

---

# ELEKTRON LAVINA EFFEKTUS SZIKRAKISÜLÉSEKNÉL

---

Tari Balázs

SZEGED  
2016



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

## Tartalomjegyzék

1	Kivonat.....	2
2	Bevezetés.....	3
3	A kúp alakú elektród által kialakított elektromos térerősség .....	4
4	Gázok ionizációja elektronokkal, a lavina effektus .....	6
4.1	Ionizáció-rekombináció modell .....	6
4.1.1.	Nullklínák keresése .....	8
4.1.2.	Linearizálás, stabilitás vizsgálat.....	8
4.1.3.	Első integrál keresés .....	9
4.2	Elektron lavina effektus .....	11
5	Felhasznált irodalom.....	13



# 1 Kivonat

Az elektromos szikrakisülés keletkezése a nagy elektromos térerősség hatására felgyorsuló elektronok ütközési ionizálás útján újabb és újabb töltéshordozókat hoznak létre, így alakul ki az ún. elektronlavina. Az elektronok felgyorsításának legegyszerűbb módja az, mikor 2 elektród (fegyverzet) között potenciál különbséget keltünk. A diszkutáció első felében egy javasolt elektród geometriát mutatok be, amelynek köszönhetően bekövetkezhet a csúcshatás. Végezetül bemutatok egy viszonylag egyszerű modellt a lavina effektus dinamikájára.

**Kulcsszavak:** Elektron lavina effektus, szikrakisülés



## 2 Bevezetés

A szikrakisülés keletkezése a nagy elektromos térerősség hatására felgyorsuló elektronok ütközési ionozás útján újabb és újabb töltéshordozókat hoznak létre, így alakul ki az ún. elektronlavina. Az elektronlavina megindulásának alapfeltétele egy ún. startelektron keletkezése, amit fotoionozás, kozmikus háttérsugárzás stb. hozhat létre. Az ütközési ionozás hatásosságát döntően befolyásolja az elektronok átlagos szabad úthossza, vagyis az a távolság, amelyen a villamos térerősség az elektront gyorsítja, neki mozgási energiát ad. Az ütközés pillanatában akkor keletkezhet új töltéshordozó, ha az elektron mozgási energiája már meghaladja az adott molekula ionizációs energiáját. Az elektronlavinából alakul ki a halvány fényszálakat formáló pamatos kisülés, majd ha a pamatok árama meghalad egy kritikus értéket (hőionizációs határáram), a kisülés jellege megváltozik, a töltéshordozók létrehozásában már a hőionizáció is részt vesz és kialakul az átütési csatorna. A teljes átütési folyamatot tehát az határozza meg, hogy van-e startelektron, majd ezt követően a különböző ionizációs folyamatok képesek-e hirtelen nagy mennyiségű töltéshordozó létrehozására. Az átütést követően - elegendően nagy tápteljesítmény esetén - villamos ív jön létre, amelyet jó vezetőképesség és nagy áram jellemez, a töltéshordozók pedig az ívcsatornában hő ill. fotoionozás révén jönnek létre. A folyamat elején számos ütközés következhet be (rugalmas, rugalmatlan, metastabil, másodfajú, fotongerjesztés, electron-elektron. Ezek közül a másodikat emelném ki, ugyanis a későbbiekben az elektronsűrűség dinamikáját leíró modellszámítás alappilérét fogja szolgálni.

**Rugalmatlan elektronütközés** ( $A + e \rightarrow A^* + e$ ): Ha a felgyorsult elektron energiája eléri az atom külső elektronjának gerjesztési szintjét akkor rugalmatlan ütközés játszódhat le. Ennek során az elektron veszíti energiájából, és az atom gerjesztett állapotba kerül. Tovább növelve az elektron energiáját, az ionizálhatja az atomot, leszakítva annak külső elektronját. Ebben az esetben a felgyorsított elektron energiája nagyobb, mint a külső elektron kötési energiája ( $A + e \rightarrow A^{++} + 2e$ ). Az elektron energiájának további növelésével többszörös ionizáció érhető el, melynek során többszörösen pozitív töltésű atom keletkezik a gázban ( $A + e \rightarrow A^{2+} + 3e$ ). A többszörös ionizációhoz szükséges energia nemlineárisan növekszik, pl. a higany gerjesztéséhez 4,88 eV energia szükséges, az egyszeres ionizációhoz 10,4 eV, míg az ötszörös ionizációhoz 171 eV. Az így keletkezett pozitív ionokkal az elektronok ismét egyesülhetnek (rekombináció). Ez a folyamat az ionizáció megfordítását jelenti ( $A^{++} + e \rightarrow A^*$ ) (Almási, et al., 2013).



