

Контрольная работа
по аналитической механике(3 семестр).
Тема: вращение двух связанных пружиной шаров.

Рябов Олег
Шистко Степан
Группа Б04-302
8 января 2025 г.



Содержание

1	Формулировка проблемы	3
2	Обобщенные координаты и параметры системы	3
3	Теория	4
3.1	Функция Лагранжа	4
3.2	Уравнения движения	4
4	Метод численного решения задачи	5
4.1	Описание метода	5
4.2	Полученные результаты	6
4.3	Анализ полученных результатов на большом интервале времени	9
5	Аналитический вывод первых интегралов и уравнения движения	11
6	Вывод	13

1 Формулировка проблемы

В данной работе рассмотрено свободное движение пары шаров, связанных друг с другом невесомой пружиной. Метод рассмотрения: построение лагранжиана для данной системы, вывод уравнений движения и их численное интегрирование, нахождение первых интегралов.

2 Обобщенные координаты и параметры системы

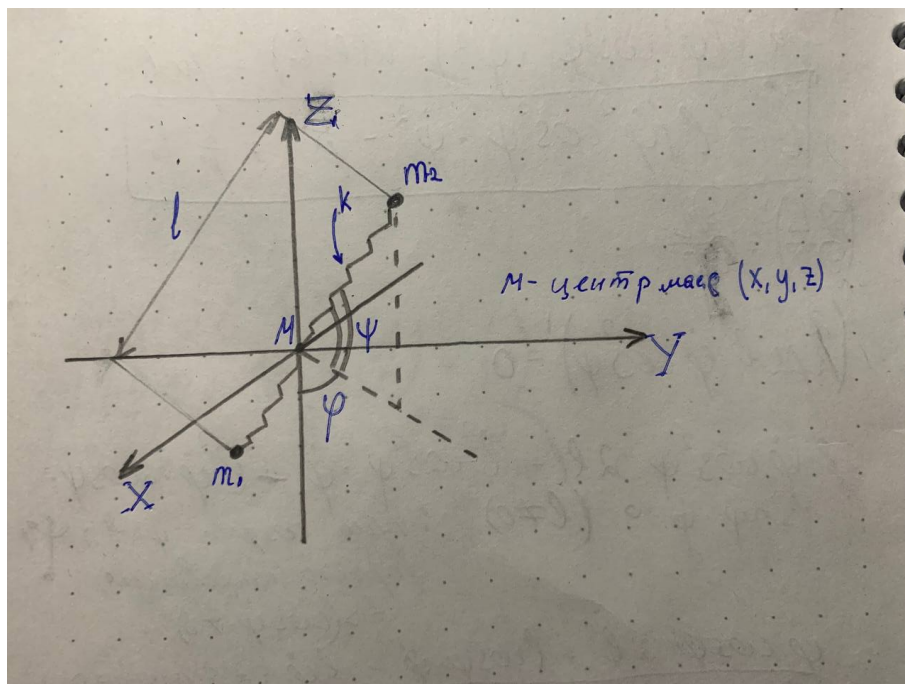


Рис. 1: Схема системы

Введены следующие обобщенные координаты:

1. x - координата центра масс по оси X
2. y - координата центра масс по оси Y
3. z - координата центра масс по оси Z
4. l - длина пружины
5. ψ - угол относительно плоскости XY
6. φ - угол в плоскости XY

Система имеет следующие независимые параметры:

1. k - жесткость пружины
2. l_0 - длины пружины без напряжения
3. m_1 - масса первого шара
4. m_2 - масса второго шара

Так же была введена вспомогательная величина:

1. $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$

3 Теория

3.1 Функция Лагранжа

По определению

$$L = T - V$$

Поскольку тело свободное, то сил на него не действует, получаем уравнения Эйлера-Лагранжа вида:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Лагранжиан имеет в себе кинетическую энергию поступательного движения центра масс, кинетическую энергию вращения шаров вокруг центра масс, кинетическую энергию радиального движения шаров и потенциальную энергию пружины.

