

光子拓扑绝缘体

沈宗奇*

Physics Department,
Fudan University

(Dated: January 3, 2020)

本篇综述从凝聚态体系中的拓扑现象着手，着重强调其手性边界态的存在，并指出实现手性边界态的核心在于打破时间反演对称性。接着通过 Maxwell 方程组形式上和薛定谔方程的类比，引入光子体系中的“能带结构”。随后介绍了实现光子拓扑绝缘体的两种方式：加磁场（Chern insulator）和空间周期性调制（Floquet TI）。最后着重讨论了光子拓扑绝缘体在拓扑激光器中的最新应用，对理论与实验的关系作出讨论。

CONTENTS

I. 电子系统拓扑物态	1
A. 拓扑能带理论	1
B. 量子霍尔效应	2
C. 量子反常霍尔效应与 Haldane 模型	2
D. 量子自旋霍尔效应与拓扑绝缘体	3
II. 光子拓扑绝缘体	3
A. 光子晶体	3
B. 光子拓扑绝缘体	3
1. 光子拓扑绝缘体	4
2. 光子拓扑 Floquet 绝缘体	4
III. 应用	5
A. 拓扑波导	5
B. 拓扑激光器	5
IV. 总结	6
References	6

I. 电子系统拓扑物态

基于 Landau 费米液体理论和对称性破缺理论的传统凝聚态物理很好地描述了物质的性质：不同的相存在是因为对称性不同，相的转变是对称性的转变。但是 1980 年，量子霍尔效应的发现，极大的挑战了人们的这一看法，因为在量子霍尔体系中，Landau 费米液体理论已经

不再适用，但同样也存在高对称性的态，因此有了拓扑序（topological order）的概念。

A. 拓扑能带理论

拓扑是研究光滑形变下不变量的数学分支。数学中有著名的 *Gauss-Bonnet Theorem*

$$\int_S \kappa dA = 4\pi(1-g)$$

高斯曲率在几何体表面的积分等于一个常量，等式右边的 g 代表几何体上“洞”的个数。 g 相同的几何体间可以通过光滑形变互相转变， g 不同的几何体之间则不能。比如一个甜甜圈和一个茶杯可以互现光滑转变，但一副眼镜就与他们不同，因为眼镜上有两个洞。



FIG. 1: 几何体拓扑

将拓扑应用于量子力学，我们可以定义贝里联络（Xiao et al., 2010）

$$\mathbf{A} = -i \langle u(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} | u(\mathbf{k}) \rangle$$

和贝里相位

$$\gamma_C = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{k}$$

* zqshen18@fudan.edu.cn

ID: 18307110127

我们知道固体的第一布里渊区是一个轮胎面，数学上可以证明，贝里联络对封闭几何体表面的积分一定等于 $2\pi * \text{integer}$ ，即

$$n = \frac{\gamma_C}{2\pi} = 0, 1, 2 \dots$$

这里的 n 被称作 *Chern number*(Shen, 2004). 类比几何中不同的 g 可以区分不同的拓扑态，能带具有的 n 就可以区分不同的拓扑物态，同样地，拓扑不等价的物态间不能光滑地连接，带隙必须有关闭。

B. 量子霍尔效应

第一个在凝聚态体系中发现的拓扑现象是量子霍尔效应。1980 年，K.V.Klitzing 等人发现在低温、强磁场中，二维电子气会出现量子化的霍尔电导平台 (Klitzing *et al.*, 1980)

