A LÉZER REZONÁTOR KONTINUITÁSI EGYENLETE

Tari Balázs

SZEGED
2023

Tartalomjegyzék

1 Kivonat

Az olyan, általában tükrökből felépülő optikai rendszereket, amelyekben a fény oda-vissza haladva ugyanazon térrészen többször is áthaladhat, optikai rezonátoroknak nevezzük (Almási, et al., 2013). A folytonossági egyenlet szerint egy A felületű és l hosszúságú kontroll térfogatból kilépő és az oda belépő N_{foton} foton hozam megváltozása a rezonátoron belül az A felületen keresztül egyenlő a kontroll térfogat t idő alatti csökkenésével. Ez a foton megmaradását fejezi ki. A folytonossági egyenlet általános formája tartalmaz egy úgynevezett nyelőt vagy forrást attól függően, hogy milyen folyamatot vizsgálunk. A diszkutáció első felében definiálom a lehetséges forrást és nyelőt matematikai formában. Végezetül levezetem a lézer rezonátorra a folytonossági egyenletet.

Kulcsszavak: lézer rezonátor, kontinuitási egyenlet

2 A lézer rezonátor

A mérnöki gyakorlatban jól ismert, hogy az elektronikában az erősítőkből oly módon lehet oszcillátort kialakítani, hogy visszacsatolást hozunk létre a bemenet és kimenet között. Logikus lépés, hogy ha az optikai tartományban tudunk erősítést kapni megfelelő visszacsatolással oszcillátort is, ez az oszcillátor a lézer. A visszacsatolás legegyszerűbb módja a lenti ábrán látható módon valósítható meg, egy aszimmetrikus alakú erősítő közeget két párhuzamos síktükör közé helyezünk. Az olyan, általában tükrökből felépülő optikai rendszereket, amelyekben a fény oda-vissza haladva ugyanazon térrészen többször is áthaladhat, optikai rezonátoroknak nevezzük (Almási, et al., 2013).

