

---

# A DIÓDA LÉZER PUMPÁLT CW ÜZEMŰ RUBIN LÉZER ELMÉLETI ALAPJAI

---

Tari Balázs

SZEGED  
2023.



Click or tap here to enter text.

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

## Tartalomjegyzék

1. Kivonat.....	3
2. A kétszintes lézermodell.....	4
2.1. Az abszolút fekete test sugárzás .....	4
2.2. Az abszorpció és emisszió Einstein együtthatói .....	4
2.3. A vonalszélesség és elfajulás .....	7
2.4. Az emissziós hatáskeresztmetszet .....	8
2.5. Az abszorpciós hatáskeresztmetszet .....	9
2.6. Termális és optikai gerjesztés .....	10
3. A lézerek működésének alapjai .....	12
3.1. A rezonátor mátrixoptikai leírása .....	12
3.2. A paraxiális hullámegyenlet .....	14
3.3. A Gauss nyaláb illesztése a rezonátorhoz .....	18
3.4. A Gauss nyaláb fókuszálása, az ABCD szabály.....	19
3.5. A rezonátor küszöbfeltétele .....	20
3.6. A rezonátor foton élettartama.....	21
3.7. A rezonátor kontinuitási egyenlete.....	22
3.8. A rezonátor jósági tényezője .....	23
3.9. A rezonátor transzmissziós tényezője és vonalfüggvénye .....	23
3.10. Koherens (lézeres) optikai gerjesztés .....	26
4. Folytonos lézerműködés .....	30
4.1. A háromszintes lézermodell .....	30
4.2. Az abszorpció és erősítés telítődése.....	34
4.3. Működési küszöbfeltétel .....	37
4.4. Lézermódusok kialakulása.....	38
4.5. Transzverzális módusszelekció.....	40
4.6. Longitudinális módusszelekció .....	40
4.7. A monokromatikusság határa.....	41
4.8. Lézerek hangolása .....	42
5. A rubin kristály, mint lézeraktív anyag.....	43
6. A rubin kristály optikai tulajdonságai .....	44
7. Irodalomjegyzék.....	46





Click or tap here to enter text.

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

## 1. Kivonat

Néhány nemrégiben megjelent cikkekben: (Krupke & Zweiback, 2020); (Luhs & Wellegehausen, Diode pumped cw ruby laser, 2019); (Luhs, Wellegehausen, Zuber, & Morgner, 2021) beszámoltak 405 nm-es lézervediódákkal pumpált cw üzemi rubinlézerek működéséről. A leírtak alapján több mint 60 évvel ezelőtt az első lézer megépítése óta (Maiman T. H., 1960) mind a villanó lámpa pumpált, mind a dióda lézer pumpált cw üzemi lézerek még mindig izgalmas eszközként számítanak a metrológiai alkalmazásokban. Ebben a tanulmányban megismerkedhetünk hogyan épül fel egy dióda lézerrel pumpált cw üzemi rubin lézer. A kiválasztott rezonátor típusa hemiszférikus, mely könnyen kezelhető és érzéketlen az eltolódásra. Emiatt ugyanakkor kialakulhatnak transzverzális módusok (leginkább  $TEM_{00}$ ). A kiválasztott üzemmód cw, azaz folytonos.

Jelen tanulmány az optika, atomfizika alapjainak ismeretét tételezi fel. Az egyes fejezetek bevezetése többnyire csak az algebra ismeretét kívánja meg, egyebekben a differenciál és integrálszámítás alapjainak ismeretét várjuk el. Célja, hogy a lézerfizika tudományterület alapjaival és megismertesse az Olvasót. Jelen tanulmány a (Almási, et al., 2013) digitális tananyagot dolgozza fel.



## 2. A kétszintes lézermodell

A lézerek működésének fizikai alapjait a klasszikus fizika és a kvantummechanika egyaránt képes leírni. Itt most a megértés történelmi útján végigjárva egy szemléletes (eredetileg 1914-ben Einstein által publikált) gondolatmenettel mutatjuk be a legalapvetőbb törvényeket.

### 2.1. Az abszolút fekete test sugárzás

Legyen abszolút fekete test egy zárt,  $L$  élhosszúságú kocka alakú fém doboz, melyen egy kis nyílás található. Irányítsunk fényt a dobozba a nyíláson keresztül. A doboz belsejében stacionárius esetben a falakról való visszaverődés következtében állóhullámok alakulnak ki, ezek a zárt üreg módusai. A környezetnél magasabb  $T$  abszolút hőmérsékletre melegítve a kilépő fény intenzitása arányos az üregben lévő  $\rho$  energiasűrűséggel. A sugárzás  $\rho(\nu)$  energiasűrűségének spektrális eloszlását elsőként Max Planck határozta meg azzal a feltételezéssel, hogy a  $\nu$  frekvenciájú módus energiája nem lehet tetszőleges, hanem csak egy  $h\nu$  érték (az úgynevezett hatáskvantum) többszöröse. Az energiasűrűséget az átlagos energiának és a módussűrűség szorzata adja:

$$\rho(\nu) = \frac{8 \cdot \pi \cdot \nu^2}{c^3} \cdot \frac{h \cdot \nu}{e^{h \cdot \nu / k \cdot T} - 1} \quad 1.)$$

, ahol:

- $k$  a Boltzmann állandó
- $h$  a Planck állandó
- $c$  a fénysebesség vákuumban

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.

### 2.2. Az abszorpció és emisszió Einstein együtthatói

Az atomfizika korán megmutatta, hogy a fény elnyelése az atom alapállapotból gerjesztett állapotba jutásával jár, míg az emisszió az alapállapotba való visszajutás eredménye. Az üregben lévő gázban tehát abszorpciós és emissziós átmenetek jönnek létre, ugyanakkor kívülről nézve ennek semmi jele. Ennek a problémának a megoldását írta le Einstein 1917-ben publikált dolgozatában. Legyen egy zárt üreg gázzal töltve. A  $T$  abszolút hőmérsékletű stacionárius állapotban a gáz a jól ismert kétszintes lézer modellnek megfelelően  $E_1$  energiájú alap és  $E_2$  energiájú gerjesztett állapotokkal rendelkezzen az abszorpció és emisszió  $E_2 - E_1 = h \cdot \nu$  energiájú foton elnyelését, illetve kisugárzását jelenti. Legyen az alapállapotok sűrűsége  $n_1$ , a gerjesztett állapotoké  $n$ , a részecskék száma állandó, azaz  $n = n_1 + n_2$ . A lejátszódó elemi jelenségeket, és ezek gyakoriságát vizsgáljuk meg.



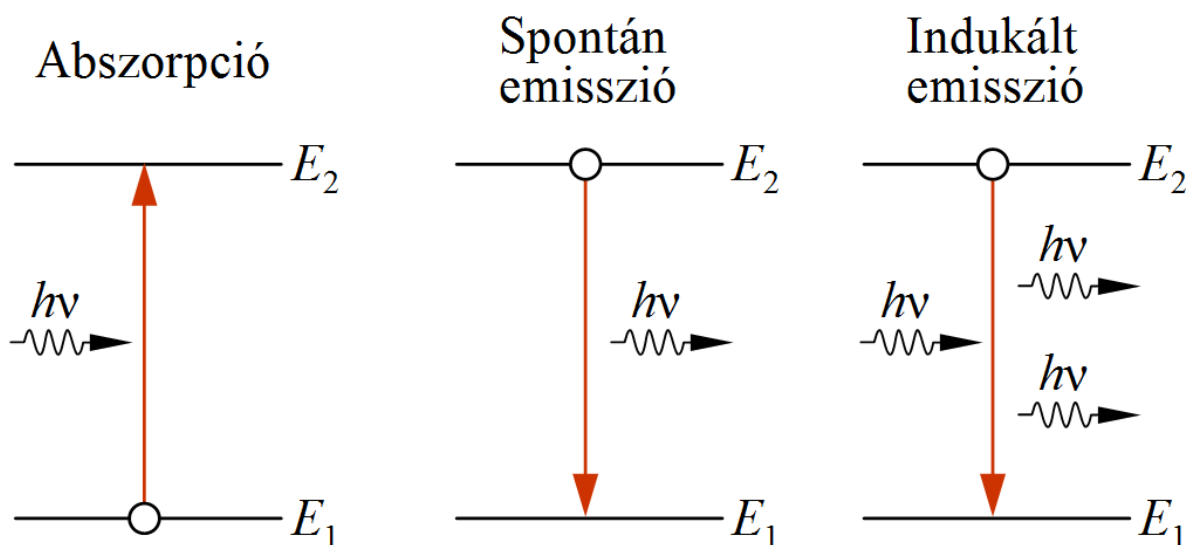


Figure 1 A kétállapotú rendszer lehetséges állapotai

Az abszorpció az alapállapotból a gerjesztett állapotba való átmenetet jelenti, egy abszorpciós aktus  $n_1$  értékét 1-gyel csökkenti. Kézenfekvő az feltételezés, hogy egy kicsiny  $dt$  idő alatt egységnyi térfogatban elnyelt fotonok száma ( $n_1$  változása) arányos a  $dt$  idővel, az alapállapotú atomok  $n_1$  számával és elektromágneses tér  $\rho(\nu)$  spektrális sűrűségével és a  $\gamma(\nu - \nu_0)$  vonalfüggvénnyel  $d\nu$  frekvenciatartományra, azaz:

$$dn_1 = -B_{12} \cdot n_1 \cdot dt \int_0^\infty \rho(\nu) \cdot \gamma(\nu - \nu_0)_{B12} d\nu \quad 2.)$$

, ahol:

- $B_{12}$  az anyagra jellemző abszorpciós Einstein-féle koefficiens
- $\gamma(\nu - \nu_0)_{B12}$  az abszorpció vonalfüggvénye

A gerjesztett állapotú részecskék sugárzással visszamennek az alapállapotba, aminek két módja lehetséges. Az egyik során a részecske minden külső hatás nélkül megy vissza alapállapotba (ez az energia minimum). Becsüljük meg ezek számát tudva azt, hogy minden kisugárzott foton 1-gyel csökkenti  $n_2$  számát. Szintén plauzibilis az a feltevés, hogy a kicsiny  $dt$  idő alatt egységnyi térfogatban kisugárzott fotonok száma ( $n_2$  változása) arányos a  $dt$  időtartammal, az gerjesztett állapotú atomok  $n_2$  számával, vagyis:

$$dn_2 = -A_{21} \cdot n_2 \cdot dt \int_0^\infty \gamma(\nu - \nu_0)_{A21} d\nu \quad 3.)$$

, ahol:

- $A_{21}$  az anyagra jellemző spontán emissziós Einstein-féle koefficiens ( $A_{21} = 1/\tau$ )
- $\gamma(\nu - \nu_0)_{A21}$  a spontán emisszió vonalfüggvénye

$\tau$  megadja azt az időtartamot, amely alatt a gerjesztett állapotok száma  $e$ -ad részére esik, ezért  $\tau$ -t a gerjesztett állapot átlagos élettartamának nevezzük.

Szimmetria okokból és analógia alapján Einstein feltételezte, hogy a gerjesztett állapot a rezonancia miatt a  $\nu$  frekvenciájú sugárzás hatására visszamegy alapállapotba miközben a kényszerítő sugárzással azonos irányú, frekvenciájú, polarizációjú, fázisú sugárzást bocsát ki, és ezt nevezte kényszerített emissziónak. Ezek száma a fentiekkel analóg módon:

$$dn_2 = -B_{21} \cdot n_2 \cdot dt \int_0^\infty \rho(\nu) \cdot \gamma(\nu - \nu_0)_{B21} d\nu \quad 4.)$$



, ahol:

- $B_{21}$  az anyagra jellemző kényszerített emissziós Einstein-féle koefficiens
- $\gamma(\nu - \nu_0)_{B21}$  a kényszerített emisszió vonalfüggvénye

Mindhárom lehetséges átmenetet figyelembe véve a gerjesztett nívó betöltésének változását a

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} = & B_{12} \cdot n_1 \int_0^\infty \rho(\nu) \cdot \gamma(\nu - \nu_0)_{B12} d\nu \\ & - A_{21} \cdot n_2 \int_0^\infty \gamma(\nu - \nu_0)_{A21} d\nu \\ & - B_{21} \cdot n_2 \int_0^\infty \rho(\nu) \cdot \gamma(\nu - \nu_0)_{B21} d\nu \end{aligned} \quad 5.)$$

differentiálegyenlet írja le, ahol az első tag az abszorpció, a második tag a spontán emisszió míg a harmadik tag pedig az indukált emisszió következtében létrejövő változást írja le. A T hőmérsékletű üregben természetesen  $\nu$  frekvenciájú sugárzás is jelen van, tehát abszorpciós átmenetek is létrejönnek. Kísérletileg, azonban  $\nu$  frekvenciájú sugárzás hiányának nyoma sincsen. Ez csak úgy lehetséges, hogy ha dinamikus egyensúly áll fenn, tehát ha az abszorpciós és emissziós átmenetek száma megegyezik egymással, vagyis  $n_2$  időben nem változik, azaz  $dn_2/dt = 0$ , így az előző egyenlet alapján

$$\begin{aligned} B_{12} \cdot n_1 \int_0^\infty \rho(\nu) \cdot \gamma(\nu - \nu_0)_{B12} d\nu = \\ + A_{21} \cdot n_2 \int_0^\infty \gamma(\nu - \nu_0)_{A21} d\nu \\ + B_{21} \cdot n_2 \int_0^\infty \rho(\nu) \cdot \gamma(\nu - \nu_0)_{B21} d\nu \end{aligned} \quad 6.)$$

A statisztikus fizikából ismert, hogy hőmérsékleti egyensúlyban az egyes állapotok populációjára az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \cdot e^{-h \cdot \nu / k \cdot T} \quad 7.)$$

, ahol:

- $g_1$  az 1-es szint,  $g_2$  az 2-es szint degenerációs foka

Az abszorpció, a spontán emisszió és a kényszerített emisszió vonalfüggvénye megegyezik, a továbbiakban jelöljük  $\gamma(\nu - \nu_0)$ -al. A 6.) egyenletet rendezzük át  $n_2/n_1$ -ra. Az így kapott egyenletbe helyettesítsük be a 7.) egyenletet. Emeljük ki a  $\rho(\nu)$  spektrális sűrűséget és hasonlítsuk össze az 1.) egyenlettel. Ekkor megkapjuk az Einstein-féle koefficiensek közötti összefüggéseket:

$$g_1 \cdot B_{12} = B_{21} \cdot g_2 \quad 8.)$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot \nu^3}{c^3} \quad 9.)$$

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.



### 2.3. A vonalszélesség és elfajulás

Minden állapothoz véges élettartam rendelhető, aminek következtében véges hosszúságú hullámokat nyel el, vagy bocsát ki az anyag. A Heisenberg-féle határozatlansági relációknak megfelelően a véges hosszhoz tartozó energia véges Energia bizonytalansággal rendelkezik. A véges energia bizonytalanságú energiaszintekkel bíró rendszernek az 1 és 2 állapotok energiaszint-csúcsainak távolsága  $E_2 - E_1 = h \cdot \nu_{21}$ . Egy adott  $\nu$  frekvenciájú sugárzás egymástól  $\nu_{21}$  távolságra lévő energiaszintek közötti átmenet többféleképpen valósulhat meg. A nívókat felfelé, vagy lefelé azonos távolságra eltolva a nívók közötti távolság ugyanaz marad. Azon átmenetek valósulnak meg nagyobb valószínűséggel, amikor a felső és az alsó nívók energiája olyan helyen van, ahol az eloszlásfüggvényük nagy értékkel bír. nívók közötti átmenet révén létrejövő sugárzás spektrális eloszlását az úgynevezett  $\gamma(\nu - \nu_0)$  vonalfüggvénnyel jellemezhetjük, A vonalfüggvény értelmezése a következő: Annak a valószínűsége, hogy a nívók közötti átmenet során a kibocsátott vagy elnyelt sugárzás frekvenciája a  $\nu$  frekvencia körüli kicsiny  $d\nu$  frekvenciasávba esik, definíció szerint,  $\gamma(\nu - \nu_0)d\nu$ . Ez alapján  $\gamma(\nu - \nu_0)$  egy valószínűségi sűrűség, és mivel a sugárzás frekvenciája biztosan benne van a  $(0, \infty)$  tartományban:

$$\int_0^{\infty} \gamma(\nu - \nu_0) d\nu = 1 \quad 10.)$$

A kérdés már csak az, hogy a vonalfüggvény milyen alakú?

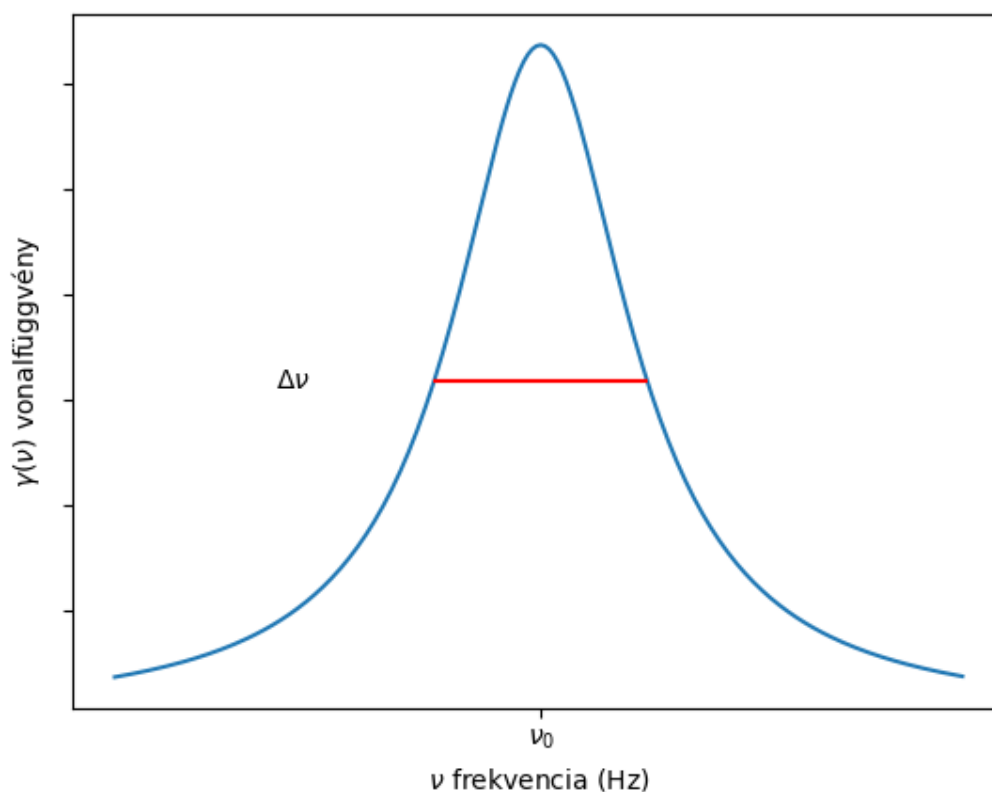


Figure 2 A Lorentz-féle vonalfüggvény sematikus ábrája





A rubin kristály, mint szilárdtest esetében a vonal kiszélesedés homogén (természetes), mely jól magyarázható az abszorpció Lorentz modelljével.

$$\gamma(\nu - \nu_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Delta\nu/2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2} \quad 11.)$$

, ahol:

- $\nu_0$  a sáv rezonancia frekvenciája
- $\Delta\nu$  a sáv félértékszélessége

Egy kvantummechanikai rendszer alapállapota a legkisebb energiájú sajátállapot. Ha egynél több alapállapot létezik, akkor azt degenerálnak (elfajult) nevezik. Jelöljük g-vel a degenerációs szintet.

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.

## 2.4. Az emissziós hatáskeresztmetszet

Az anyagok fényelnyelésének gyakorlati jellemzésére alkalmas fogalom az emissziós hatáskeresztmetszet. Tegyük fel, hogy egy A fotlméretű nyaláb a z tengely mentén egy  $n_2$  és  $n_1$  állapotsűrűségű közegen keresztül terjed egy  $\delta z$  vastagságú síkon. Általában a sugárzásnak véges spektrális szélessége van, melyet az  $I(\nu, z)$  spektrális intenzitás és a  $\rho(\nu)$  spektrális sűrűség írja le. A lézérátmenetet vegyük homogén kiszélesedetnek, hogy minden atom egyformán kölcsönhatásba lépjen a nyalábbal. Vegyük figyelembe a nyaláb erősítését, amikor áthalad a z és  $z + \delta z$  síkok között fekvő kis területen. Ahogy a sugár áthalad a közegen, az alsó lézerszinten lévő atomok általi abszorpció miatt energiát veszít, de a felső lézerszinten lévő atomok kényszerített emissziója révén energiát nyer.

