

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \neq 0$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma} \neq 0$$

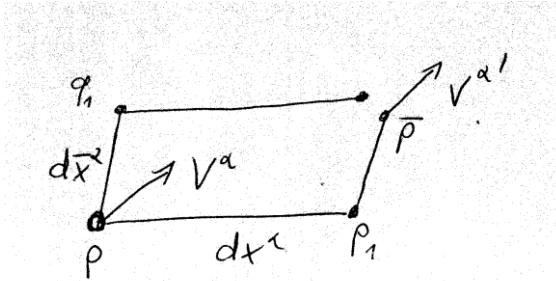
Torsion und Nichtmetrizität !

Geometrische Deutung:

Beim Parallelogramm für den Paralleltransport schließt sich das Parallelogramm, es bleibt lediglich ein Winkel zwischen den Vektoren bei Transport entlang der einen gegen die andere Richtung !

Sollte Torsion vorliegen, so schließt das Parallelogramm nicht einmal !

Es gibt einen Torsionszusatzterm !



Es gilt:

$$\Delta V^\beta = (dx^\nu - d\bar{x}^\nu) \Gamma^\beta_{\nu\rho} V^\rho \Big|_P - dx^\nu d\bar{x}^\sigma V^\rho R^\beta_{\rho\sigma\nu} \Big|_P$$

Für die Parallelverschiebung kann man dann ggf. eine verallgemeinerte kovariante Ableitung einführen:

$$A^\mu_{||\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

$$\frac{dx^\rho}{d\tau} (A_\mu A^\mu)_{||\rho} = \frac{dx^\rho}{d\tau} (A_{\mu||\rho} A^\mu + A_\mu A^{\mu||\rho})$$

$$(g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu)_{||\rho} = g^{\mu\nu}_{||\rho} A_\mu A_\nu + g^{\mu\nu} (A_\mu A_\nu)_{||\rho}$$

$$g^{\mu\nu} (A_\mu A_\nu)_{||\rho} = 0$$

$$g^{\mu\nu}_{||\rho} A_\mu A_\nu \sim Q^{\mu\nu}{}_\rho A_\mu A_\nu$$

Mit $R \neq 0, T \neq 0$ aber verschwindender Nichtmetrizität, also $Q=0$

haben wir als eine Verallgemeinerung die Riemann- Cartan- Räume (-> Einstein - Cartan- Theorien !)