UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DFIS
MECÂNICA QUÂNTICA – I

Aluno(a): Rodrigo Ribamar Silva do Nascimento

Professor(a): Bruno Duarte da Silva Moreira **Capítulo(s) Ref.:** III

Lista de Exercícios: 002 **Data:** 01/06/2023 **Fase:** LEF102-08U

SEGUNDA AVALIAÇÃO

Sumário

Problema 01 . . . . **1**
Problema 02 . . . . **1**
Problema 03 . . . . **1**
Problema 04 . . . . **1**
Problema 05 . . . . **1**
Problema 06 . . . . **2**
Problema 07 . . . . **2**
Problema 08 . . . . **2**

Problema 1. Considere os vetores de estados

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 5i \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e } |\phi\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 8i \\ -9i \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Estes vetores estão normalizados? Se não, normalize-os.

b) Estes vetores são ortogonais?

Solução 1.

Problema 2. Mostre que os operadores $\hat{p}$ e $\hat{p}^2$ são hermitianos. Lembrando que:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \tag{2}$$

Problema 3. Os autoestados do poço infinito são autoestados do momento? Justifique.

Sugestão: Teste se a equação atuação do operador momento nos autoestados do poço infinito $\hat{p}\psi_n$ geram uma equação de autovalores. Se gerarem uma equação de autovalores, então ψ_n (que são autoestados do Hamiltoniano) serão também autoestados do momento.

Problema 4. (Problema 3.11 do Griffiths) Encontre a função de onda $\Phi(p, t)$, para uma partícula no estado fundamental do hoscilador harmônico. Qual é a probabilidade (com 2 algarismos significativos) de que uma medida do momento p de uma partícula neste estado produza um valor fora do range clássico.

Sugestão 01: Procure numa tabela matemática por uma "Distribuição Normal"ou "Função Erro"ou calcule com algum programa (wxMaxima, Mathematica, etc...) ou ainda consulte as notas da aula 08 (em particular o exercício feito no final desta aula).

Sugestão 02: Estude primeiramente o exemplo 3.4 do Griffiths (página 108).

Problema 5. Na lista 1 foi mostrado que $[\hat{p}, f(x)] = -i\hbar \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$. Utilizando este resultado, obtenha a relação de incerteza entre o operador hamiltoniano do oscilador harmônico

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{3}$$

e o operador $(\sigma_H \sigma_p)$. Comente se os operadores hamiltoniano e momento são compatíveis.

Problema 6. Um hamiltoniano de um certo sistema de 2 níveis é dado por

$$\hat{H} = \varepsilon \left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \right) \tag{4}$$

onde $|1\rangle$, $\langle 2|$ é uma base ortonormal e ε é um número com dimensão de energia.

a) Encontre a matriz que representa este Hamiltoniano (sugestão: encontre os elementos de matriz fazendo os sanduíches do operador).

b) Calcule seus autovalores e autovetores normalizados.

Problema 7. Um operador $\hat{A}$, representando um observável A, têm dois autoestados normalizados ψ_1 e ψ_2, com autovalores a_1 e a_2 respectivamente. O operador $\hat{B}$, representando o observável B, têm dois autoestados normalizados ϕ_1 e ϕ_2, com autovalores b_1 e b_2, respectivamente. Os autoestados se relacionam por:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{5}\left(3|\psi_1\rangle + 4|\psi_2\rangle\right), \quad \text{e } |\psi_2\rangle = \tfrac{1}{5}\left(4|\psi_1\rangle - 3|\psi_2\rangle\right) \tag{5}$$

a) O observável A é medido e o valor a_2 é obtido. Qual é o estado do sistema imediatamente após esta medida?

b) Se B é medido em seguida, quais são os possíveis resultados e quais são suas possibilidades?

c) Logo após a medida de B, A é medido novamente. Qual a é a probabilidade de obter a_1 novamente? **Cuidado:** considerar o problema completo, onde (item a) medida a_2, logo após medimos um dos estados de B (item b), e por fim medimos a_1.

Problema 8. Considere um sistema de dois níveis os kets $|\alpha_1\rangle$ e $|\alpha_2\rangle$ formam uma base ortonormal. Uma nova base $|\beta_1\rangle$ e $|\beta_2\rangle$ se relacionam com a antiga por:

$$|\beta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle\right), \quad \text{e } \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha_1\rangle - |\alpha_2\rangle\right) \tag{6}$$

Um operador $\hat{P}$ é representado na base $|\alpha_1\rangle$ e $|\alpha_2\rangle$ pela matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\alpha_1|\hat{P}|\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1|\hat{P}|\alpha_2\rangle \\ \langle\alpha_2|\hat{P}|\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2|\hat{P}|\alpha_2\rangle \end{pmatrix} \tag{7}$$

a) Encontre os autovalores deste operador e escreva-o na forma diagonal.

b) Encontre a representação de $\hat{P}$ na base $|\beta_1\rangle$ e $|\beta_2\rangle$.

Sugestão:

Escreva $\hat{P}$ na forma matricial abaixo

$$P = \begin{pmatrix} \langle\beta_1|\hat{P}|\beta_1\rangle & \langle\beta_1|\hat{P}|\beta_2\rangle \\ \langle\beta_2|\hat{P}|\beta_1\rangle & \langle\beta_2|\hat{P}|\beta_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\beta_1|\hat{\mathbb{1}}\hat{P}\hat{\mathbb{1}}|\beta_1\rangle & \langle\beta_1|\hat{\mathbb{1}}\hat{P}\hat{\mathbb{1}}|\beta_2\rangle \\ \langle\beta_2|\hat{\mathbb{1}}\hat{P}\hat{\mathbb{1}}|\beta_{\hat{1}}\rangle & \langle\beta_2|\hat{\mathbb{1}}\hat{P}\hat{\mathbb{1}}|\beta_2\rangle \end{pmatrix} \tag{8}$$

onde a identidade $\hat{\mathbb{1}}$ na base α_1 e α_2 é dada por

$$\hat{\mathbb{1}} = \sum_{i=1}^{2}|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| + |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| \tag{9}$$