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\mu l^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}\mu \dot{l}^2 - \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

3.2 Уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \implies \ddot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} \implies \ddot{y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \implies \ddot{z} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = \frac{\partial L}{\partial l} \implies \ddot{l} = l(\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2 - \frac{k}{\mu}) + \frac{k}{\mu}l_0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \implies \ddot{\varphi} = \frac{2l\dot{\varphi} \sin \psi \dot{\psi} - 2\dot{\varphi} \cos \psi \dot{l}}{l \cos \psi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \psi} \implies \ddot{\psi} = \frac{-2\dot{l}\dot{\psi} - l\dot{\varphi}^2 \cos \psi \sin \psi}{l}$$

4 Метод численного решения задачи

4.1 Описание метода

Для численного решения полученной системы дифференциальных уравнений использовался метод Рунге-Кутты 4-5, с помощью которого можно получить достаточно близкие к реальным значения. Описание метода:

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$y[n+1] = y[n] + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$$k_1 = f(x[n], y[n])$$

$$k_2 = f\left(x[n] + \frac{h}{2}, y[n] + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x[n] + \frac{h}{2}, y[n] + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x[n] + h, y[n] + hk_3)$$

где h — величина шага сетки по x .

Этот метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$.

4.2 Полученные результаты

По итогам моделирования с характерными параметрами, которые приведены в файле "main.json" получены графики:

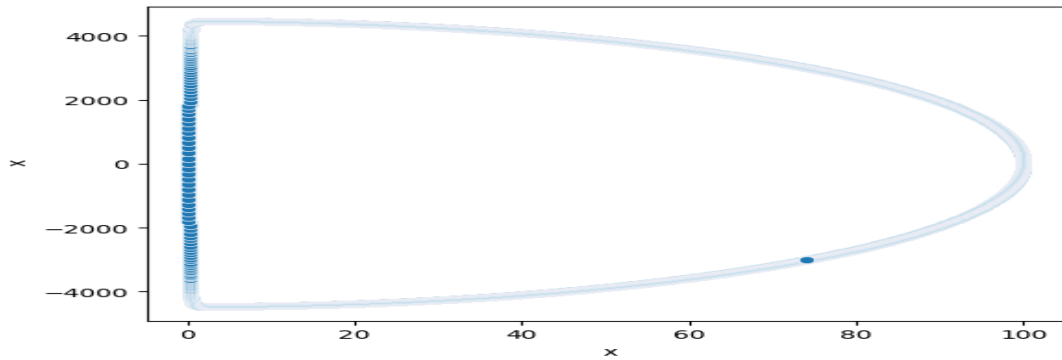


Рис. 2: фазовый портрет l

Приведенный выше график, как бы обрезается при приближении в нулю, что значит непересечение шаров.

Графики ниже показывают периодическое поведение l :