$$\sigma_{xy} = N \frac{e^2}{h}$$

其中，整数 N 的精确度是 10^{-9} 。我们知道，凝聚态体系中出现如此精确的整数是非常奇特的，并且这个数值不受缺陷、杂质的影响。

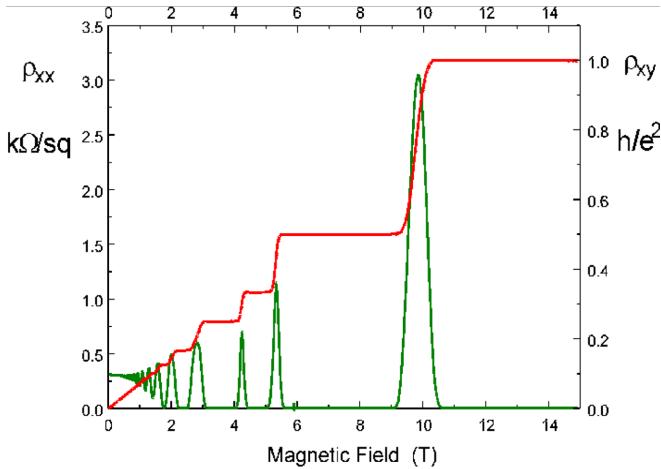


FIG. 2: 量子霍尔效应

根据线性响应的 Kubo 公式计算霍尔电导

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{ie^2}{A_0 \hbar} \sum_{\varepsilon_\alpha < E_f} \sum_{\varepsilon_\beta > E_f} \frac{(v_x)_{\alpha\beta} (v_y)_{\beta\alpha} - (v_y)_{\alpha\beta} (v_x)_{\beta\alpha}}{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2} \\ &= -e^2 \hbar \sum_{\varepsilon_\alpha < E_f} \sum_{\varepsilon_\beta > E_f} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \text{Im} \frac{(v_x)_{\alpha\beta} (v_y)_{\beta\alpha}}{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2} \end{aligned}$$

式子中

$$\frac{\langle \alpha | \nabla_{\mathbf{k}\hat{H}} | \beta \rangle}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta} = \langle \alpha, \mathbf{k} | \nabla_{\mathbf{k}} | \beta, \mathbf{k} \rangle$$

这刚好和我们对 Berry connection 的定义相似。最终可以发现，拓扑在这里自然地出现了：霍尔电导中的 N 就是拓扑中的 Chern number.(Thouless *et al.*, 1982)

由于真空的 chern number 为 0，量子霍尔体系不为零，根据我们前面的论述，他们之前不能通过“光滑形变”相连接，因此必然有边界态的存在。并且由于边界态上，相同能量下没有其他的态可以供其占据，背散射也是不存在的。(Büttiker, 1988)

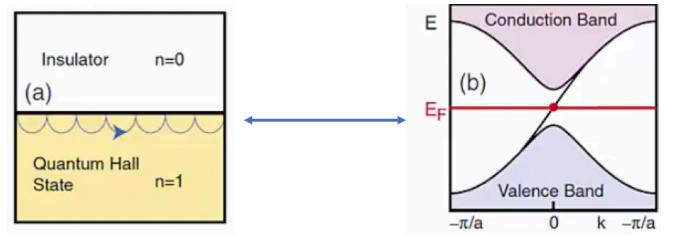


FIG. 3: 量子霍尔体系的边界态 (Bernevig *et al.*, 2006)

C. 量子反常霍尔效应与 Haldane 模型

我们知道，量子霍尔效应需要强磁场的存在。1988 年，Haldane 提出了一种设想 (Haldane, 1988)，可以在没有磁场的情况下实现量子霍尔效应。他的想法非常天才：空间中存在周期性的磁场，即有的地方磁场垂直纸面向上，有的地方垂直纸面向下，但每个元胞内的总磁通是 0，相当于没有磁场存在。通过计算可以发现，这样的体系会有边界态的存在，并且 Chern number $N \neq 0$ ，我们把拓扑陈数不等于 0 的二维体系叫做陈绝缘体 (*Chern insulator*)

