
RODRIGO RIBAMAR SILVA DO NASCIMENTO
3 de março de 2022

Lista de Astronomia: MÓDULO-2 (Gravitação)

Problema 1. Seja

$$\vec{r} : \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad e \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (1)$$

encontrar \hat{r} e $\hat{\varphi}$ em termos de \hat{i} e \hat{j} ,

a) Utilizando

$$\hat{r} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dr}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dr}\right|} \quad e \quad \hat{\varphi} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\varphi}}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right|} \quad (2)$$

b) Demonstre que $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$.

Solução 1. a) Visto que o vetor \vec{r} , pode ser escrito em coordenadas polares como $\vec{r} = r \cos \varphi \hat{i} + r \sin \varphi \hat{j}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dr} &= \frac{d}{dr} (r \cos \varphi \hat{i} + r \sin \varphi \hat{j}) \\ \frac{d\vec{r}}{dr} &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \end{aligned} \quad (3)$$

cujos módulos são (SARAIVA, 2004)

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dr} \right| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1 \quad (4)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{d\varphi} &= \frac{d}{d\varphi} (r \cos \varphi \hat{i} + r \sin \varphi \hat{j}) \\ \frac{d\vec{r}}{d\varphi} &= -r \sin \varphi \hat{i} + r \cos \varphi \hat{j}\end{aligned}\tag{5}$$

de módulo

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right| = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = r\tag{6}$$

e por fim obtemos

$$\hat{r} = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}\tag{7}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}.\tag{8}$$

b) Sendo \vec{r} definido por $\vec{r} \rightarrow \vec{r}(r, \varphi)$ então $\dot{\vec{r}}$ é dado, por Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(r, \varphi) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt}\tag{9}$$

é claro que ∂_r e ∂_φ de $\vec{r}(r, \varphi)$ é simplesmente $d\vec{r}/dr$ e $d\vec{r}/d\varphi$ respectivamente, além do mais $\dot{r} = dr/dt$ e $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$, então substituindo os resultados do item a) temos

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(r, \varphi) = (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) \dot{r} + (-r \sin \varphi \hat{i} + r \cos \varphi \hat{j}) \dot{\varphi} \\ &= \hat{r} \dot{r} + r (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) \dot{\varphi} \therefore \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi}.\end{aligned}\tag{10}$$

Referências

SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia & Astrofísica**. LIVRARIA DA FÍSICA, 2004. ISBN 9788588325234. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=IPWZCh1awFIC>>.