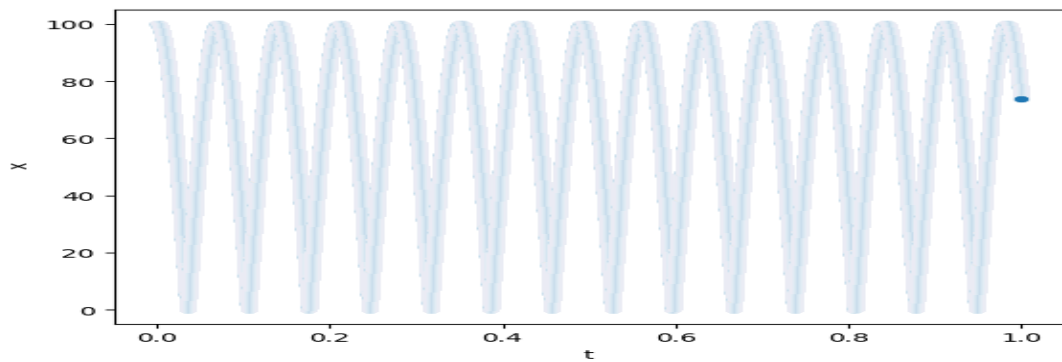


Рис. 3: эволюция l

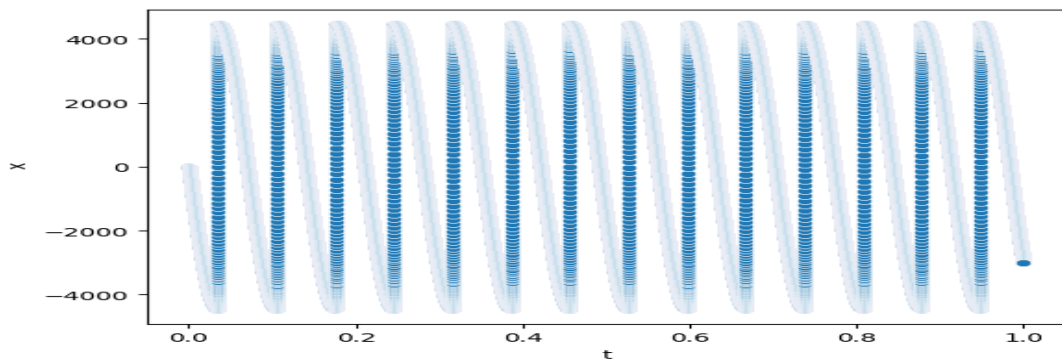


Рис. 4: эволюция \dot{l}

Расположенные ниже графики показывают изменение углов в рассмотренном режиме, изменяются резко в минимуме расстояния.

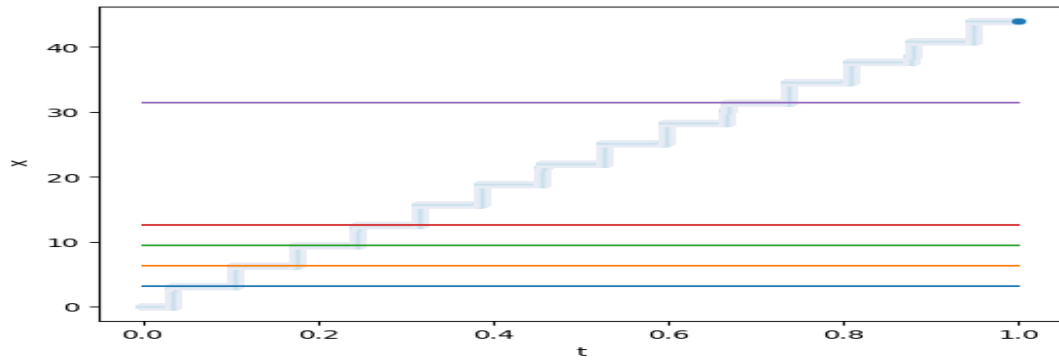


Рис. 5: эволюция φ (каждый поворот меняется ровно на π)

