Контрольная работа
по аналитической механике(3 семестр).
Тема: вращение двух связанных пружиной шаров.

Рябов Олег
Шистко Степан
Группа Б04-302

23 декабря 2024 г.

Содержание

1 Формулировка проблемы **3**

2 Обобщенные координаты и параметры системы **3**

3 Теория **4**

3.1 Функция Лагранжа 4

3.2 Уравнения движения 4

4 Метод численного решения задачи **5**

4.1 Описание метода 5

4.2 Полученные результаты 6

5 Аналитический вывод первых интегралов и уравнения движения **9**

6 Анализ и физический смысл **11**

1 Формулировка проблемы

В данной работе рассмотрено свободное движение пары шаров, связанных друг с другом невесомой пружиной. Метод рассмотрения: построение лагранжиана для данной системы, вывод уравнений движения и их численное интегрирование, нахождение первых интегралов.

2 Обобщенные координаты и параметры системы

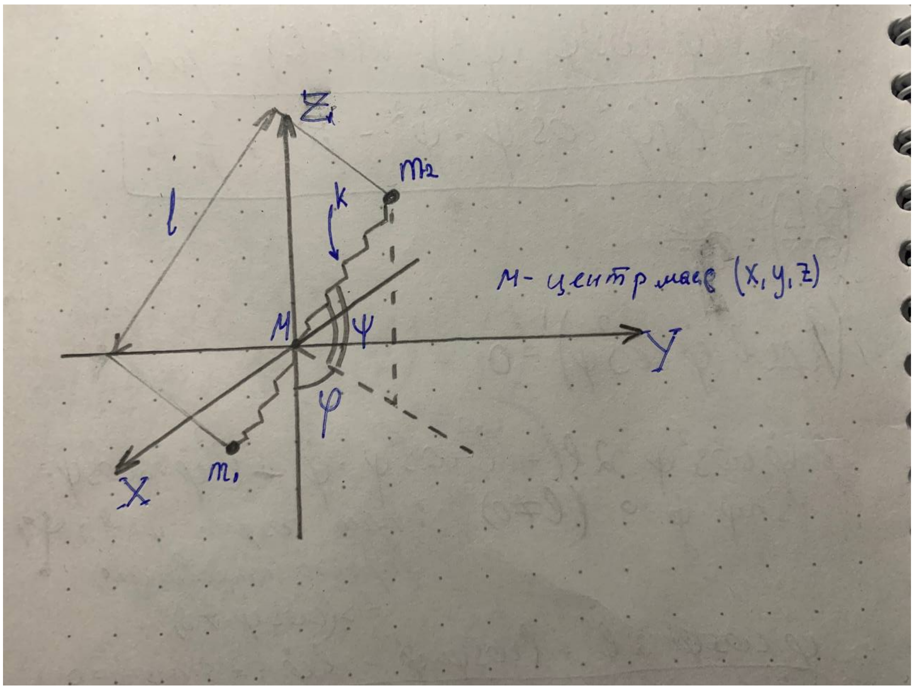

Рис. 1: Схема системы

Введены следующие обобщенные координаты:

1. x - координата центра масс по оси X
2. y - координата центра масс по оси Y
3. z - координата центра масс по оси Z
4. l - длина пружины
5. ψ - угол относительно плоскости XY
6. φ - угол в плоскости XY

Система имеет следующие независимые параметры:

1. k - жесткость пружины
2. l_0 - длины пружины без напряжения
3. m_1 - масса первого шара
4. m_2 - масса второго шара

Так же была введена вспомогательная велиина:

1. $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$

3 Теория

3.1 Функция Лагранжа

По определению

$$L = T - V$$

Поскольку тело свободное, то сил на него не действует, получаем уравнения Эйлера-Лагранжа вида:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Лагранжиан имеет в себе кинетическую энергию поступательного движения центра масс, кинетическую энергию вращения шаров вокруг центра масс, кинетическую энергию радиального движения шаров и потенциальную энергию пружины.