### 3 A kúp alakú elektród által kialakított elektromos térerősség

Egy  $\theta$  nyílásszögű kúp felületén a  $\Phi$  elektromos potenciál 0. Milyen a tér a kúp belsejében, a csúcs közelében, ha a kúpot lezáró gömbfelületen a potenciál forgásszimmetrikus?

Dolgozzunk gömbi polárkoordináta rendszerben. A  $\Delta\Phi = 0$  Laplace egyenlet megoldásához használjuk fel a Legendre polinómot.

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \vartheta, \varphi), \begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases} \quad (1)$$

Ebben az esetben nem a teljes  $4\pi$  tartományban értelmezett a megoldás, viszont a  $\theta = 0$  benne van az értelmezési tartományban, és a megoldás nem függ  $\varphi$ -től.

Ezenfelül a potenciál véges a  $\lim_{r \rightarrow 0}$  esetben, így a kifejtés:

$$\Phi(r, \vartheta) = \sum_{\nu} A_{\nu} r^{\nu} P_{\nu}(\cos \vartheta) \quad (2)$$

A lehetséges  $\nu$  értéket az határozza meg, hogy  $\vartheta = \theta$  esetben  $\Phi = 0$ , továbbá:

$$P_{\nu}(\cos \theta) = 0 \quad (3)$$

Egy adott  $\theta$ -ra a  $P_{\nu}(\cos \theta)$  oszcilláló függvénye  $\nu$ -nek. A  $P_{\nu}(\cos \vartheta)$  függvények teljes rendszert alkotnak, azaz kifejezhető  $r=R$  mellett adott határfeltétel. Ha egyre megközelítjük a csúcsot, akkor egyre inkább a legkisebb  $\nu$  értékek kezdenek el dominálni:

$$\Phi(\lim_{r \rightarrow 0}, \vartheta) \sim r^{\nu_0} P_{\nu_0}(\cos \vartheta) \quad (4)$$

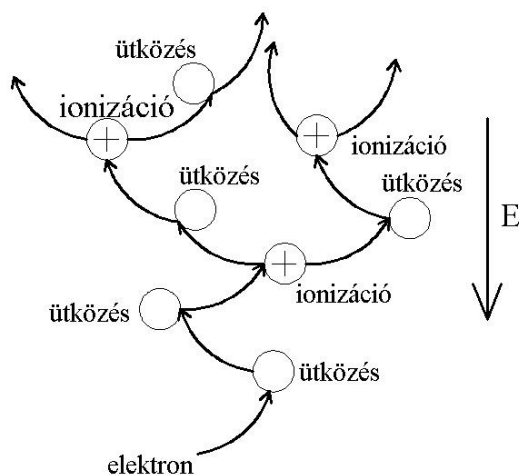
- Ha  $\theta \rightarrow 0$ , akkor  $\cos \theta \rightarrow 1$ , viszont  $P_{\nu}(1) = 1$ , azaz egyre nagyobb  $\nu$  kell a nullhelyhez, így  $\nu_0 \rightarrow \infty$ .
- Ha  $\theta < \frac{\pi}{2}$ , akkor  $\nu_0 > 1$ .
- Ha  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , akkor a kúp síklapba megy át. Ennek közelében  $\Phi \sim z = r \cos \theta$ .
- Ha  $\theta > \frac{\pi}{2}$ , akkor  $\nu_0 < 1$ .



A felületre merőleges elektromos térerősség nagysága:

$$E_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sim r^{\nu_0-1} \sin \theta P'_{\nu_0}(\cos \theta) \quad (5)$$

Ez azt jelenti, hogy  $\theta > \pi/2$  esetén, az elektród felületéhez közeledve a térerősség  $\infty$ -hez tart. Ez a csúcshatás. Levegőben, standard körülmények között ( $T=298,15$ ,  $p=101325$  Pa) a maximális elektromos térerősség  $10^6 - 10^7$  V/m. Ennél nagyobb térben a kis számban jelen lévő töltéshordozók a tér hatására felgyorsulva a többi gázmolekulával ütköznek. Ennek eredményeképpen újabb töltéshordozók keletkezhetnek. Az így kialakuló lavina effektus kisülést eredményez (Jackson, 1967).



