UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DFIS
ELETROMAGNESTISMO – EMG001

Aluno(a): Rodrigo Ribamar Silva do Nascimento

Professor(a): Cíntia Aguiar **Capítulo(s) Ref.:** I/II

Recuperação de Atividade: 001 **Data:** 29/03/2023 **Fase:** LEF102-06U

AVALIAÇÃO – I

Resumo: Atividade de recuperação, sobre os conteúdos do livro texto [1]

Palavras chave: Lei de de Coulomb; Campo Eletrostático; Método da Integração Direta; Aplicações.

Sumário

Problema 1. Use integração direta em coordenadas cilíndricas para resolver o prblema abaixo

Uma barra fina, não condutora, de comprimento L tem uma densidade de carga uniforme positiva λ. Calcule o campo elétrico no ponto P, situado a uma distância a perpendicular ao seu comprimento. Apresente seu desenho definindo todos os vetores e grandezas utilizadas.

Solução 1. Considere a figura a seguir:

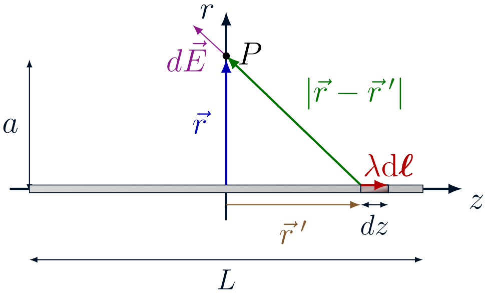

Figura 1 – Barra não condutora de comprimento L e densidade linear de carga λ

Um elemento de carga $dq = \lambda d\vec{l}$ encontra-se representado na Figura 1, o vetor $\vec{r}\,'$ localiza o elemento de carga dq, e o vetor $\vec{r}$ localiza o ponto P situado a uma distância a da barra. O elemento de carga, produz no ponto P um elemento de campo $d\vec{E}$ tal que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dq\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \tag{1}$$

O problema pede pra calcular em coordenadas cilíndricas, segue então que:

$$\vec{r} = a\hat{r} \tag{2a}$$
$$\vec{r}\,' = z\hat{k} \tag{2b}$$
$$\vec{r}-\vec{r}\,' = a\hat{r} - z\hat{k} \tag{2c}$$
$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{a^2+z^2} \tag{2d}$$
$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3 = \left(a^2+z^2\right)^{3/2} \tag{2e}$$
$$dl = dz \tag{2f}$$

Reescrevendo a integral ficamos com

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda\left(a\hat{r}-z\hat{k}\right)}{(a^2+z^2)^{3/2}} dz \tag{3}$$

Resolvendo a integral acima

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{a\hat{r} - z\hat{k}}{(a^2+z^2)^{3/2}}dz \\
\frac{4\pi\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})}{\lambda} &= \left[\int_{-L/2}^{L/2}\frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}dz\right]\hat{r} - \left[\int_{-L/2}^{L/2}\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}dz\right]\hat{k}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

A primeira integral sai por substituição trigonométrica de modo que

$$z = a\,\mathrm{tg}\,u \tag{5a}$$

$$dz = a\sec^2 u du \tag{5b}$$

$$z^2 = a^2\sec^2 u \tag{5c}$$

$$\mathrm{sen}\,u = \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \tag{5d}$$

ou seja

$$
\begin{aligned}
\int\frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}dz &= \int\left[\frac{a}{(a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2\,u)^{3/2}}a\sec^2 u\right]du \\
&= \frac{1}{a}\int\frac{\sec^2 u}{(1+\mathrm{tg}^2\,u)^{3/2}}du \\
&= \frac{1}{a}\int\frac{1}{\sec u}du \\
&= \frac{1}{a}\int\cos u du \\
&= \frac{1}{a}\,\mathrm{sen}\,u + C
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Já a segunda integral sai por substituição direta, segue que

$$u = a^2 + z^2 \tag{7a}$$

$$du = 2zdz \tag{7b}$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\int\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}dz &= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{u^{1/2}} + C
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Voltando ao problema

$$
\begin{aligned}
\frac{4\pi\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})}{\lambda} &= \frac{1}{a}\left[\left.\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right|_{-L/2}^{L/2}\right]\hat{r} - \left[\left.\frac{-1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right|_{-L/2}^{L/2}\right]\hat{k} \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{L}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2/4}} - \frac{-L}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2/4}}\right]\hat{r} + \left[\cancelto{0}{\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2/4}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2/4}}}\right]\hat{k}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

O campo resultante apenas tem coordenada na direção $\hat{r}$ por conta da simetria do problema (ponto P exatamente no meio da linha de cargas a altura a). Por fim ficamos com

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi a\varepsilon_0}\frac{2L}{\sqrt{a^2+L^2}}\hat{r}} \tag{10}$$

Referências

1 REITZ, J. R. *et al.* **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. 3. ed. [S.l.]: Editora Campus, 1982. ISBN 9788570011039. Citado na página 1.