

Agentų modeliavimas

Aleksejus Kononovičius

Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Vilniaus universitetas

✉ aleksejus.kononovicius@tfai.vu.lt

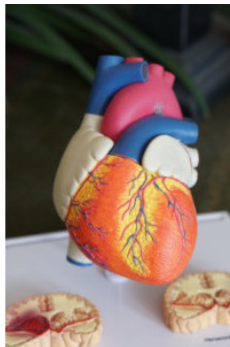
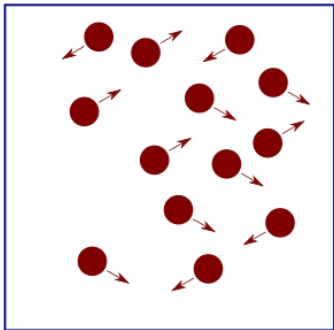
🔗 kononovicius.lt, rf.mokslasplius.lt



**Faculty of
Physics**



Kompleksinių fizinių ir socialinių sistemų grupė



Vystomos sritys: netiesinė dinamika ir sinchronizacija, ilga atmintis, sociofizika ir ekonofizika.

Rizikos fizikos tinklaraštis

[Physics of Risk](#) [About](#) [Topics](#) [Students](#) [Contribute](#)

Riddler's football playoff

February 21, 2023 [Antanas Kukuravičius](#) [Interactive media](#) [Resources](#) [Reports](#) [Write/Type/Write](#)

This week we will take a look at another Riddler's Classic puzzle. The problem for December 9th, 2022 invites us to take a look at a particular stochastic football tournament.

The problem

Four teams participate in knock-out tournament. Two pairs play their semi-final games, while the winners advance and play the final game to determine the overall winner.

Each team is described by a random variable x_i (equally distributed in $[0, 1]$ interval), which stands for its strength. Semi-finals are seeded appropriately - the strongest team (one with highest x_i) is paired with the weakest one (one with lowest x_i), while the other two form the second pair.

The outcome of each match is random. The probability that team i will beat team j is given by

$$p(w_{ij} = i) = \frac{x_i}{x_i + x_j}. \quad (1)$$

Question: What is the average quality of the champion?

Analytical solution

Let us first consider a simpler problem. Let's assume that we have just two competing teams and, therefore, a single match to play. In this case it is just but a simple arithmetic exercise, as if team i wins, then the winner is of strength x_i , otherwise team j wins and the winner's strength is x_j . The average is given by:

$$\bar{x}_2(x_i, x_j) = x_i p(w_{ij} = i) + x_j p(w_{ij} = j) = \frac{x_i^2}{x_i + x_j} + \frac{x_j^2}{x_i + x_j}. \quad (2)$$

The above average is over a match between two particular teams (to denote this we use bar above the x). To get the answer we are looking for we need to average over all possible team pairs:

$$\langle x_c \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \bar{x}_2(x_i, x_j) dx_i dx_j = \frac{4 \ln(2) - 1}{3} \approx 0.591 \dots \quad (3)$$

Four team case

Dealing with the four team case follows similar logic, but there is a complicating that teams are ranked. So, let us assume that $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$. There are four possible champions and we need to calculate the probabilities of each outcome.

First let us consider the outcome when team i is the champion. For this to happen i needs to beat team j in the



Physics of risk, complexity and socio-economic systems.

- Subscribe via RSS feed
- Follow on Facebook
- Content @ GitHub
- Models @ GitHub
- Theme @ GitHub

- Vilnius University
- Faculty of Physics
- Institute of Physics
- Institute of Theoretical Physics and Astronomy
- COST P10 meeting in Vilnius (2008)
- DPG Physics of Socio-Economic Systems Division
- European Centre for Living Technology
- PPS Physics in Economy and Social Sciences

Riddler's Classic

Models

Riddler's Classic

Resources

Riddler's Classic

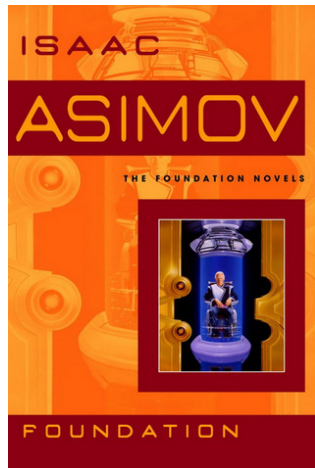
Reports

Riddler's Classic

Write/Type/Write

Planas

- 1 Įvadas į agentų modeliavimą
- 2 Protingi agentai ir lošimų teorija
- 3 Turtas ir idealios dujos
- 4 Tinklų teorija
- 5 Nuomonių dinamika



Paveikslas: [goodreads.com](https://www.goodreads.com)

A low-angle, upward-looking shot of a modern skyscraper with a glass facade. The building's structure is composed of a grid of dark frames and reflective glass panels. The sky is a clear, bright blue. The perspective creates a sense of height and architectural scale.

Įvadas į agentų modeliavimą

Kas tai?

Modeliavimas yra realybės apibendrinimas.

Agentai:

- atitinka modeliuojamas esybes,
- turi būdingas savybes,
- gali siekti tikslų,
- sąveikauja su aplinka,
- sąveikauja su kitais.



“Visi modeliai yra klaidingi, bet dalis jų yra naudingi” (George Box)

Kam to reikia?