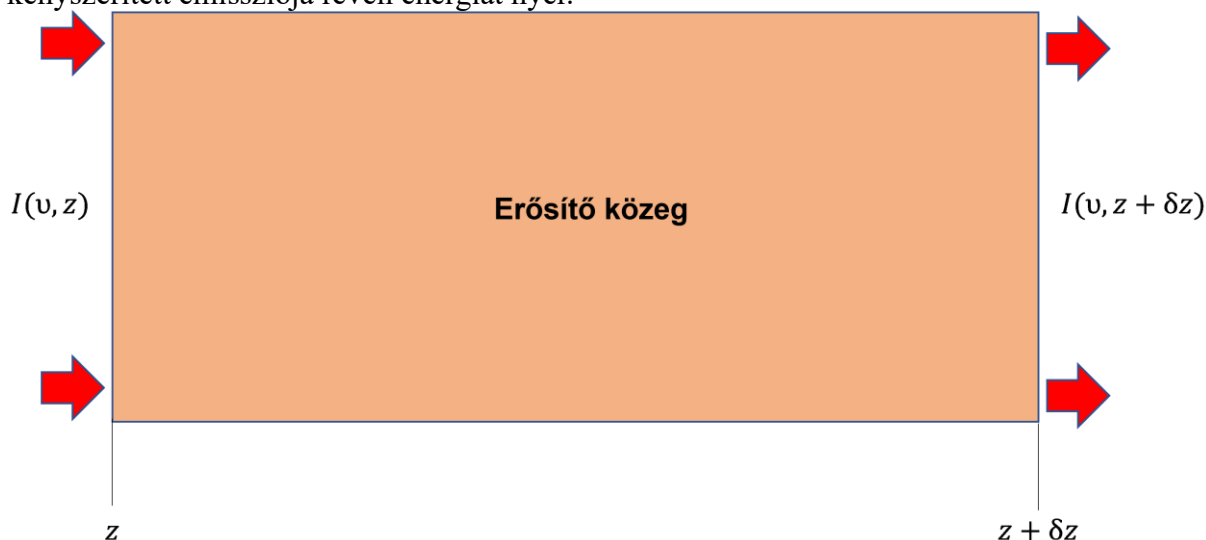


Figure 3 A jel erősítése

A  $\nu$  és  $\nu + \delta\nu$  közötti frekvenciájú fotonok kényszerített emissziója által az atomok átviteli sebessége a felső lézerszintről az alsó szintre:

$$(B_{21} \cdot n_2 - n_1 \cdot B_{12}) \cdot \gamma(\nu - \nu_0) \cdot \rho(\nu) \cdot \delta\nu \cdot A \cdot \delta z \quad 12.)$$



Minden ilyen átvitel  $h \cdot \nu$  energiát szabadít fel a nyalábra, és így ezen a frekvenciatartományon belül a nyaláb által nyert teljesítmény:

$$(B_{21} \cdot n_2 - n_1 \cdot B_{12}) \cdot \gamma(\nu - \nu_0) \cdot \rho(\nu) \cdot \delta\nu \cdot A \cdot \delta z \cdot h \cdot \nu \quad (13.)$$

A vizsgált frekvencia intervallumra a nyaláb által a tartományba vitt teljesítmény  $I(\nu, z) \cdot A \cdot \delta\nu$ , így a nyaláb által nyert teljesítmény a következőképpen is felírható:

$$(I(\nu, z + \delta z) - I(\nu, z)) \cdot A \cdot \delta\nu \quad (14.)$$

A 13.) és 14.) egyenleteket tegyük egyenlővé, majd a differenciaegyenletet differenciálegyenletté alakítsuk át. Végezetül használjuk fel a 9.) egyenletet:

$$\frac{dI(\nu, z)}{dz} = I(\nu, z) \cdot (B_{21} \cdot n_2 - B_{12} \cdot n_1) \cdot \gamma(\nu - \nu_0) \cdot \frac{h \cdot \nu}{c} \quad (15.)$$

Ezek alapján a  $\sigma_{21}(\nu - \nu_0)$  emissziós hatáskeresztmetszetet a következőképpen definiálhatjuk:

$$\begin{aligned} \sigma_{21}(\nu - \nu_0) &= \frac{h \cdot \nu}{c} \cdot B_{21} \cdot \gamma(\nu - \nu_0) = \\ A_{21} \cdot \gamma(\nu - \nu_0) \cdot \frac{c^2}{8 \cdot \pi \cdot \nu^2} &= \frac{\gamma(\nu - \nu_0) \cdot c^2}{\tau_{21} \cdot 8 \cdot \pi \cdot \nu^2} \end{aligned} \quad (16.)$$

A 15.) egyenletet tovább egyszerűsíthetjük a  $g(\nu - \nu_0)$  erősítési tényező bevezetésével. Az elfajulást beleszámolva:

$$g(\nu - \nu_0) = \left( n_2 - n_1 \cdot \frac{g_2}{g_1} \right) \cdot \sigma_{21}(\nu - \nu_0) \quad (17.)$$

A  $g(\nu - \nu_0)$  valójában függ még az intenzitástól is és kis intenzitásokra érvényes a jelenlegi formája. Tételezzük fel, hogy a populáció inverziója pozitív, és független az intenzitástól vagy a pozíciótól. A 15.) egyenlet integrálásával láthatjuk, hogy a sugárzás intenzitása exponenciálisan növekszik a terjedési távolsággal:

$$I(\nu, z) = I(\nu, z = 0) \cdot e^{g(\nu - \nu_0) \cdot z} \quad (18.)$$

A nyaláb energianyereségének oka egyértelmű: a kényszerített emisszió sebessége a felső szintről nagyobb, mint az alsó szintről történő abszorpció sebessége. Az erősítési tényezője fontos a lézerrendszer teljesítményének meghatározásában.

## 2.5. Az abszorpciós hatáskeresztmetszet

Érdemes megemlíteni, hogy a hatáskeresztmetszetet többféleképpen tudjuk definiálni. Az  $n^* = (n_2 - n_1)$ -t abban a hitben definiáltuk, hogy  $n^* > 0$  pozitív lesz. Ha azonban az abszorpciót vizsgálánk, akkor általában az alacsonyabb szintű populáció érdekelne. Ennek illusztrálására tegyük fel, hogy a populáció inverziója negatív és független az intenzitástól vagy a pozíciótól. A 18.) egyenlet ekkor az alábbi format veszi fel:

$$I(\nu, z) = I(\nu, z = 0) \cdot e^{-\alpha(\nu - \nu_0) \cdot z} \quad (19.)$$

, ahol:

- $\alpha(\nu - \nu_0)$  az abszorpciós koefficiens

A 19.) egyenlet szerint láthatjuk, hogy a sugárzás intenzitása exponenciálisan csökken a terjedési távolsággal (Beer-Lambert törvény). Az  $\alpha(\nu - \nu_0)$  abszorpciós koefficiens, a  $g(\nu - \nu_0)$  erősítési tényező, valamint a  $\sigma_{12}$  abszorpciós hatáskeresztmetszet között az alábbi összefüggés áll fenn, ha beleszámoljuk az elfajulást:



$$\begin{aligned}
& \alpha(\nu - \nu_0) = -g(\nu - \nu_0) = \\
& -\left(n_2 - n_1 \cdot \frac{g_2}{g_1}\right) \cdot \sigma_{21}(\nu - \nu_0) = \\
& -\left(\frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 - n_1\right) \cdot \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{h \cdot \nu}{c} \cdot B_{21} \cdot \gamma(\nu - \nu_0) = \\
& \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2\right) \cdot \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{h \cdot \nu}{c} \cdot B_{21} \cdot \gamma(\nu - \nu_0) = \\
& \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2\right) \cdot \frac{h \cdot \nu}{c} \cdot B_{12} \cdot \gamma(\nu - \nu_0) = \\
& \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2\right) \cdot \sigma_{12}(\nu - \nu_0)
\end{aligned} \tag{20.}$$

Vegyük észre, hogy  $B_{21}$  le lett cserélve  $B_{12}$  abból a célból, hogy egyértelmű legyen a megkülönböztetés a kétféle hatáskeresztmetszet definíciója között.

## 2.6. Termális és optikai gerjesztés

Miután a 15.) egyenlet zárójelében lévő kifejezés egy különbség, aminek az előjele lehet pozitív vagy negatív, így a  $dI$  lehet pozitív vagy negatív is. Más szóval az intenzitás csökkenhet, vagy nőhet. Ami azt jelenti, hogy a fény gyengítése, és erősítése is felléphet. Az erősítés feltétele:

$$(B_{21} \cdot n_2 - B_{12} \cdot n_1) > 0 \tag{21.}$$

Amiből figyelembe véve, hogy  $g_1 \cdot B_{12} = B_{21} \cdot g_2$ , az erősítés feltételére kapjuk:

$$\frac{n_2}{n_1} > \frac{g_2}{g_1} \tag{22.}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy ha az állapotok aránya nagyobb, mint az elfajulások aránya, erősítés lép fel. Vizsgálva a statisztikus fizika már említett eredményére, stacionárius állapotban a 7.) egyenlet szerint a hőmérséklet emelésével termikus egyensúlyban populáció inverziót nem lehet létrehozni. Vegyük a korábban már definiált kétszintes rendszert, és nézzük meg, hogy mi történik az optikai gerjesztés hatására.

$$\begin{aligned}
\frac{dn_2}{dt} &= -(n_2 \cdot B_{21} - n_1 \cdot B_{12}) \int_0^\infty \rho(\nu) \gamma(\nu - \nu_0) d\nu - n_2 \cdot A_{21} \int_0^\infty \gamma(\nu - \nu_0) d\nu \\
&= -\left(\frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 - n_1\right) \cdot \frac{h \cdot \nu}{c} \cdot B_{12} \int_0^\infty \frac{c}{h \cdot \nu} \cdot \rho(\nu) \gamma(\nu - \nu_0) d\nu \\
&\quad - \frac{n_2}{\tau} \int_0^\infty \gamma(\nu - \nu_0) d\nu = -\left(\frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 - n_1\right) \int_0^\infty \frac{I(\nu) \cdot \sigma_{12}(\nu - \nu_0)}{h \cdot \nu} d\nu - \frac{n_2}{\tau}
\end{aligned} \tag{23.}$$

Keskenysávú sugárzás (például lézer) esetén a  $\sigma_{12}(\nu - \nu_0)$  abszorpciós hatáskeresztmetszet lassan változik a spektrális tartományon és  $I(\nu)$  egy Dirac-Delta függvényként viselkedik:  $I(\nu) = I_L \cdot \delta(\nu - \nu_L)$ .

, ahol:

- $I_L$  a lézer sugárzás központi frekvenciájához tartozó intenzitása
- $\nu_L$  a lézer sugárzás központi frekvenciája

Tételezzük fel, hogy  $I$  állandó, és megvárjuk a stacionárius állapot kialakulását, azaz  $dn_2/dt = 0$ . Ekkor a 23.) egyenlet algebrai egyenletté egyszerűsödik. Ebből az  $n_2/n_1$  arányt kifejezve:



$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{I_L \cdot \sigma_{12}(\nu_L - \nu_0)}{h \cdot \nu_L}}{\frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{I_L \cdot \sigma_{12}(\nu_L - \nu_0)}{h \cdot \nu_L} + \frac{1}{\tau_{21}}} = \frac{1}{\frac{g_1}{g_2} + \frac{h \cdot \nu_L}{I_L \cdot \sigma_{12}(\nu_L - \nu_0) \cdot \tau_{21}}} \quad (24.)$$

Megvizsgálva az  $I_L$  intenzitás növelésének hatását, világosan látszik, hogy  $n_2/n_1$  alulról  $g_2/g_1$ -hez, tehát a populáció inverzió így sem érhető el. Ennek oka az, hogy a beeső fotonok abszorpciót és emissziót azonos valószínűséggel hoznak létre. Erre a megoldás az, hogy a gerjesztés és az erősítés szintjeit szét kell választani. Optikai gerjesztéssel populáció inverziót a három, négy és kiszélesedett termsémával lehet megvalósítani. A lenti ábra jelöléseivel világos, hogy egy nagyobb energiájú foton elnyelése után egy gyors sugárzás nélküli átmenettel jutnak a részecskék az emisszióhoz szükséges gerjesztett állapotba. A kényszerített emisszió pedig vagy alapállapotba, vagy egy ehhez közeli átmeneti állapotba viszi a részecskéket.

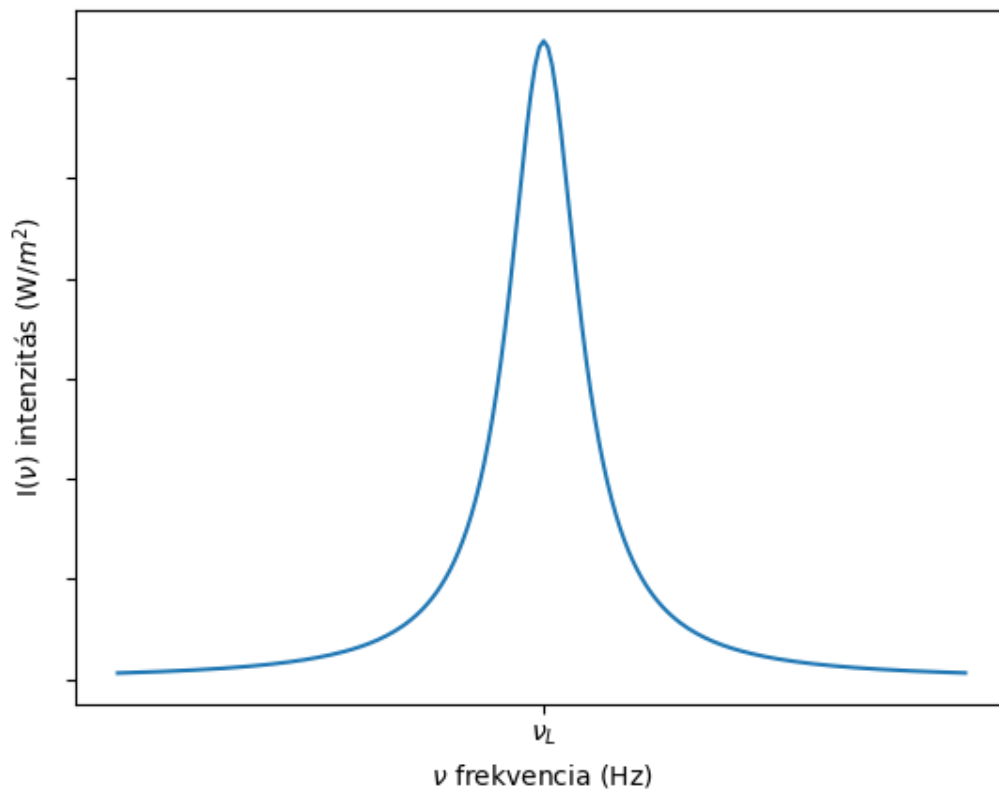


Figure 4 A lézer intenzitás frekvencia függésének sematikus ábrája

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.



### 3. A lézerek működésének alapjai

A fejezet első felében megfogalmazzuk, a nyitott rezonátor mátrixoptikai leírását, a paraxiális hullámegyenletet, valamint a létrejövő Gauss nyaláb illesztését a rezonátorhoz. A tárgyaláshoz alkalmazni fogjuk a paraxiális közelítést mind a mátrixoptikára, mind a hullámegyenletre. Később lesz szó a rezonátor néhány fontos tulajdonságáról, úgy mint küszöbfeltétel, foton élettartam, jósági tényező és transzmissziós tényező. A tárgyaláshoz a rezonátort Fabry-Perot interferométerként fogjuk kezelni. Végezetül néhány oldalban összefoglaljuk a koherens (lézeres) optikai gerjesztést.

#### 3.1. A rezonátor mátrixoptikai leírása

Az eddigi ismereteink alapján most már tudjuk, hogy az optikai tartományban is lehet erősítést létrehozni megfelelő feltételek teljesülése esetén. A mérnöki gyakorlatban jól ismert, hogy az elektronikában az erősítőkből oly módon lehet oszcillátort kialakítani, hogy visszacsatolást hozunk létre a bemenet és kimenet között. Logikus lépés, hogy ha az optikai tartományban tudunk erősítést kapni megfelelő visszacsatolással oszcillátort is, ez az oszcillátor a lézer. A visszacsatolás legegyszerűbb módja a lenti ábrán látható módon valósítható meg, egy aszimmetrikus alakú erősítő közeget két párhuzamos síktükör közé helyezünk.

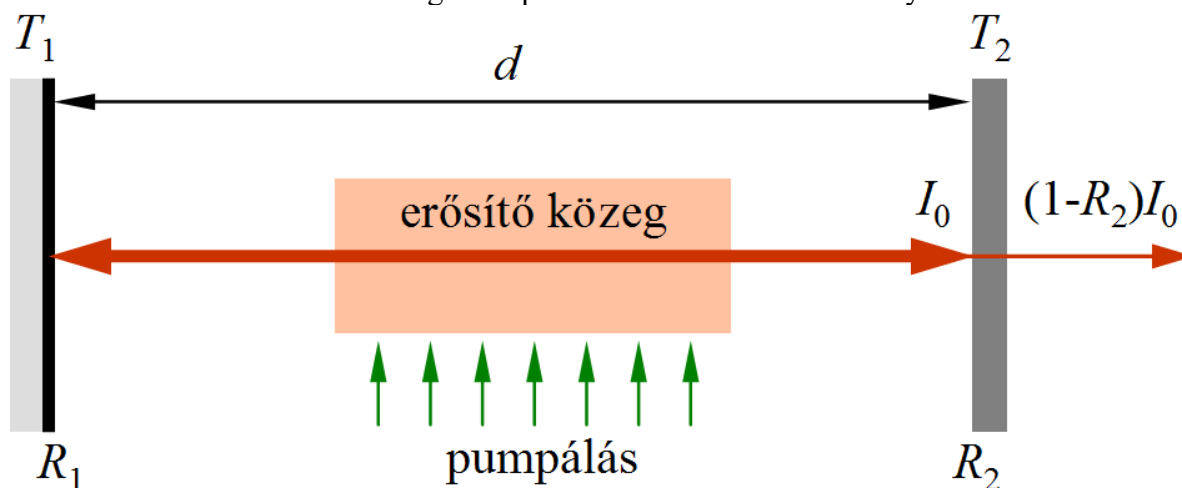


Figure 5 A legegyszerűbb lézer modell

Az olyan, általában tükrökből felépülő optikai rendszereket, amelyekben a fény oda-vissza haladva ugyanazon térrészen többször is áthaladhat, optikai rezonátoroknak nevezzük.

**Nyitott rezonátor fogalma:** Amint azt korábban láttuk, az egy foton által keltett kényszerített emisszió egyenlő az egy modulusba jutó spontán emissziós fotonok számával. A zárt üreg módusainak a számát jelentősen csökkenthetjük, ha megszüntetjük a zárt üreg falainak egy részét, és csak kettőt hagyunk meg. Ilyen módon az eddig zárt üreg helyett nyitott üreget hozunk létre. A két tükröt tartalmazó nyitott rezonátorra felírt hullámegyenletnek nem megoldása a síkhullám, mivel a tükrök véges átmérőjűek, és széleiken diffrakció lép fel. 1958-ban Schawlow és Townes amerikai, Prohorov szovjet kutatók megállapították, hogy a nyitott rezonátoroknak is vannak állóhullámú módusaik, és e módusok igen éles rezonanciát mutatnak



Ez könnyen belátható, ha arra gondolunk, hogy egy aktív közeg nélküli nyitott rezonátor nem más, mint egy Fabry-Perot interferométer.

A fény terjedésének leírása optikai rendszerekben megközelíthető hullámoptikai és geometriai optikai szempontból. Bár a két módszer a probléma megközelítésében lényegesen eltér egymástól, az eredmények kölcsönösen reprezentálhatóak.

A sugárkövetéses módszereknél végtelenül vékony diffrakciómentes sugarakat tételezünk fel, amelyek az egyes optikai felületeken vagy megtörnek, vagy visszaverődnek.

Egy sugarat az optikai tengelytől ( $z$  tengely) mert  $R$  távolságával és az azzal bezárt  $\theta$  szöggel jellemezhetünk. Meridionális sugarakat feltételezve az  $R$  távolság helyett gyakran használhatjuk az  $X$  vagy  $Y$  koordinátákat.

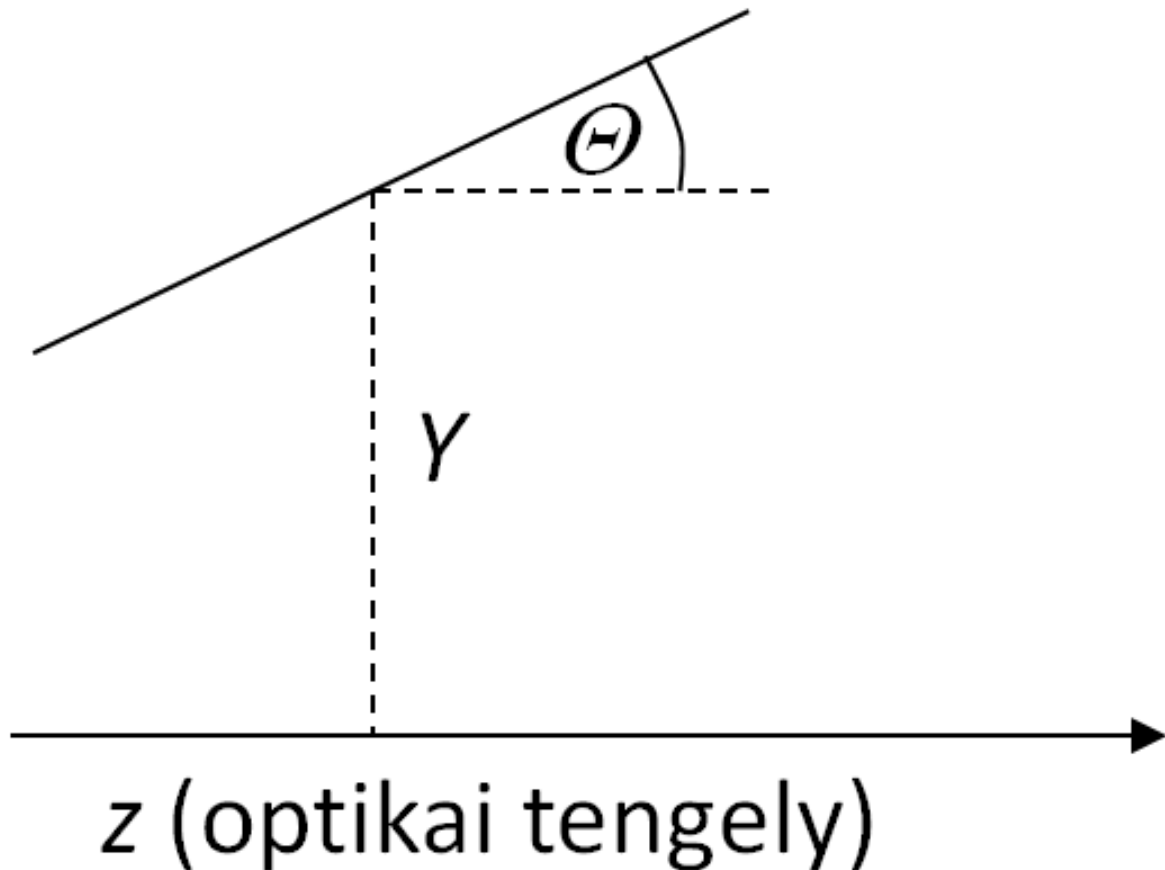


Figure 6 A sugárkövetés paraméterei

Általában igaz, hogy a sugarak az optikai tengellyel és az optikai felületekkel kis szöget zárnak be, ezért paraxiális közelítés alkalmazható.

