

リソース理論のノート

澤田 太郎

2020 年 2 月 12 日

これはリソース理論の勉強ノートです. 主にメモです.

1 記号等の前提知識

この文書では以下の宣言を断りなく用います.

- 「量子系」と言ったときは、observable の集合、すなわち、ある Hilbert 空間上の有界作用素のなす C^* 代数の部分 C^* 代数を指します.
- 量子系 A, B に対し、 $\text{CPTP}(A, B)$ を A から B への CPTP 写像全体の集合とします.
- また、量子系 A, B に対し、 $\mathfrak{F}(A, B)$ を $\text{CPTP}(A, B)$ の subset とします.

2 種々の定義

動機 2.1

リソース理論で主題にしたいのは以下の要素です.

- 注目系が「自由」なときに可能なこと
- 逆に、「自由」なときに不可能なこと
- さらに、注目系に「リソース」がくっついたときに初めて可能になること

この「自由」「リソース」という単語は、文脈に応じて柔軟に意味を変える (定義が変わる) 概念を抽象化した (モチベーションだけを一人歩きさせた) ものです. そのため、ここではきわめてぼやけた運用をしておきます.

定義 2.2

「自由な写像の宣言」 $\mathfrak{F} := \{\mathfrak{F}(A, B) \mid A, B : \text{量子系}\}$ がリソース理論であるとは、以下の (R1) から (R6) を満たすことをいう. また、任意の $\mathfrak{F}(A) := \mathfrak{F}(\mathbb{C}, A)$ の元を「自由な状態」という.

- (R1) $\forall A : \text{id}^A \in \mathfrak{F}(A, A)$
- (R2) $\forall A, \forall B, \forall C : (\mathcal{E} \in \mathfrak{F}(A, B), \mathcal{N} \in \mathfrak{F}(B, C) \Rightarrow \mathcal{E} \circ \mathcal{N} \in \mathfrak{F}(A, C))$
- (R3) $\mathfrak{F}(A, \mathbb{C}) = \text{CPTP}(A, \mathbb{C}) = \{\text{Tr}\}$
- (R4) (完全自由性)
 $\forall A, \forall B, \forall C : \forall \mathcal{E} \in \mathfrak{F}(A, B) : \mathcal{E} \otimes \text{id}^C \in \mathfrak{F}(A \otimes C, B \otimes C)$
- (R5) $\forall A : \mathfrak{F}(A) \text{ is closed.}$
- (R6) $\forall A : \mathfrak{F}(A) \text{ is convex.}$

命題 2.3 ("黄金律")

$$\rho \in \mathfrak{F}(A), \mathcal{E} \in \mathfrak{F}(A, B) \Rightarrow \mathcal{E}(\rho) \in \mathfrak{F}(B)$$

これは自由な状態に自由な操作を施すと、出力も自由であることを示している.(証明は *by def.*)

注 2.4

どんな自由状態も他の自由状態に自由演算で移り変えられる.