- **Agentai:** keleiviai

- **Aplinka:** lėktuvas (praėjimas, kėdės, lentynos)

Configuration

Choose an airplane model

Airplane model
A318 (22 rows - 132 seats)

OR

Configure your own aircraft

Number of seat rows
22

Configurations taken from: <https://www.scribd.com/doc/30183905/All-About-Airbus-A-320-Family>

Passenger number
132

Passenger with luggage per cent
0

On Off Storing luggage takes time

Boarding method
BS1-Random with assigned seats

setup go once go

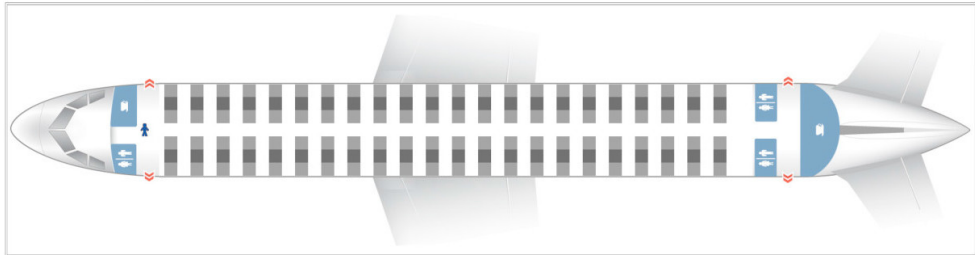
Output

airplane-configuration
A318 (22 rows - 132 seats)

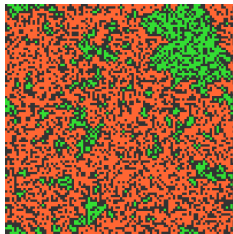
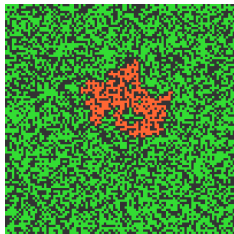
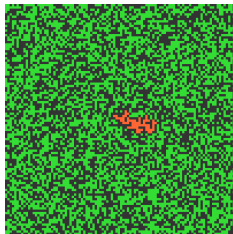
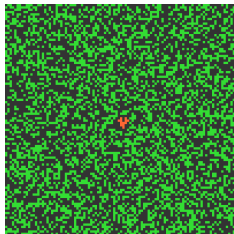
passenger-with-luggage-number
0

passenger-without-luggage-number
132

counter
0



Kas įdomaus iš fizikos pusės?

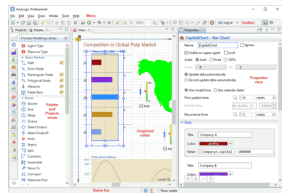
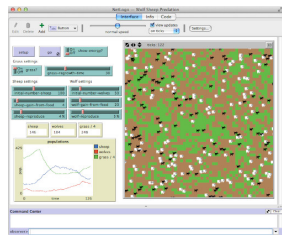


Miško gaisro modelis:


- Miškas: ρ medžių tankis
- Gaisras: plinta tarp gretimų medžių
- Kiek išplis gaisras?

Paveiksle: $\rho = 0.4, 0.5, 0.55$ ir 0.6 .

- NetLogo - grafiniai elementai, sava kalba (Logo)
- GAMA - GIS, sava kalba (paremta Java)
- AnyLogic - korporacinio lygio įrankis
- Agents.jl - Julia
- Mason - Java, turi GIS plėtinį
- Mesa - Python
- Repast - Java, palaiko HPC



Apžvalga: [Antelmi *et al.*(2022)]; Paveikslai: Wikimedia, Anylogic



Protingi agentai ir lošimų teorija

Lošimų teorija (angl. game theory)

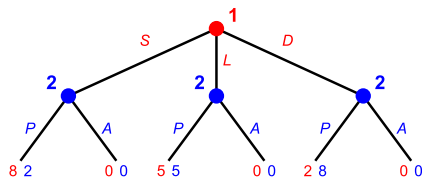
Tiria sąveikas tarp racionalių ir savanaudžių agentų.

Lošimai:

- kooperaciniai arba konkurenciniai
- (ne)nulinės sumos
- (a)simetriniai
- (a)sinchroniniai
- baigtiniai arba begaliniai
- ...

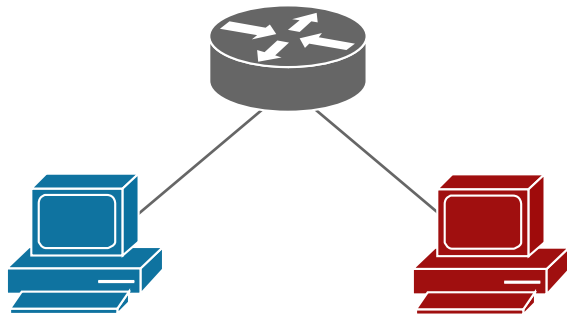
	Ak	Ži	Po
Akmuo	0, 0	1, -1	-1, 1
Žirklys	-1, 1	0, 0	1, -1
Popierius	1, -1	-1, 1	0, 0

angl. rock-paper-scissors



angl. ultimatum game

“Grynos” (angl. pure) strategijos



	“Ba”	Ne
“Backoff”	-1, -1	-4, 0
Ne	0, -4	-3, -3

angl. TCP backoff game

- Kas yra optimalu?
- Kas yra racionalu?

Ikonos: [vecta.io](https://www.vecta.io)

Mišrios (angl. mixed) strategijos



$m \backslash v$	Tw	Ra
Twilight	2, 1	0, 0
Rambo	0, 0	1, 2

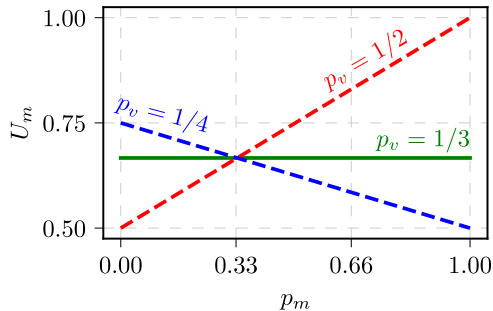
angl. battle of the sexes

Ką daryti kai vieno akivaizdaus pasirinkimo nėra?