**Paraxiális közelítés:** Kis szögek ( $< 5^\circ$ ) esetén a trigonometrikus függvények pontos értékét jó közelítéssel ( $< 1\%$ ) helyettesíthetjük azok Taylor sorának

első tagjával ( $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ ). A paraxiális közelítés jelentősen leegyszerűsíti az összefüggéseket, mert lineáris egyenletekké redukálja a korábbi trigonometrikus egyenleteket. Ezen lineáris egyenletek - ahogy később látni fogjuk - mátrixformalizmussal könnyen kezelhetők. Általánosságban a nyalábok terjedése leírható egy bemenő adatokat tartalmazó oszlopmátrix és egy úgynevezett ABCD átviteli mátrix szorzatával az alábbiak szerint:



$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad 25.)$$

Szabad térben való terjedés optikai mátrixa:

$$M_{szabad} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 26.)$$

Vékony lencsén való áthaladás optikai mátrixa:

$$M_{lencse} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 27.)$$

Sík tükörről való visszaverődés optikai mátrixa:

$$M_{síktükör} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 28.)$$

gömbtükörről való visszaverődés optikai mátrixa:

$$M_{gömbtükör} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R & 1 \end{pmatrix} \quad 29.)$$

Az optikai elemeken való egymás utáni áthaladás és a köztük való terjedés együttesen a megfelelő mátrixok szorzata az alábbiak szerint: legyen az áthaladás szerint az átviteli mátrixok sorrendje  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ , a végeredmény  $M = M_n \cdot \dots \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$ .

A **síktükrű rezonátorok** (párhuzamosan álló két síktükör) a legegyszerűbb rezonátorok, de nagyszámú körbejárás csak az optikai tengellyel közel párhuzamos sugarak esetén érhető el. A tükrök csekély elállítása esetén a sugár hamar kilép a rezonátorból. Egy teljes körbejárás mátrixa az alábbi mátrixok szorzatával számítható ki:

$$M_{síktükrű \text{ rezonátor}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{szabad} \cdot M_{síktükör} \cdot M_{szabad} \cdot M_{síktükör} \quad 30.)$$

A **hemiszférikus rezonátorok** (párhuzamosan álló egy síktükör és egy gömbtükör) már jelentős javulást mutat a paramétereinek vizsgálata tekintetében, azonban általánosságban erről az elrendezésről is az mondható el, hogy nem stabil. Legyen  $d=R$ . Egy teljes körbejárás mátrixa az alábbi mátrixok szorzatával számítható ki:

$$M_{hemiszférikus \text{ rezonátor}} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R & 1 \end{pmatrix} = M_{szabad} \cdot M_{gömbtükör} \cdot M_{szabad} \cdot M_{síktükör} \quad 31.)$$

A továbbiakban ezzel az elrendezéssel dolgozzunk.

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.

### 3.2. A paraxiális hullámegyenlet

Az előző fejezetben láthattuk, hogy pusztán geometriai optikai megfontolásokból kiindulva lehetséges a rezonátorok stabilitásának a vizsgálata. Az ebből levont következtetések helytállóságát a gyakorlat igazolta, kísérletileg is sikerült lézereket, kollimált fénynyalábokat is lézethozni. Annak ellenére, hogy a közel párhuzamos lézernyaláb sokban hasonlít egy síkhullámhoz, intenzitásprofilja, terjedése nem írható le megfelelő módon a hullámegyenlet szokásos síkés gömbhullám alakú megoldásaival. A lézernyalábok hullámoptikai leírásához a hullámegyenlet egy olyan megoldását kell megkeresni, mely egyezik a gyakorlati tapasztalatokkal. A hullámegyenlet vákuumban érvényes alakja:



$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad 32.)$$

A megoldást keressük a szokásos

$$|\vec{E}| = E(\vec{r}) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad 33.)$$

alakban, vagyis egy időfüggő és egy helyfüggő tényezők szorzataként, amit visszahelyettesítve megkapjuk a hullámegyenlet helyfüggő (Helmholtz) alakját:

$$\Delta E + k^2 \cdot E = 0 \quad 34.)$$

A  $z$  irányban terjedő hullám megoldását keressük a következő alakban:

$$E(\vec{r}) = U(x, y, z) \cdot e^{-i \cdot k \cdot z} \quad 35.)$$

ahol az exponenciális tag egy paraxiális síkhullám  $z$  irányú terjedését írja le, melyet egy lassan változó  $U(x, y, z)$  függvény ( $\lambda$  távolságon belül közel állandó) modulál. Írjuk vissza a Helmholtz egyenletbe a feltételezett megoldás függvényét:

$$e^{-i \cdot k \cdot z} \cdot \left[ \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 \cdot U(x, y, z) \cdot e^{-i \cdot k \cdot z} = 0 \quad 36.)$$

ahol az  $E$  függvény  $z$  szerinti másodrendű parciális második deriváltja

$$\frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial z^2} = \left[ -k^2 \cdot U(x, y, z) - i \cdot k \cdot \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} \right] \cdot e^{-i \cdot k \cdot z} \quad 37.)$$

Mivel  $U$  lassan változó függvény:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} \approx 0 \quad 38.)$$

A lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve a következő paraxiális hullámegyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} - i \cdot k \cdot \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad 39.)$$

Ennek egy lehetséges megoldása a parabolikus hullám:

$$U(\rho, z) = \frac{U_1}{z} \cdot e^{-i \cdot k \cdot \frac{\rho^2}{2 \cdot z}} \quad 40.)$$

ahol  $U_1$  egy konstans,  $\rho^2 = x^2 + y^2$  pedig a  $z$  tengelytől mért távolság négyzete. A parabolikus hullám a gömbhullám paraxiális közelítése, amikor  $\rho \ll z$ .

Egyszerű eltolással,  $q(z) = z - b$ , egy olyan parabolikus hullámot kapunk, melynek középpontja a  $b$ -ben van:

$$U(\rho, z) = \frac{U_1}{q(z)} \cdot e^{-i \cdot k \cdot \frac{\rho^2}{2 \cdot q(z)}} \quad 41.)$$

Ha  $b$  komplex mennyiség, akkor is megoldása lesz a paraxiális hullámegyenletnek. Legyen  $b = -i \cdot z_0$ , vagyis  $q(z) = z + i \cdot z_0$ , melyet komplex nyálábpáraméternek nevezünk. Az amplitúdó és fázis szétválasztása céljából az  $1/q(z) = 1/z + i \cdot z_0$  komplex számot valós és képzetes részre bontva

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \cdot \frac{\lambda}{\pi \cdot W^2(z)} \quad 42.)$$

és visszahelyettesítve  $U(\rho, z)$ -ba a paraxiális hullámegyenlet komplex amplitúdójú megoldása (bizonyos helyettesítések bevezetésével) a következő lesz:

$$U(\rho, z) = A_0 \cdot \frac{W_0}{W(z)} \cdot e^{\left[ -\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right]} \cdot e^{\left[ -i \cdot k \cdot z - i \cdot k \cdot \frac{\rho^2}{2 \cdot R(z)} + i \cdot \xi(z) \right]} \quad 43.)$$

A fenti egyenlet egy Gauss nyálábnak nevezet hullámot ír le, ahol





$$W(z) = W_0 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad 44.)$$

$$R(z) = z \cdot \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad 45.)$$

$$W_0 = \left( \frac{\lambda \cdot z_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 46.)$$

az úgynevezett nyalábparaméterek, míg az  $A_0 = A_1/i \cdot z_0$ . A meglehetősen bonyolultnak látszó megoldás igen szemléletes fizikai képet takar, melyet a következőkben mutatunk be. Az intenzitást, amit mérni tudunk, az amplitúdó négyzetéből számolhatjuk ki:

$$I(\rho, z) = |U(\rho, z)|^2 = I_0 \left[ \frac{W_0}{W(z)} \right]^2 \cdot e^{\left[ -\frac{2 \cdot \rho^2}{W^2(z)} \right]} \quad 47.)$$

Az így kapott függvény a  $z$  és a  $z$  tengelytől mért  $\rho$  távolság függvényében írja le az intenzitás változását mely a  $z$  tengelyre hengerszimmetrikus eloszlású. Az exponenciális tag a  $z$ -től mért távolság szerint egy Gauss alakú függvény, melynek maximuma a  $\rho = 0$ -nál van, innen ered a Gauss nyaláb elnevezés.

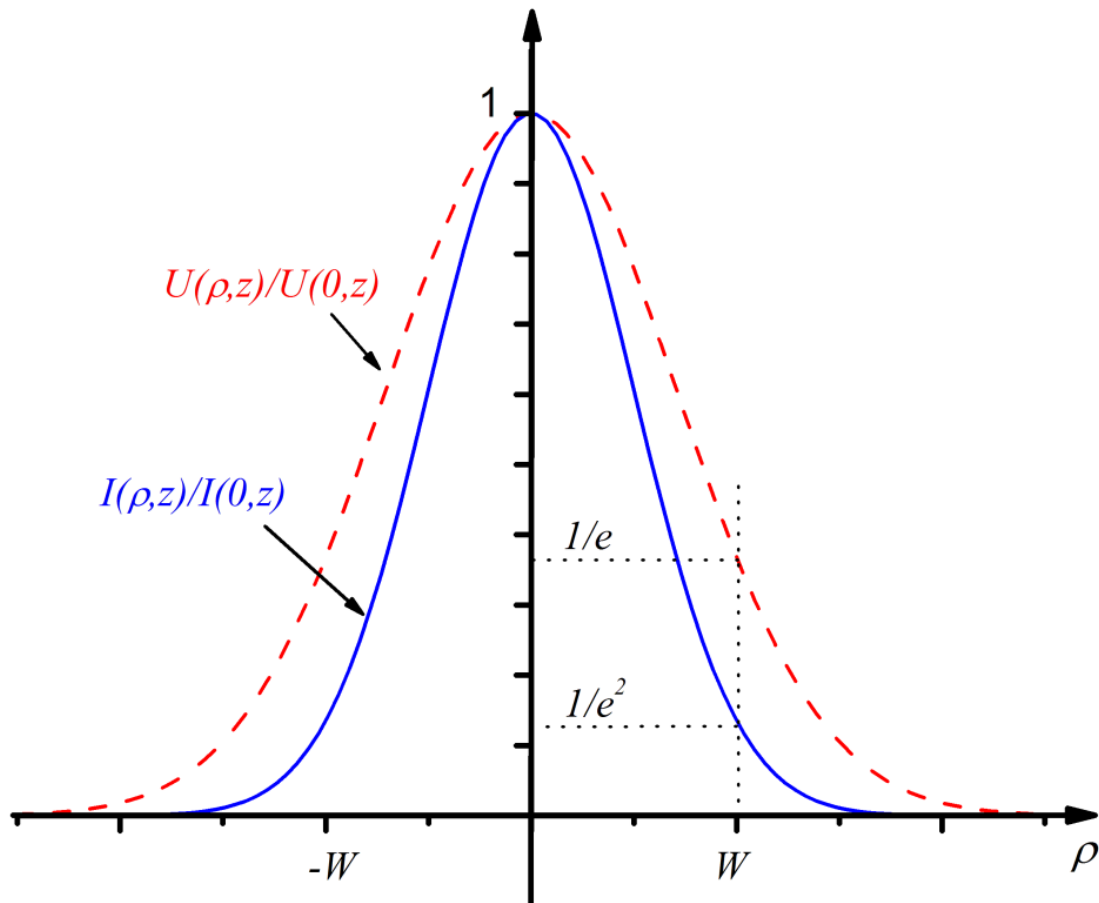


Figure 7 A Gauss nyaláb térerősségének és intenzitásának normált eloszlása a  $z$  tengelytől mért távolság függvényében

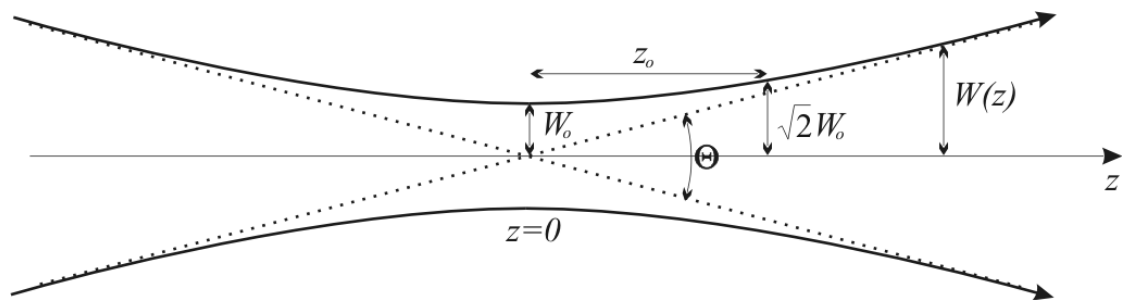


Figure 8 A Gauss nyaláb sugarának változása a terjedés során

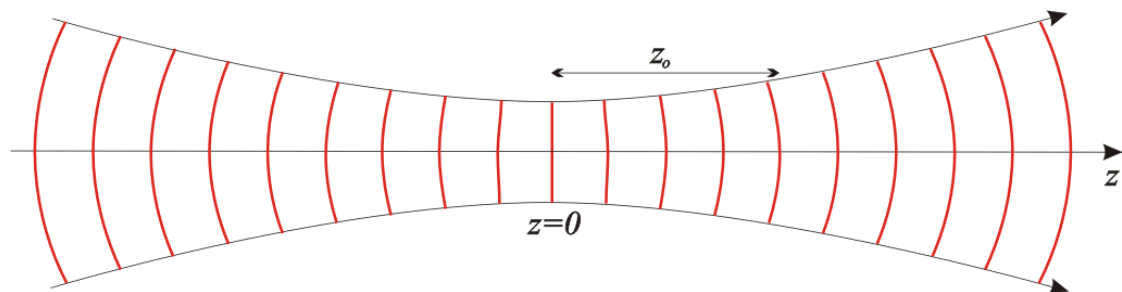


Figure 9 A hullámfront görbületének változása a Gauss nyaláb terjedése során

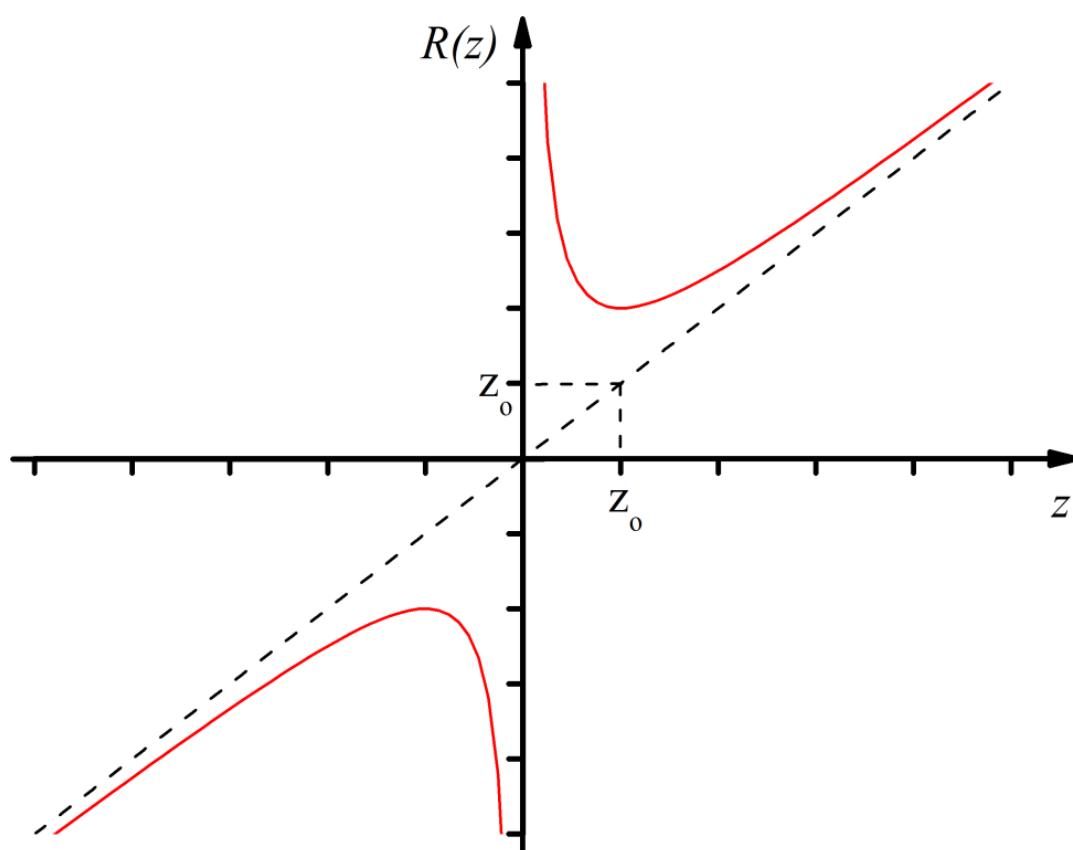


Figure 10 Az  $R(z)$  függvény grafikus ábrázolása

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.



Click or tap here to enter text.

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

### 3.3. A Gauss nyaláb illesztése a rezonátorhoz

A paraxiális hullámegyenlet itt bemutatott megoldása egyelőre csak matematikai eredmény, a kérdés az, hogy kísérletileg hogyan lehet olyan feltételeket teremteni, ami a Gauss nyaláb kialakulásának kedvez. Vegyünk egy  $\lambda$ ,  $w_0$  paraméterekkel jellemzett Gauss nyalábot amint azt a lenti ábrán látható.

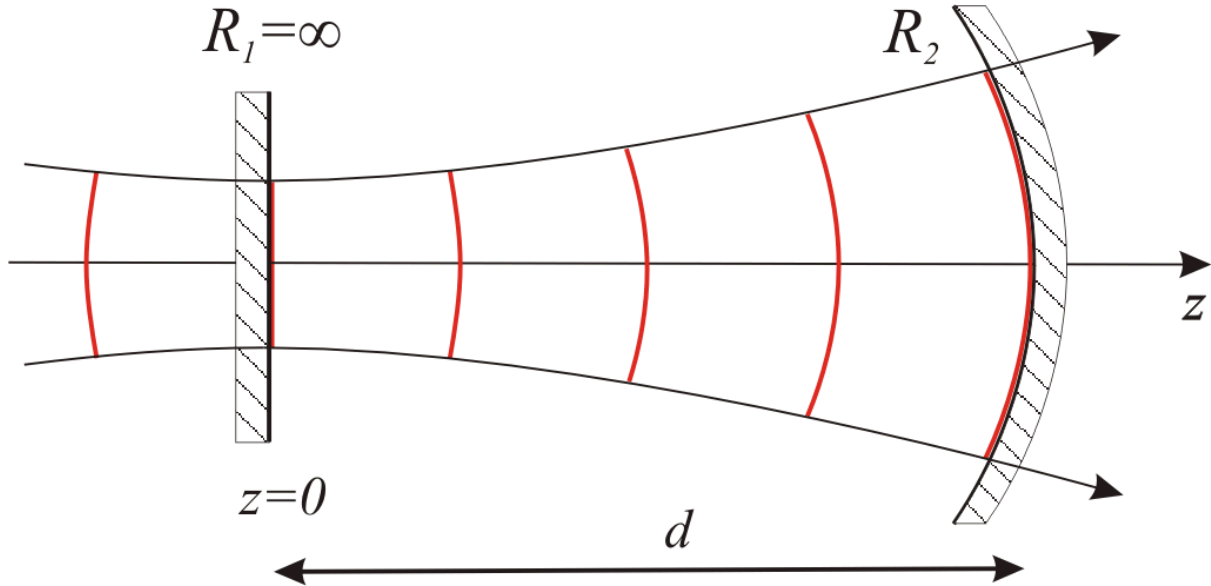


Figure 11 Rezonátor illesztése a kívánt paraméterekkel rendelkező Gauss nyalábhöz

A  $z = 0$  helyen helyezünk el egy síktükröt (itt a fázisfront sík), ettől  $d$  távolságra egy olyan gömbtükröt, amely pontosan egybeesik az adott helyen a nyaláb fázisfrontjával ( $R_2 = R(d)$ ) és máris van egy rezonátorunk.  $R(z)$  egyenlet ezen feltételek mellett a következőképpen alakul:

$$R(d) = R_2 = d \cdot \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{d} \right)^2 \right] \quad 48.)$$

Ebből kifejezhető a  $z_0$ :

$$z_0 = \sqrt{R_2 \cdot d - d^2} \quad 49.)$$

aminek csak akkor van valós megoldása, ha  $0 \leq d/R_2 \leq 1$ . Az adott példában szereplő tükrök segítségével akkor tudunk stabil rezonátort létrehozni, ha a köztük levő távolság kisebb, mint homorú tükrő görbületi sugara. Az ilyen rezonátor által létrehozott nyalábnak a terjedési irányra merőleges ( $x$ ,  $y$ ) síkban létrejövő intenzitás eloszlását nevezzük transzverzális módusnak (Transverse ElectroMagnetic, TEM). A Helmholtz egyenlet fennebb bemutatott megoldása a "legegyszerűbb", ezen kívül természetesen számos más függvény is megoldás lehet. Ezek közül kiemelendők azok, amelyek fázisfrontja gömbszerű, mivel ezekhez lehet könnyen a fenti módon rezonátort illeszteni. Ilyenek a négyzetes szimmetriájú Hermite-Gauss és a hengerszimmetriájú Laguerre-Gauss polinomok, amelyek közül a legegyszerűbb a 00 indexszel ( $TEM_{00}$ ) jelölt egyetlen maximummal rendelkező Gauss függvény. Ha egy megfelelő méretű apertúrát helyezünk a rezonátorba, a magasabb rendű módusok energiavesztése nagyobb lehet, mint az erősítés, ami gátolja ezek kialakulását. Például, míg egy  $\pi \cdot W$  átmérőjű apertúra a  $TEM_{00}$  módus 99%-át átengedi, addig már a  $TEM_{01}$  módusnál már ~6%-os veszteséget okoz.