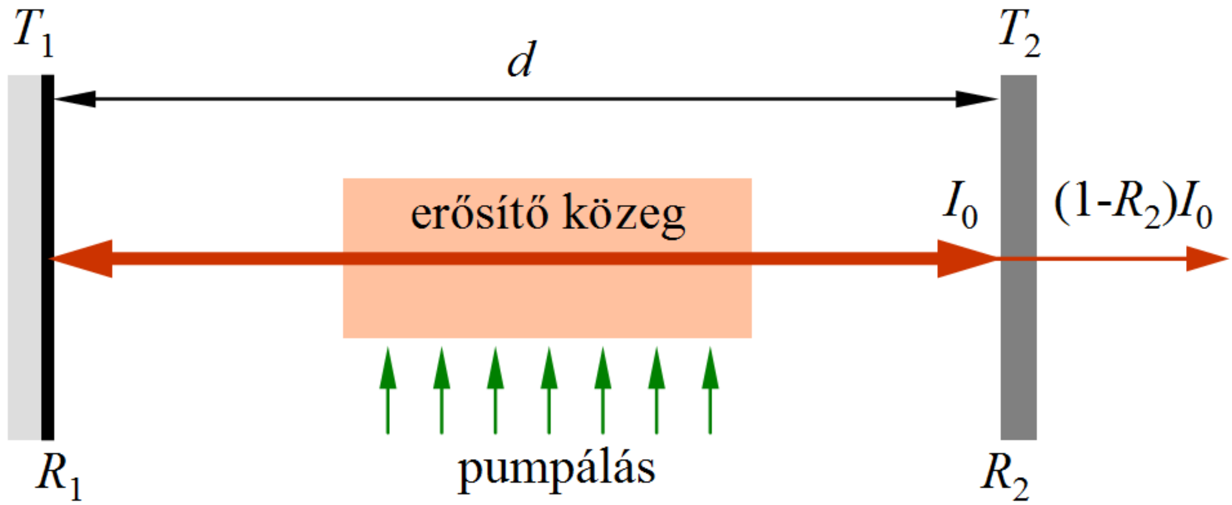

Figure 1 A legegyszerűbb lézer model (Almási, et al., 2013)l

3 A lézeres erősítés és az emissziós

Az anyagok fényelnyelésének gyakorlati jellemzésére alkalmas fogalom az emissziós hatáskeresztmetszet. Tegyük fel, hogy egy A foltméretű nyaláb a z tengely mentén egy n_2 és n_1 állapotsűrűségű közegen keresztül terjed egy δz vastagságú síkon. Általában a sugárzásnak véges spektrális szélessége van, melyet az I(ν,z) spektrális intenzitás és a ρ(ν) spektrális sűrűség írja le. A lézerátmenetet vegyük homogén kiszélesedetnek, hogy minden atom egyformán kölcsönhatásba lépjen a nyalábbal. Vegyük figyelembe a nyaláb erősítését, amikor áthalad a z és z + δz síkok között fekvő kis területen. Ahogy a sugár áthalad a közegen, az alsó lézerszinten lévő atomok általi abszorpció miatt energiát veszít, de a felső lézerszinten lévő atomok kényszerített emissziója révén energiát nyer.

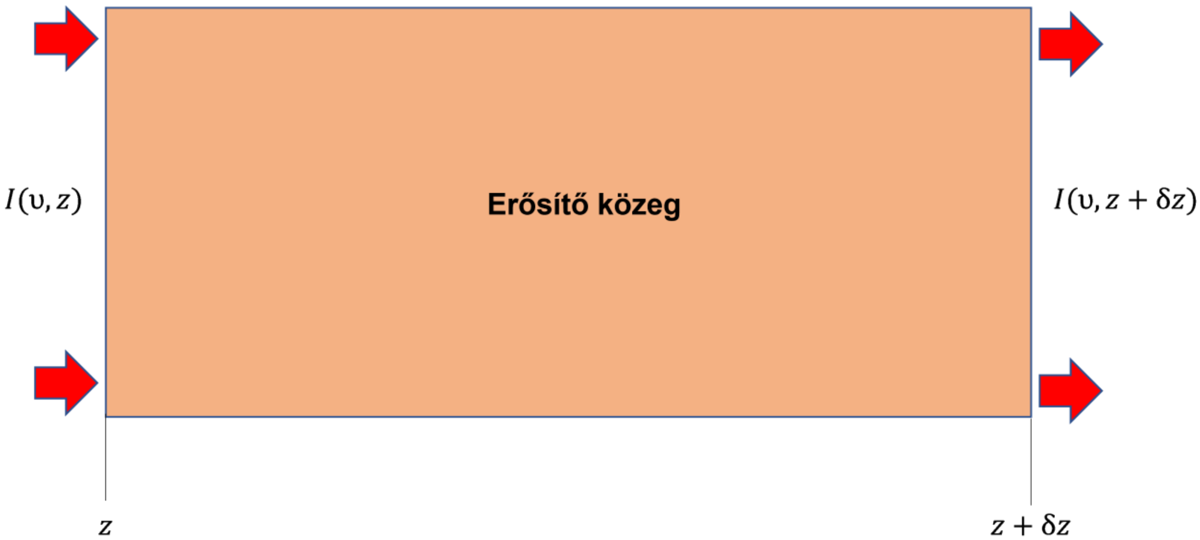

Figure 2 A jel erősítése

A ν és ν + δν közötti frekvenciájú fotonok kényszerített emissziója által az atomok átviteli sebessége a felső lézerszintről az alsó szintre:

$$(B_{21} \cdot n_2 - n_1 \cdot B_{12}) \cdot \gamma(\nu - \nu_0) \cdot \rho(\nu) \cdot \delta\nu \cdot A \cdot \delta z \qquad 1.)$$

Minden ilyen átvitel $h \cdot \nu$ energiát szabadít fel a nyalábra, és így ezen a frekvenciatartományon belül a nyaláb által nyert teljesítmény:

$$(B_{21} \cdot n_2 - n_1 \cdot B_{12}) \cdot \gamma(\nu - \nu_0) \cdot \rho(\nu) \cdot \delta\nu \cdot A \cdot \delta z \cdot h \cdot \nu \qquad 2.)$$

