Имеем два пучка света, один референтный

$$E_1 = E_0 \cos \omega t,$$

и один модулируемый

$$E_2 = E_0 \cos(\omega t + \varphi(t)),$$

Референтный пучок проходит через золотую пленку и интерферирует с отраженным от нее модулируемым пучком.

Прошедший референтный пучок:

$$E_1^T = \tilde{T} E_0 \cos \omega t,$$

Отраженный модулируемый пучок:

$$E_2^R = \tilde{R} E_0 \cos(\omega t + \varphi(t) + \pi).$$

1 Простейший случай

Рассмотрим случай, когда $\tilde{T} = T = const$, $\tilde{R} = R = const$ и $\varphi(t) = \varphi = const$.

$$I = \langle (E_1^T + E_2^R)^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2} \left(T^2 + R^2 - 2TR \cos \varphi \right) = \bar{I}(T^2 + R^2 - 2TR \cos \varphi).$$

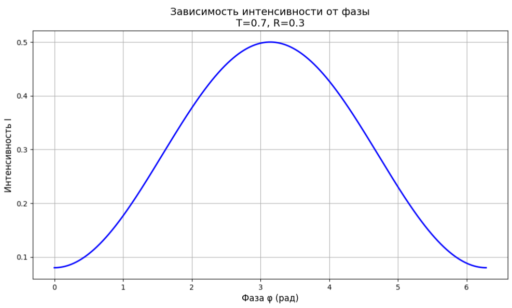

Рис. 1: Зависимость интенсивности от фазы в простейшем случае

2 Случай гармонической модуляции

Пусть снова $\tilde{T} = T = const$, $\tilde{R} = R = const$, но

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Phi \cos(\Omega t).$$

$$I(t) = \langle (E_1^T + E_2^R)^2 \rangle = \bar{I} \left(T^2 + R^2 - 2TR \cos(\varphi_0 + \Phi \cos(\Omega t)) \right).$$

Исходное выражение:

$$T^2 + R^2 - 2TR \cos\left(\varphi_0 + \Phi \cos(\Omega t)\right)$$

Разложение в ряд Фурье по гармоникам Ω:

1. Постоянная составляющая:

$$I_0 = \bar{I}(T^2 + R^2 - 2TR \cos \varphi_0)$$

2. Гармоники с частотами $n\Omega$:

$$I_n = \bar{I} a_n \cos(n\Omega t),$$

где коэффициенты a_n определяются следующим образом:

- Для чётных $n = 2k$ $(k \geq 1)$:

$$a_{2k} = -4TR \cos \varphi_0 \, (-1)^k J_{2k}(\Phi)$$

- Для нечётных $n = 2k + 1$ $(k \geq 0)$:

$$a_{2k+1} = 4TR \sin \varphi_0 \, (-1)^k J_{2k+1}(\Phi)$$

Первая гармоника:

$$I_1(t) = \bar{I} \left(a_1 \cos(\Omega t) + b_1 \sin(\Omega t) \right) = 4\bar{I}TR \sin \varphi_0 \, J_1(\Phi) \cos(\Omega t)$$

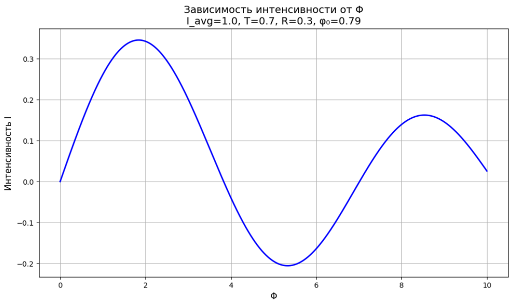

Рис. 2: Первая гармоника

Вторая гармоника:

$$I_2(t) = \bar{I}\left(a_2\cos(2\Omega t) + b_2\sin(2\Omega t)\right) = 4\bar{I}TR\cos\varphi_0\, J_2(\Phi)\cos(2\Omega t).$$

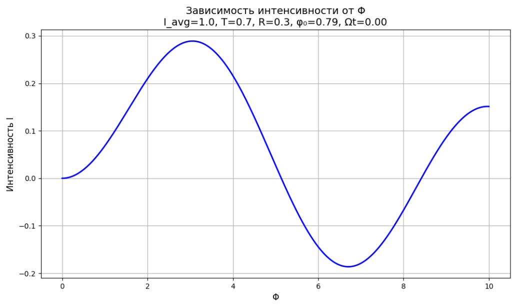

Рис. 3: Вторая гармоника

3 Случай когерентного контроля

Теперь $\tilde{T} = T_0 + T\cos(W\varphi)$, $\tilde{R} = R_0 + R\cos(W\varphi)$, $\varphi(t) = \varphi_0 + \Phi\cos(\Omega t)$.

