UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DFIS
ELETROMAGNESTISMO – EMG001

Aluno(a): Rodrigo Ribamar Silva do Nascimento

Professor(a): Cíntia Aguiar **Capítulo(s) Ref.:** IV/V/VI

Recuperação de Atividade: 002 **Data:** 10/05/2023 **Fase:** LEF102-06U

AVALIAÇÃO – II

Resumo: Atividade de recuperação, sobre os conteúdos do livro texto [1]

Palavras chave: Campos eletrostáticos em meios dielétricos; Polarização; Energia eletrostática; Densidade de energia de um campo eletrostático.

Sumário

Problema 1. Uma distribuição esférica de raio R tem densidade de cargas $\rho(r) = \rho_0/R$ para $0 \leq r \leq R$. Determine a autoenergia da distribuição de duas maneiras:

a) por integração direta;

b) por integração sobre o campo.

Solução 1. Assumindo que a distribuição esférica é um dielétrico de constante dielétrica ε, sem perda de generalidade, podemos usar a Lei de Gauss para calcular o campo dentro e fora da região, em seguida determinar o vetor deslocamento elétrico. Estas duas quantidades serão úteis nos procedimentos para a solução deste problema, logo, para pontos no interior da esfera tem-se que

$$\begin{aligned}
\oint \vec{E}_1 \cdot \hat{n}\, da &= \frac{1}{\varepsilon} \int_v \rho(r')\, dv, \quad \text{para } r \leq R \\
E_1(4\pi r^2) &= \frac{1}{R\varepsilon}\rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{r} r'^3\, dr' \\
E_1(4\pi r^2) &= \frac{\rho_0}{R\varepsilon}(2\pi)(2)\frac{r^4}{4} \\
E_1 &= \frac{\rho_0}{4\varepsilon R} r^2
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho_0}{4\varepsilon R} r^2\, \hat{r}, \quad \text{em } r \leq R} \tag{2}$$

e para o vetor deslocamento $\vec{D}_1$

$$\vec{D}_1 = \varepsilon \vec{E}_1 \tag{3}$$

$$\boxed{\vec{D}_1 = \frac{\rho}{4R} r^2\, \hat{r}, \quad \text{com } r \leq R} \tag{4}$$

Analogamente, para pontos externos

$$\begin{aligned}
\oint \vec{E}_2 \cdot \hat{n}\, da &= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho_0}{R} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{R} r'^3\, dr' \\
E_2(4\pi r^2) &= \frac{\pi R^3 \rho_0}{\varepsilon_0} \\
E_2 &= \frac{R^3\rho_0}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\, \hat{r}, \quad \text{se } r \geq R} \tag{6}$$

e

$$\boxed{\vec{D}_1 = \frac{\rho_0 R^3}{4}\frac{1}{r^2}\, \hat{r}, \quad \text{desde que } r \geq R} \tag{7}$$

a) *Calculando a autoenergia por integração direta:*

$$U = \frac{1}{2}\int_v \rho(r)\varphi(r)\,dv \tag{8}$$

No interior da esfera o campo é $\vec{E}_1$, no entanto, precisamos do potencial na superfície como referência, mas na superfície, o potencial tem que coincidir com o potêncial externo. Considerando $\varphi(\infty) = 0$ e utilizando a expressão do campo para pontos em que $r \geq R$, então

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \varphi(\infty) - \int_\infty^r \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_\infty^r \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr \\ &= -\left[\frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_\infty^r\right] \\ &= \frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r}\end{aligned} \tag{9}$$

e na superfície

$$\boxed{\varphi(R) = \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0}, \quad \text{para } r = R} \tag{10}$$

agora, o potencial no interior da superfície tendo por referência o potencial sobre a superfície é dado por

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \varphi(R) - \int_R^r \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0} - \int_R^r \frac{\rho_0}{4R\varepsilon}r^2\,dr \\ &= \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0} - \frac{\rho_0}{4R\varepsilon}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

simplificando resulta em

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{\rho_0 R^2}{12}\left(\frac{3\varepsilon + \varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\right) - \frac{\rho_0 r^3}{12\varepsilon R}} \tag{12}$$

note que se $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $r = R$ então

$$\varphi(R) = \frac{\rho_0 R^2}{12}\left(\frac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_0^2}\right) - \frac{\rho_0 R^2}{12\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0} \tag{13}$$

pois bem, tendo $\varphi(r)$ e $\rho(r)$, partimos para a solução da eq. (8)

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} \left(\frac{\rho_0}{R}\right) r \left[\frac{\rho_0 R^2}{12}\left(\frac{3\varepsilon+\varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\right) - \frac{\rho_0}{12\varepsilon R} r^3\right] r^2\, dr \\
&= \frac{2\pi\rho_0}{R}\left[\frac{\rho_0 R^2}{12}\left(\frac{3\varepsilon+\varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)\int\limits_0^R r^3\, dr - \frac{\rho_0}{12\varepsilon R}\int\limits_0^R r^6\, dr\right] \\
&= \frac{2\pi\rho_0}{R}\left[\frac{\rho_0 R^2}{12}\left(\frac{3\varepsilon+\varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)\frac{R^4}{4} - \frac{\rho_0}{12\varepsilon R}\frac{R^7}{7}\right] \\
&= \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{12}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{3\varepsilon+\varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\right) - \frac{1}{7\varepsilon}\right]
\end{aligned} \tag{14}$$

simplificando ficamos com

$$\boxed{U = \frac{\pi\rho_0^2 R^5}{56}\left(\frac{\varepsilon_0+7\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)} \tag{15}$$

b) *Calculando a autoenergia por integração sobre o campo:* Pressupondo que este método refere-se ao cálculo sobre os campos $\vec{E}$ e $\vec{D}$ tem-se que

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_v \vec{E}\cdot\vec{D}\, dv \tag{16}$$

segue que

$$U_T = U_1 + U_2 \tag{17}$$

com U_1 a autoenergia interna à superfície esférica e U_2 a parcela da autoenergia externa à mesma, de modo que

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{2}\int\limits_v \vec{E}_1\cdot\vec{D}_1\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} \left(\frac{\rho_0}{4R\varepsilon} r'^2\,\hat{r}\right)\cdot\left(\frac{\rho_0}{4R} r'^2\,\hat{r}\right) r'^2\, dr' \\
&= \frac{\pi\rho_0^2}{8R^2\varepsilon}\frac{R^7}{7} \implies \boxed{U_1 = \frac{\pi\rho_0^2 R^5}{56\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{18}$$

e fora da esfera

$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{1}{2}\int\limits_v \vec{E}_2\cdot\vec{D}_2\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int\limits_R^{\infty} \left(\frac{\rho_0 R^3}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}\,\hat{r}\right)\cdot\left(\frac{\rho_0 R^3}{4}\frac{1}{r'^2}\,\hat{r}\right) r'^2\, dr' \\
&= \frac{\pi\rho_0^2 R^6}{8\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\bigg|_R^{\infty}\right) \implies \boxed{U_2 = \frac{\pi\rho_0^2 R^5}{8\varepsilon_0}}
\end{aligned} \tag{19}$$

por fim

$$U_T = \frac{\pi\rho_0^2 R^5}{56\varepsilon} + \frac{\pi\rho_0^2 R^5}{8\varepsilon_0}$$

$$\boxed{U_T = \frac{\pi\rho_0 R^5}{56}\left(\frac{\varepsilon_0 + 7\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)} \tag{20}$$

como já obtido anteriormente.

Referências

1 REITZ, J. R. *et al.* **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. 3. ed. [S.l.]: Editora Campus, 1982. ISBN 9788570011039. Citado na página 1.