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.



### 3.4. A Gauss nyaláb fókuszálása, az ABCD szabály

Mivel a lézereknek gyakran a fókuszált fényét alkalmazzák, fontos a lefókuszáláskor keletkező foltméret meghatározása. A Gauss nyalábok általában jól jellemezhetőek a  $q(z)$  komplex nyaláb paraméterrel, azzal az előnnyel, hogy ha egy optikai elem átviteli mátrixa  $ABCD$ , akkor ezt a  $q$  transzformációjára lehet használni. Másképpen, ha egy Gauss nyaláb  $q_1$  bemeneti paraméterrel rendelkezik, a kimenő nyaláb egy  $q_2$  paraméterrel rendelkező Gauss nyaláb lesz, melyre fennáll a következő összefüggés:

$$q_2 = \frac{A \cdot q_1 + B}{C \cdot q_1 + D} \quad (50.)$$

A fenti összefüggésre nincs általános levezetés, de bármilyen optikai elem átviteli mátrixa esetére külön-külön bizonyítható az egyenlet érvényessége. A számítások egyszerűsítése érdekében tekintsük azt a lenti ábrán szemléltetett esetet, amikor egy Gauss nyalábot a nyalábnyaknál elhelyezett vékony lencse segítségével fókuszálunk.

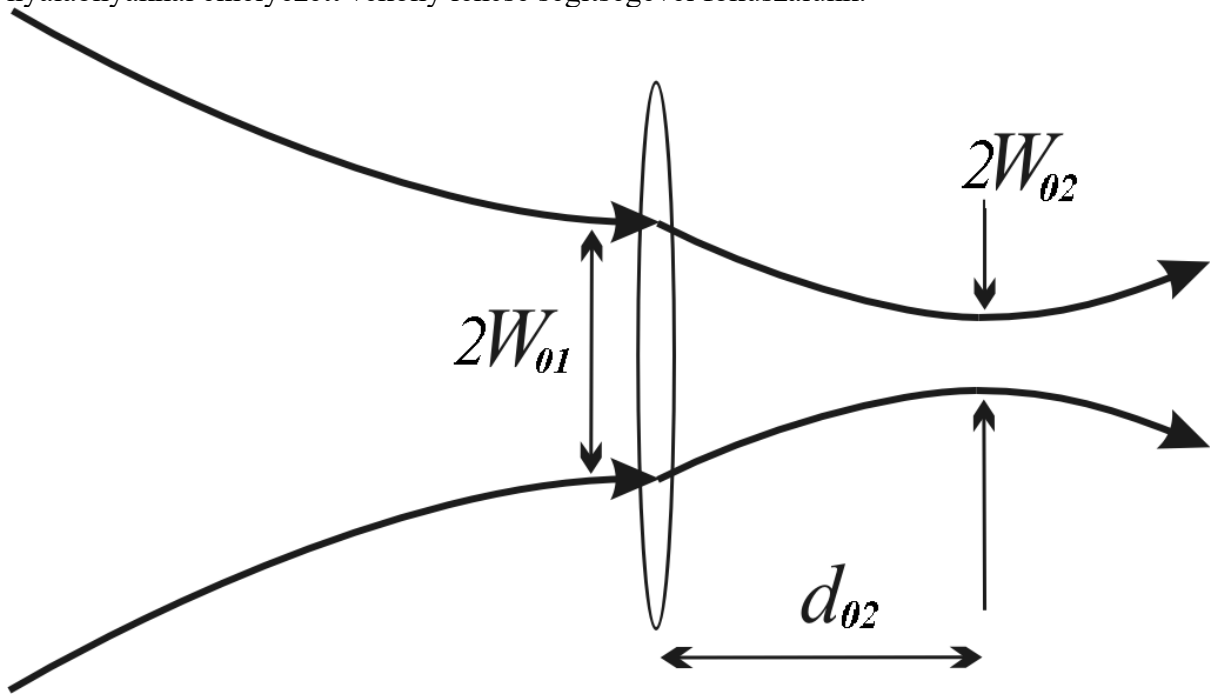


Figure 12 A Gauss nyaláb transzformációja lencsével

A kiindulási feltételeknek megfelelően a lencse baloldalán az  $R_1 = \infty$  és  $q_1 = i \cdot \pi \cdot W_{01}^2 / \lambda$ . A kérdés az, hogy a lencse után mekkora  $d$  távolságra keletkezik egy nyalábnyak és mekkora lesz itt a nyaláb  $W_{02}$  sugara. Az  $ABCD$  mátrix elemeinek meghatározásához számítsuk ki az  $f$  fókusz távolságú vékony lencse és a szabad térben való terjedés mátrixának a szorzatát:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} & d_2 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (51.)$$

A kimenő  $q_2$  paraméter reciproka a következő lesz:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{\left(i \cdot \pi \cdot \frac{W_{01}^2}{\lambda \cdot f}\right) + 1}{-\left(i \cdot \pi \cdot \frac{W_{01}^2}{\lambda}\right) \cdot \left(1 - \frac{d_2}{f}\right) + d_2} \quad 52.)$$

melyben különválasztva a valós és képzetes részeket adódik, hogy:

$$R_2(d_2) = \frac{\left(\frac{d_2}{z_{01}}\right)^2 + \left(1 - \frac{d_2}{f}\right)^2}{\frac{d_2}{z_{01}^2} - \frac{1}{f} \cdot \left(1 - \frac{d_2}{f}\right)} \quad 53.)$$

$$W_2^2(d_2) = W_{01}^2 \cdot \left(1 - \frac{d_2}{f}\right)^2 + W_{01}^2 \cdot \left(\frac{d_2}{z_{01}}\right)^2 \quad 54.)$$

A fenti két egyenlet egy tetszőleges  $d_2$  helyen írja le a görbületi sugarat és a nyaláb méretét. Figyelembe véve, hogy olyan helyet keresünk, ahol  $R_2(d_2)$  végtelenné válik az  $R_2(d_2)$  egyenlet nevezője zero kell legyen. Így azt kapjuk, hogy:

$$d_2 = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z_{01}}\right)^2} \quad 55.)$$

Az eredmény két dolgot mutat, az egyik, hogy a nyaláb nyak igen kicsinnyé válhat; a másik, hogy nem  $f$  távolságra van a lencsétől ez a minimális foltátmérő. Jól látható, hogy a jellemzően alacsony divergencia miatt a Gauss nyalábok nagyon jól fókuszálhatók. Jól látható, hogy a minimális foltátmérő helyzete a  $d_{01}$  növelése során a lencsétől távolodva túllép a fókuszpontra, majd pedig újra közeledni kezd hozzá. Egy másik jellemzője a Gauss nyaláboknak, hogy míg a kétszeres fókuszából kiinduló gömbhullámokat a lencse a túloldali kétszeres fókuszban gyűjti össze, a lencsén átmenő Gauss nagyáb alakját nagymértékben befolyásolja a nyaláb is a lencse viszonyát jelző  $N = W_{01}^2 / \lambda \cdot f$  Fresnel szám.

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.

### 3.5. A rezonátor küszöbfeltétele

A két tükör között oda- vissza verődő fény reflexiók és egyéb veszteségeit az erősítésnek kell kompenzálnia. Ezt a tényt egy egyszerű modellel le is lehet írni, legyen az erősítő közeg  $l$  hosszúságú, benne a  $g$  erősítési tényező a tükrök reflexiója  $R_1$  és  $R_2$ . Induljon el egy  $I_0$  intenzitású nyaláb az ábrán látható módon, amely áthaladva az erősítő közegen  $I_0 \cdot e^{g \cdot l}$ -re erősödik. A jobboldali tükrőről  $R_2 \cdot I_0 \cdot e^{g \cdot l}$  verődik vissza, majd az erősítő közegen ismételtlen áthaladva, újra erősítődik  $(R_2 \cdot I_0 \cdot e^{g \cdot l}) \cdot e^{g \cdot l}$  értékre, a baloldali tükrőről végül,  $R_1 \cdot R_2 \cdot I_0 \cdot e^{2 \cdot g \cdot l}$  verődik vissza. Ezzel visszajutottunk a kiindulási pontra. Ha azt szeretnénk, hogy egy kör megtétele után az intenzitás legalább elérje az induló értéket az  $I_0 \leq R_1 \cdot R_2 \cdot I_0 \cdot e^{2 \cdot g \cdot l}$  feltételnek kell teljesülni. Ha ezt elértük, az oszcillátor addig működik, amíg az erősítés pótolja a veszteségeket, ez az önfenntartó működés küszöbfeltétele. Az egyenletben a lehetséges egyszerűsítést elvégezve, mindkét oldal természetes logaritmusát véve:

$$g \geq \frac{1}{2 \cdot l} \ln \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \quad 56.)$$

A rezonátorok további veszteségeket is tartalmaznak, amik nehezen, vagy nem számolhatóak ki, de egy  $\alpha_{egyéb}$  paraméterként fel lehet tüntetni, ami tovább növeli a veszteséget.

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.



### 3.6. A rezonátor foton élettartama

A rezonátor  $\tau_{foton}$  foton élettartama a fotonok rezonátorban töltött idejét fejezi ki mielőtt kicsatolódnának. A  $\tau_{foton}$  meghatározásához először is tekintsük ugyanazt a rezonátor modellt, ami küszöbfeltételénél fel lett használva. Legyen  $N_{foton}$  számú foton a  $t$  időpillanatban (azaz  $N_{foton}(t)$ ) az  $R_1$  tükörnél. Legyen  $\tau_{körbejárás}$  az az idő, mely alatt a fotonok egyszer körüljárják a rezonátort:

$$\tau_{körbejárás} = \frac{2 \cdot n \cdot l}{c} \quad (57.)$$

, ahol:

- $n$  az aktív közeg törésmutatója
- $l$  a rezonátor hossza
- $c$  a fénysebesség vákuumban

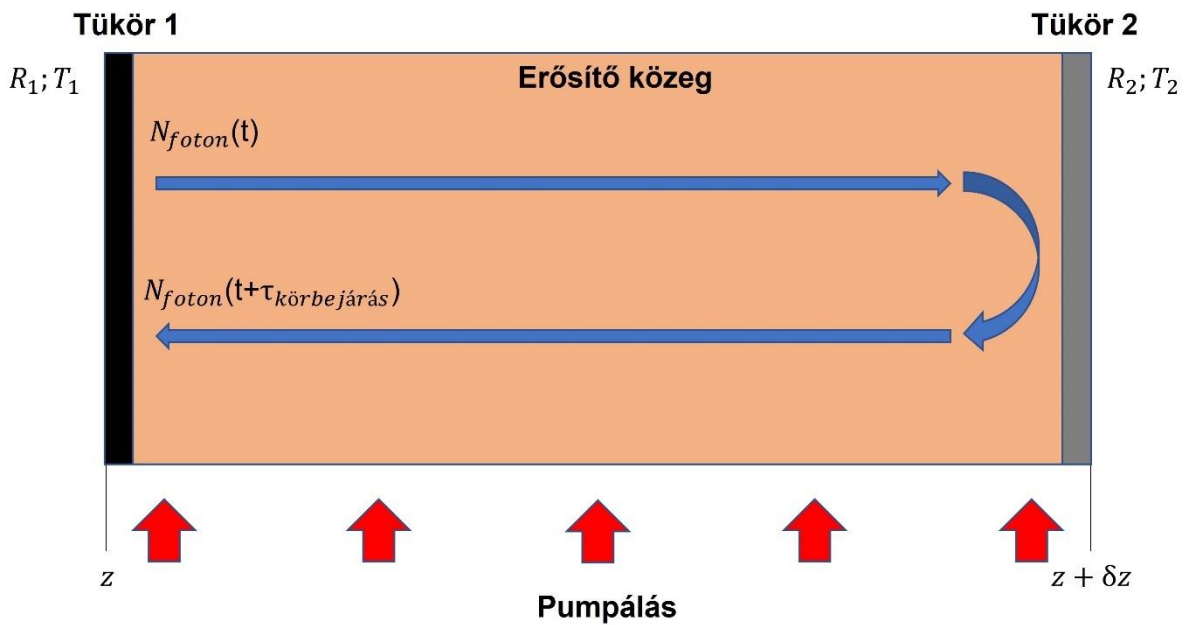


Figure 13 A rezonátor foton élettartama

Legyen  $R_1 \cdot R_2 \cdot N_{foton}$  számú foton a  $t + \tau_{körbejárás}$  időpillanatban (azaz  $N_{foton}(t + \tau_{körbejárás})$ ), melyek még megmaradtak egyszeri körbejárás után. Képezzük az  $N_p$  megváltozását az idővel kifejezve, azaz  $\Delta N_{bal} = N_{foton}(t + \tau_{körbejárás}) - N_{foton}$  és legyen ez a majdani differenciaegyenlet bal oldala. Ez a változás veszteségként fogható fel, mivel  $N_{foton} > N_{foton}(t + \tau_{körbejárás})$ . Írjuk fel ezt a veszteséget az  $N_{foton}$ -vel kifejezve, azaz  $\Delta N_{jobb} = R_1 \cdot R_2 \cdot N_{foton} - N_{foton} = -(1 - R_1 \cdot R_2) \cdot N_{foton}$  és legyen ez a majdani differenciaegyenlet jobb oldala. Mivel a két differencia megegyezik, egyenlővé tehetjük őket, azaz  $\Delta N = \Delta N_{bal} = \Delta N_{jobb}$ . Osszuk le az egyenlet mindkét  $\tau_{körbejárás}$ -val, majd a differenciaegyenletet differenciálegyenletté alakítsuk át.

$$\frac{dN_{foton}}{dt} = -\frac{1 - R_1 \cdot R_2}{2 \cdot n \cdot l / c} \cdot N_{foton} \quad (58.)$$

Vegyük észre, hogy az  $N_p$  arányossági tényezőjének reciproka lesz definíció szerint a rezonátor foton élettartama:



$$\tau_{foton} = \frac{2 \cdot n \cdot l / c}{1 - R_1 \cdot R_2} \quad 59.)$$

Az  $R_1 \cdot R_2$  szorzatot szokás foton túlélési aránynak (S) is nevezni.

### 3.7. A rezonátor kontinuitási egyenlete

Induljunk ki a 15.) egyenletből a 17.) egyenletet figyelembe véve. Az intenzitás definíció szerint egységnyi felületre eső egységnyi idő alatt kisugárzott energia, ahol az energia arányos a fotonok számával. Az arányossági tényező egy darab foton energiája. Mindezeket felhasználva az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\frac{dN_{foton}}{dz} = g \cdot N_{foton} \quad 60.)$$

Folytatva az érvelést, az 58.) egyenlet bal oldalára alkalmazzuk a láncszabályt:

$$\frac{dN_{foton}}{dt} = \frac{dN_{foton}}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dN_{foton}}{dz} \cdot c \quad 61.)$$

, ahol:

- $c$  a fény közegbeli terjedési sebessége

Láthatjuk, hogy az 58.) és 60.) egyenlet bal oldala csak egy  $c$  szorzóval térnek el egymástól.

A következő lépésként vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor nincs aktív közeg, azaz csak vákuumot gerjesztjük. A folytonossági egyenlet szerint egy  $A$  felületű és  $s$  hosszúságú kontroll térfogathoz kilépő és az oda belépő  $N_{foton}$  foton hozam megváltozása a rezonátoron belül az  $A$  felületen keresztül egyenlő a kontroll térfogat  $t$  idő alatti csökkenésével. Ez a foton megmaradását fejezi ki. A folytonossági egyenlet általános formája tartalmaz egy úgynevezett nyelőt vagy forrást attól függően, hogy milyen folyamatot vizsgálunk. Ha csak az 58.) egyenletet vesszük alapul, akkor a rezonátor előbb-utóbb kiürül. Vagyis a rezonátor vesztesége matematikailag megfogalmazva nyelőként funkcionál. Ha csak a 62.) egyenletet vesszük alapul, akkor a rezonátorban exponenciálisan fog növekedni a fotonok száma. Vagyis a 2-es és 1-es szintek közötti kényszerített emisszió az aktív közeg jelenlétében matematikailag megfogalmazva forrásként funkcionál. A spontán emisszióból származó fotonok hozzájárulását elhanyagolhatjuk. Ennek a két folyamatnak az eredménye fogja adni azt amit tapasztalunk:

$$\frac{dN_{foton}}{dz} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dN_{foton}}{dt} = g \cdot N_{foton} - \frac{1}{c} \cdot \frac{N_{foton}}{\tau_{foton}} \quad 62.)$$

Visszaalakítva az  $N_{foton}$  fotonszámot  $I$  intenzitássá:

$$\frac{dI}{dz} + \frac{1}{c} \cdot \frac{dI}{dt} = g \cdot I - \frac{1}{c} \cdot \frac{I}{\tau_{foton}} \quad 63.)$$



### 3.8. A rezonátor jósági tényezője

A fizikában és a mérnöki tudományban a minőségi tényező vagy a Q tényező egy dimenzió nélküli paraméter, amely leírja, hogy egy oszcillátor vagy rezonátor mennyire csillapított. Ez a rezonátorban tárolt kezdeti energia és az oszcillációs ciklus egy radiánjában elvesztett energia aránya (Hickman, 2013). A Q-tényezőt úgy definiáljuk, mint a rezonátor középfrekvenciájának és a sávszélességének arányát, amikor rezgő hajtóerőnek van kitéve. Ez a két definíció számszerűen hasonló, de nem azonos eredményeket ad. A magasabb Q kisebb mértékű energiavesztést jelez, és az oszcillációk lassabban halnak ki (Tooley, 2006).

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{A rezonátorban tárolt energia}}{\text{Egy ciklus alatt elvesztett energia}} =$$

$$2\pi \cdot \frac{N_{\text{foton}} \cdot h \cdot \nu}{N_{\text{foton}} \cdot h \cdot \nu \cdot T / \tau_p} = \frac{2\pi}{T} \cdot \tau_{\text{foton}} =$$

$$\frac{2\pi}{2 \cdot n \cdot l / c} \cdot \frac{2 \cdot n \cdot l / c}{1 - R_1 \cdot R_2} = \frac{2\pi}{1 - R_1 \cdot R_2}$$
64.)