1. ábra A lavina effektus magyarázata (Hamai & Sami, 2014)



## 4 Gázok ionizációja elektronokkal, a lavina effektus

### 4.1 Ionizáció-rekombináció modell

Tételezzünk fel egy „zárt”, véges kiterjedésű szikrakisülési teret, amelyben a  $t=0$  időpillanatban végecsok elemszámú semleges gázmolekula található. Legyen a tartályban két, egymással szembe álló fém elektród, amelyek között elektromos térerősség van. Amikor még a gáz nincs ionizálva, de már megjelentek a szabad elektronok, akkor kezdetben az elektronok még csak a semleges atomokkal tudnak ütközni. Minden egyes ionizálással új(abb) elektron(ok) szakadhat(nak) le, amely tovább gyorsulva a külső elektromos térerősség hatására, más semleges gáztomokkal ütközve ionizálja azokat, és így tovább. Ennek eredményeképpen kialakul egy plazma vezetési csatorna, melynek az élettartama csupán néhány ns. Tehát az egységnyi idő alatt bekövetkező ionizálások száma arányos az ionizált gáztomok számával. Az ilyen ütközések gyakorisága arányos a „p” gáznyomással (Hevesi, et al., 2014). Amint az ionizáció magasabb fokú lesz, az elektron-ion ütközések fognak dominálni, ami csökkenti mind az ionszám, mind az elektronszám időbeli változását, ezért erre egy két tagú differenciálegyenlet rendszert lehet felírni.

$$\begin{aligned}\frac{dn_i}{dt} &= \alpha n_i - \beta n_e \\ \frac{dn_e}{dt} &= \gamma n_e - \delta n_i\end{aligned}\tag{6}$$

Osszuk le mind a két egyenletet térfogattal, bevezetve a „n” részecskeszám sűrűséget. Szorozzuk be mind a két egyenletet az elemi töltéssel, bevezetve a „ $\rho$ ” töltéssűrűséget. Vezessük be az elektron-ion ütközés frekvenciájának fogalmát az ion szemszögéből:

$$\beta = \rho_i \sigma v_{term}\tag{7}$$

, ahol  $v_{term}$  az elektron termikus sebessége,  $\rho_i$  pedig az ionsűrűség,  $\sigma = \pi b^2$ , ahol b az elektron-ion távolság.

$$\frac{Ze^2}{b} = \frac{1}{2} m_e v_{te}^2\tag{8}$$



, amiből b-t kiküszöbölve kifejezhető az arányossági tényező.

$$\beta = \rho_i \left( \frac{Ze^2}{m_e v_{te}^2} \right)^2 v_{te} = \frac{\rho_i 4Z^2 e^4}{m_e v_{te}} \sim \frac{\rho_i Z^2}{T_e^{3/2}} \quad (9)$$

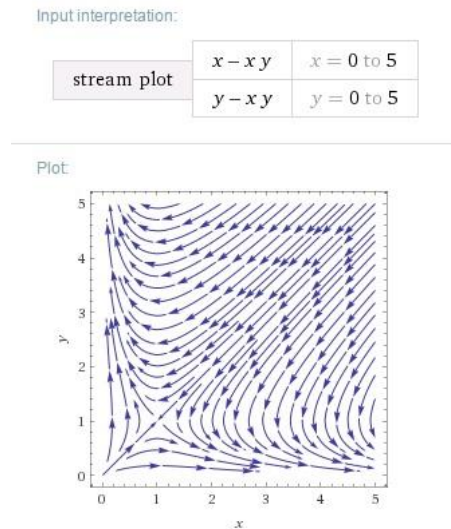
Ennek analógiájára az elektron szemszögéből is levezethető az arányossági tényező.