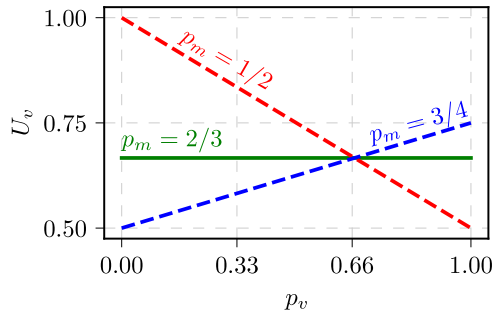
$$U_m(p_m = 1, p_v) = U_m(p_m = 0, p_v),$$

$$U_v(p_m, p_v = 1) = U_v(p_m, p_v = 1).$$

Kas nutiks nukrypus nuo mišrios strategijos?



$$U_m(p_m, p_v) = 2p_m p_v + (1 - p_m)(1 - p_v)$$



$$U_v(p_m, p_v) = p_m p_v + 2(1 - p_m)(1 - p_v)$$

Kai kurie lošimai neturi “grynos” strategijos

$v \backslash s$	Ka	De
Kairė	1, 0	0, 1
Dešinė	0, 1	1, 0

angl. matching pennies



Vartininkas bando atspėti į kurią pusę smūgiuos smūgiuojantis.

$$U_v(p_v, p_s) = p_v p_s + (1 - p_v)(1 - p_s), \quad U_s(p_v, p_s) = p_v(1 - p_s) + (1 - p_v)p_s$$

Praktiniai klausimai treneriui

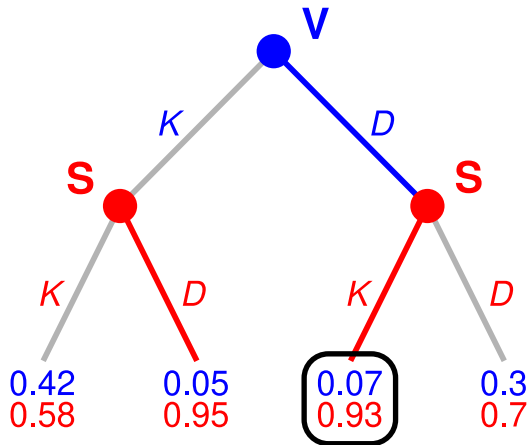
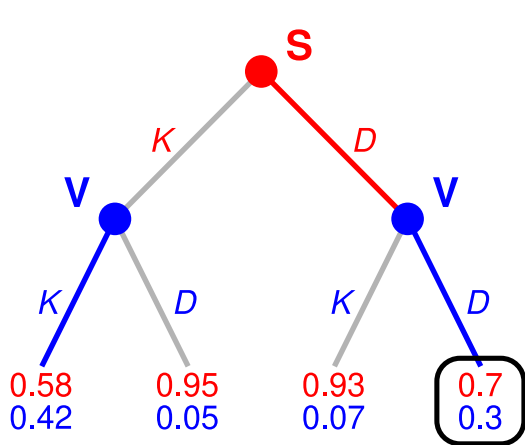


$v \backslash s$	Kairė	Dešinė
Kairė	0.42, 0.58	0.07, 0.93
Dešinė	0.05, 0.95	0.3, 0.7

- 1 Kaip elgtis vartininkui?
(Ats.: $p_v \approx 0.42$)
- 2 Ką daryti smūgiuojančiam?
(Ats.: $p_s \approx 0.38$)
- 3 Kokios baigčių tikimybės?
(Ats.: $U_v \approx 0.2$)

Empirinis lošimas: [Palacios-Huerta (2003)]; Paveikslas: sportingnews.com

Greitesnė reakcija



Sudėtingesni klausimai

- Daugiau veiksmų
- Daugiau žaidėjų
- Daugiau lošimų
- Atsitiktiniai lošimai
- Alternatyvūs “racionalumai”

Efektyvūs lošimai:

- Aukcionų mechanizmai
- Balsavimo mechanizmai
- ...

Atsparumas:

- Klaidoms
- Piktnaudžiavimui

Rekomendacija: “Game Theory” kursas ([Coursera](#) ir [Youtube](#))



Turtas ir idealios dujos

Kinetinis modelis (angl. kinetic exchange model)

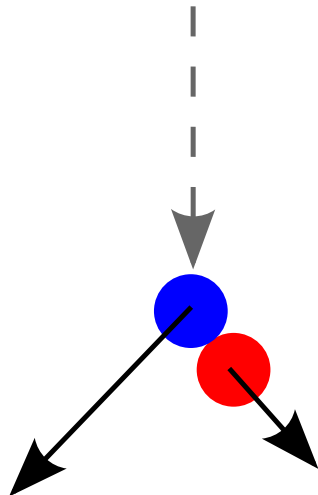
- 1 Susiduria dvi daleles i ir j .
- 2 Susidūrimo metu bus perduota Δw_{ij} energijos:

$$\Delta w_{ij} = r_i w_i - r_j w_j.$$

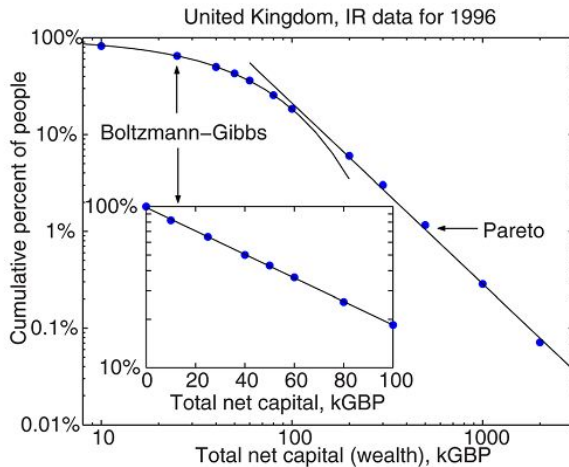
- 3 Atnaujiname energijas:

$$w_i(t+1) = w_i(t) - \Delta w_{ij},$$

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \Delta w_{ij}.$$



Empiriniai turto duomenys



Elementarus kinetinis modelis

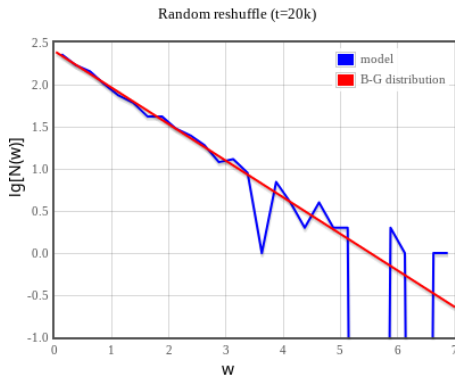
- 1 Susitinka du agentai i ir j .
- 2 Sąveikos metu perduodama Δw_{ij} turto:

$$\Delta w_{ij} = (1 - \varepsilon) w_i - \varepsilon w_j.$$

- 3 Atnaujina turtus:

$$w_i(t+1) = w_i(t) - \Delta w_{ij},$$

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \Delta w_{ij}.$$



Programėlė: Elementarus kinetiniai modeliai (RF)