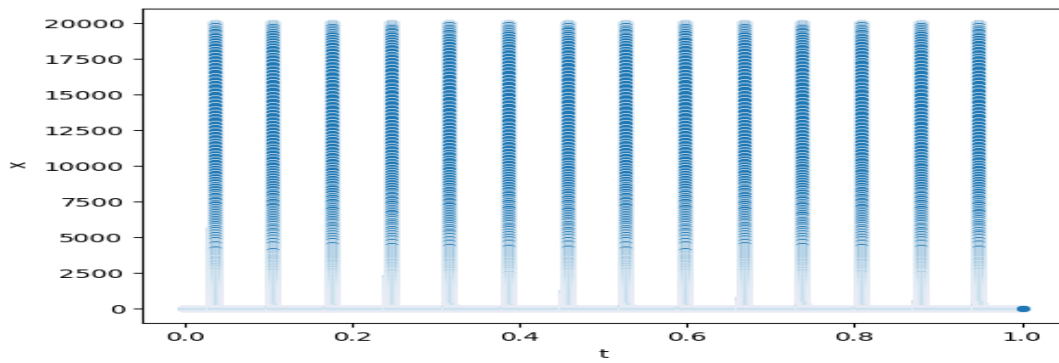


Рис. 6: эволюция $\dot{\varphi}$

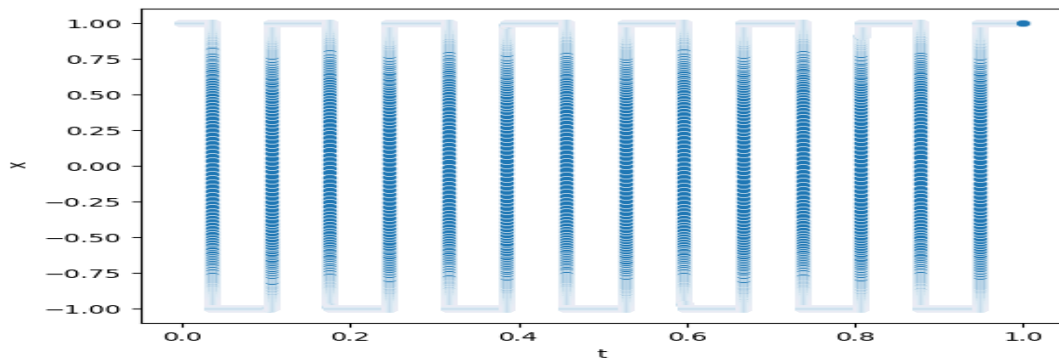


Рис. 7: эволюция ψ

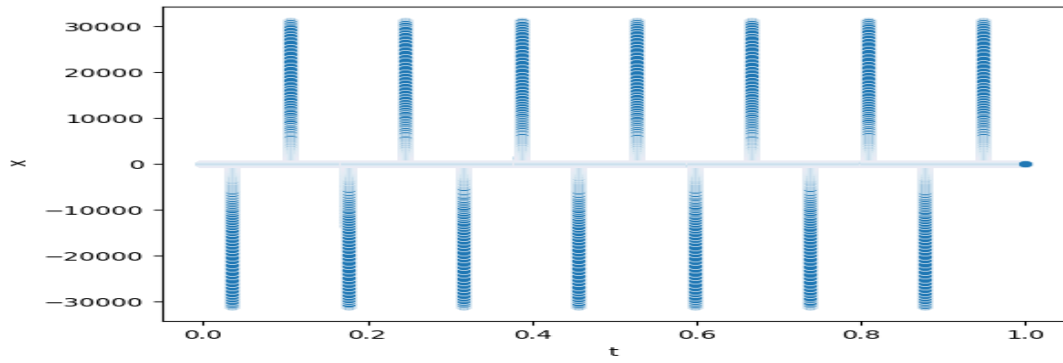


Рис. 8: эволюция $\dot{\psi}$

Отличной проверкой точности служит закон сохранения энергии, поскольку на нашу систему не действует внешних сил. В результате из-за погрешности численного метода энергия флуктуирует не больше чем на десятую процента.

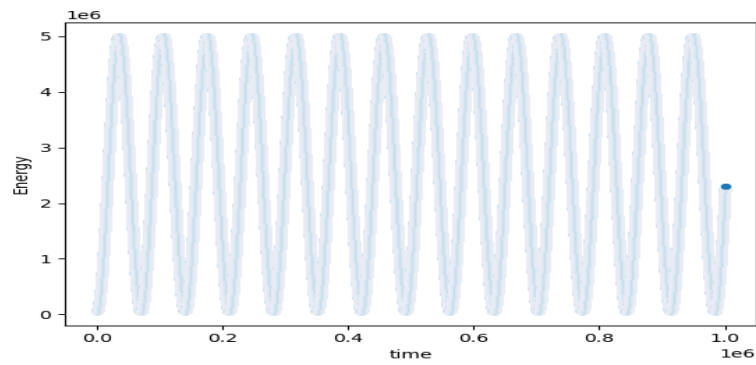


Рис. 9: сохранение энергии(флуктуирует по причине дискретности метода)

4.3 Анализ полученных результатов на большом интервале времени

Нами были построены еще несколько графиков, которые используются для анализа поведения системы в совокупности. Рассмотрено поведение угла ψ на большом интервале времени. Первый график иллюстрирует общее поведение угла ψ .

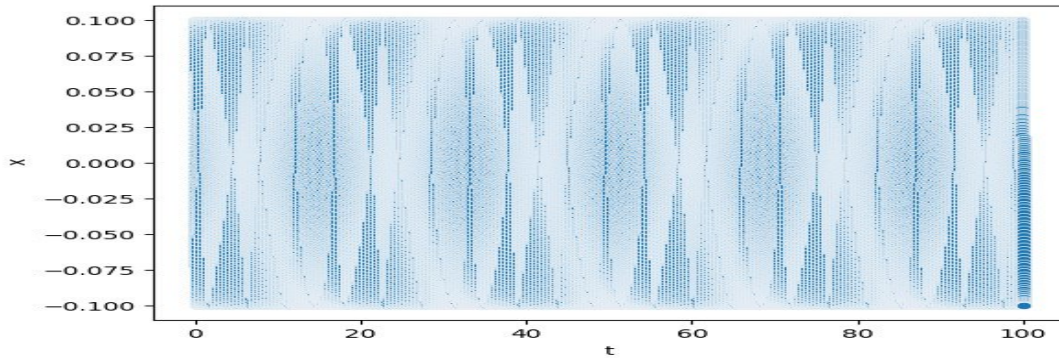


Рис. 10: зависимость ψ от времени

Как видно из данного графика, угол испытывает периодические колебания, амплитуда и частота остаются неизменными на протяжении всего временного участка.