, ahol:

- $T$  egy ciklus ideje amíg terjed az  $n$  törésmutatójú aktív közegben a sugárzás

### 3.9. A rezonátor transzmissziós tényezője és vonalfüggvénye

Egy korábbi fejezetben már beláttuk, hogy egy aktív közeg nélküli nyitott rezonátor nem más, mint egy Fabry-Perot interferométer. Vizsgáljuk meg, hogyan alakul az elektromos térerősség a rezonátoron belül és kívül. Essen be a rezonátorba  $E_{be}$  elektromos térerősség. Az első tükörről  $E_{reflektált}$  nagyságú elektromos térerősség reflektálódik vissza. A rezonátorba  $t_1 \cdot E_{be}$  nagyságú elektromos térerősség kerül be. A második tükörig  $t_1 \cdot E_{be} \cdot e^{-i \cdot k \cdot l}$  nagyságú elektromos térerősség jut el. Végezetül a rezonátorból  $t_1 \cdot t_2 \cdot E_{be} \cdot e^{-i \cdot k \cdot l} \cdot (r_1 \cdot r_2 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot k \cdot l})^0$  nagyságú elektromos térerősség távozik. Ez lenne az első kör. Valójában az elektromágneses sugárzás számtalanszor oda-vissza verődhet a rezonátorban és minden egyes körrel más és más nagyságú elektromos térerősség jut ki. Az eredő  $E_{ki}$  kijutó elektromos térerősség nagysága felírható az egyes körökből kijutó elektromos térerősségek összegével. A zárójeles tag kitevője az egyes körök sorszámát (pontosabban indexét) jelenti, nullától számolva. Vegyük észre, hogy a zárójeles rész egy geometriai sort alkot, ha a zárójelen kívüli részt kiemeljük. Tegyük fel, hogy végtelen kört tesz meg az elektromágneses sugárzás. Ekkor eredő  $E_{ki}$  kijutó elektromos térerősség nagysága a következő lesz:





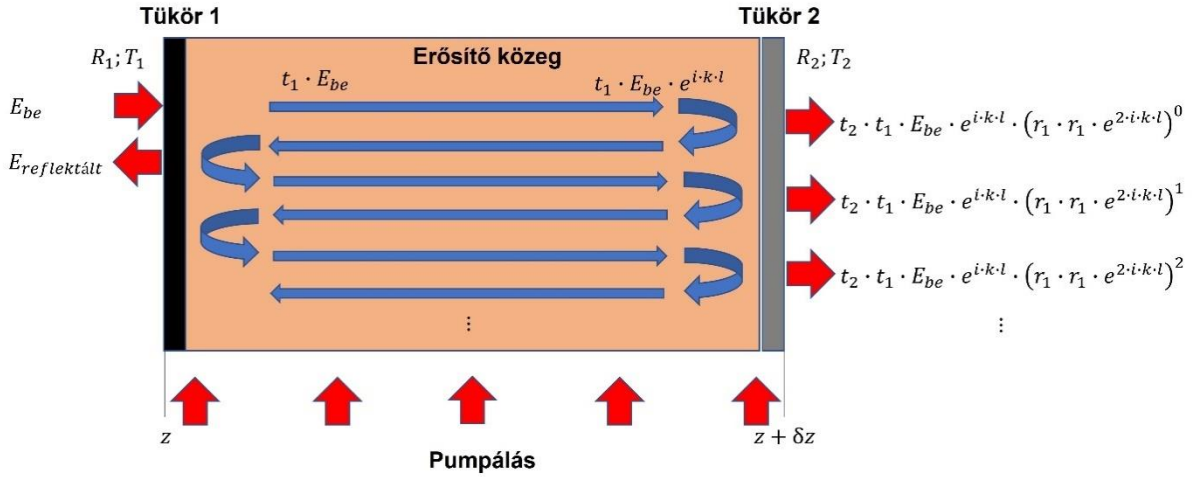


Figure 14 A rezonátor, mint Fabry-Perot interferométer

$$E_{ki} = t_1 \cdot t_2 \cdot E_{be} \cdot e^{-i \cdot k \cdot l} \cdot \left[ (r_1 \cdot r_2 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot k \cdot l})^0 + (r_1 \cdot r_2 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot k \cdot l})^1 + \dots \right] =$$

$$t_1 \cdot t_2 \cdot E_{be} \cdot e^{-i \cdot k \cdot l} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (r_1 \cdot r_2 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot k \cdot l})^m = \frac{t_1 \cdot t_2 \cdot E_{be} \cdot e^{-i \cdot k \cdot l}}{1 - r_1 \cdot r_2 \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot k \cdot l}} \quad 65.)$$

$$k = \frac{2 \cdot \pi \cdot \nu}{c} \quad 66.)$$

Az elektromágneses sugárzás  $I_{be}$  bemenő és  $I_{ki}$  kimenő intenzitását az  $\langle S_{be} \rangle$  és  $\langle S_{ki} \rangle$  időátlagolt Poynting vektorokkal lehet felírni:

$$I_{be} = \langle S_{be} \rangle = \frac{|E_{be}|^2}{2 \cdot \eta} \quad 67.)$$

$$I_{ki} = \langle S_{ki} \rangle = \frac{|E_{ki}|^2}{2 \cdot \eta} \quad 68.)$$

Az elektromos térerősség r reflexiós és t transzmissziós tényezők között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$|t_1|^2 + |r_1|^2 = 1 \quad \& \quad |t_2|^2 + |r_2|^2 = 1 \quad 69.)$$

Az r elektromos térerősség reflexiós tényezője és az R intenzitás reflexiós tényezője között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$|r_1|^2 = R_1 \quad \& \quad |r_2|^2 = R_2 \quad 70.)$$

A rezonátor  $T_{\text{rezonátor}}$  transzmissziós tényezője definíció szerint az  $I_{ki}$  kimenő és  $I_{be}$  bemenő intenzitás aránya:

$$T_{\text{rezonátor}} = \frac{I_{ki}}{I_{be}} = \frac{(1 - R_1) \cdot (1 - R_2)}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2 + 4 \cdot \sqrt{R_1 R_2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot l / c)} \quad 71.)$$

Amikor a transzmisszió eléri a maximális értéket, akkor az alábbi feltételnek kell teljesülnie:

$$\sin^2(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot l / c) = 0 \quad 72.)$$

Ez azt jelenti, hogy:

$$\nu_j = j \cdot c / 2 \cdot l \quad 73.)$$

A transzmisszió maximumok közti  $\Delta \nu_{FSR}$  távolságot az alábbi módon definiálhatjuk:

$$\Delta \nu_{FSR} = \nu_{j+1} - \nu_j = c / 2 \cdot l \quad 74.)$$

A rezonátor egy másik fontos jellemzője a vonalfüggvénye. Meg lehet mutatni, hogy a rezonátor vonalfüggvénye Lorentz alakú (Ismail, Kores, Geskus, & Pollnau, 2016):



$$\gamma_{\text{rezonátor}}(\nu) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Delta\nu_{\text{foton}}/2}{(\nu - \nu_q)^2 + (\Delta\nu_{\text{foton}}/2)^2} \quad 75.)$$

$$\nu_q = q \cdot \Delta\nu_{\text{FSR}} \quad \& \quad \Delta\nu_{\text{foton}} = 2 \cdot \pi / \tau_{\text{foton}} \quad 76.)$$

, ahol:

- $\eta$  a vákuum impedanciája
- $k$  a hullámszám
- $\lambda$  a hullámhossz
- $m$  egy pozitív egész szám
- $j$  egy pozitív egész szám
- $q$  egy pozitív egész szám
- $\Delta\nu_{\text{foton}}$  a rezonátor sávszélessége

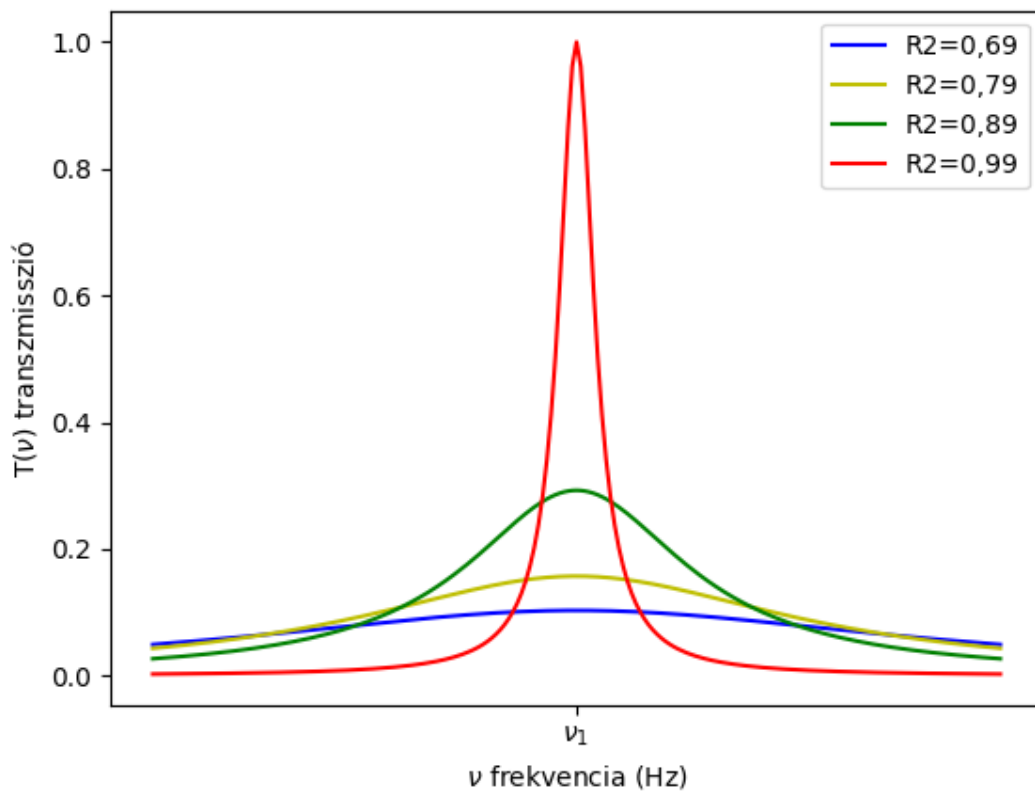


Figure 15 A rezonátor egyetlen módusa  $R_1=0,99$  és több  $R_2$  reflexiók együttható esetén



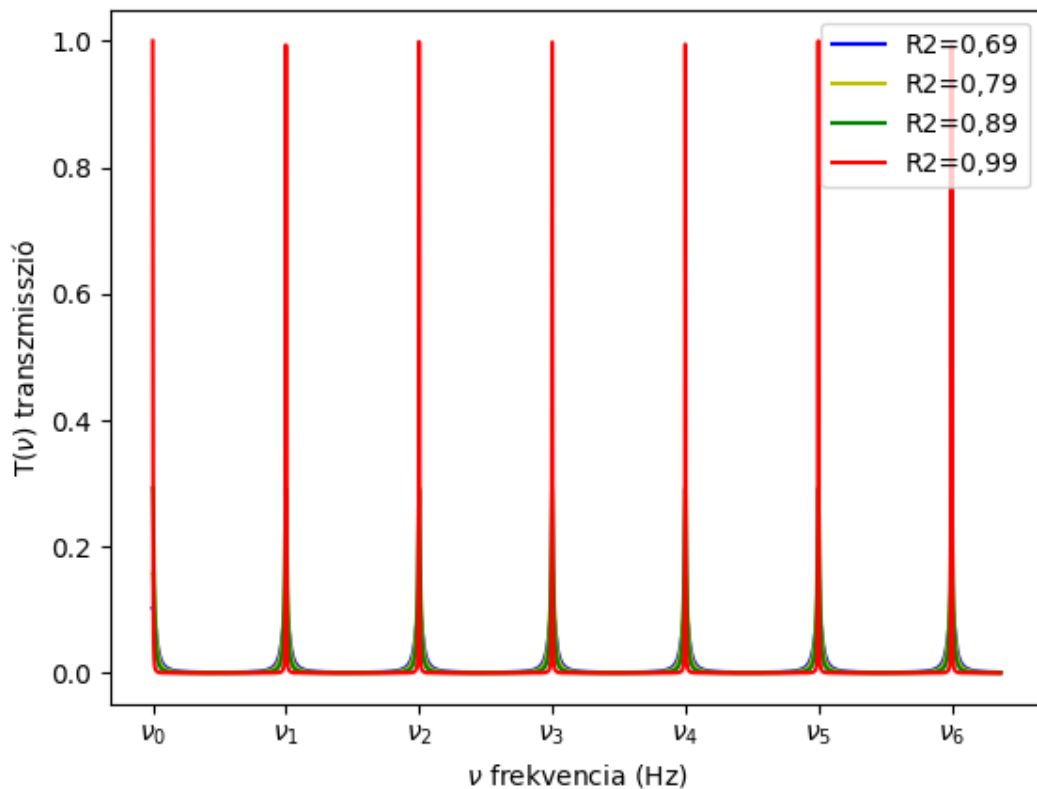


Figure 16 rezonátor több módusa  $R_1=0,99$  és több  $R_2$  reflexiók együttható esetén

### 3.10. Koherens (lézeres) optikai gerjesztés

Az aktív anyagban a lézerek működéséhez szükséges populáció inverziót optikai pumpálással (koherens, inkohereus), elektronütközéssel (rugalmas, rugalmatlan) vagy kémiai reakciókkal érhetjük el. A rubin lézer gerjesztéséhez használunk dióda lézert. Ekkor koherens optikai pumpálásról beszélünk. A pumpálás eredő hatásfoka négy tényező függvénye:

- $\eta_r$  (radiative efficiency): A lézer emissziós hatásfoka, amely megmutatja, hogy mekkora fénytéljesítményt képes a lézer az aktív anyag gerjesztésére alkalmas hullámhossz tartományba konvertálni.
- $\eta_t$  (transfer efficiency): A gerjesztés "geometriai" hatásfoka megmutatja, hogy a lámpa hasznos spektrális tartományba kibocsájtott fényének mekkora része jut el ténylegesen az aktív közegbe.
- $\eta_a$  (absorption efficiency): Az abszorpció hatásfoka megmutatja, hogy az aktív közeget elérő pumpáló fénytéljesítmény hány százaléka nyelődik el. A hatásfok leginkább az aktív közeg abszorpció és az alkalmazott lézer emissziós spektrumainak átfedésétől függ. Ezért a nagysága erősen függ a lézertípusától.



- $\eta_{pq}$  (power quantum efficiency): A teljesítmény kvantum hatásfok megmutatja, hogy az elnyelt teljesítmény hány százaléka fordítódik a lézerátmenet felső energiaszintjének betöltésére.

A fentiek alapján a lézerek pumpálásának eredő hatásfoka  $\eta_p = \eta_r \cdot \eta_t \cdot \eta_a \cdot \eta_{pq}$ , melynek tipikus értéke 10% alatt van. Koherens optikai gerjesztés esetén az aktív anyagot lézerfény segítségével gerjesztjük és hozzuk benne létre a lézerműködéshez szükséges populáció inverziót. A lámpával való gerjesztéshez képest nagy előnye, hogy a hullámhossz alkalmas megválasztásával a pumpálás hatásfoka jelentősen növelhető. Kis méretük és nagy teljesítményük miatt azonban a diódalézerek terjedtek el a legszélesebb körben, mint pumpáló lézerek. Ezen kompakt lézerek alkalmazása gazdaságosabb, nagyobb teljesítményű és hosszabb élettartamú lézerek előállítását teszik lehetővé. A lézeres pumpálás esetén két geometriai elrendezést érdemes elkülöníteni. Longitudinális gerjesztés esetén a pumpáló nyaláb párhuzamos a lézerrel, míg tranzverzális gerjesztés esetén arra merőleges.

A lenti a, b, és c ábrákon a longitudinális gerjesztéshez leginkább alkalmazott geometriai megoldások láthatóak.

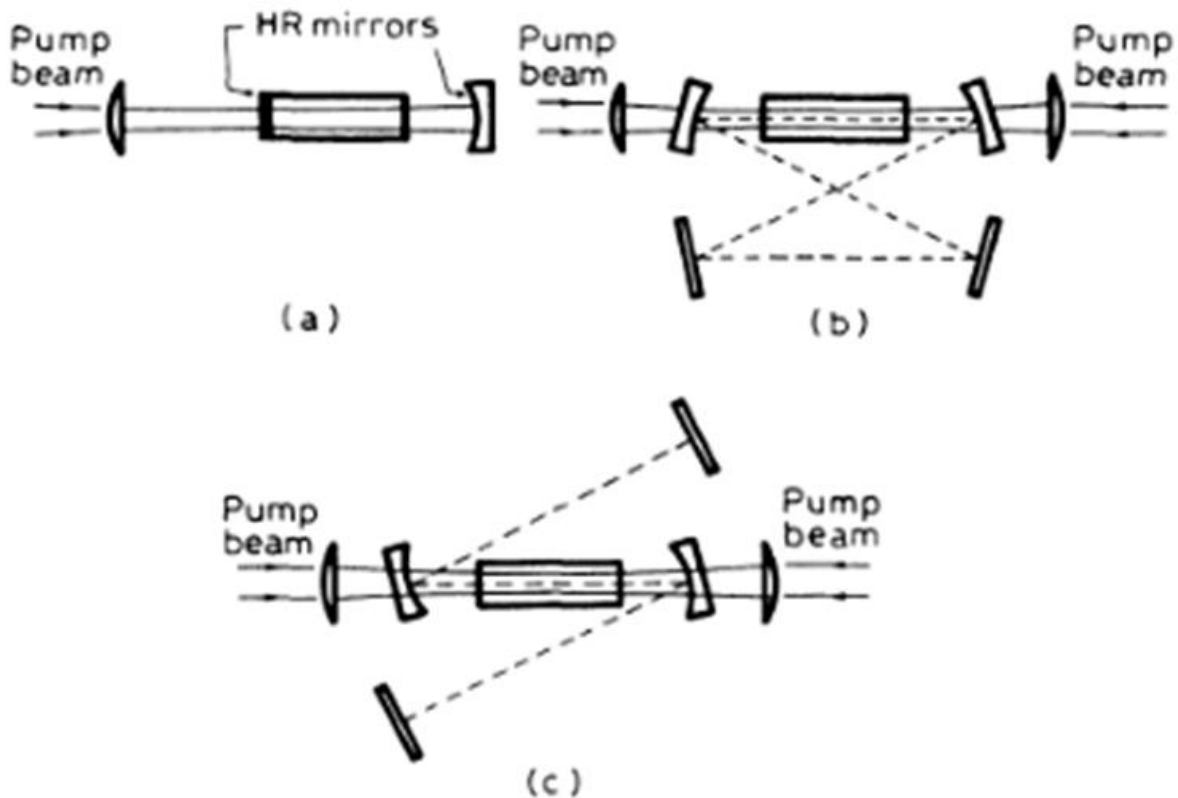


Figure 17 Longitudinális pumpálási geometriák

A következőkben longitudinális (a) gerjesztést feltételezve számítjuk ki a pumpálási rátát és hatásfokot. Az  $R_p$  pumpálási ráta az aktív közeg adott  $(r, z)$  koordinátájú pontjában megadható az alábbi formulával:

$$R_p(r, z) = \frac{\alpha \cdot I_p(r, z)}{h \cdot \nu_p} \quad (77.)$$



, ahol:

- $I_p(r, z)$  a pumpáló nyaláb intenzitása
- $\alpha$  a közeg abszorpciós koefficiense
- $\nu_p$  a pumpálás frekvenciája

Radiális irányban Gauss-os, valamint axiális irányban a Beer-Lambert törvényt követő, exponenciális gerjesztő intenzitásprofil feltételezve írhatjuk:

$$I_p(r, z) = I_p(0, 0) \cdot e^{\left[-\frac{2 \cdot r^2}{W_p^2}\right]} \cdot e^{-\alpha \cdot z} \quad 78.)$$

, ahol:

- $I_p(0, 0)$  a belépő síkban a pumpáló nyaláb intenzitása
- $W_p$  a nyaláb mérete

Feltételezzük, hogy a pumpáló nyaláb átmérője állandó ( $W_p$  független az axiális koordinátától) és az aktív anyag abszorpciós együtthatója nem változik meg a gerjesztés során. A belépő síkban az intenzitást kiszámíthatjuk az alábbi képlettel:

$$I_p(0, 0) = \frac{2 \cdot P_{pi}}{\pi \cdot W_p^2} \quad 79.)$$

, ahol:

- $P_{pi}$  a pumpáló nyaláb teljesítménye a belépő síkban.

Az emissziós és a gerjesztés geometriai hatásfokának ismeretében a lézerműködéshez szükséges  $P_p$  teljesítmény:

$$P_p = \frac{P_{pi}}{\eta_r \cdot \eta_t} \quad 80.)$$

, ahonnan a fenti egyenletek alapján a gerjesztési rátára írhatjuk:

$$R_p(r, z) = \eta_r \cdot \eta_t \cdot \frac{\alpha}{h \cdot \nu_p} \cdot \frac{2 \cdot P_p}{\pi \cdot W_p^2} \cdot e^{\left[-\frac{2 \cdot r^2}{W_p^2}\right]} \cdot e^{-\alpha \cdot z} \quad 81.)$$

Általános esetben az effektív pumpálási ráta az adott módusra számított  $R_p$  átlagos értékével adható meg:

$$\langle R_p \rangle = \frac{\int R_p \cdot |U(r, z)|^2 dV}{\int |U(r, z)|^2 dV} \quad 82.)$$

ahol  $U(r, z)$  a tér amplitúdója ( $E(r, z) = U(r, z) \cdot e^{-i \cdot k \cdot t}$ ).  $TEM_{00}$  módusú Gauss nyalábot feltételezve melynek  $w_0$  nyalábnyaka az aktív közegben van és a nyaláb mérete jó közelítéssel konstans ( $R \rightarrow \infty, \varphi \approx 0$ ) írhatjuk:

$$|U(r, z)|^2 \sim e^{\left[-\frac{2 \cdot r^2}{W_p^2}\right]} \cdot \cos^2 k \cdot z \quad 83.)$$

Ezen egyenletet visszahelyettesítve és alkalmazva a Beer-Lambert törvényt  $\eta_a = 1 - e^{-\alpha \cdot l}$ , ahol  $l$  az aktív közeg hossza, a  $\eta_{pq}$  teljesítmény kvantum hatásfok tipikus értéke 60%, továbbá kihasználva hogy a  $\cos^2 k \cdot z$  tényező a  $z$  koordináta gyorsan változó függvénye, az  $\langle R_p \rangle$  effektív pumpálási rátára kapjuk:

$$\langle R_p \rangle = \eta_p \cdot \frac{P_p}{h \cdot \nu_p} \cdot \frac{2}{\pi \cdot (w_0^2 + w_p^2) \cdot l} \quad 84.)$$

Adott  $P_p$  pumpálási teljesítmény mellett a  $\langle R_p \rangle$  effektív pumpálási ráta a pumpáló nyaláb méretének ( $W_p$  csökkentésével) növelhető. A gerjesztő lézernyaláb méretének csökkentése azonban megnöveli a nyaláb divergenciáját.



A gerjesztő nyaláb radiális eloszlása függeni fog az axiális pozíciótól ( $z$  koordináta) ami a levezetéskor használt közelítések érvényvesztését jelenti. A pumpáló nyaláb méretének növelése homogén gerjesztést tesz lehetővé, de csökkenti a hatásfokot. Általános szabályként megfogalmazhatjuk, hogy lézerek longitudinális koherens gerjesztésénél ideális esetben a gerjesztő nyaláb mérete közel azonos a kialakuló Gauss-nyaláb méretével  $W_p \approx W_0$  azaz a gerjesztő nyaláb és a kialakuló lézernyaláb paraméterei hasonlóak.

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.



## 4. Folytonos lézerműködés

A fejezet első részében megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek szükségesek a stabil, folytonos lézerműködés (continuous wave, cw) megvalósításához a rubin, mint háromszintes lézer esetén. A tárgyaláshoz egy egyszerű modellt használunk, mely szerint a lézer egyetlen módusban működik, a pumpálási teljesítmény és a módus energiasűrűsége pedig egyenletesen oszlik el a teljes aktív közegben és eltekintünk a módus állóhullám jellegétől is, mely a populációinverzió és az erősítés térbeli modulációjához vezetnek (spatial hole-burning). Habár ez a meglehetősen leegyszerűsített modell, a belőle levonható következtetések segíthetnek megérteni a lézerműködés alapvető jellemzőit. A fejezet további részében röviden bemutatjuk, miként lehet megvalósítani az egymódusú lézerműködést.