Elementaraus kinetinio modelio analizė

- Pagrindinė kinetinė lygtis:

$$\frac{\partial p(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial N^+(w, t)}{\partial t} - \frac{\partial N^-(w, t)}{\partial t}$$

- “Išeinančios” dalelės: $\frac{\partial N^-(w, t)}{\partial t} \sim 2p(w, t)$
- “Ateinančios” dalelės: $\frac{\partial N^+(w, t)}{\partial t} \sim 2\mathbb{P}[0 < w < w_i(t) + w_j(t)]$
- Stacionarus skirstinys:

$$\frac{\partial p_{st}(w, t)}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad p_{st} \sim \mathbb{P}[\dots], \quad \Rightarrow \quad p_{st}(w) = \frac{1}{\langle w \rangle} \exp\left(-\frac{w}{\langle w \rangle}\right).$$

Santykinis taupymas

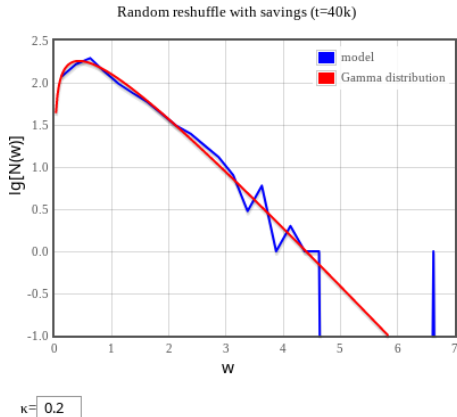
- 1 Susitinka du agentai i ir j .
- 2 Sąveikos metu perduodama Δw_{ij} turto:

$$\Delta w_{ij} = (1 - \kappa) [(1 - \varepsilon) w_i - \varepsilon w_j].$$

- 3 Atnaujiname turtus:

$$w_i(t+1) = w_i(t) - \Delta w_{ij},$$

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \Delta w_{ij}.$$



Programėlė: Turto modeliavimas kinetiniais modeliais (RF)

Momentų analizė

Pusiausvyroje kairė ir dešinė pusė turėtų turėti tą patį skirstinį:

$$w_i(t+1) \stackrel{d}{=} \kappa w_i(t) + \varepsilon(1-\kappa)[w_i(t) + w_j(t)]$$

Taigi:

$$\langle w^m \rangle = \langle \{ \kappa w_i + \varepsilon(1-\kappa)[w_i + w_j] \}^m \rangle.$$

Spręsti turime rekurentiškai:

$$\langle w^1 \rangle = 1,$$

$$\langle w^2 \rangle = \frac{\kappa + 2}{1 + 2\kappa},$$

$$\langle w^3 \rangle = \frac{3(\kappa + 2)}{(1 + 2\kappa)^2},$$

$$\langle w^4 \rangle = \frac{72 + 12\kappa - 2\kappa^2 + 9\kappa^3 - \kappa^5}{(1 + 2\kappa)^2 (3 + 6\kappa - \kappa^2 + 2\kappa^3)}.$$

Ganėtinai gera aproksimacija:

$$p(w) \sim w^{n-1} \exp(-nw),$$

$$\text{kur } n = 1 + \frac{3\kappa}{1-\kappa}.$$

Laipsninio skirstinio gavimas

Yra žinoma, kad

$$\int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda x) d\lambda = \frac{1}{x^2}.$$

O kaip su santykinio taupymo modeliu?

$$p(\kappa) = ???$$

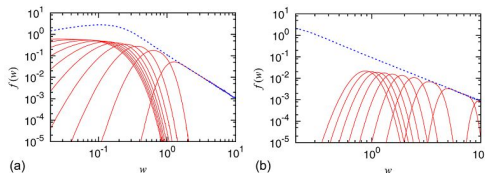
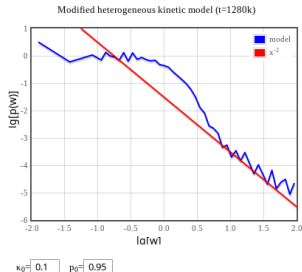


Fig. 3. (Color online) Wealth distribution $f(w)$ for uniformly distributed κ_i (or λ_i) in the interval $(0,1)$; $f(w)$ is decomposed into partial distributions $f_i(w)$, where each $f_i(w)$ is obtained by counting the statistics of those agents with parameter λ_i in a specific sub-interval (from Ref. 36). The left panel shows the decomposition of $f(w)$ into ten partial distributions in the λ -subintervals $(0, 0.1)$, $(0.1, 0.2)$, ..., $(0.9, 1)$. The right panel decomposes the final partial distribution in the λ -interval $(0.9, 1)$ into partial distributions obtained by counting the statistics of agents with λ -subintervals $(0.9, 0.91)$, $(0.91, 0.92)$, ..., $(0.99, 1)$. Note how the power law appears as a consequence of the superposition of the partial distributions.