Посмотрим на график $\dot{\psi}$.

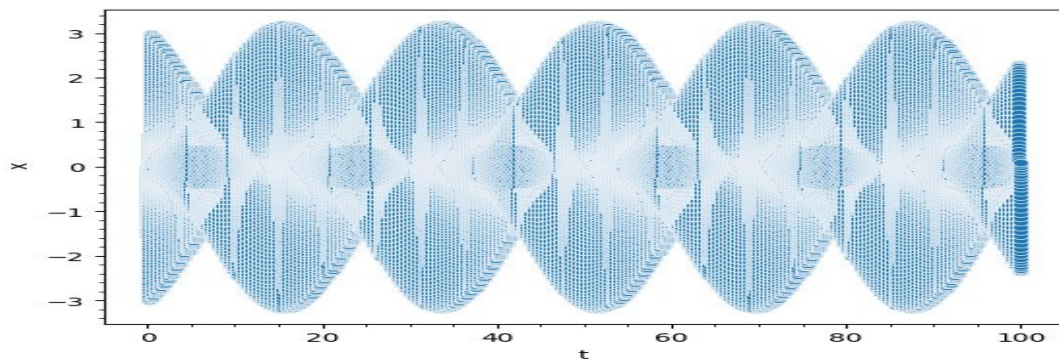
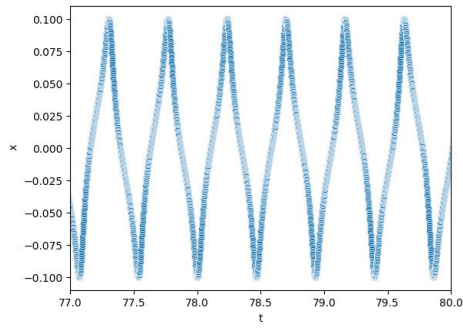
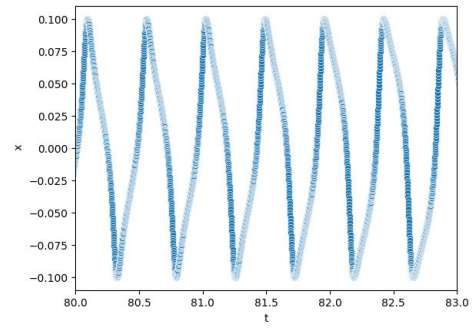


Рис. 11: зависимость $\dot{\psi}$ от времени

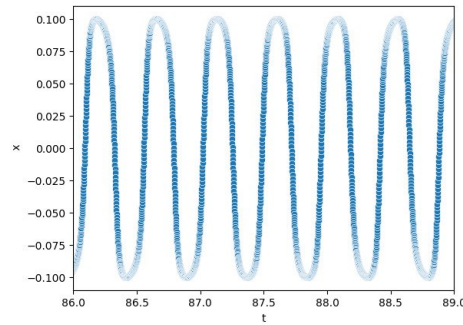
Можно заметить, что изменение скорости так же имеет периодический характер, частота попрежнему неизменна, однако появляется амплитудная модуляция. Рассмотрим график изменения ψ подробнее, на разных временных интервалах.



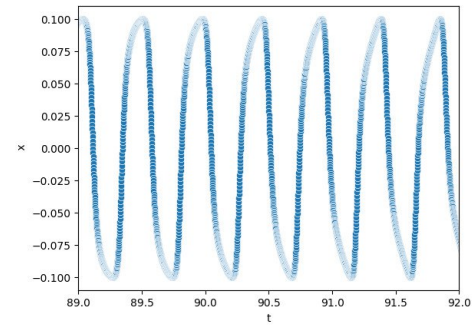
(a) минимум амплитуды скорости



(b) возрастание амплитуды скорости



(c) максимум амплитуды скорости



(d) убывание амплитуды скорости

Рис. 12: ψ на различных участках

Данные графики показывают, что в различные моменты времени, вращение по ψ происходит по разным траекториям. Данный факт хорошо иллюстрирует анимация в координатах $Y - Z$ (*animation.webm*)

Так же, если посмотреть за траекторией, то можно заметить, что спустя период шары не возвращаются в исходную позицию, что говорит о прецессии орбиты.