### 4.1. A háromszintes lézermodell

Képzeljünk el egy háromszintes lézert  $E_1, E_2, E_3$  degenerált energiaszintekkel és  $n_1, n_2, n_3$  populáció sűrűségekkel. A háromszintes lézereknek egy kis csoportjában a pumpálás az 1-es és 3-as szintek között történik, a lézerátmenet pedig a 2-es és 1-es szint között van. A 3-as és 2-es szint között pedig a sugárzásmentes átmenet helyezkedik el. A legjellemzőbb háromszintes működési séma esetén az 1-es energiaszintről gerjesztjük az atomokat a 3-as szintre, ahonnan gyors relaxációval a nagy átlagos élettartammal rendelkező 2-es szintre kerülnek. Belátható, hogy mivel ebben az esetben hiányzik a "tartály" szerepét betöltő 1-es szint, pumpálás hiányában gyakorlatilag minden atom a lézerátmenet alsó szintjén található. Ahhoz, hogy populáció inverziót hozhassunk létre, leoptimálisabb esetben is legalább az atomok felét kell egyidőben gerjesztett állapotban tartani. Az  $1 \rightarrow 3$  átmenethez tartozó intenzitás a gerjesztő forrástól származik, szétválasztva a pumpálást és a lézert. Az 1-es és 3-as szint között a pumpáló sugárzás jelenlétében létrejön a kényszerített emisszió, de az abszorpció fog dominálni eleinte, mivel az alsó szinten nagyobb a populáció. Az  $1 \rightarrow 3$  átmenethez tartozó kényszerített emisszió nem járulnak hozzá jelentősen a teljes körfolyamathoz, de a teljesség kedvéért belevettem. A  $2 \rightarrow 1$  átmenet esetén az emissziós folyamatok fognak dominálni, mivel  $n_2 > n_1$  a populáció inverzió miatt. Legyen  $n = n_1 + n_2 + n_3$  a teljes populáció sűrűség, ami időben megmarad.

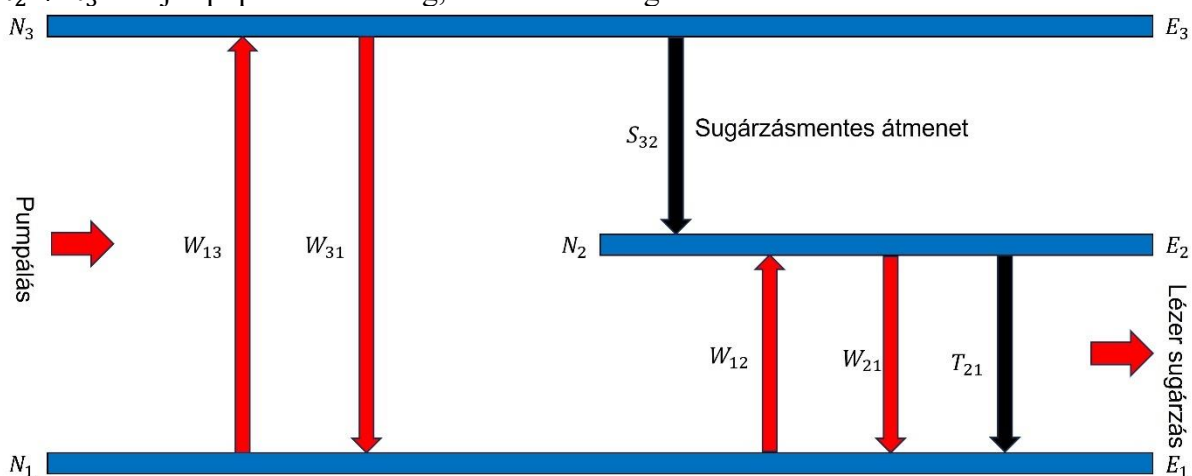


Figure 18 A háromszintes lézerműködési termsémák



- Legyen W a kényszerített emisszióért és abszorpcióért felelős átmeneti valószínűség.
- Legyen S a sugárzásmentes átmenetért felelős valószínűség.
- Legyen T a spontán emisszióért felelős átmeneti valószínűség.
- Legyen ij index páros az átmenetek sorrendje balról jobbra olvasva.

Írjuk fel az ábra alapján a háromszintes lézermódelldifferenciál egyenleteit:

$$\frac{dn_3}{dt} = W_{13} \cdot n_1 - W_{31} \cdot n_3 - S_{32} \cdot n_3 \quad (81.)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = W_{12} \cdot n_1 - W_{21} \cdot n_2 + S_{32} \cdot n_3 - T_{21} \cdot n_2 \quad (82.)$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -W_{12} \cdot n_1 + W_{21} \cdot n_2 + T_{21} \cdot n_2 + W_{31} \cdot n_3 \quad (83.)$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 \quad (84.)$$

Tételezzük fel, hogy megvárjuk a stacionárius állapot kialakulását, azaz  $dn_3/dt = 0$ ;  $dn_2/dt = 0$  és  $dn_1/dt = 0$ . Ekkor algebrai egyenleteket kapunk. A 81.) egyenletet fejezzük ki  $n_3$ -ra és helyettesítsük be 82.)-be. Vegyük számításba az 1-es, 2-es és 3-as szint elfajulását, azaz legyen  $g_1 \cdot W_{12} = W_{21} \cdot g_2$  és  $g_1 \cdot W_{13} = W_{31} \cdot g_3$  a mostani levezetés kedvéért. Természetesen továbbra is a 8.) egyenlet a helyes kifejezés. Ezt követően fejezzük ki  $n_2$ -t.

$$n_3 = \frac{W_{13}}{\frac{g_1}{g_3} \cdot W_{13} + S_{32}} \cdot n_1 \quad (85.)$$

$$n_2 = \frac{W_{12} \cdot \left( \frac{g_1}{g_3} \cdot W_{13} + S_{32} \right) + S_{32} \cdot W_{13}}{\frac{g_1}{g_2} \cdot W_{12} \cdot \left( \frac{g_1}{g_3} \cdot W_{13} + S_{32} \right) + T_{21} \cdot \left( \frac{g_1}{g_3} \cdot W_{13} + S_{32} \right)} \cdot n_1 \quad (86.)$$

A 84.)-be helyettesítsük be a 85.) és 86.) egyenleteket.

$$n = \left[ 1 + \frac{c}{d} + \frac{b}{e} \right] \cdot n_1 \quad (87.)$$

Írjuk fel a 20.) egyenlet alapján az abszorpció definíciójához vonatkozó populáció sűrűségkülönbséget. Sok átrendezés után az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\left( n_1 - \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 \right) = \left( 1 - \frac{a \cdot c}{d} \right) \cdot n_1 = \frac{\left( 1 - \frac{a \cdot c}{d} \right)}{\left( \frac{c}{d} + \frac{b}{e} + 1 \right)} \cdot n = \frac{e \cdot (d - a \cdot c)}{b \cdot d + e \cdot (c + d)} \cdot n \quad (88.)$$

$$a = \frac{g_1}{g_2} \quad (89.)$$

$$b = W_{13} \quad (90.)$$

$$c = W_{12} \cdot \left( \frac{g_1}{g_3} \cdot W_{13} + S_{32} \right) + S_{32} \cdot W_{13} \quad (91.)$$

$$d = \frac{g_1}{g_2} \cdot W_{12} \cdot \left( \frac{g_1}{g_3} \cdot W_{13} + S_{32} \right) + T_{21} \cdot \left( \frac{g_1}{g_3} \cdot W_{13} + S_{32} \right) \quad (92.)$$

$$e = \frac{g_1}{g_3} \cdot W_{13} + S_{32} \quad (93.)$$





Osszuk le a 88.) egyenlet mindkét oldalát  $n$ -el. A populáció inverzió feltétele, hogy a 88.) egyenlet job oldalának és a bal oldal számlálójának negatívnak kell lennie.

$$W_{13} \cdot \left( \frac{g_1}{g_3} \cdot T_{21} - \frac{g_1}{g_2} \cdot S_{32} \right) + T_{21} \cdot S_{32} < 0 \quad 94.)$$

$$W_{13} > W_{13t} = \frac{T_{21} \cdot S_{32}}{\left( \frac{g_1}{g_2} \cdot S_{32} - \frac{g_1}{g_3} \cdot T_{21} \right)} \quad 95.)$$

Ezzel megkaptuk a  $W_{13t}$  pumpálási küszöbfeltételt. A  $W_{13t}$  akkor és csak akkor pozitív, ha a fenti egyenlet nevezője pozitív, azaz nagyobb nullánál. Ekkor egy másik szükséges szükséges, de nem elégséges feltétel kapunk a populáció inverzióhoz:

$$S_{32} > \frac{g_2}{g_3} \cdot T_{21} \quad 96.)$$

Az  $S_{32}$  és  $T_{21}$  paraméterek fordítottan arányosak a hozzájuk tartozó  $\tau$  élettartammal. Ezáltal 3 szintes rendszer esetén feltételként azt kapjuk, hogy:

$$\tau_{32} < \frac{g_2}{g_3} \cdot \tau_{21} \quad 97.)$$

A küszöb alatt a populáció sűrűség különbség független A W-től, vagy az intenzitástól. Ennek köszönhetően nagy a populáció sűrűség különbség és az erősítés növekedhet. Továbbá a sugárzás intenzitása növekedni fog, ezzel egyidőben csökken a populáció sűrűség különbség ameddig el nem érkezünk a küszöbig. Ami miatt a populáció sűrűség különbség csillapított oszcillációs mozgást fog végezni az egyensúlyi állapot körül.

A következő lépésként írjuk fel az ábra alapján a háromszintes lézermódel kvantitatív populáció differenciál egyenleteit. Ezúttal vezessük be a pumpálási ráta fogalmát, úgy mint:  $R_p = W_{13} \cdot n_1 - W_{31} \cdot n_3$ . A későbbi fejezetekben gyakran fogunk rá hivatkozni. Közelítések alkalmazásával a populációegyenletek jelentősen leegyszerűsíthető. Mivel a 3-as energiaszintet úgy választják meg, hogy az élettartam nagyon rövid legyen, feltételezzük, hogy ez a szint állandóan üres (optimális eset), a pumpálással gerjesztett atomok gyakorlatilag azonnal a 2-es szintre kerülnek.

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} &= R_p - (n_2 \cdot B_{21} - n_1 \cdot B_{12}) \int_0^\infty \rho(\nu) \gamma(\nu - \nu_0) d\nu \\ &\quad - n_2 \cdot A_{21} \int_0^\infty \gamma(\nu - \nu_0) d\nu \\ &= R_p \\ &\quad - \left( \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 - n_1 \right) \cdot \frac{h \cdot \nu}{c} \cdot B_{12} \int_0^\infty \frac{c}{h \cdot \nu} \cdot \rho(\nu) \gamma(\nu - \nu_0) d\nu \\ &\quad - \frac{n_2}{\tau_2} \int_0^\infty \gamma(\nu - \nu_0) d\nu = \\ &\quad - \left( \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 - n_1 \right) \int_0^\infty \frac{R_p}{h \cdot \nu} \cdot \sigma_{12}(\nu - \nu_0) d\nu \end{aligned} \quad 98.)$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{n_2}{\tau_{21}} \\
& \frac{dn_1}{dt} = -R_p \\
& + \left( \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 - n_1 \right) \cdot B_{12} \int_0^\infty \rho(\nu) \gamma(\nu - \nu_0) d\nu \\
& + n_2 \cdot A_{21} \int_0^\infty \gamma(\nu - \nu_0) d\nu = \\
& -R_p \\
& + \left( \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 - n_1 \cdot B_{12} \right) \cdot \frac{h \cdot \nu}{c} \cdot B_{12} \int_0^\infty \frac{c}{h \cdot \nu} \cdot \rho(\nu) \gamma(\nu - \nu_0) d\nu \quad 99.) \\
& + \frac{n_2}{\tau_2} \int_0^\infty \gamma(\nu - \nu_0) d\nu = \\
& -R_p \\
& \left( \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 - n_1 \right) \int_0^\infty \frac{I(\nu) \cdot \sigma_{12}(\nu - \nu_0)}{h \cdot \nu} d\nu \\
& + \frac{n_2}{\tau_{21}} \\
& n_1 + n_2 = n \quad 100.)
\end{aligned}$$

Keskenysávú sugárzás (például lézer) esetén a  $\sigma_{12}(\nu - \nu_0)$  abszorpciós hatáskeresztmetszet lassan változik a spektrális tartományon és  $I(\nu)$  egy Dirac-Delta függvényként viselkedik:  $I(\nu) = I_L \cdot \delta(\nu - \nu_L)$ .

, ahol:

- $I_L$  a lézer sugárzás központi frekvenciához tartozó intenzitása
- $\nu_L$  a lézer sugárzás központi frekvenciája

A változtatásokat elvégezve az alábbi populáció egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned}
& \frac{dn_2}{dt} = R_p \\
& - \left( \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 - n_1 \right) \cdot \frac{I_L \cdot \sigma_{12}(\nu_L - \nu_0)}{h \cdot \nu_L} \\
& - \frac{n_2}{\tau_{21}} \quad 101.)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dn_1}{dt} = -R_p \\
& + \left( \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 - n_1 \right) \cdot \frac{I_L \cdot \sigma_{12}(\nu_L - \nu_0)}{h \cdot \nu_L} \\
& + \frac{n_2}{\tau_{21}} \quad 102.)
\end{aligned}$$

$$n_1 + n_2 = n \quad 103.)$$



#### 4.2. Az abszorpció és erősítés telítődése

A 2. fejezetben megvizsgáltuk az optikai erősítés kialakulásának a feltételeit és megállapítottuk, hogy a termikus egyensúlytól jelentős mértékű eltérés, vagyis populáció inverzió szükséges hozzá. Amennyiben képesek vagyunk a populációk ilyen mértékű manipulációjára, újra kell gondolnunk az abszorpció és erősítés tulajdonságait, mivel a populáció inverzió esetén az alapállapotú részecskék száma legalább a felére csökken a gerjesztés miatt, tehát az abszorpcióra képes részecskék száma legalább a felére esik ezzel együtt pedig az eredő abszorpció is csökken. Hasonló gondolatmenettel: az erősítés is változik, amennyiben egy jel erősítődik, mivel a kényszerített emissziós átmenetek pedig az erősítést csökkentik. Az itt leírt két jelenség számos gyakorlati alkalmazással rendelkezik a lézerek működésében, az impulzusok formálásában, jelek erősítésében és összefoglaló néven telítődésnek nevezzük. Térjünk vissza a populáció sűrűség különbséghez. Némi átrendezés után után a 88.) egyenlet az alábbi formát fogja felvenni:

$$\left( n_1 - \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 \right) = \left\{ \frac{\left[ W_{13} \cdot \left( \frac{g_1}{g_3} \cdot T_{21} - \frac{g_1}{g_2} \cdot S_{32} \right) + T_{21} \cdot S_{32} \right]}{W_{13} \cdot (T_{21} + S_{32})} \right\} \cdot n$$

$$\left\{ \frac{1 + W_{12} \cdot \left[ W_{13} \cdot \left( \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_1}{g_3} \right) + S_{32} \right]}{W_{13} \cdot (T_{21} + S_{32})} \right\} \cdot n \quad 104.)$$

Felhasználva a 20.) egyenletet és némi átrendezés után az  $\alpha$  abszorpciós koefficiens és a  $g$  erősítési tényező az alábbiak szerint alakul:

$$\alpha(v - v_0) = \frac{\gamma(v - v_0) \cdot c^2}{\tau_{21} \cdot 8 \cdot \pi \cdot v^2} \cdot \left( n_1 - \frac{g_1}{g_2} \cdot n_2 \right) \quad 105.)$$

$$\alpha(v - v_0) = \frac{\alpha(v - v_0)_0}{1 + \frac{I_L}{I_{telítés}}} \quad 106.)$$

$$\alpha(v - v_0)_0 = \frac{\gamma(v - v_0) \cdot c^2}{\tau_{21} \cdot 8 \cdot \pi \cdot v^2} \cdot \frac{\left[ W_{13} \cdot \left( \frac{g_1}{g_3} \cdot T_{21} - \frac{g_1}{g_2} \cdot S_{32} \right) + T_{21} \cdot S_{32} \right]}{W_{13} \cdot (T_{21} + S_{32})} \cdot n \quad 107.)$$

$$I_{telítés} = \frac{h \cdot v_L}{\sigma_{12}(v_L - v_0)} \cdot \frac{W_{13} \cdot (T_{21} + S_{32})}{\left[ W_{13} \cdot \left( \frac{g_1}{g_3} \cdot T_{21} - \frac{g_1}{g_2} \cdot S_{32} \right) + T_{21} \cdot S_{32} \right]} \quad 108.)$$

$$W_{12} = \frac{I_L \cdot \sigma_{12}(v_L - v_0)}{h \cdot v_L} \quad 109.)$$

$$W_{13} = \frac{I_G \cdot \sigma_{13}(v_G - v_0)}{h \cdot v_G} \quad 110.)$$

$$T_{21} = \frac{1}{\tau_{21}} \quad 111.)$$

$$S_{32} = \frac{1}{\tau_{32}} \quad 112.)$$



, ahol:

- $\alpha(\nu - \nu_0)_0$  a kisjelű abszorpciós koefficiens
- $I_{telítés}$  a telítési intenzitás
- $\sigma_{13}(\nu_G - \nu_0)$  a gerjesztő sugárzásnál az abszorpciós hatáskeresztmetszet
- $I_G$  a gerjesztő sugárzás (a dióda lézer) központi frekvenciájához tartozó intenzitása
- $\nu_G$  a gerjesztő sugárzás (a dióda lézer) központi frekvenciája

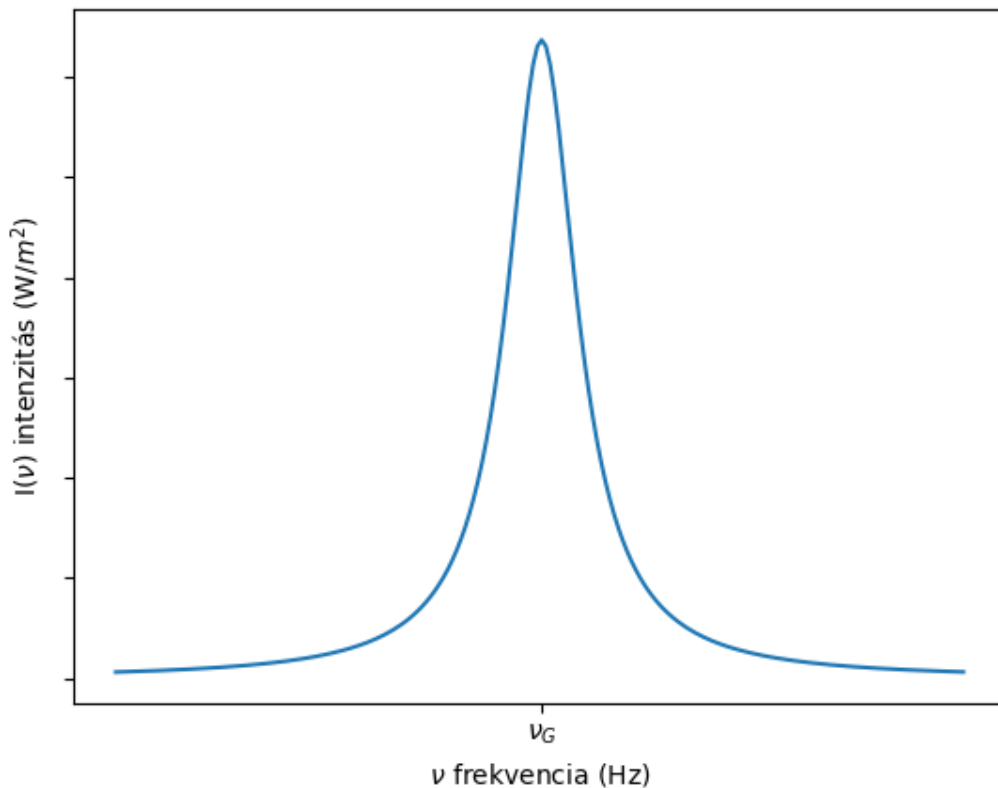


Figure 19 A gerjesztő forrás (dióda lézer) intenzitásának frekvencia függésének sematikus ábrája

Írjuk fel ismét az abszorpció törvényét differenciális alakban. Az egyszerűbb jelölés miatt a továbbiakban legyen:

- $I_L = I$
- $\alpha(\nu - \nu_0) = \alpha$
- $\alpha(\nu - \nu_0)_0 = \alpha_0$

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha \cdot I = -\left(\frac{\alpha_0}{1 + \frac{I}{I_{telítés}}}\right) \cdot I \quad 113.)$$

A fenti egyenletből világosan látszik, hogy az abszorpció törvénye most már függ az intenzitástól is. Vizsgáljuk meg a különböző speciális eseteket:

- ha  $I \ll I_{telítés}$   $I \ll I_t$ , akkor  $dI/dz = -\alpha_0 \cdot I$ , amely az abszorpció klasszikus esete
- ha  $I = I_{telítés}$ , akkor  $dI/dz = -\alpha_0 \cdot I/2$ , ekkor az abszorpció a felére esik vissza
- ha  $I \gg I_{telítés}$ , akkor  $dI/dz \rightarrow 0$ , vagyis az abszorpció nullához tart



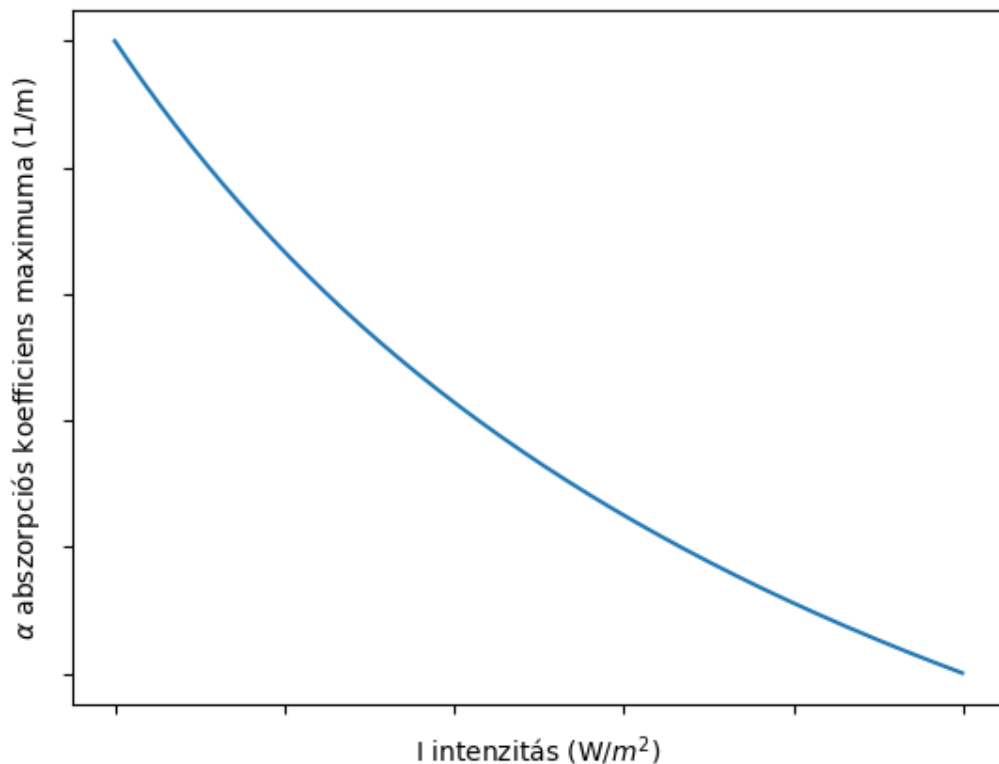


Figure 20 Az intenzitás szaturációjának hatása az abszorpció koefficiens maximumára

Ezt a jelenséget, vagyis amikor nagy gerjesztő intenzitáson az abszorpció nullához tart, vagyis átlátszóvá válik az anyag, az abszorpció telítődésének, vagy kifakulásának nevezzük. Itt csak a legegyszerűbb megoldásait vizsgáltuk az abszorpció differenciálegyenletének. Ha az  $I(t)$  függvény nem ilyen egyszerű függvény (a gyakorlatban ez többnyire így van), az egyenlet megoldása csak numerikusan lehetséges. A telítődésnek, a telítődő abszorbenseknek számos gyakorlati alkalmazása van a lézerek fizikájában elsősorban impulzusok alakjának formálására, rövidítésére használják, valamint erősítő fokozatok elválasztására.