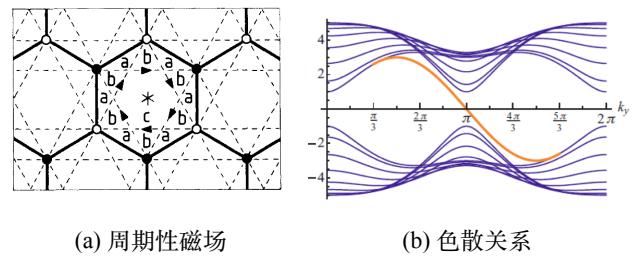


FIG. 4: 反常量子霍尔效应

Haldane 敏锐地发现，出现非 0 拓扑陈数的关键在于打破了时间反演对称性。之前的量子霍尔效应加磁场，只是打破时间反演对称性的一种方式。

D. 量子自旋霍尔效应与拓扑绝缘体

2005 年，Kane 和 Mele(Kane and Mele, 2005a)(Kane and Mele, 2005b) 设想，如果把电子自旋这个自由度考虑进来，会产生怎样的效果——这就是量子自旋霍尔效应 (QSH)。

如果不考虑自旋轨道耦合，量子自旋霍尔效应就等于两份量子霍尔效应，一份对应顺时针传播的向上自旋，一份对应逆时针传播的向下自旋。

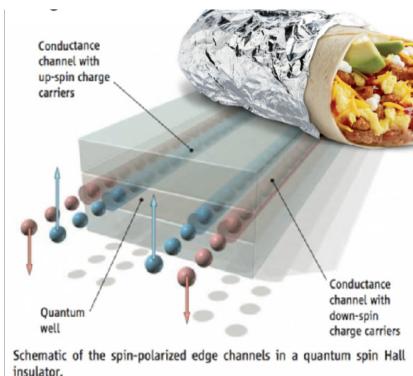


FIG. 5: 量子自旋霍尔效应

所谓拓扑绝缘体说的就是因为 QSH 而产生的体态绝缘而表面导电的体系。注意这里表面的导电并不是像 FIG.5 中那样，表面有金属，而是因为表面态的存在。与量子霍尔效应一样，这里的表面态也是无背散射的，杂质、无序都没有影响。(Sheng et al., 2005)

II. 光子拓扑绝缘体

A. 光子晶体

晶体中原子呈周期性排列，使晶体中产生周期性的势场，当电子在这种周期性势场中运动时，形成能带结构。能带与能带之间存在带隙。电子的能量如果落在带隙中，就不能够向前传播。光子也是同理的，光波只要受到周期性调制，就也有类似能带结构，也会出现带隙，频率落在带

隙中的光波一样也不能传播。光子晶体是在高折射率材料的某些位置周期性地出现低折射率的材料，高低折射率的材料交替按一定几何结构排列就可以形成带隙，从而控制光的运动，形成光子晶体。

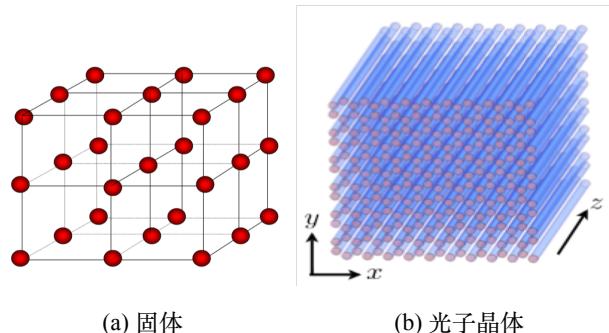


FIG. 6: 固体与光子晶体

B. 光子拓扑绝缘体

这里我们先做一点概念上的说明，凝聚态体系中我们把量子自旋霍尔效应导致的体态绝缘但是表面导电体系叫做拓扑绝缘体，但是在光子体系中，我们习惯于把一切具有拓扑性质的绝缘体都叫拓扑绝缘体。