Paveikslas: [Patriarca, Chakraborti (2013)]; Programėlė: Turto modeliavimas kinetiniais modeliais (RF)

Kinetiniai modeliai: turtui ir ne tik

Turtui:

- Suderinamumas su ekonomikos teorijomis
- Gabumų / sėkmės įtaka
- Laikinė dinamika
- Skirtingi įplaukų mechanizmai



Ne tik:

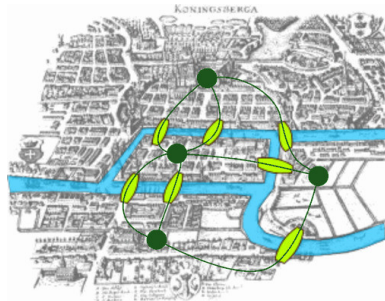
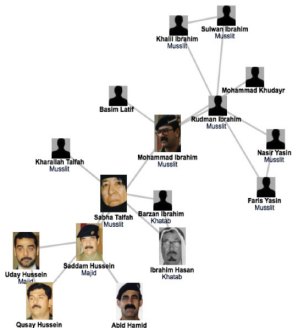
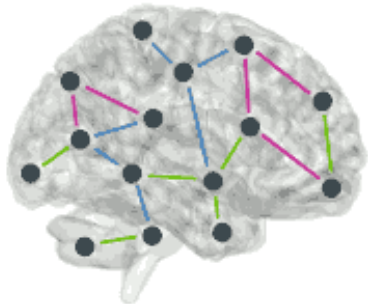
- Nuomonių dinamika (Biswas-Chatterjee-Sen modelis)
- Reitingavimo sistemos (pvz., ELO)
- Epidemiologinis modeliavimas pagal socialines kategorijas
- Alkoholio vartojimas

Apžvalgos: [Patriarca, Chakraborti (2013)], [Toscani *et al.*(2022)]; Paveikslas: interneto folkloras (politifake.org)



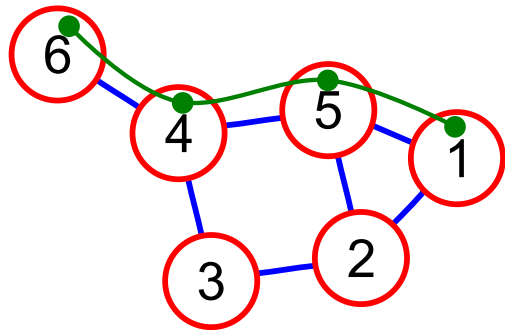
Tinklų teorija

Ryšiai



Paveikslai: [Lynn, Basset (2019)], slate.com, Wikimedia.

Pagrindiniai terminai



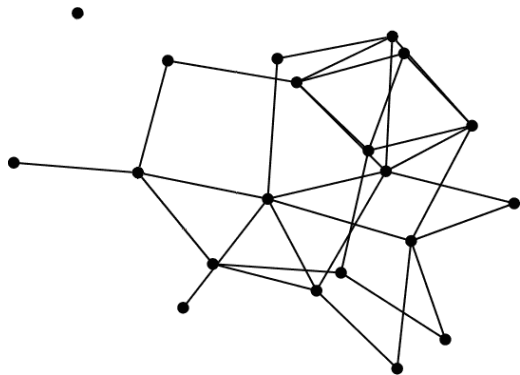
- **Tinklas** - mazgų ir jungčių rinkinys.
- Matematikams: grafai, viršūnės ir briaunos.
- **Gretimi** mazgai - sujungti jungtimi.
- Mazgo **laipsnis** - gretimų jam mazgų skaičius.
- **Kelias** - gretimų mazgų seka.
- **Geodezė** - trumpiausias kelias tarp mazgų i ir j .
- Tinklo **diametras** - ilgiausia geodezė tinkle.

Kaimynystės matrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Jei $A_{ij} \neq 0$, tai tinkle yra $j \rightarrow i$ jungtis.
- Mazgo laipsnis:
 $k_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{A_{ij} \neq 0} = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{A_{ji} \neq 0}$.
- $(\mathbf{A}^m)_{ij}$ pasako kiek yra m ilgio $j \rightarrow i$ kelių.
- **Kilpos:** $A_{ii} = 1$.
- Jungtys gali turėti **kryptį**: $A_{ij} \neq A_{ji}$.
- Kelios (**multi**) jungtys: $A_{ij} \in \mathbb{N}_0$.
- Jungtys gali turėti **svorį**: $A_{ij} \in \mathbb{R}$.

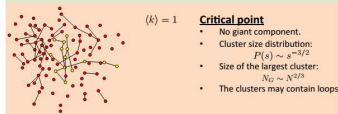
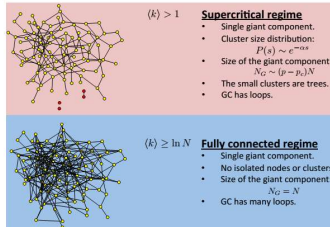
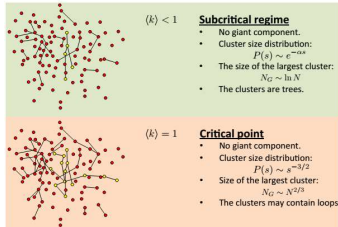
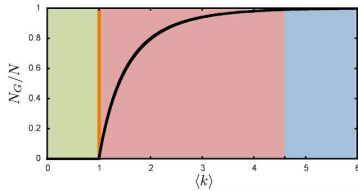
Erdos-Renyi (atsitiktinis) tinklas



- 1 Pradėkime nuo tinklo su N mazgų ir $L = 0$ jungčių.
 - 2 Kiekviena mazgų pora (viso $N(N - 1) / 2$ porų) sudaro jungtį su tikimybe p .
- Tinklas turės $\langle L \rangle = pN(N - 1) / 2$ jungčių.
 - Mazgo laipsnis:
 $\langle k \rangle = 2L / N = p(N - 1)$.

Programėlė: E-R modelis (RF)

Fazinis virsmas E-R modelyje



Jei mazgas i priklauso **didžiajai komponentei**, tai jam gretimas mazgas j irgi priklauso d.k.