A vizsgált frekvencia intervallumra a nyaláb által a tartományba vitt teljesítmény $\mathrm{I}(\nu, z) \cdot \mathrm{A} \cdot \delta\nu$, így a nyaláb által nyert teljesítmény a következőképpen is felírható:

$$\left(\mathrm{I}(\nu, z + \delta z) - \mathrm{I}(\nu, z)\right) \cdot A \cdot \delta\nu \qquad 3.)$$

A 2.) és 3.) egyenleteket tegyük egyenlővé, majd a differenciaegyenletet differenciálegyenletté alakítsuk át. Végezetül használjuk fel az Einstein-féle koefficienseket:
az Einstein-féle koefficiensek közötti összefüggéseket:

$$g_1 \cdot B_{12} = B_{21} \cdot g_2 \qquad 4.)$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot \nu^3}{c^3} \qquad 5.)$$

$$\frac{d\mathrm{I}(\nu, z)}{dz} = \mathrm{I}(\nu, z) \cdot (B_{21} \cdot n_2 - B_{12} \cdot n_1) \cdot \gamma(\nu - \nu_0) \cdot \frac{h \cdot \nu}{c} \qquad 6.)$$

Ezek alapján a $\sigma_{21}(\nu - \nu_0)$ emissziós hatáskeresztmetszetet a következőképpen definiálhatjuk:

$$\sigma_{21}(\nu - \nu_0) = \frac{h \cdot \nu}{c} \cdot B_{21} \cdot \gamma(\nu - \nu_0) = A_{21} \cdot \gamma(\nu - \nu_0) \cdot \frac{c^2}{8 \cdot \pi \cdot \nu^2} = \frac{\gamma(\nu - \nu_0) \cdot c^2}{\tau_{21} \cdot 8 \cdot \pi \cdot \nu^2} \qquad 7.)$$

A 6.) egyenletet tovább egyszerűsíthetjük a $g(\nu - \nu_0)$ erősítési tényező bevezetésével. Az elfajulást beleszámolva:

$$g(\nu - \nu_0) = \left(n_2 - n_1 \cdot \frac{g_2}{g_1}\right) \cdot \sigma_{21}(\nu - \nu_0) \qquad 8.)$$

A $g(\nu - \nu_0)$ valójában függ még az intenzitástól is és kis intenzitásokra érvényes a jelenlegi formája. Tételezzük fel, hogy a populáció inverziója pozitív és független az intenzitástól vagy a pozíciótól. A 6.) egyenlet integrálásával láthatjuk, hogy a sugárzás intenzitása exponenciálisan növekszik a terjedési távolsággal:

$$\mathrm{I}(\nu, z) = \mathrm{I}(\nu, z = 0) \cdot e^{g(\nu-\nu_0)\cdot z} \qquad 9.)$$

A nyaláb energianyereségének oka egyértelmű: a kényszerített emisszió sebessége a felső szintről nagyobb, mint az alsó szintről történő abszorpció sebessége. Az erősítési tényezője fontos a lézerrendszer teljesítményének meghatározásában. A következő lépésként alakítsuk át a 6.) egyenletet N_{foton} fotonszámra. Az intenzitás definíció szerint egységnyi felületre eső egységnyi idő alatt kisugárzott energia, ahol az energia arányos a fotonok számával. Az arányossági tényező egy darab foton energiája. Mindezeket felhasználva az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\frac{dN_{foton}}{dz} = g \cdot N_{foton} \qquad 10.)$$

Az érvelést folytatva, a 10.) egyenlet bal oldalára alkalmazzuk a $dz = c \cdot dt$ transzformációt. Ekkor a 10.) egyenlet az alábbi formát veszi fel:

$$\frac{dN_{foton}}{dt} = c \cdot g \cdot N_{foton} \qquad 11.)$$

, ahol:

- c a fény közegbeli terjedési sebessége

Hossza levezetés során megmutatható, hogy a g erősítési intenzitásfüggő. Átírva fotonszámra:

$$\frac{dN_{foton}}{dt} = c \cdot \frac{g_0}{1 + \frac{N_{foton}}{N_{telítés}}} \cdot N_{foton} \qquad 12.)$$

Végezetül átírva a 11.) egyenletet mindkét oldalát ρ_{foton} fotonszám sűrűséggé:

$$\frac{d\rho_{foton}}{dt} = c \cdot \frac{g_0}{1 + \frac{\rho_{foton}}{\rho_{telítés}}} \cdot \rho_{foton} \qquad 13.)$$

, ahol:

- g_0 a kisjelű erősítési tényező
- $N_{telítés}$ a telítési fotonszám
- $\rho_{telítés}$ a telítési fotonszám sűrűség

4 A rezonátor foton élettartama

A rezonátor τ_{foton} foton élettartama a fotonok rezonátorban töltött idejét fejezi ki mielőtt kicsatolódnának. A τ_{foton} meghatározásához először is tekintsük ugyanazt a rezonátor modellt, ami küszöbfeltételénél fel lett használva. Legyen N_{foton} számú foton a t időpillanatban (azaz N_{foton}(t)) az R_1 tükörnél. Legyen $\tau_{körbejárás}$ az az idő, mely alatt a fotonok egyszer körül járják a rezonátort:

$$\tau_{körbejárás} = \frac{2 \cdot n \cdot l}{c_0} \qquad 14.)$$

, ahol:

- n az aktív közeg törésmutatója
- l a rezonátor hossza
- c_0 a fénysebesség vákuumban