### 4.3. Működési küszöbfeltétel

A 101.), 102.) és 103.) egyenleteket kiegészíti az intenzitás időbeni változását leíró tag feltételezve, ha kiindulunk a rezonátor kontinuitási egyenletéből és eltekintünk a z irányú mozgástól. Az egyszerűbb jelölés miatt a továbbiakban legyen:

- $I_L = I$
- $\sigma_{21}(\nu_L - \nu_0)$
- $\nu_L = \nu$
- $g_1 = g_2 = 1$ , azaz nincs elfajulás

$$\frac{dI}{dt} = c \cdot I \cdot \sigma \cdot \Delta n - \frac{I}{\tau_{foton}} \quad (114.)$$

Nyilvánvaló, hogy a spontán emissziót nem tartalmazó egyenlet a lézerműködés kezdetére nem lehet érvényes, hiszen  $I=0$  esetén  $dI/dt = 0$ , azaz az egyenlet szerint a lézerműködés nem indulna be. Amennyiben a pumpálással populációinverziót hozunk létre, a spontán emisszió során kibocsátott kevés számú foton által képviselt gyenge intenzitás ( $I > 0$ ) az aktív közegben haladva erősödni fog. Ahhoz, hogy a stabil lézerműködés beinduljon ( $dI/dt = 0$ ) szükséges, hogy a rezonátorban egy teljes körülmény ideje alatt az erősítés legalább akkora legyen, mint a rezonátorban fellépő veszteségek, azaz:

$$c \cdot I \cdot \sigma \cdot \Delta n > \frac{I}{\tau_{foton}} \quad (115.)$$

Innen a küszöbfeltételhez tartozó  $\Delta n_c$  kritikus populáció sűrűség különbség:

$$\Delta n_c = \frac{1}{c \cdot \sigma \cdot \tau_{foton}} \quad (116.)$$

A  $dn_2/dt = 0$  egyensúlyi feltétel és kisjelű ( $I \approx 0$ ) erősítés esetén, továbbá felhasználva, hogy  $n_2 = (n + \Delta n)/2$ , a lézerműködés beindításához szükséges kritikus populációinverzióhoz tartozó  $R_{pc}$  kritikus pumpálási rátára kapjuk, hogy:

$$R_{pc} = \frac{n}{2 \cdot \tau_{21}} + \frac{1}{2 \cdot c \cdot \sigma \cdot \tau_{foton} \cdot \tau_{21}} \quad (117.)$$

Az első tag a 2-es energiaszintről a teljes atomszám felét kitevő populáció spontán emisszió általi veszteségét jelenti, amelyet pumpálással folyamatosan pótolni kell. Amellett, hogy ez jelentősen megnöveli a pumpálás kritikus értékét, jelentőssé teszi a rezonátorban az erősített spontán emissziót. A második tagnál láthatjuk, hogy minél kisebb a rezonátor vesztesége és minél nagyobb a  $2 \rightarrow 1$  spontán átmenetet jellemző élettartam, annál kisebb a lézerműködés beindításához szükséges pumpálási sebesség.

Ha megnöveljük a pumpálási sebességet majd állandó értéken tartjuk, akkor egy stabil intenzitás érték fog kialakulni. Ennek értékét úgyszintén a  $dn_2/dt = 0$  és  $dI/dt = 0$  egyensúlyi feltételek alapján kapjuk meg:

$$I = c \cdot \tau_{foton} \cdot (R_p - R_{pc}) = I_t \cdot \frac{2 \cdot n \cdot c \cdot \sigma \cdot \tau_{foton} + 1}{2} \cdot \left( \frac{R_p}{R_{pc}} - 1 \right) \quad (118.)$$



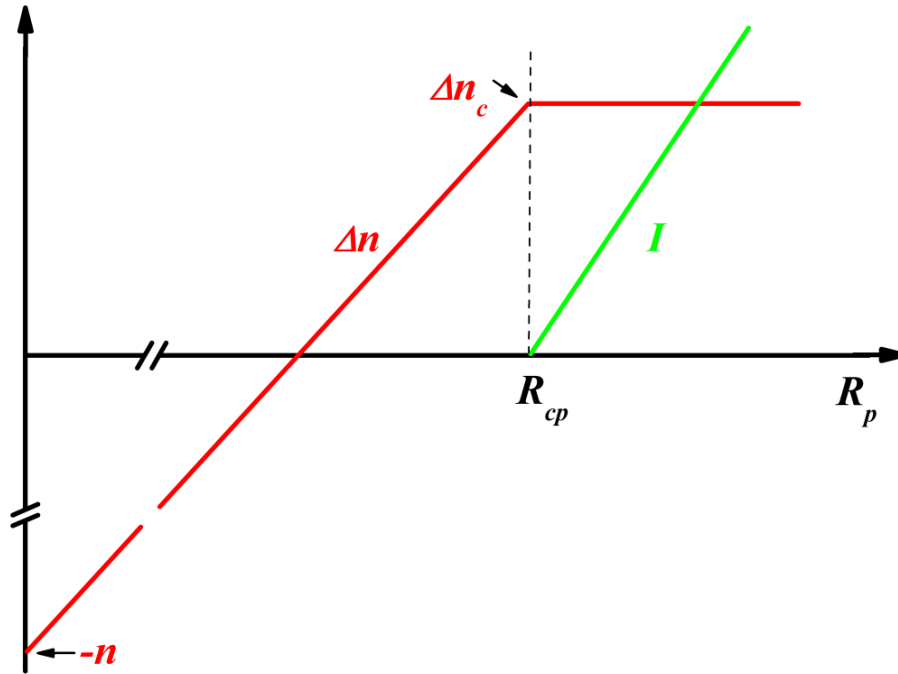


Figure 21 A populációinverzió és lézerintenzitás függése a pumpálási sebességtől háromszintes lézertípus esetén

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.

#### 4.4. Lézermódusok kialakulása

A lézerrezonátorokban azon frekvenciájú hullámok tudnak erősödni, melyek állóhullámot tudnak létrehozni. Állóhullámok kialakulásának feltétele, hogy egy teljes körbefutás alatt a fázisváltozás:

$$\Delta\varphi = q \cdot 2\pi \quad (119.)$$

, ahol:

- $q$  egy pozitív egész szám

A fenti feltételt teljesítő hullámok (módusok) közötti frekvenciakülönbség jóval kisebb, mint a lézerátmenetek vonalakjának szélessége, ezért a többmódusú oszcilláció a lézerek általános jellemzője. Kiszámítható, hogy a lézerekre leggyakrabban jellemző TEM<sub>00</sub> transzverzális Gauss alaplómódusok frekvenciája:

$$\nu_q = \frac{c}{2 \cdot l \cdot n} \cdot \left( q + \frac{2}{\pi} \cdot \arctan \frac{l}{2 \cdot z_0} \right) \quad (120.)$$

, ahol:

- $l$  a rezonátor optikai úthossza
- $z_0$  a nyáláb Rayleigh hossza
- $n$  az aktív közeg törésmutatója

Ezen longitudinális módusok közötti frekvenciakülönbség megegyezik a síkpárhuzamos rezonátorok esetén síkhullámokra kapható értékkel, annak ellenére, hogy a fázisterjedés és a sajátfrekvenciák értéke eltérő a két hullámtípus esetén:

$$\Delta\nu = \nu_{q+1} - \nu_q = c/2 \cdot l \quad (121.)$$

38



Click or tap here to enter text.

Ha a magasabb rendű  $TEM_{mp}$  módusokat is figyelembe vesszük, a spektrum még összetettebb lesz. Az adott longitudinális módushoz tartozó transzverzális módusok frekvenciája eltolódik, ezek fedésbe kerülhetnek más longitudinális alaplómódusokkal. A többmódusú oszcilláció leírásához az egyszerűség kedvéért vegyük figyelembe csak a  $TEM_{00}$  alaplómódusokat és feltételezzük, hogy az egyik sajátfrekvencia egybeesik a vonalalak csúcsával. A lejátszódó folyamatokat nagymértékben befolyásolja a vonalalak kiszélesedésének természete.

A mi esetünkben homogén kiszélesedést feltételezhetünk. Homogén kiszélesedés esetén az erősítési görbe alakja változatlan marad, függetlenül attól, hogy a lézerműködés milyen frekvencián megy. Amint a lenti ábra szemlélteti, az erősítési görbe csak addig emelkedik, amíg eléri a rezonátor veszteség értékét és a középponti módusban beindul a lézerműködés. Mivel a többi, oldalsó módusnak kisebb az erősítése, ezek nem tudnak feléledni.

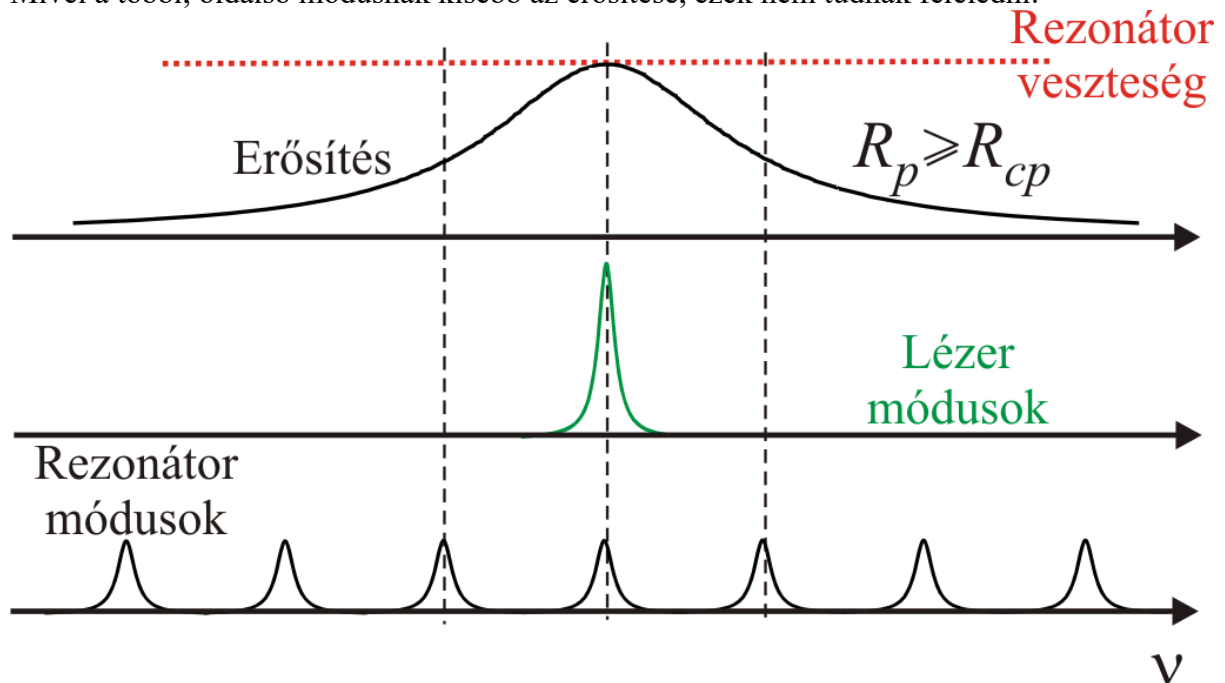


Figure 22 Egymódusú működés homogén kiszélesedésű lézérátmenet esetén

A gyakorlatban viszont megfigyeltek többmódusú működést homogén kiszélesedett átmenetek esetén is. Lézermodellünkben feltételeztük, hogy a populációinverzió azonos az aktív közeg teljes térfogatában és nem vettük figyelembe azt, hogy az egyes módusok állóhullámot hoznak létre, ami azt jelenti, hogy a csomópontokban a térerősség kicsi és nem lesz indukált emisszió. Emiatt ezeken a helyeken a populáció inverzió magas lesz, a rezonátorban térben  $\lambda/2$  térbeli periódussal rendelkező lesz a populációinverzió értéke (térbeli "lyuk égetés").

Két szomszédos módus között a rezonátor középső szakaszán  $\lambda/4$  lesz az eltolódás, ez pedig lehetőséget adhat egy második módus kialakulására.

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.



#### 4.5. Transzverzális módusszelekció

Kis nyalábátmérővel rendelkező lézerek esetén (amilyen a mienk is) a kívánt transzverzális módusban való lézerműködés megvalósítása egyszerű. A 3.3. fejezetben láthattunk, hogy a különböző transzverzális módusok intenzitáseloszlása nagymértékben különbözik egymástól. Megfelelő alakú apertúrának a rezonátorba helyezésével elérhetjük, hogy csak a kívánt módus tudjon erősödni. A leginkább favorizált a TEM<sub>00</sub> alapmódusú lézerműködéshez egy megfelelő méretű kör alakú apertúrát alkalmaznak, mely a magasabb rendű módusok esetén nagyobb veszteséget okoz, mint a lézerközeg erősítése, miközben az alapmódus vesztesége alacsony maradhat.

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.

#### 4.6. Longitudinális módusszelekció

Az egyetlen transzverzális módussal rendelkező lézerben még mindig lehetséges több longitudinális módus működése. Láttuk, hogy a módusok közötti frekvenciakülönbség fordítottan arányos a rezonátor optikai úthosszával. Bizonyos esetekben járható út lehet, hogy a rezonátor méretét úgy válasszuk meg, hogy az egyik módus egybeessen az erősítési görbe csúcsával, a két szomszédos módus frekvenciája a görbe széleire essen, ahol az erősítés kisebb lesz, mint a rezonátor vesztesége. Egyetlen longitudinális működési módus kiválasztására alkalmas eszköz a rezonátorba elhelyezett Fabry-Perot etalon. Az etalon legegyszerűbb változata egy síkpárhuzamos lemez, melynek mindkét felületét nagy reflexiójú bevonattal látták el. Az etalont úgy helyezik a rezonátorba, hogy a felületének normálisa a lézernyalábbal valamilyen kis szöget zárjon be, így nem hozhat létre másodlagos rezonátort a rezonátoron belül.



Figure 23 Fabry-Perot etalon elhelyezkedése a rezonátorban longitudinális módusszelekcióhoz

Az etalonból többszörös visszaverődés után kilépő nyalábok közötti interferencia maximum-feltételéből kiszámítható a transzmissziós maximumok közötti  $\Delta\nu_{FSR}$  frekvenciakülönbség, vagy szabad spektrális tartomány:

$$\Delta\nu_{FSR} = \frac{c}{2 \cdot d_{FP} \cdot n_{FP} \cdot \cos \beta} \quad (122.)$$

, ahol:

- $\beta$  a fény törési szöge
- $d_{FP}$  az etalon vastagsága
- $n_{FP}$  az etalon törésmutatója

Az etalon a beesési (törési) szög kismértékű forgatásával hangolható, hogy valamelyik transzmissziós maximuma az erősítési görbe közepe közelébe essen.



Az etalon vastagságát úgy kell megválasztani, hogy  $\Delta\nu_{FSR}$  nagyobb legyen, mint az erősítési görbe  $\Delta\nu_0$  félérték szélességének a fele, azaz:

$$\Delta\nu_{FSR} > \frac{\Delta\nu_0}{2} \quad (123.)$$

Ahhoz, hogy csak egyetlen módus erősödjön, a FP etalon transzmissziós csúcsának  $\Delta\nu_{FP}$  félérték-szélessége kisebb kell legyen, mint a rezonátor módusai közötti frekvenciakülönbség kétszerese, azaz:

$$\Delta\nu > \frac{\Delta\nu_{FP}}{2} = \frac{\Delta\nu_{FSR}}{2 \cdot F_{FP}} \quad (124.)$$

, ahol:

- $F_{FP}$  az etalon finesse-e.

A finesse szoros összefüggésben van az etalon reflexiójával. A nagy finesse, azaz a jó spektrális felbontás nagy reflexiók tényező (kicsi transzmissziót) feltételez, ami miatt nagy lesz a rezonátor vesztesége.

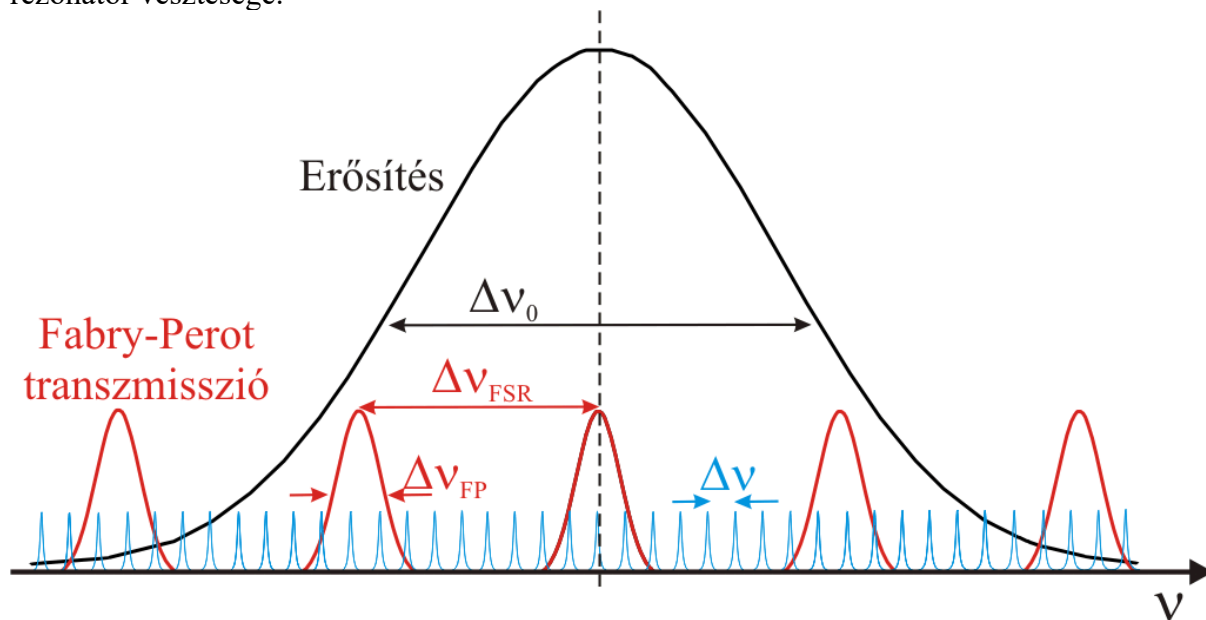


Figure 24 Egymódusú lézerműködés megvalósításának elve Fabry-Perot etalon alkalmazásával

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.

#### 4.7. A monokromatikusság határa

A rezonátor saját módusainak  $\Delta\nu_{foton}$  sávszélességét a rezonátor  $\tau_{foton}$  foton élettartama határozza meg. Minél nagyobb a tükrök reflexiója, a fotonok annál több kört tesznek meg a rezonátorban, ami ahhoz vezet, hogy a rezonanciafeltétel maximumától távolabb eső hullámok annál jobban kioltódnak, ami a sávszélesség csökkenéséhez vezet:

$$\Delta\nu_{foton} = \frac{1}{\tau_{foton}} \quad (125.)$$

Ha sikerül tetszőlegesen hosszú rezonátor élettartamot létrehozni, akkor elvileg akármilyen keskeny sávszélességet elő tudunk állítani.