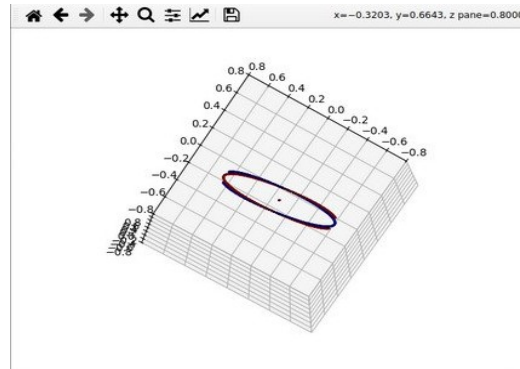


Рис. 13: зависимость ψ от времени

5 Аналитический вывод первых интегралов и уравнения движения

Из первых трех уравнений движения на координаты центра масс выводятся первые три первых интеграла:

$$\dot{x} = const$$

$$\dot{y} = const$$

$$\dot{z} = const$$

Запишем выражение для угловой скорости:

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \varphi \\ -\dot{\psi} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Запишем выражение для кин. момента:

$$\vec{K} = \mu l^2 \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\varphi} \sin \psi \cos \psi \cos \varphi \\ \dot{\psi} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \psi \cos \psi \sin \varphi \\ \dot{\varphi} \cos^2 \psi \end{pmatrix}$$

Так как на систему не действует внешних сил, то в системе отсчета центра масс сохраняется кин. момент. Откуда получаем еще два первых интеграла системы:

$$K_z = \mu l^2 \dot{\varphi} \cos^2 \psi = C_1$$

$$K_x^2 + K_y^2 = \mu^2 l^4 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2) = C_2^2$$

Поскольку $\dot{\varphi}^2 \cos^2 \psi + \dot{\psi}^2 = \frac{1}{\mu^2 l^4} (C_1^2 + C_2^2)$, уравнение движения для l можно записать как:

$$\ddot{l} + \omega^2 l - \frac{\gamma}{l^3} = \omega^2 l_0$$

где $\omega^2 = \frac{k}{\mu}$, $\gamma = \frac{C_1^2 + C_2^2}{\mu^2}$

В случае малого начального закручивания (малые γ), решение выглядит так:

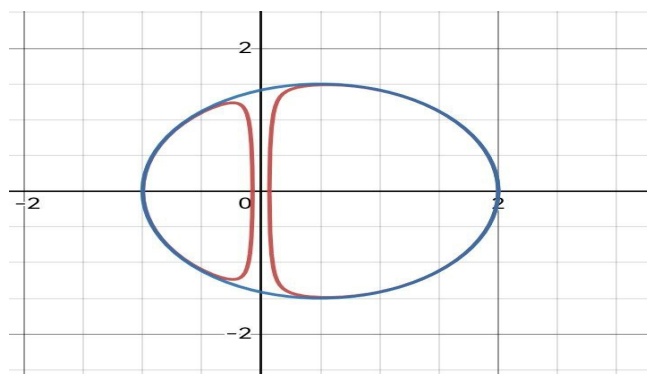


Рис. 14: фазовый портрет

Такому движению соответствует интеграл:

$$\dot{l}^2 + \omega^2 l^2 + \frac{\gamma}{l^2} - 2\omega^2 l l_0 = C$$

Так же было аналитически выражено и оценено l_{min} - длина пружины при наибольшем сближении при $l_0 = 0$:

$$l_{min} = \sqrt{\frac{1}{2\omega^2}(C - \sqrt{C^2 - 4\omega^2\gamma})} \approx \sqrt{C\gamma}$$

что соответствует переходу всей энергии в кинетическую энергию вращения (в СО центра масс).

6 Вывод

В данной работе была рассмотрена свободная система двух связанных пружиной шариков. Основные результаты полученные в результате анализа:

- найдены первые интегралы системы
- найдены основные закономерности движения системы

Данная модель может быть обобщена на более широкий класс парных взаимодействий как частный случай, таким образом не лишена практического применения.