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\mu l^2(\dot{\varphi}^2 \cos^2\psi + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}\mu \dot{l}^2 - \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

3.2 Уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \Longrightarrow \ddot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} \Longrightarrow \ddot{y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \Longrightarrow \ddot{z} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = \frac{\partial L}{\partial l} \Longrightarrow \ddot{l} = l(\dot{\varphi}^2 \cos^2\psi + \dot{\psi}^2 - \frac{k}{\mu}) + \frac{k}{\mu}l_0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Longrightarrow \ddot{\varphi} = \frac{2l\dot{\varphi}\sin\psi\dot{\psi} - 2\dot{\varphi}\cos\psi\dot{l}}{l\cos\psi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \psi} \Longrightarrow \ddot{\psi} = \frac{-2\dot{l}\dot{\psi} - l\dot{\varphi}^2\cos\psi\sin\psi}{l}$$

4 Метод численного решения задачи

4.1 Описание метода

Для численного решения полученной сиситемы дифференциальных уравниений использовался метод Рунге-Кутты 4-5, с помощью которого можно получить достаточно близкие к реальным значения. Описание метода:

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y\prime = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$y[n+1] = y[n] + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$$k_1 = f(x[n], y[n])$$

$$k_2 = f(x[n] + \frac{h}{2}, y[n] + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x[n] + \frac{h}{2}, y[n] + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x[n] + h, y[n] + hk_3)$$

где h — величина шага сетки по x.

Этот метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$.

4.2 Полученные результаты

По итогам моделирования с характерными параметрами, которые приведены в файле "main.json"получены графики:

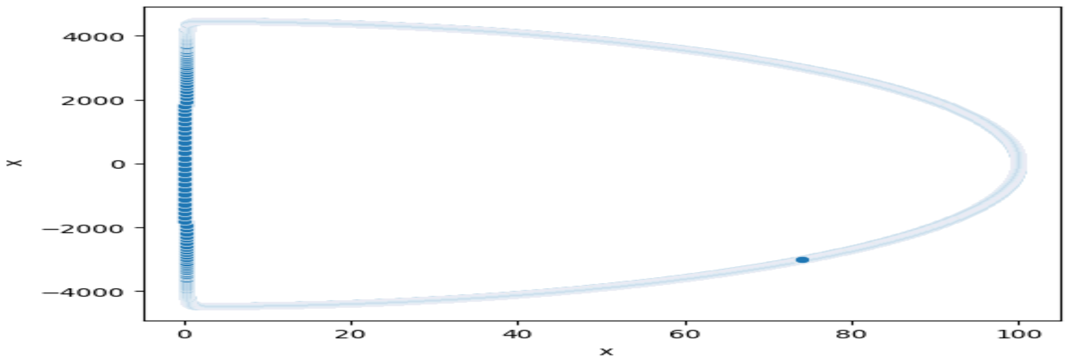

Рис. 2: фазовый портрет l

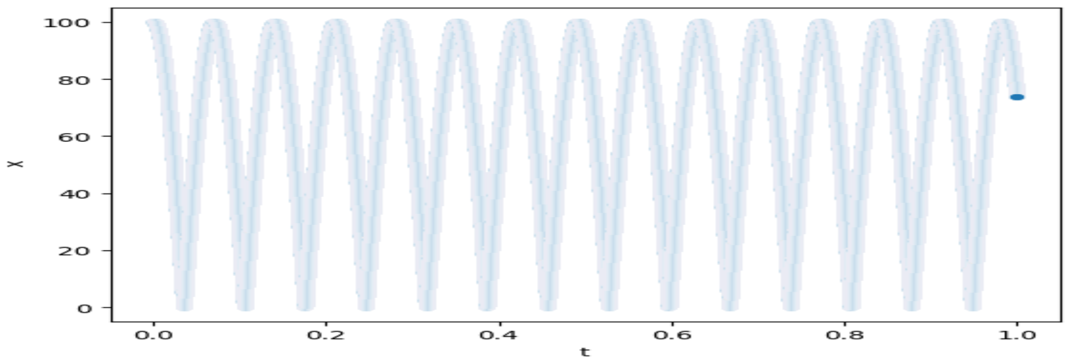

Рис. 3: эволюция l

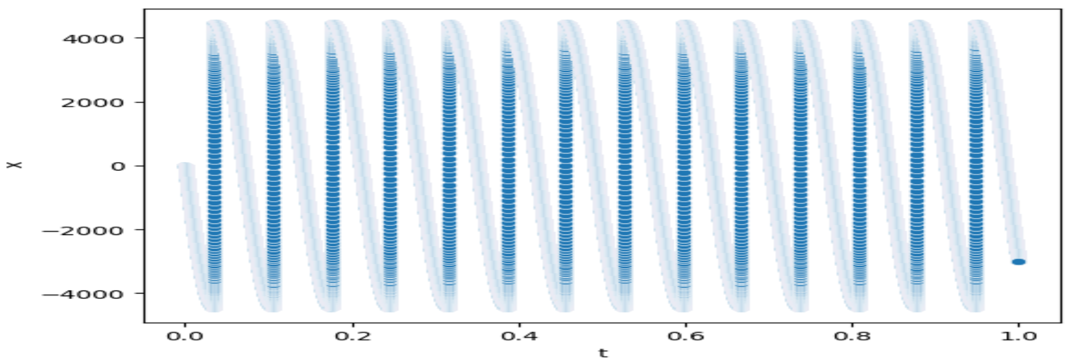

Рис. 4: эволюция $\dot{l}$

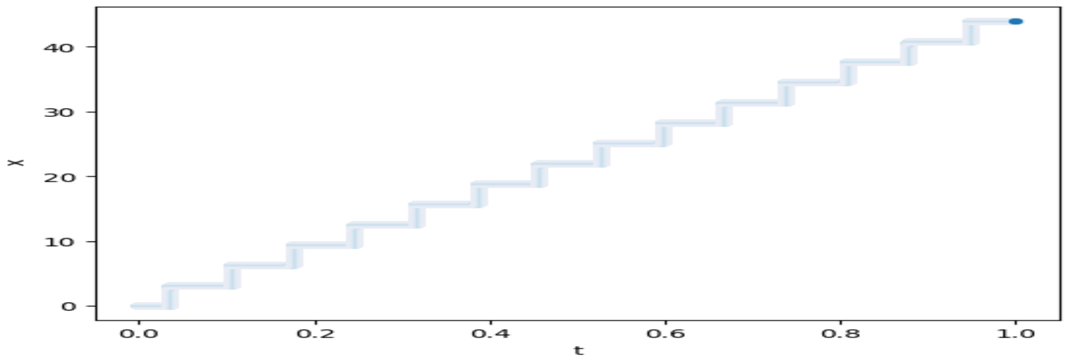

Рис. 5: эволюция φ

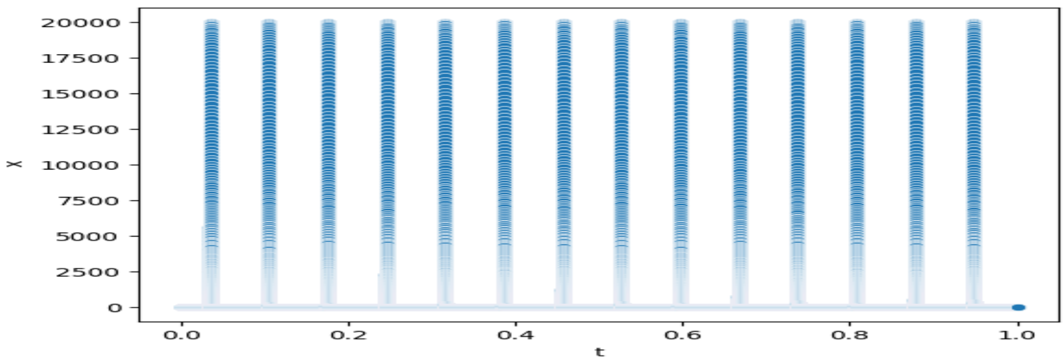

Рис. 6: эволюция $\dot{\varphi}$

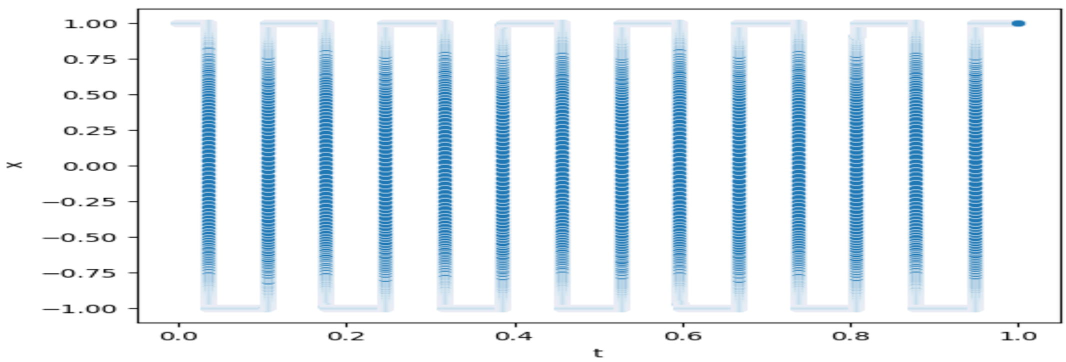

Рис. 7: эволюция ψ

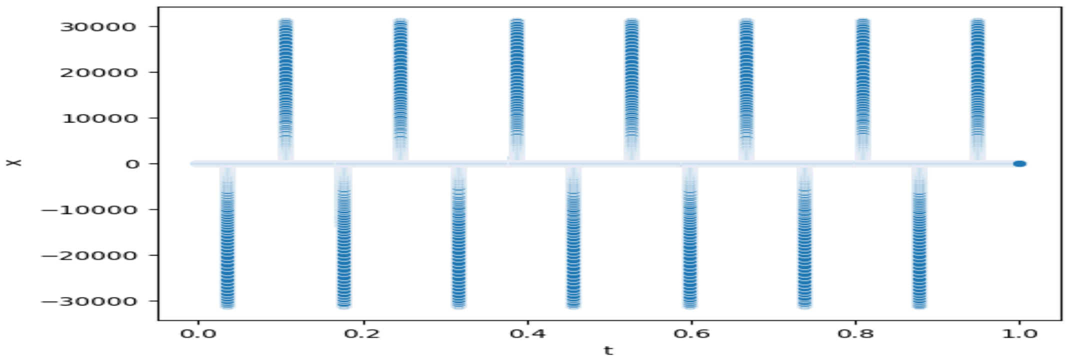

Рис. 8: эволюция $\dot{\psi}$

Отличной проверкой точности служит закон сохранения энергии, поскольку на нашу систему не действует внешних сил. В результате из-за погрешности численного метода энергия флуктуирует не больше чем на десятую процента.

5 Аналитический вывод первых интегралов и уравнения движения

Из первых трех уравнений движения на координаты центра масс выводятся первые три первых интеграла:

$$\dot{x} = const$$

$$\dot{y} = const$$

$$\dot{z} = const$$

Запишем выражение для угловой скорости:

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\varphi \\ -\dot{\psi}\cos\varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Запишем выражение для кин. момента:

$$\vec{K} = \mu l^2 \begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\varphi - \dot{\varphi}\sin\psi\cos\psi\cos\varphi \\ \dot{\psi}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\psi\cos\psi\sin\varphi \\ \dot{\varphi}\cos^2\psi \end{pmatrix}$$