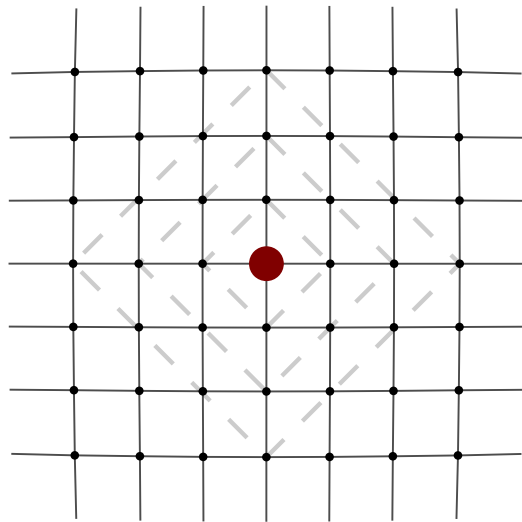
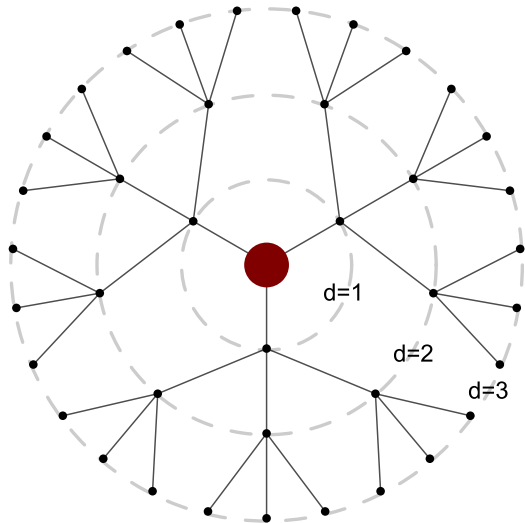
Tikimybė, kad mazgas nepriklauso d.k.:

$$u = (1 - p + pu)^{N-1},$$

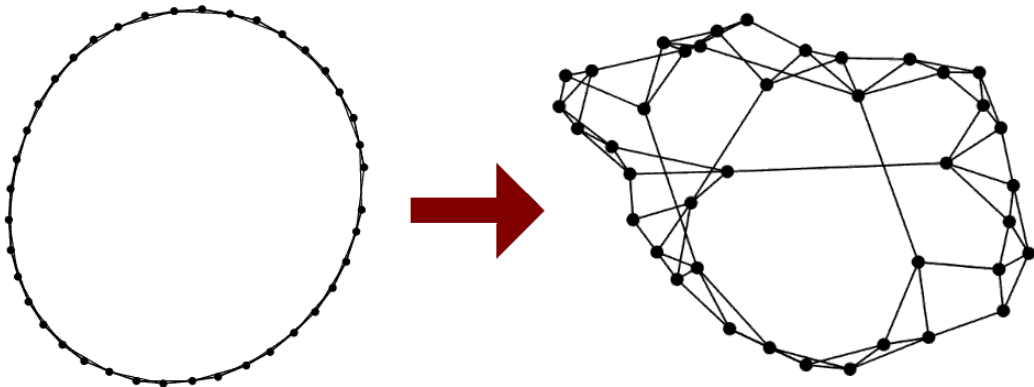
$$\frac{N_G}{N} = 1 - \exp \left[- \langle k \rangle \frac{N_G}{N} \right].$$

Paveikslas: networksciencebook.com (senesnis leidimas)

E-R tinklas ir reguliari gardelė

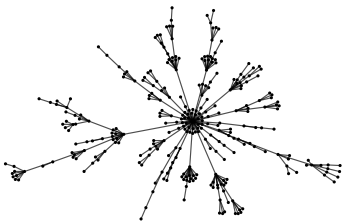


Watts–Strogatz tinklas



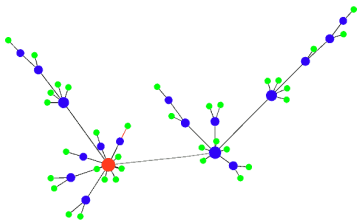
Atsitiktinės briaunos mažina diametrą nenaikindamos lokalios struktūros.

Mastelio neturintys tinklai

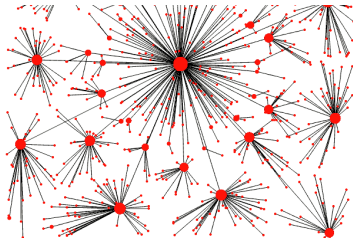


Prisijungimas:

$$p(i \rightarrow j) = \frac{k_j}{\sum_m k_m}$$



Nukreipimas: r



Kaštai: $\min_j (\delta d_{ij} + h_j)$

Programėlės: Barabasi-Albert modelis (RF), Briauņų nukreipimo modelis (RF), Sėkmės-priežasties modelis (RF)

Laipsninis mazgo laipsnio skirstinys

B-A modeliui skirstinį galime nustatyti “kontinuumo” metodu:

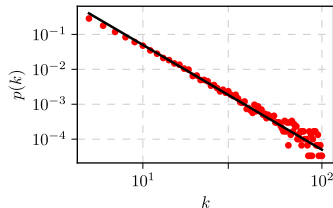
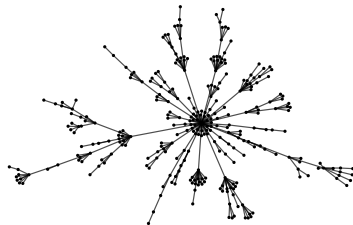
$$\frac{dk_j}{dt} = mp(i \rightarrow j, t) = m \frac{k_j}{\sum_m k_m},$$

$$\Rightarrow k_j(t) \approx m \sqrt{\frac{t}{j}}.$$

Kiek mazgų turi didesnę laipsnį nei k ?

$$N_{k_i > k} = \frac{m^2 t}{k^2}.$$

Kokia tikimybė rasti mazgą $k_i = k$?