我们回顾一下凝聚态体系中的拓扑绝缘体：

■ 体态绝缘但是表面导电

■ 边界态单向传播且无散射

我们知道，无论是电子满足的薛定谔方程还是光子满足的麦克斯韦方程组都是时间反演对称的。但是要实现单向传输，就必须打破时间反演对称性，在电子体系中我们采用了加磁场的方法，那么光子体系该怎么做呢？

1. 光子拓扑陈绝缘体

2008 年，Haldane 和 Raghu(Haldane and Raghu, 2008)提出了一种打破时间反演对称性的方法：加磁场。利用某些材料 (Gyromagnetic) 会对磁场产生响应，即我们学过的法拉第效应。我们知道

$$B = \tilde{\mu} H$$

其中

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}$$

矩阵当中的非对角项是因为加磁场导致的各项异性，而这些非对角项打破了时间反演对称性。很快这一理论构想被实验实现 (Wang *et al.*, 2015)：采用 gyromagnetic 材料排列的光子晶体，加上垂直于平面的磁场 (0.2T)，实验者成功观察到了单向传播并受拓扑保护的边界态。同时，理论计算表明，时间反演对称性的打破打开了带隙，并有一条边界态存在，Chern number = 1。

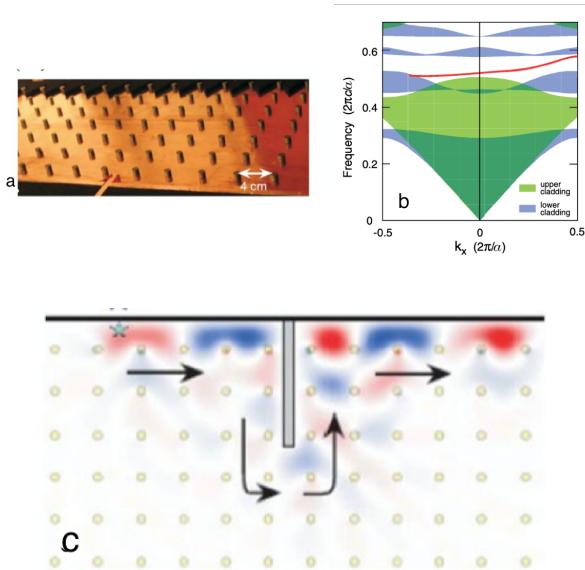


FIG. 7: (a) 实验采用的光子晶体，图中小圆柱是 gyromagnetic 材料 (b) 理论计算“能带”图，红线为边界态 (c) 单向传播的拓扑保护边界态，途中颜色表示场强，红色为正，蓝色为负 (Ozawa *et al.*, 2019)

由群速度公式

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

恰好就是图 b 中红线的斜率，可以看到斜率恒为正，所以边界态是单向传播的，并且不会发生背散射（反向传输）

图 a 中的圆柱构成 gyromagnetic 材料阵列，可以看到他们的间距是 4cm，大概是微波的波长，所以这个体系只能在微波频段产生作用。对于可见光，朗道和栗夫席兹

在《连续介质电动力学中》说，在可见光频率，材料对磁场的响应是很小的，因此在 μ 矩阵中，非对角项很小，不能很好地打破时间反演对称性。注意到到光子没有电子自旋向上向下的概念，更没有自旋轨道耦合，所以模仿电子系统的拓扑绝缘体是很难的。

2. 光子拓扑 Floquet 绝缘体

所谓 Floquet 拓扑绝缘体，是指原本不具有拓扑性质的体系，在周期性外场的作用下变得拓扑非平庸，即具有了非 0 的陈数，手性的边界态并受拓扑保护 (Lindner *et al.*, 2011)。

2013 年，Sagev 等人想到了一个天才的办法 (Rechtsman *et al.*, 2013)。我们知道薛定谔方程可以写作

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t)$$

在具有绕 z 轴旋转对称性的体系中，麦克斯韦方程可以写作

$$i\partial_z \psi(x, y, z) = -\frac{1}{2k_0} \nabla^2 \psi(x, y, z) - \frac{k_0 \Delta n(x, y, z)}{n_0} \psi(x, y, z)$$

