Universidade Estadual de Santa Catarina - UDESC

Centro de Ciências Tecnológicas - CCT

Departamento de Física - DFIS

RODRIGO RIBAMAR SILVA DO NASCIMENTO

28 de março de 2022

Lista de Astronomia: MÓDULO-2 (Gravitação)

Problema 1. Seja

$$\vec{r}:\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases} \qquad e \quad \vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \tag{1}$$

encontrar $\hat{r}$ e $\hat{\varphi}$ em termos de $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$,

a) Utilizando

$$\hat{r} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dr}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dr}\right|} \qquad e \quad \hat{\varphi} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\varphi}}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right|} \tag{2}$$

b) Demonstre que $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$.

Solução 1. a) Visto que o vetor $\vec{r}$, pode ser escrito em coordenadas polares como $\vec{r} = r\cos\varphi\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{\jmath}$ tem-se:

$$\frac{d\vec{r}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(r\cos\varphi\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{\jmath}\right)$$
$$\frac{d\vec{r}}{dr} = \cos\varphi\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\varphi\hat{\jmath} \tag{3}$$

cujo o módulo é (SARAIVA, 2004)

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dr}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \mathrm{sen}^2\,\varphi} = 1 \tag{4}$$

e

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(r\cos\varphi\hat{i} + r\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{j}\right)$$
$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = -r\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{i} + r\cos\varphi\hat{j} \tag{5}$$

de módulo

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = \sqrt{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi + r^2\cos\varphi} = r \tag{6}$$

e por fim obtemos

$$\hat{r} = \cos\varphi\hat{i} + \mathrm{sen}\,\varphi\hat{j} \tag{7}$$
$$\hat{\varphi} = -\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}. \tag{8}$$

b) Sendo $\vec{r}$ definido por $\vec{r} \to \vec{r}(r,\varphi)$ então $\dot{\vec{r}}$ é dado, por Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(r,\varphi) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \tag{9}$$

é claro que ∂_r e ∂_φ de $\vec{r}(r,\varphi)$ é simplesmente $d\vec{r}/dr$ e $d\vec{r}/d\varphi$ respectivamente, além do mais $\dot{r} = dr/dt$ e $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$, então substituindo os resultados do item a) temos

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(r,\varphi) = \left(\cos\varphi\hat{i} + \mathrm{sen}\,\varphi\hat{j}\right)\dot{r} + \left(-r\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{i} + r\cos\varphi\hat{j}\right)\dot{\varphi}$$
$$= \hat{r}\dot{r} + r\left(-\,\mathrm{sen}\,\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}\right)\dot{\varphi} \therefore$$
$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}. \tag{10}$$

Referências

SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia & Astrofísica**. LIVRARIA DA FÍSICA, 2004. ISBN 9788588325234. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=IPWZCh1awFIC>.