Kas neaptarta:

- Laipsnių koreliacijos
- Klasterizacija
- Tankėjimas
- “Centriškumas” (=įtaka)
- Strateginis tinklų formavimas
- “Lošimai” ant tinklų

Pastaruoju metu aktualu:

- Laikinė tinklų evoliucija
- Daugelio lygių tinklai
- Hyper-jungtys
- Aukšto rango tinklai
- Nuomonių dinamika tinkluose
- Bendruomenių atpažinimas
- Trūkstamų jungčių radimas
- “Nulinio” paciento radimas

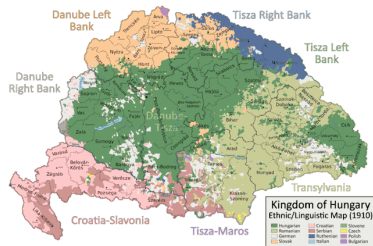
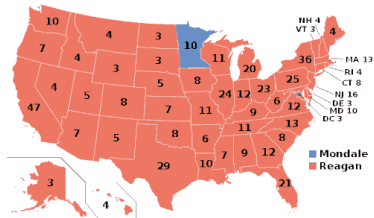
Rekomendacija: Barabasi “Network Science”, Jackson “Social and Economic Networks” kursas ([Coursera](#) ir [Youtube](#))



Nuomonių dinamika

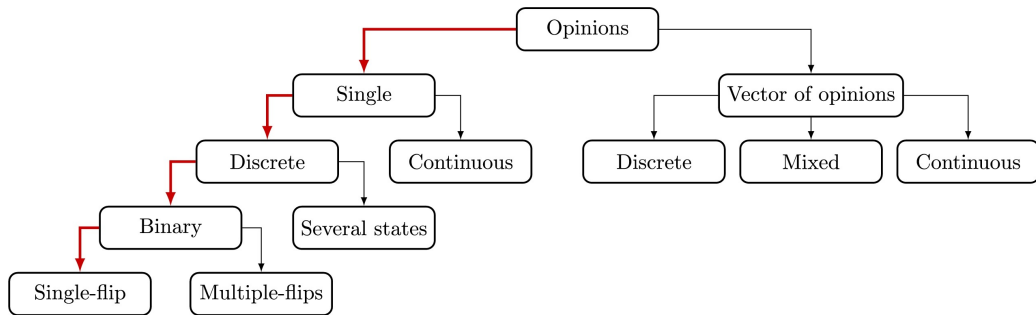
Tematika, o ne įrankis

- Rinkimai ir apklausos
- Gyventojų surašymas
- Elgsena viešose erdvėse
- Laboratoriniai eksperimentai



Paveikslai: Gizmodo, Wikimedia, Wikimedia

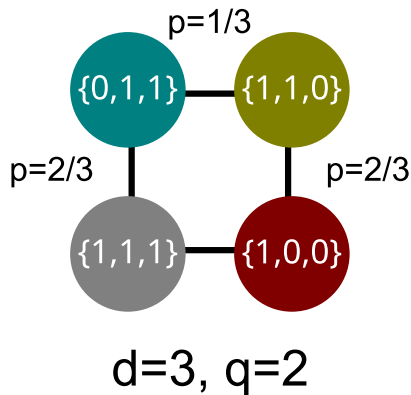
Agentų modelių įvairovė nuomonių dinamikoje



Paveikslas: [Jedrzejewski, Weron (2019)]

Nuomonių vektorius: Axelrod'o kultūros plitimo modelis

- Agentas – d -matis vektorius.
 - Komponentė gali įgyti q verčių.
- ➊ Pasirenkame agentą i .
 - ➋ Pasirenkame i kaimyną j .
 - ➌ i sąveikauja su j su tikimybe, kuri yra proporcinga sutampančių komponentžių skaičiui.
 - ➍ Sąveikos metu i nukopijuoja vieną iš j nuomonės komponentžių.



Originalus darbas: [Axelrod (1997)]; Programėlė: Axelrod modelis (RF)

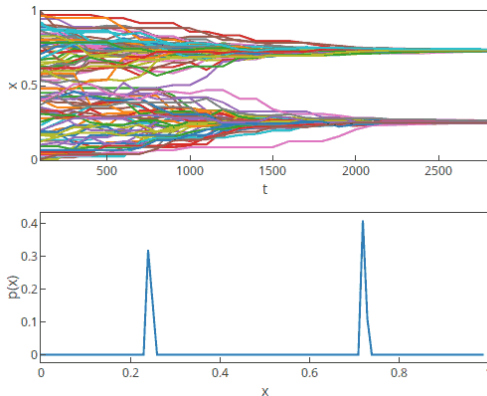
Tolydi nuomonė: riboto pasitikėjimo modeliai

- Agentas turi tolydžią nuomonę x_i .
- Sąveika vyksta tik su panašiais, jei $|x_j(t) - x_i(t)| < \varepsilon$:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \mu [x_j(t) - x_i(t)] .$$

Priešingu atveju nieko nevyksta:

$$x_i(t+1) = x_i(t) .$$

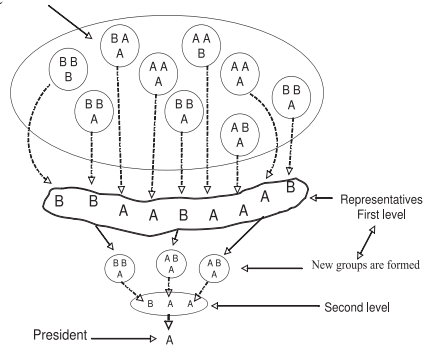


Apžvalga: [Flache *et al.*(2017)]. Programėlė: Defuant *et al.* modelis (RF)

Diskreti nuomonė: Galam modeliai

- Diskrečios nuomonės
- Diskutuojama grupėse
- Visi perima lokalią daugumos nuomonę
- Jei daugumos nėra, tai perimama globalios mažumos nuomonė

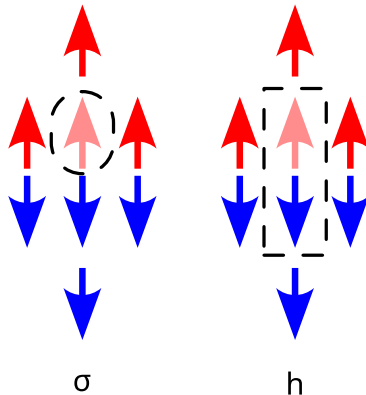
Agents are randomly selected from the population to form the ground people