其中 n_0 代表背景的折射率， Δn 代表介质相比背景折射率的偏移。可以看出，两个方程长得十分相似，只不过，薛定谔方程左边是对 t 求导，麦克斯韦方程中则是对 z 求导。

Sagev 想到，光子体系中，z 就扮演了 t 的作用，因此我们在电子体系中打破时间反演对称性，在光子体系中只要打破 z-反演对称性就可以了！为了理论上的简化，他们让 z 方向上仍然具有周期性，但不具有反演对称性，这边产生了下图 a 的构型。

从“能带”中可以看出，当 $R = 0$ 时，由群速度公式

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

群速度为 0，不会有单向传播的边界态。而 $R \neq 0$ 时，绿色线对应上边界，群速度大于零；红色线对应下边界，群速度小于零，相当于一整个沿边界单项逆时针传播的边界态。并且如果人为地引入缺陷，光会绕过缺陷传播，而不会发生背散射 (backscattering)。

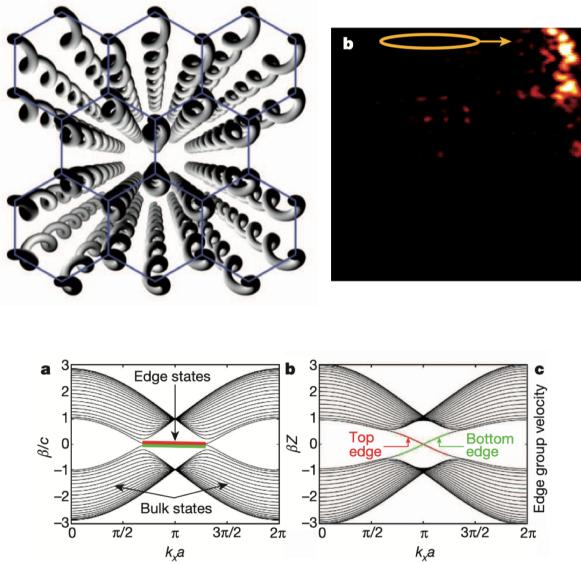


FIG. 8: (a) *Floquet* 拓扑绝缘体采用的构型, z 方向是螺旋形 (b) 单向传播边界态 (c) 理论计算得到的“能带图”, 左边是螺旋形半径 $R = 0$ 的情况, 右侧 $R \neq 0$

III. 应用

A. 拓扑波导

直接的应用便是用作拓扑波导. 由于光子拓扑绝缘体具有受拓扑保护的特点, 所以拓扑波导中光的传输不受杂质, 无序和尖锐拐角的影响, 这对提升信息传输的质量有极大帮助.

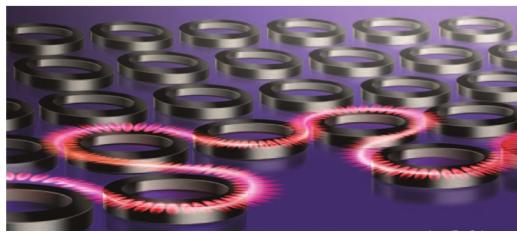


FIG. 9: 拓扑波导

B. 拓扑激光器

更重要的应用是拓扑激光器. 可以想到, 如果用光子拓扑绝缘体作为激光器的共振腔, 那么由于拓扑保护的特点, 激光器的效率将大大提高, 另外, 理论上的计算

表明, 拓扑激光器将具有很好的单模性.

但困难也很明显. 激光器是一个非厄密的体系, 也就是它的哈密顿量由于时刻有输入和输出的能量而不是一个厄密矩阵, 导致特征值是一个复数. 对于非厄密系统中是否存在拓扑性质, 如何在非厄密系统中定义拓扑不变量, 这都是有争议的问题.