Так как на систему не действует внешних сил, то в системе отсчета центра масс сохраняется кин. момент. Откуда получаем еще два первых интеграла системы:

$$K_z = \mu l^2 \dot{\varphi}\cos^2\psi = C_1$$

$$K_x^2 + K_y^2 = \mu^2 l^4 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\psi\cos^2\psi + \dot{\psi}^2) = C_2^2$$

Поскольку $\dot{\varphi}^2 \cos^2\psi + \dot{\psi}^2 = \frac{1}{\mu^2 l^4}(C_1^2 + C_2^2)$, уравнение движения для l можно записать как:

$$\ddot{l} + \omega^2 l - \frac{\gamma}{l^3} = \omega^2 l_0$$

где $\omega^2 = \frac{k}{\mu}$, $\gamma = \frac{C_1^2 + C_2^2}{\mu^2}$

В случае малого начального закручивания (малые γ), решение выглядит так:

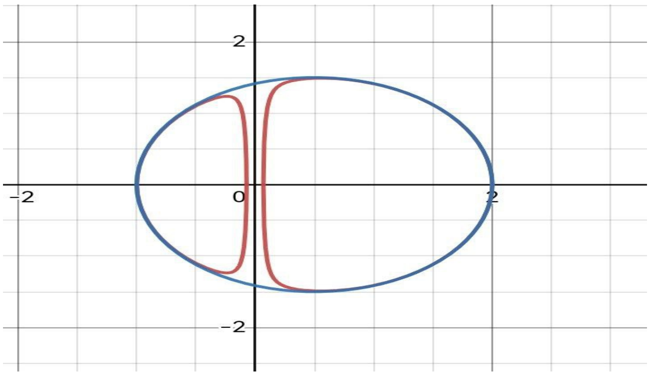

Рис. 9: фазовый портрет

Такому движению соответствует интеграл:

$$\dot{l}^2 + \omega^2 l^2 + \frac{\gamma}{l^2} - 2\omega^2 l l_0 = C$$

Так же было аналитически выражено и оценено l_{min} - длина пружины при наибольшем сближении при $l_0 = 0$:

$$l_{min} = \sqrt{\frac{1}{2w^2}(C - \sqrt{C^2 - 4\omega^2\gamma})} \approx \sqrt{C\gamma}$$

что соответсвует переходу всей энергии в кинетическую энергию вращения(в СО центра масс).

6 Анализ и физический смысл

В нашей работе была рассмотрена свободгная система, движение которой задается нелинейным дифференциальным уравнением, решена численно и проанализирована аналитически. Физсмысл найден, это просто пружинка(хотя постойте, но ведь модель гармонического осцилятора в качестве молекулы, и у нас картины похожие на ЛД потенциал графики...)(расскажем за 4 балл)