Felmerül a kérdés, hogy mégis mi lehet a monokromatikusság korlátja? A kérdést még a lézerek megépítése előtt megválaszolták. Akármilyen tökéletes is lehet egy rezonátor, a spontán emisszió okozta kvantum-zaj fluktuáció mindig létrehoz egy minimális vonalszélességet. Ez a kvantumzaj korlát nagymértékben függ a lézer típusától. Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.

#### 4.8. Lézerek hangolása

Bizonyos lézerek esetén (pl. CO<sub>2</sub>, Ar-ion) több lézer-átmenet is létezhet, melyek közül általában a legnagyobb erősítéssel rendelkező átmenetet használják, azonban előfordulhat, hogy igény lenne valamely másik átmeneten használni a lézert. Egyes lézertípusok pedig nagy sávszélességgel rendelkeznek (pl. festék lézerek) és bizonyos alkalmazásokhoz szükség lehet a lézerek hangolása. Ilyen esetekben meg kell növelni a rezonátor veszteségét az elnyomni kívánt hullámhosszokon, melyhez egy hullámhossz szelektív elemet építenek be a rezonátorba. Távoli- és közép infravörös tartományon egy reflexiós diffrakciós rácsot alkalmaznak ún. Littrow elrendezésben és a rács forgatásával választható ki az a hullámhossz, amelyet a rács visszatükröz a rezonátorba. Látható és közeli infravörös tartományon egy diszperziós prizmat építenek be az aktív közeg és a hátoldali tükör közé és a prizma forgatásával lehet szabályozni, hogy a tükör milyen hullámhosszú fényt tükrözzön vissza ugyanazon az optikai úton. Ugyancsak a látható és közeli infravörös tartományban alkalmazzák a kettőtörő lemezt.

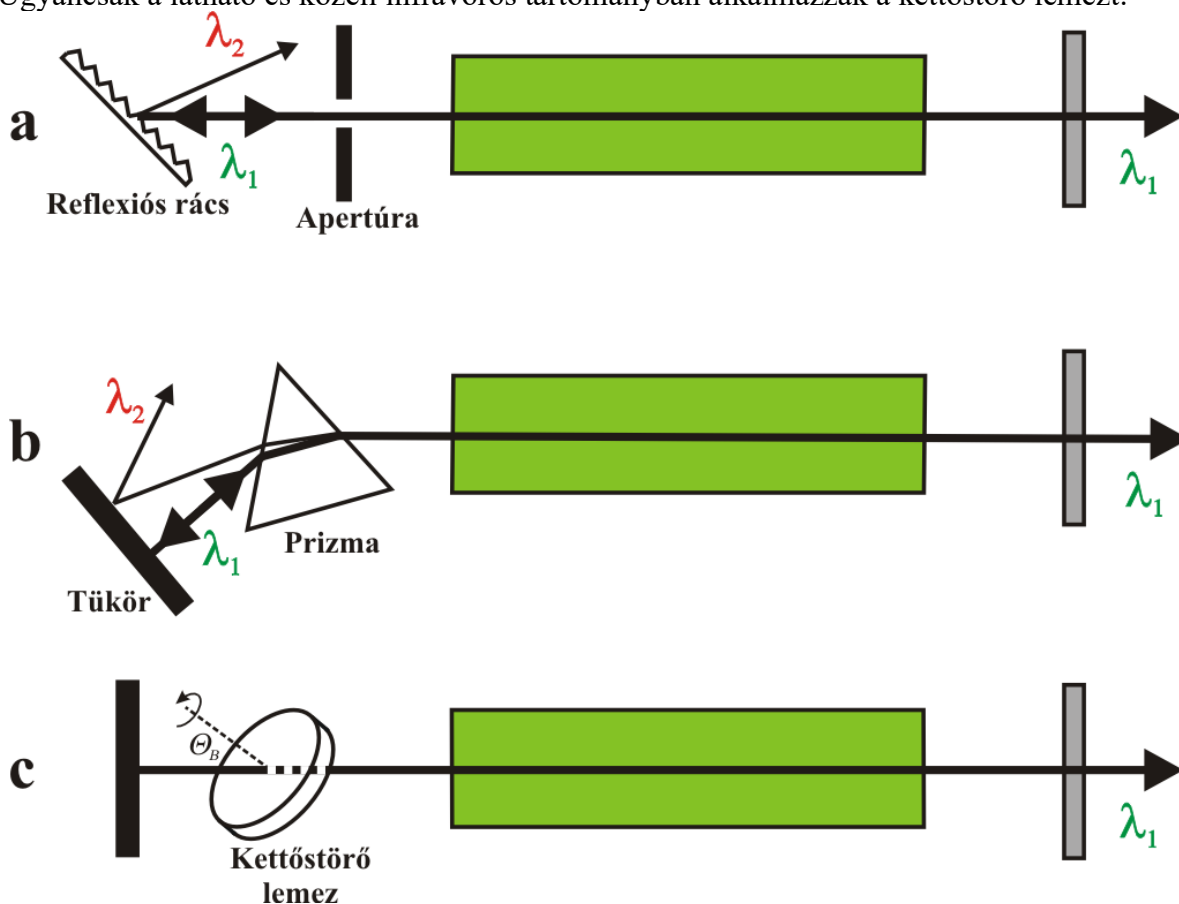


Figure 25 Lézerek hangolására alkalmas elrendezések

Jelen fejezet a (Almási, et al., 2013) digitális tananyag feldolgozásával készült el.



## 5. A rubin kristály, mint lézeraktív anyag

A ( $Cr^{3+}$ ) három vegyértékű krómionnal adalékolt ( $Al_2O_3$ ) zafír kristály, amelyet általában rubinnak neveznek. A rubin nem csak az optikában való felhasználása, hanem a drágakövek nemessége miatt is nagyon fontos kristály. Lézeres közegként működhet, és látható fényű lézert készíthet, amely számos jó tulajdonsággal rendelkezik, mint például keskeny vonalszélesség, hosszú fluoreszcens élettartam, nagy kvantumhatékonyság és nagyon széles abszorpciós sáv, szobahőmérsékleten való működés lehetősége és a legnagyobb mechanikai szilárdság. más lézeres médiával.

A zafír ( $Al_2O_3$ ) kristály fontos technológiai anyag a szilárdtestlézerek lézeranyagaként (Burton, Debardeleben, Amir, & Planchon, 2014). A szennyeződések jelenléte a kristályban befolyásolhatja annak spektroszkópiai, mechanikai, félvezető, szupravezető, mágneses, dielektromos és transzport tulajdonságait (Gaudry, et al., 2005). A zafír idegen ionokkal adalékolása felhasználható az optikai tulajdonságok módosítására, és hasznossá teszi a rendszert nagy variációjú alkalmazásokhoz. A zafír ígéretes anyaggá válik a hangolható lézerek számára, ha széles abszorpciós sávokkal és széles emissziós tartományokkal rendelkező elemekkel adalékolják (Pishchik, Lytvynov, & Dobrovinskaya, 2009). Az átmenetifém-ionok szintén kiváló alternatívák, és széles körben alkalmazzák őket lézerkristályokban (Wei & Yang, 2009). A  $Cr^{3+}$  három vegyértékű krómion fontos átmenetifém tagsoport. A  $Cr^{3+}$  iont széles körben használják aktív ionként szilárdtestlézerekben.



## 6. A rubin kristály optikai tulajdonságai

Vegyünk egy példa esetet, melynél  $1,86 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  koncentrációjú  $\text{Cr}^{3+}$  ionnal szennyezett  $\text{Al}_2\text{O}_3$  minta abszorpciós koefficiensének és abszorpciós hatáskeresztmetszetének hullámhossz függését mérték ki szobahőmérsékleten és 1 atm nyomás alatt (Cronmeyer, 1966). A  $\text{Cr}^{3+}$  ionnal szennyezett  $\text{Al}_2\text{O}_3$  408 nm-nél és 558 nm-nél abszorpciós csúcsot mutat a  ${}^4\text{A}_2 \rightarrow {}^4\text{T}_1$  és  ${}^4\text{A}_2 \rightarrow {}^4\text{T}_2$  átmenetek miatt. Az  ${}^4\text{A}_2$  állapot elfajulásának foka:  $g_1 = 4$ . Az abszorpciós spektrum kissé eltérhet attól függően, hogy a beeső lineárisan polarizált fény elektromos vektora párhuzamos ( $E \parallel c$ ) vagy merőleges ( $E \perp c$ ) a kristály  $c$  szimmetria tengelyére.

Vegyünk egy másik példát, melynél  $\text{Cr}^{3+}$  ionnal szennyezett  $\text{Al}_2\text{O}_3$  minta emissziós spektrumát mérték ki szobahőmérsékleten és 1 atm nyomás alatt több különböző hullámhosszú gerjesztéssel (Kusuma, Astuti, & Ibrahim, 2019). A  $\text{Cr}^{3+}:\text{Al}_2\text{O}_3$  emissziós spektrumát az  $R_1$  és  $R_2$  sávok dominálják a jól ismert  ${}^2\text{E} \rightarrow {}^4\text{A}_2$  sugárzásos átmenet miatt a  $\text{Cr}^{3+}$  ionokban. A dupla R sáv létét a  ${}^2\text{E}$  gerjesztett állapot széthasadása okozza a spin-pálya csatolás miatt (Gugushev, Götze, & Göbbels, 2010). Ezen két sáv távolsága  $\Delta E = 47 \text{ cm}^{-1}$  (Maiman, Hoskins, D'Haenens, Asawa, & Evtuhov, 1961). Több emissziós vonal is megfigyelhető, de ezekkel egyelőre ne foglalkozzunk.

Amikor fény esik a  $\text{Cr}^{3+}$  ionra, egy elektron  ${}^4\text{A}_2$  alapállapotából gerjesztett állapotába ( ${}^4\text{T}_2$  és  ${}^4\text{T}_1$ ) nagyjából 2,2 eV-on, illetve 3,0 eV-on fekszik a  ${}^4\text{A}_2$  alapállapot felett. A  ${}^4\text{T}_2$  és  ${}^4\text{T}_1$  állapotok élettartalma  $\tau_{32} = 10^{-9}\text{s}$ . A  ${}^4\text{T}_2$  és  ${}^4\text{T}_1$  állapotok elfajulásának foka  $g_3 = 1$ . Ezek az állapotok fonon emisszió által nem sugárzóan lecsengenek, amíg el nem éri a legalacsonyabb gerjesztett  ${}^2\text{E}$  metastabil felhasadt állapotot. Ezen felhasadt metastabil állapotról ezután  ${}^4\text{A}_2$  alapállapotba való  $2\bar{A} \rightarrow {}^4\text{A}_2$  és  $\bar{E} \rightarrow {}^4\text{A}_2$  átmenetek során 688 nm és 695 nm hullámhosszú fotont bocsát ki. A  $2\bar{A}$  és  $\bar{E}$  állapotok élettartalma  $\tau_{21} = 10^{-3}\text{s}$ . A  $2\bar{A}$  és  $\bar{E}$  állapotok elfajulásának foka:  $g_2 = 2$ .

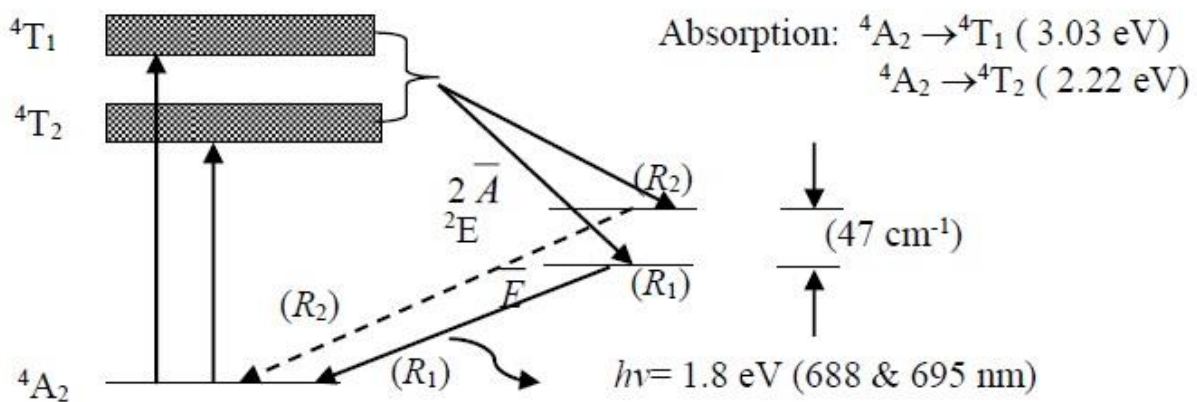


Figure 26 A  $\text{Cr}^{3+}$  lehetséges átmenetei optikai gerjesztés hatására (Kusuma, Astuti, & Ibrahim, 2019)



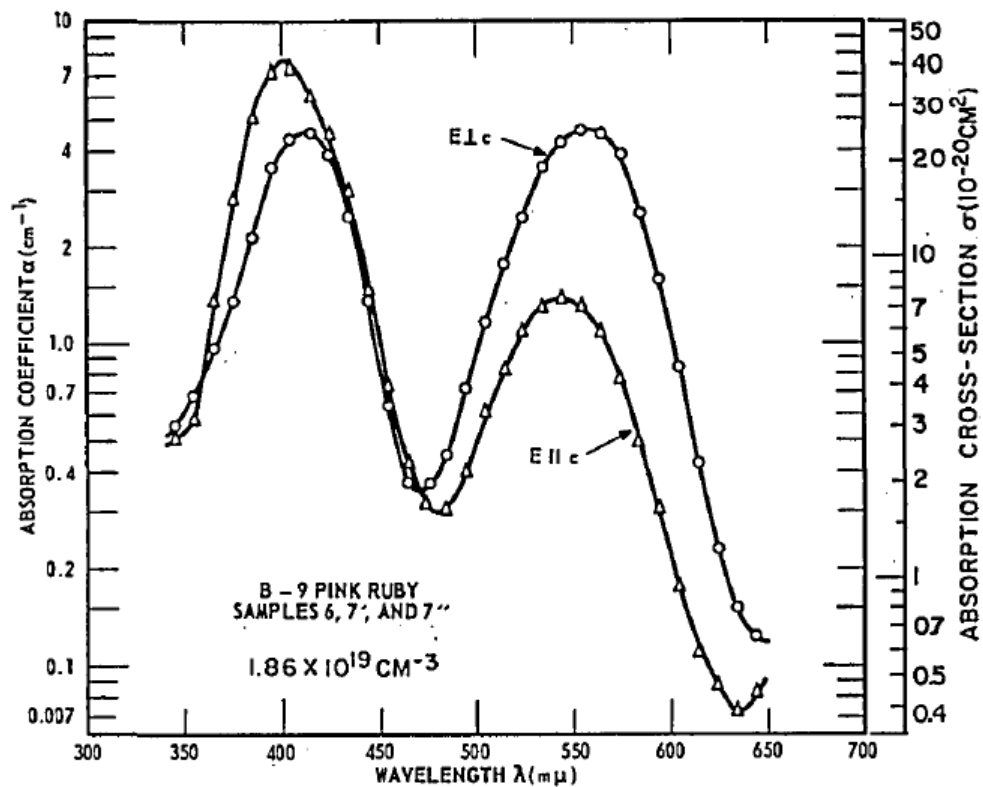


Figure 27 A rubin kristály abszorpciós koefficiensének és abszorpciós hatáskeresztmetszetének hullámhossz függése (Cronmeyer, 1966)

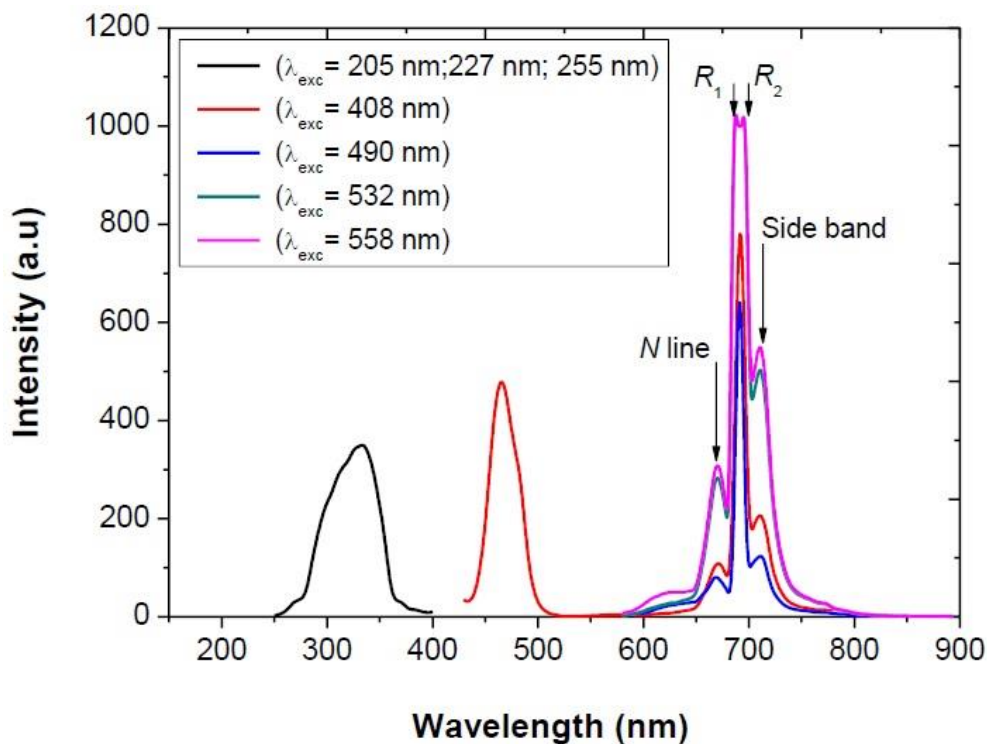


Figure 28 A rubin kristály emissziós spektruma különböző hullámhosszú gerjesztéssel (Kusuma, Astuti, & Ibrahim, 2019)



## 7. Irodalomjegyzék

- Almási, G., Erdélyi, M., Fülöp, A. J., Hebling, J., Horváth, Z., Kovács, P. A., . . . Smausz, T. K. (2013). *Lézerfizika - elektronikus tananyag*. Retrieved from [https://eta.bibl.u-szeged.hu/1711/2/lezerfizika/titan.physx.u-szeged.hu/\\_bubo/Lezerfizika/book.html](https://eta.bibl.u-szeged.hu/1711/2/lezerfizika/titan.physx.u-szeged.hu/_bubo/Lezerfizika/book.html)
- Burton, H., Debardelaben, C., Amir, W., & Planchon, T. A. (2014). Temperature dependence of Ti:Sapphire fluorescence spectra for the design of cryogenic cooled Ti:Sapphire CPA laser. *Optics Express*, 25(6), 6954-6962.
- Cronmeyer, D. C. (1966). Optical Absorption Characteristics of Pink Ruby. *Journal of Optical Society of America*, 56(12), 1703-1705.
- Gaudry, E., Cabaret, D., Saintavit, P., Brouder, C., Mauri, F., Goulon, J., & Rogalev, A. (2005). Structural relaxations around Ti, Cr and Fe impurities in  $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> probed by x-ray absorption near-edge structure combined with first-principles calculations. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 17(36), 5467-5480.
- Gugushev, C., Götze, J., & Göbbels, M. (2010). Cathodoluminescence microscopy and spectroscopy of synthetic ruby crystals grown by the optical floating zone technique. *American Mineralogist*, 95(4), 449-455.
- Hickman, I. (2013). *Analog Electronics: Analog Circuitry Explained*. Newnes.
- Ismail, N., Kores, C. C., Guskus, D., & Pollnau, M. (2016). Fabry-Pérot resonator: spectral line shapes, generic and related Airy distributions, linewidths, finesses, and performance at low or frequency-dependent reflectivity. *Optics Express*, 24(15), 16366-16389.
- Krupke, W., & Zweiback, J. (2020). High efficiency gallium nitride diode pumped cw ruby laser. In W. A. Clarkson, & R. K. Shori (Ed.), *Solid State Lasers XXIX: Technology and Devices*, 11259.
- Kusuma, H. H., Astuti, B., & Ibrahim, Z. (2019). Absorption and emission properties of ruby (Cr:Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) single crystal. *Journal of Physics: Conference Series*, 1170(1).
- Luhs, W., & Wellegehausen, B. (2019). Diode pumped cw ruby laser. *OSA Continuum*, 2(1), 184-191.
- Luhs, W., Wellegehausen, B., Zuber, D., & Morgner, U. (2021). Maiman revisited: tuneable single mode cw ruby ring laser. *Journal of Physics Communications*, 5(8).
- Maiman, T. H. (1960). Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, 187(4736), 493-494.
- Maiman, T. H., Hoskins, R. H., D'Haenens, I. J., Asawa, C. K., & Evtuhov, V. (1961). Stimulated Optical Emission in Fluorescent Solids. II. Spectroscopy and Stimulated Emission in Ruby. *Physical Review Journals Archive*, 123(4).
- Pishchik, V., Lytvynov, L. A., & Dobrovinskaya, E. R. (2009). *Sapphire: Material, Manufacturing, Applications*. New York: Springer New York.
- Tooley, M. H. (2006). *Electronic circuits: fundamentals and applications*. Newnes.



Wei, Q., & Yang, Z.-Y. (2009). Theoretical investigations on the g factors of E (2E) state for Cr<sup>3+</sup> ions for Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> crystal. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 321(12), 1875-1877.



Click or tap here to enter text.

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).