但是在 2018 年, Sagev 与合作者们成功实现了拓扑激光器 (Harari *et al.*, 2018). 理论上, 他们采用了修改版的 Haldane 模型, 也就是之前我们在电子体系中介绍的反常量子霍尔效应的模型, 再加上能流输入输出项, 得到

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_{\text{Haldane}} \Psi - i\gamma \Psi + \frac{ig\bar{P}}{1 + |\Psi|^2/I_{\text{sat}}} \Psi + H_{\text{output}} \psi$$

由模型哈密顿量, 可以计算得到

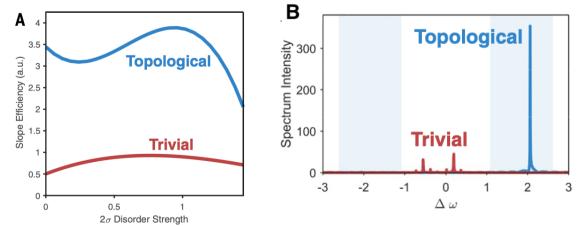


FIG. 10: (a) 有无序存在情况下, 拓扑激光器和普通激光器的效率图 (b) 拓扑激光器和普通激光器输出强度随频率的分布, 可见拓扑激光器单模性极佳

实验上, 为了实验 Haldane 模型中绕元胞一周积累固定的相位这一特点, Sagev 等人设计了一种共振腔阵列 (Bandres *et al.*, 2018). 每个共振腔周围有四个反共振 (antiresonant) 的连接, 这样在 y 方向上, 相位就是一个等差数列, 而绕任意回路一周 (包含四个共振腔和四个连接), 积累的相位都是 $2\pi\alpha$.

拓扑激光器的成功制备有更深的意义, 他证明了非厄密系统中也存在着拓扑现象, 因此一定有拓扑不变量的存在. 事实上, 同样在 2018 年, 清华大学姚顺宇 (大四) 和导师汪忠 (Yao and Wang, 2018), MIT 的付亮 (Shen *et al.*, 2018) 等人先后从理论上澄清了非厄密系统的拓扑不变量和拓扑能带理论. 可见, 物理学根本上还是一门实验科学. 实验可以给理论研究带来新的想法, 而这些想法往往是意外所得; 而理论研究最终也要通过实验去验证.

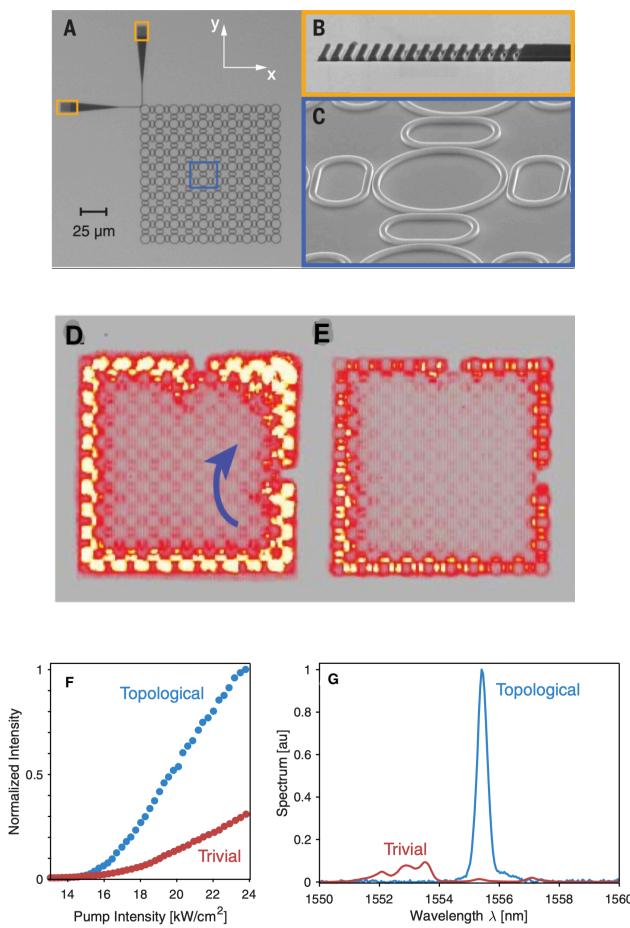


FIG. 11: (a)-(c) 阵列结构 (D)-(E) 拓扑激光器和普通激光器在有缺陷情况下对比 (F)-(G) 实验测得拓扑激光器和普通激光器效率与单模性对比