Paveikslas/Apžvalga: [Galam (2008)]. Programėlė: Hierarchinio balsavimo modelis (RF)

Rinkėjo modelis

- Diskrečios nuomonės
- Individualios sąveikos: agentai savarankiškai keičia nuomonę
- Porinės sąveikos: agentai kopijuoja kaimynus
- Sąveikos yra apibrėžtos įvairioms topologijoms (agentų tinklams)



Originalus darbas: [Clifford, Sudbury (1973)]. Apžvalgos: [Redner (2019); Jedrzejewski, Weron (2019)]. Programėlės: `#voter-model` (RF)

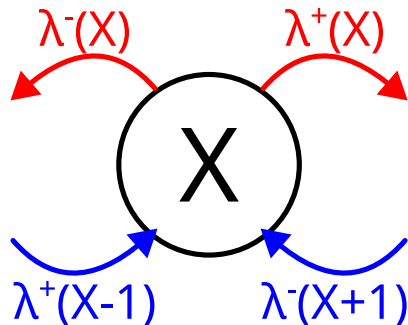
Rinkėjo modelis – gimimo-mirties procesas

Vykstančius procesus galima apibendrintai užrašyti:

$$\lambda^+(X) = (N - X) \left[\sigma^+ + h \frac{X}{N^\alpha} \right], \quad \lambda^-(X) = X \left[\sigma^- + h \frac{N - X}{N^\alpha} \right].$$

Pagrindinė kinetinė lygtis:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p(X, t)}{\Delta t} = & -\lambda^+(X)p(X, t) - \lambda^-(X)p(X, t) + \\ & + \lambda^+(X-1)p(X-1, t) + \\ & + \lambda^-(X+1)p(X+1, t). \end{aligned}$$



Termodinaminė ($N \rightarrow \infty$) riba

Perrašome spartas:

$$\lambda_s^+(x) = N^2 \cdot (1-x) \left[\frac{\varepsilon^+}{N} + \frac{x}{N^\alpha} \right], \quad \lambda_s^-(x) = N^2 \cdot x \left[\frac{\varepsilon^-}{N} + \frac{1-x}{N^\alpha} \right].$$

Pagrindinė kinetinė lygtis:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p(x, t_s)}{\Delta t_s} &= -\lambda_s^+(x)p(x, t_s) - \lambda_s^-(x)p(x, t_s) \\ &\quad + \lambda_s^+(x - \Delta x)p(x - \Delta x, t_s) + \lambda_s^-(x + \Delta x)p(x + \Delta x, t_s) = \\ &= (\mathbf{E}^+ - 1) [\lambda_s^-(x)p(x, t_s)] + (\mathbf{E}^- - 1) [\lambda_s^+(x)p(x, t_s)]. \end{aligned}$$

Čia $\mathbf{E}^\pm f(x) = f(x \pm \Delta x) \approx f(x) \pm \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}((\Delta x)^3)$.

Fokkerio-Planko lygtis

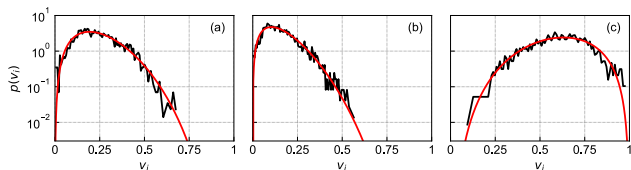
$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x, t_s)}{\partial t_s} &\approx -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x} [(\lambda_s^+(x) - \lambda_s^-(x)) p(x, t_s)] + \frac{1}{2N^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\lambda_s^+(x) + \lambda_s^-(x)) p(x, t_s)] \approx \\ &\approx -\frac{\partial}{\partial x} [\{\varepsilon^+ (1-x) - \varepsilon^- x\} p(x, t_s)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{2x(1-x)}{N^\alpha} p(x, t_s) \right]\end{aligned}$$

Stacionarus ($t \rightarrow \infty$) skirstinys $\alpha = 0$ atveju:

$$0 = -\{\varepsilon^+ (1-x) - \varepsilon^- x\} p_{st}(x) + \frac{d}{dx} [x(1-x) p_{st}(x)] \quad \Rightarrow$$

$$p_{st}(x) = C_N \cdot x^{\varepsilon^+-1} (1-x)^{\varepsilon^--1}.$$

Beta skirstinys tinka empiriniams duomenims!



SK, LKDP ir LDDP balsų dalis 1992 m. Seimo rinkimų apylinkėse.

PHYSICAL REVIEW LETTERS

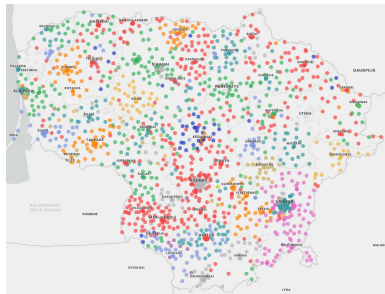
Highlights Recent Accepted Collections Authors Referees Search Press About

Featured in Physics

Editors' Suggestion

Is the Voter Model a Model for Voters?

Juan Fernández-Gracia, Krzysztof Suchecki, José J. Ramasco, Maxi San Miguel, and Victor M. Eguíluz
Phys. Rev. Lett. **112**, 158701 – Published 18 April 2014; Erratum Phys. Rev. Lett. **113**, 089903 (2014)



2022 m. savivaldybių
rinkimų rezultatai
apylinkėse.

Paveikslai: [Kononovicius (2018)], maps.lt. Straipsnis: [Fernandez-Gracia et al.(2014)].

Kas toliau?

- q-Rinkėjo modelis
- Daugelio būsenų modelis
- Analizinės aproksimacijos
- Ne-Markovo mechanizmai
- Socialinių tinklų įtaka
- Socialinių mokslų teorijos



Ačiū už dėmesį!

✉ aleksejus.kononovicius@tfai.vu.lt

🔗 kononovicius.lt, rf.mokslasplius.lt



**Faculty of
Physics**

