Lista de Exercícios

Rodrigo Nascimento

29 de novembro de 2023

Problema 0.1 Mostre que $\vec{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{e}}_x$ e $\vec{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{e}}_y$ são vetores lineramente independentes. Calcule também a norma dos dois vetores.

Solução:

$\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ serão linearmente independentes se

$$\alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{w}} = 0, \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{1}$$

uma vez que

$$\alpha\vec{\mathbf{v}} = \alpha\hat{\mathbf{e}}_x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta\vec{\mathbf{w}} = \beta\hat{\mathbf{e}}_y = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tem-se que

$$\alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{w}} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se e somente se } \alpha, \beta = 0$$

logo

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{e}}_x\,, \quad \vec{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{e}}_y, \quad \text{são linearmente independentes}} \tag{2}$$

A norma (ou módulo) destes dois vetores é dada por

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{v}}\| &= \sqrt{\hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x} \\ &= \delta_{xx} \\ &= 1 \\ \|\vec{\mathbf{w}}\| &= \sqrt{\hat{\mathbf{e}}_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_y} \\ &= \delta_{yy} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Problema 0.2 Considere os seguintes vetores no $\mathbb{R}^2$: $\vec{\mathbf{v}} = (1,2)^T$ e $\vec{\mathbf{w}} = (-1,1)^T$.

a. Estes vetores são linearmente independentes?

b. Escreva qualquer vetor $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ na base dada por $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$.

Solução:

a. Desde que

$$\alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{w}} = 0$$
$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 0$$

isto é

$$\begin{cases}\alpha - \beta = 0\\ 2\alpha + \beta = 0\end{cases} \implies \alpha, \beta = 0, \quad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

conclui-se que $\boxed{\vec{\mathbf{v}} \text{ e } \vec{\mathbf{w}} \text{ são linearmente independentes}}$

b. Escolhendo arbitrariamente $\alpha = 4$ e $\beta = 6$, então $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ é dado por

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

logo $\vec{\mathbf{x}} = (-2, 8)^T$

Problema 0.3 Determinar todos os vetores do $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $\vec{\mathbf{v}} = (2,0,1)^T$.

Solução:

Definição 0.1 Dois vetores quaisquer $|u\rangle$ e $|v\rangle$ são ortogonais se

$$\langle u|v\rangle = 0 \tag{3}$$

Definindo $\langle u| = (u_1, u_2, u_3)$ tem-se

$$\begin{aligned}\langle u|v\rangle &= (u_1, u_2, u_3)\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= 2u_1 + u_3 = 0 \implies u_1 = -\frac{u_3}{2}\end{aligned}$$

logo, qualquer vetor da forma $\langle u| = (-u_3/2, u_2, u_3)$ será ortogonal à $|v\rangle$

Problema 0.4 Mostrar que vale a identidade $(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})\times\vec{\mathbf{w}} = \left(\vec{\mathbf{w}}^T\cdot\vec{\mathbf{u}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} - \left(\vec{\mathbf{w}}^T\cdot\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{u}}$. Deduzir que $\vec{\mathbf{u}}^T\cdot(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})$

Considere a definição a seguir

Definição 0.2 O produto vetorial entre dois vetores em termos do símbolo de Levi-Civita é

$$\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}} = \sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}u_iv_j\hat{\mathbf{e}}_k \tag{4}$$

deseja-se demostrar que

$$(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})\times\vec{\mathbf{w}} = \left(\vec{\mathbf{w}}^T\cdot\vec{\mathbf{u}}\right)\cdot\vec{\mathbf{v}} - \left(\vec{\mathbf{w}}^T\cdot\vec{\mathbf{v}}\right)\cdot\vec{\mathbf{u}}$$

Demonstração. Utilizando a definição 0.2, tem-se que

$$(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})\times\vec{\mathbf{w}} = \sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})_iw_j\hat{\mathbf{e}}_k$$

dado que

$$\boxed{(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})_i = \sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}u_jv_k}$$

ficamos com

$$\begin{aligned}(\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}})\times\vec{\mathbf{w}} &= \sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\left(\sum_{l,m}\varepsilon_{lmi}\vec{\mathbf{u}}_l\vec{\mathbf{v}}_m\right)\vec{\mathbf{w}}_j\hat{\mathbf{e}}_k\\ &= \sum_{i,j,k,l,m}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmi}\vec{\mathbf{u}}_l\vec{\mathbf{v}}_m\vec{\mathbf{w}}_j\hat{\mathbf{e}}_k\end{aligned}$$

usando a relação

$$\boxed{\sum_i \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmi} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} &= \sum_{j,k,l,m} (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\vec{\mathbf{u}}_l\vec{\mathbf{v}}_m\vec{\mathbf{w}}_j\hat{\mathbf{e}}_k \\
&= \sum_{j,k,l,m} \delta_{jl}\delta_{km}\vec{\mathbf{u}}_l\vec{\mathbf{v}}_m\vec{\mathbf{w}}_j\hat{\mathbf{e}}_k - \sum_{j,k,l,m} \delta_{jm}\delta_{kl}\vec{\mathbf{u}}_l\vec{\mathbf{v}}_m\vec{\mathbf{w}}_j\hat{\mathbf{e}}_k \\
&= \sum_{j,l} \vec{\mathbf{w}}_j\vec{\mathbf{u}}_l\delta_{jl} \sum_{k,m} \hat{\mathbf{e}}_k\vec{\mathbf{v}}_m\delta_{km} - \sum_{j,m} \vec{\mathbf{w}}_j\vec{\mathbf{v}}_m\delta_{jm} \sum_{k,l} \hat{\mathbf{e}}_k\vec{\mathbf{u}}_l
\end{aligned}$$

usando a definição

Definição 0.3 Dado dois vetores $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$, o produto escalar entre estes vetores é, por definição

$$\vec{\mathbf{u}}^T \cdot \vec{\mathbf{v}} = \sum_{i,j} u_i v_j \delta_{ij} \tag{5}$$

logo

$$(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} = \left(\vec{\mathbf{w}}^T \cdot \vec{\mathbf{u}}\right)\vec{\mathbf{v}} - \left(\vec{\mathbf{w}}^T \cdot \vec{\mathbf{v}}\right)\vec{\mathbf{u}}$$

□

A segunda demonstração envolve o produto misto

$$\vec{\mathbf{u}}^T \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = 0$$

Demonstração. Usando a definição 0.3, devemos ter

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{u}}^T \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) &= \sum_{i,j} u_i (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i,j} u_i \left(\sum_{i,k} \varepsilon_{ijk} u_i v_k\right)\delta_{ij} \\
&= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} u_i^2 v_k \delta_{ij} \\
&= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \delta_{ij} u_i^2 v_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Problema 0.5 Usando a definição de produto vetorial em termos dos versores de base, deduzir as propriedades do produto vetorial de dois vetores qualquer.