$$I = \langle (E_1^T + E_2^R)^2 \rangle = \bar{I}(\tilde{T}^2 + \tilde{R}^2) - 2\bar{I}\tilde{T}\tilde{R}\cos\varphi(t)$$

Для разложения усреднённого выражения $\langle (E_1^T + E_2^R)^2 \rangle$ в ряд Фурье по гармоникам Ω используем разложение Якоби-Ангера для функций с фазовой модуляцией $\varphi(t) = \varphi_0 + \Phi\cos(\Omega t)$. Окончательный ряд Фурье имеет вид:

$$\langle (E_1^T + E_2^R)^2 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\bar{I}\left(T_0^2 + R_0^2 + \frac{T^2 + R^2}{2} \right) J_0(W\Phi)\delta_{n,0} \right] + \\ + \sum_{n\neq 0} \left[A_n\cos(n\Omega t) + B_n\sin(n\Omega t) \right]$$

где коэффициенты A_n и B_n выражаются через функции Бесселя J_n:

$$A_n = 2\bar{I}\left[(T_0T + R_0R)J_n(W\Phi)\cos\left(W\varphi_0 + \frac{n\pi}{2}\right) - T_0R_0J_n(\Phi)\cos\left(\varphi_0 + \frac{n\pi}{2}\right) \right],$$

$$B_n = 2\bar{I}\left[(T_0T + R_0R)J_n(W\Phi)\sin\left(W\varphi_0 + \frac{n\pi}{2}\right) - T_0R_0J_n(\Phi)\sin\left(\varphi_0 + \frac{n\pi}{2}\right) \right].$$

Первая гармоника:

$$I_1(t) = C_1\cos\left(\Omega t + \theta_1\right),$$

где:

$$\mathcal{A} = (T_0 T + R_0 R) J_1(W\Phi), \quad \mathcal{B} = T_0 R_0 J_1(\Phi).$$

$$C_1 = 2\bar{I}\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 - 2\mathcal{A}\mathcal{B}\cos\left((W-1)\varphi_0\right)}.$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{\mathcal{A}\cos(W\varphi_0) - \mathcal{B}\cos\varphi_0}{\mathcal{A}\sin(W\varphi_0) - \mathcal{B}\sin\varphi_0}\right).$$

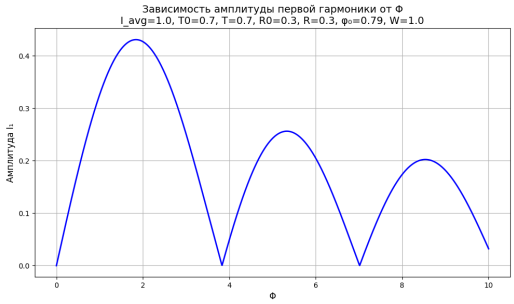

Рис. 4: Первая гармоника

Вторая гармоника:

$$I_2(t) = C_2\cos(2\Omega t + \theta_2),$$

где:

$$C_2 = 2\bar{I}\sqrt{\mathcal{A}_2^2 + \mathcal{B}_2^2 - 2\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2\cos\left((2W-2)\varphi_0\right)},$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\mathcal{A}_2\cos(2W\varphi_0) - \mathcal{B}_2\cos(2\varphi_0)}{\mathcal{A}_2\sin(2W\varphi_0) - \mathcal{B}_2\sin(2\varphi_0)}\right),$$

с коэффициентами:

$$\mathcal{A}_2 = \frac{(T_0 T + R_0 R) J_2(W\Phi)}{2}, \quad \mathcal{B}_2 = \frac{T_0 R_0 J_2(\Phi)}{2}.$$

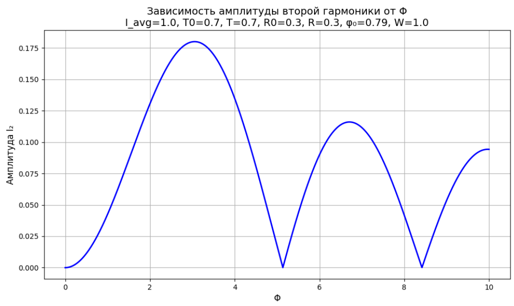

Рис. 5: Вторая гармоника