IV. 总结

类比拓扑电子体系，近年来发展了拓扑光子学。科学家分别通过加磁场和空间周期性调制实现了光子拓扑绝缘体，其手性边界态具有单向传播、受拓扑保护的特点。后来，又有人通过类比电子自旋，重新定义光子自旋的方法，实现了具有时间反演对称性的光子拓扑绝缘体(Ozawa *et al.*, 2019)。

超越拓扑电子系统，实现了光子拓扑绝缘体激光器，大大提高了激光的效率和单模性，同时给非厄密系统拓扑性质的研究提供了证据。

可以预见，未来拓扑光子学的发展将聚焦于超越拓

扑电子系统，继续做出开拓性的发现。

REFERENCES

- Bandres, M. A., S. Wittek, G. Harari, M. Parto, J. Ren, M. Segev, D. N. Christodoulides, and M. Khajavikhan (2018), Science **359** (6381), eaar4005.
- Bernevig, B. A., T. L. Hughes, and S.-C. Zhang (2006), Science **314** (5806), 1757.
- Büttiker, M. (1988), Physical Review B **38** (14), 9375.
- Haldane, F. D. M. (1988), PHYSICAL REVIEW LETTERS **61** (18), 4.
- Haldane, F. D. M., and S. Raghu (2008), Physical Review Letters **100** (1), 013904.
- Harari, G., M. A. Bandres, Y. Lumer, M. C. Rechtsman, Y. D. Chong, M. Khajavikhan, D. N. Christodoulides, and M. Segev (2018), Science **359** (6381), eaar4003.
- Kane, C. L., and E. J. Mele (2005a), Physical Review Letters **95** (22), 226801.
- Kane, C. L., and E. J. Mele (2005b), Physical Review Letters **95** (14), 146802.
- Klitzing, K. v., G. Dorda, and M. Pepper (1980), Physical Review Letters **45** (6), 494.
- Lindner, N. H., G. Refael, and V. Galitski (2011), Nature Physics **7** (6), 490.
- Ozawa, T., H. M. Price, A. Amo, N. Goldman, M. Hafezi, L. Lu, M. C. Rechtsman, D. Schuster, J. Simon, O. Zilberberg, and I. Carusotto (2019), Reviews of Modern Physics **91** (1), 015006.
- Rechtsman, M. C., J. M. Zeuner, Y. Plotnik, Y. Lumer, D. Podolsky, F. Dreisow, S. Nolte, M. Segev, and A. Szameit (2013), Nature **496** (7444), 196.
- Shen, H., B. Zhen, and L. Fu (2018), Physical Review Letters **120** (14), 146402.
- Shen, S.-Q. (2004), Physical Review B **70** (8), 081311.
- Sheng, L., D. N. Sheng, C. S. Ting, and F. D. M. Haldane (2005), Physical Review Letters **95** (13), 136602.
- Thouless, D. J., M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs (1982), Physical Review Letters **49** (6), 405.
- Wang, J., Q. Zhou, B. Lian, and S.-C. Zhang (2015), Physical Review B **92** (6), 064520, 00073.
- Xiao, D., M.-C. Chang, and Q. Niu (2010), Reviews of Modern Physics **82** (3), 1959.
- Yao, S., and Z. Wang (2018), Physical Review Letters **121** (8), 086803.