$$\delta \sim \frac{\rho_e Z^2}{T_i^{3/2}} \quad (10)$$

Megjegyezzük, hogy a különböző részecsketípusok hőmérséklete különböző. Ami azt jelenti, hogy a Maxwell-eloszlás jelen esetben csak részleges termodinamikai egyensúlyt jelent. Természetesen  $\beta$  -t és  $\delta$  -t a megfelelő mértékegységű " $\xi$ " szorzófaktorral be kell szorozni, hogy dimenzió szempontjából helytálló legyen.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} &= \epsilon p \rho_i - \xi \frac{Z^2}{T_e^{3/2}} \rho_i \rho_e = f(\rho_i, \rho_e) \\ \frac{d\rho_e}{dt} &= \epsilon p \rho_e - \xi \frac{Z^2}{T_i^{3/2}} \rho_e \rho_i = g(\rho_i, \rho_e) \end{aligned} \quad (11)$$

Az ábrázolást megkönnyítve az összes konstans legyen egyenlő 1-gyel, valamint  $\rho_i == x$ ,  $\rho_e == y$ .



2. ábra A vizsgált differenciálegyenlet rendszer fázisképe





### 4.1.1. Nullklínák keresése

Nullklínák keresése:  $f(\rho_i, \rho_e) = g(\rho_i, \rho_e) = 0$  algebrai egyenletrendszer megoldásai adják. Négy különböző esetet különböztetünk meg.

1.  $\rho_i = 0$  és  $\rho_e$ , azaz  $(0,0)$  az egyik egyensúlyi helyzet.
2.  $\rho_i = 0$  és  $\varepsilon p - \xi \frac{\rho_i Z^2}{T_e^{3/2}} = 0$ , azaz ennek megoldása  $(0,0)$ .
3.  $\rho_e = 0$  és  $\varepsilon p - \xi \frac{\rho_e Z^2}{T_i^{3/2}} = 0$ , azaz ennek megoldása  $(0,0)$ .
4.  $\varepsilon p - \xi \frac{\rho_i Z^2}{T_e^{3/2}} = 0$  és  $\varepsilon p - \xi \frac{\rho_e Z^2}{T_i^{3/2}} = 0$ , azaz ennek a megoldása  $(\frac{\varepsilon p T_e^{3/2}}{\xi Z^2}, \frac{\varepsilon p T_i^{3/2}}{\xi Z^2})$ .

### 4.1.2. Linearizálás, stabilitás vizsgálat

Írjuk fel a Jacobi-mátrixot az egyensúlyi helyzetekre.

$$J(\rho_i, \rho_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\rho_i, \rho_e)}{\partial \rho_i} & \frac{\partial f(\rho_i, \rho_e)}{\partial \rho_e} \\ \frac{\partial g(\rho_i, \rho_e)}{\partial \rho_i} & \frac{\partial g(\rho_i, \rho_e)}{\partial \rho_e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon p - \frac{\xi \rho_e}{T_i^{3/2}} & -\frac{\xi \rho_i}{T_i^{3/2}} \\ -\frac{\xi \rho_e}{T_e^{3/2}} & \varepsilon p - \frac{\xi \rho_i}{T_e^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \varepsilon p & 0 \\ 0 & \varepsilon p \end{pmatrix}; J(\frac{\varepsilon p T_e^{3/2}}{\xi Z^2}, \frac{\varepsilon p T_i^{3/2}}{\xi Z^2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon p \frac{T_e^{3/2}}{T_i^{3/2}} \\ -\varepsilon p \frac{T_i^{3/2}}{T_e^{3/2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

A  $J(0,0)$  sajátértékek számolása.

$$\det|J(0,0) - \lambda I| = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \varepsilon p > 0 \text{ „source”} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_i \\ \dot{\rho}_e \end{pmatrix} = J(0,0) \begin{pmatrix} \rho_i \\ \rho_e \end{pmatrix} \quad (15)$$

Tehát az eredeti nemlineáris egyenlet  $(0,0)$  egyensúlyi helyzete instabil.



A  $J(\frac{\varepsilon p T_e^{3/2}}{\xi Z^2}, \frac{\varepsilon p T_i^{3/2}}{\xi Z^2})$  sajátértékek számolása.

$$\det \left| \left( \frac{\varepsilon p T_e^{3/2}}{\xi Z^2}, \frac{\varepsilon p T_i^{3/2}}{\xi Z^2} \right) - \lambda I \right| = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \varepsilon p > 0 \text{ „source”} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_i \\ \dot{\rho}_e \end{pmatrix} = J \left( \frac{\varepsilon p T_e^{3/2}}{\xi Z^2}, \frac{\varepsilon p T_i^{3/2}}{\xi Z^2} \right) \begin{pmatrix} \rho_i \\ \rho_e \end{pmatrix} \quad (17)$$

Tehát az eredeti nemlineáris egyenlet  $(\frac{\varepsilon p T_e^{3/2}}{\xi Z^2}, \frac{\varepsilon p T_i^{3/2}}{\xi Z^2})$  egyensúlyi helyzete szintén instabil.

