五、现在我们考虑一个三体系统。如图所示，质点的质量分别为 m_1, m_2, m_3，系统的质心为 CM。显然，对于任意一个质点可以列出运动方程：

$$\ddot{\vec{x_i}} = -G\sum_{j\neq i}\frac{m_j(\vec{x_i}-\vec{x_j})}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|^3}, \quad i=1,2,3 \tag{1}$$

这个方程组是一个高度耦合的非线性方程组，没有一般的通解。正如庞加莱所说："Numquam praeos transibunt sidera fines."（繁星无法超越）。下面我们将研究两个特殊的三体问题。

1. 试证明 (1) 式等价于

$$\ddot{\vec{s_i}} = -Gm\frac{\vec{s_i}}{|\vec{s_i}|^3} + m_i\vec{G}, \quad i=1,2,3$$

   其中 $\vec{G} = G\left(\frac{\vec{s_1}}{|\vec{s_1}|^3} + \frac{\vec{s_2}}{|\vec{s_2}|^3} + \frac{\vec{s_3}}{|\vec{s_3}|^3}\right)$，$m = m_1 + m_2 + m_3$。

2. Lagrange 发现了两个特解：三个质点都绕质心做椭圆运动，并且保持一个等边三角形。此时有 $\vec{G}=0$，即方程解耦合，试证明此时质点的运动方程可以写为

$$\ddot{\vec{x_i}} = -GM_i\frac{\vec{x_i}}{|\vec{x_i}|^3}, \quad i=1,2,3$$

   并用 m_1, m_2, m_3 表示 M_1, M_2, M_3。

3. Euler 也发现了三个特解：三个质点都绕质心做椭圆运动，并且保持在一条直线上。此时，设 $\vec{s_2} = \lambda\vec{s_3}$，$\vec{s_1} = -(\lambda+1)\vec{s_3}$，试写出 λ 满足的方程，要求展开成 λ 的多项式 $f(\lambda; m_1, m_2, m_3) = 0$ 的形式。

特别的，在限制性三体问题中（$m_3 \ll m_1, m_2$），以上的 5 个特解统称为拉格朗日点。