### 4.1.3. Első integrál keresés

Osszuk el egymással a 2 differenciálegyenletet. A  $\rho_i \rightarrow \rho_e(\rho_i)$  függvényre a következő szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletet kapjuk.

$$\frac{d\rho_e}{d\rho_i} = \frac{\left( \varepsilon p - \frac{\xi \rho_i}{T_e^{3/2}} \right) \rho_e}{\left( \varepsilon p - \frac{\xi \rho_e}{T_i^{3/2}} \right) \rho_i} \quad (18)$$

Megoldva a differenciálegyenletet, első integrálnak az alábbi függvény adódott.

$$U(\rho_i, \rho_e) = \ln|\rho_e| \left[ \varepsilon p - \frac{\xi}{T_i^{3/2}} (\rho_e - 1) \right] - \ln|\rho_i| \left[ \varepsilon p - \frac{\xi}{T_e^{3/2}} (\rho_i - 1) \right] \quad (19)$$

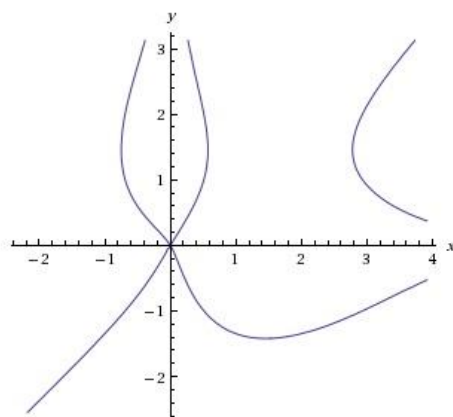


Az ábrázolást megkönnyítve az összes konstans legyen egyenlő 1-gyel.

Input interpretation:

plot  $\log(|y|)(2-y) - \log(|x|)(2-x) = 1$

Implicit plot:

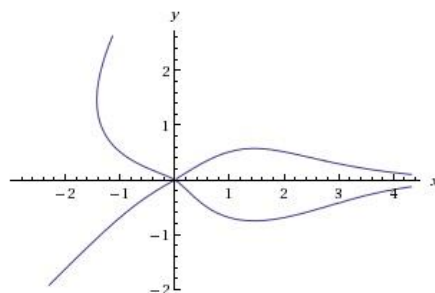


3. ábra Példa negatív értékű első integrálra

Input interpretation:

plot  $\log(|y|)(2-y) - \log(|x|)(2-x) = -1$

Implicit plot:



4. ábra Példa pozitív értékű első integrálra

A fázisképek a jobb felső pozitív síknegyedben értelmezettek, azaz  $\rho_i, \rho_e \in R^+$ .



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

## 4.2 Elektron lavina effektus

Egészen eddig fenomenológikus szinten tárgyaltuk az effektust. Figyelmen kívül hagytuk az elektromos térerősség által hajtott töltéstranszportot, valamint az ütközési folyamatokat. Ebben az alfejezetben e hiányosságokat fogjuk pótolni.

$\Delta x$  hosszúságú,  $A$  felületű szakasza a csőnek. A csőszakaszban lévő negatív töltésmennyiség:  $\rho_e A \Delta x$ . Diffúziós tagot nem vezetünk be, ugyanis a folyamat néhány ns alatt játszódik le.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta q) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_e \Delta V) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_e A \Delta x) = \rho_e(x, t) v_x A - \rho_e(x + \Delta x, t) v_x A + g A \Delta x \quad (20)$$

Az előbbi egyenletet átrendezve és  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$  határátmenetet képezve

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -v_x \frac{\rho_e(x + \Delta x, t) - \rho_e(x, t)}{\Delta x} + g \rightarrow -v_x \frac{\partial \rho_e}{\partial x} + g \quad (21)$$

, ahol  $g = g(\rho_e(x, t), \rho_i(x, t))$  az egységnyi térfogatban, időegység alatt keletkező, vagy eltűnő töltésmennyiség. Ebben az esetben  $g(\rho_e(x, t)) = \varepsilon p \rho_e(x, t)$ , vagy  $g(\rho_e(x, t), \rho_i(x, t)) = \varepsilon p \rho_e(t) - \xi \frac{Z^2}{T_i^{3/2}} \rho_e(t) \rho_i(t)$  az ionizációs, vagy az ionizációs-rekombinációs tag.

Fel kell tennünk a kérdést, hogy az elektronok  $\langle \vec{v} \rangle$  átlagsebesség milyen függvénye a gyenge, valamint az erős  $\vec{E}$  elektromos térerősségnek? Írjuk fel a dinamika alapegyenletét az elektronokra egy sebességgel arányos közegellenállási taggal, figyelembe véve a kis sebességű rugalmas ütközést a semleges gázatomokkal.

$$q\vec{E} = m \frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} + m \frac{\langle \vec{v} \rangle}{\tau_c} \quad (22)$$

Vegyük csak az  $x$  irányú komponensét. Rendezzük át, majd oldjuk meg a differenciálegyenletet.

Mivel az elektronok gyorsan elérik a  $\langle v_x \rangle$  sebességet, azaz  $\tau_c \ll t \rightarrow e^{-\frac{t}{\tau_c}} \approx 0$ ,

$$\langle v_x \rangle = \frac{q\tau_c}{m} E_x = \mu E_x \approx v_x \quad (23)$$



, ahol  $\mu$  a mobilitási paraméter. Ezzel megkaptuk a  $v_x(E_x)$  függést kicsi térerősségre. Ilyenkor még nincs ionizáció, valamint rekombináció, azaz  $g(\rho_e(x, t), \rho_i(x, t)) = 0$ . Ekkor felírhatjuk kis térerősségre a  $\rho_e$  időfüggését.

$$\frac{d\rho_e}{dt} = -\mu E_x \frac{\partial \rho_e}{\partial x} \quad (24)$$

Mivel a  $\mu, E_x, \frac{d\rho_e}{dt}$  definíció szerint pozitív mennyiségek, a töltéssűrűség gradiensnek negatívnak kell lennie, azaz  $\frac{\partial \rho_e}{\partial x} < 0$ . Ez azt jelenti, hogy a töltésmennyiség a nagyobb „koncentrációjú” helyről a kisebb „koncentrációjú” hely felé „diffundál”.

Egészen nagy ( $|\vec{E}| > 10^7$  V/m) elektromos térerősség esetén az elektronok olyan  $v$  sebességet érhetnek el amellyel, az atomokkal való rugalmatlan ütközés révén újabb elektronok szakadhatnak le. Ekkor  $g(\rho_e(x, t), \rho_i(x, t)) \neq 0$ .

$$\frac{d\rho_e}{dt} = -v_{ionizálás} \times \frac{\partial \rho_e}{\partial x} + g(\rho_e(x, t), \rho_i(x, t)) \quad (1)$$

Kísérletileg az elektronok háttérkorrigált fékezési sugárzás spektrumát tanulmányozva további következtetéseket vonhatunk le.



## 5 Felhasznált irodalom

- Almási, G., Erdélyi, M., Fülöp, A. J., Hebling, J., Horváth, Z., Kovács, P. A., . . . Smausz, T. K. (2013). *Lézerfizika - elektronikus tananyag*. Forrás: [https://eta.bibl.u-szeged.hu/17111/2/lezerfizika/titan.physx.u-szeged.hu/\\_bubo/Lezerfizika/book.html](https://eta.bibl.u-szeged.hu/17111/2/lezerfizika/titan.physx.u-szeged.hu/_bubo/Lezerfizika/book.html)
- Hamai, A., & Sami, K. (2014). *Mikromechanika é elektronikus tananyag*. Forrás: [http://www.mogi.bme.hu/TAMOP/mikromechanika/images/image\\_IV\\_6.jpeg](http://www.mogi.bme.hu/TAMOP/mikromechanika/images/image_IV_6.jpeg)
- Hevesi, I., Vinkó, J., Bozóki, Z., Ajtai, T., Bari, F., Szatmáry, K., . . . Földi, P. (2014). *PhD doktori kurzusok fizikából*. Szeged, Magyarország: JATEPress.
- Jackson, J. D. (1967). *Classical electrodynamics*. John Wiley and Sons.



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).