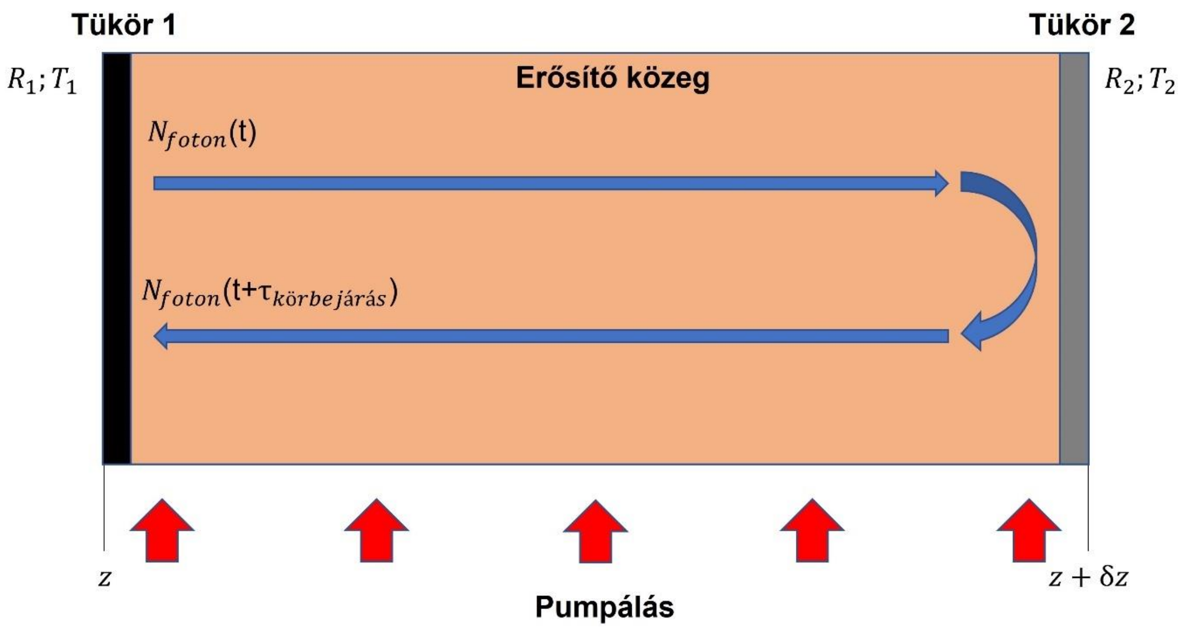

Figure 3 A rezonátor foton élettartama

Legyen $R_1 \cdot R_2 \cdot N_{foton}$ számú foton a t+$\tau_{körbejárás}$ időpillanatban (azaz N_{foton}(t+$\tau_{körbejárás}$)), melyek még megmaradtak egyszeri körbejárás után. Képezzük az N_p megváltozását az idővel kifejezve, azaz ΔN_{bal}=N_{foton}(t+$\tau_{körbejárás}$)-N_{foton} és legyen ez a majdani differenciaegyenlet bal oldala. Ez a változás veszteségként fogható fel, mivel $N_{foton} > N_{foton}$(t+$\tau_{körbejárás}$). Írjuk fel ezt a veszteséget az N_{foton} -vel kifejezve, azaz $\Delta N_{jobb} = R_1 \cdot R_2 \cdot N_{foton}$ - $N_{foton} = -(1 - R_1 \cdot R_2) \cdot N_{foton}$ és legyen ez a majdani differenciaegyenlet jobb oldala. Mivel a két differencia megegyezik, egyenlővé tehetjük őket, azaz $\Delta N = \Delta N_{bal} = \Delta N_{jobb}$. Osszuk le az egyenlet mindkét $\tau_{körbejárás}$-val, majd a differenciaegyenletet differenciálegyenletté alakítsuk át.

$$\frac{dN_{foton}}{dt} = -\frac{1 - R_1 \cdot R_2}{2 \cdot n \cdot l/c_0} \cdot N_{foton} \qquad 15.)$$

Vegyük észre, hogy az N_p arányossági tényezőjének reciproka lesz definíció szerint a rezonátor foton élettertama:

$$\tau_{foton} = \frac{2 \cdot n \cdot l/c_0}{1 - R_1 \cdot R_2} \qquad 16.)$$

Végezetül átírva a 15.) egyenletet mindkét oldalát ρ_{foton} fotonszám sűrűséggé:

$$\frac{d\rho_{foton}}{dt} = -\frac{\rho_{foton}}{\tau_{foton}} \qquad 17.)$$

5 A kontinuitási egyenlet

Legyen Δz hosszúságú, A felületű szakasza a csőnek. A csőszakaszban lévő fotonszám: $\rho_{foton} \cdot A \cdot \Delta z$.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta N_{foton}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{foton} \cdot \Delta V) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{foton} \cdot A \cdot \Delta z) = \rho_{foton}(z,t) \cdot c_z \cdot A - \rho_{foton}(z + \Delta z, t) \cdot c_z \cdot A + S \cdot A \cdot \Delta z \qquad 18.)$$

A c_z valójában c, ahogy c minden komponense. Az előbbi egyenletet átrendezve és $\lim\limits_{\Delta z \to 0}$ határátmenetet képezve:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\partial \rho_{foton}}{\partial t} = \lim_{\Delta z \to 0} - c \cdot \frac{\rho_{foton}(z + \Delta z, t) - \rho_{foton}(z,t)}{\Delta z} + S \to -c \cdot \frac{\partial \rho_{foton}}{\partial z} + S \qquad 19.)$$

, ahol S az egységnyi térfogatban, időegység alatt keletkező, vagy eltűnő fotonmennyiség. Jegyezzük meg, hogy ebben az esetben $\partial c/\partial z$=0, továbbá:

$$S = \left(c \cdot \frac{g_0}{1 + \frac{\rho_{foton}}{\rho_{telítés}}} - \frac{1}{\tau_{foton}} \right) \cdot \rho_{foton} \qquad 20.)$$

A következő lépésként vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor nincs aktív közeg, azaz csak vákuumot gerjesztjük. A folytonossági egyenlet szerint egy A felületű és l hosszúságú kontroll térfogatból kilépő és az oda belépő N_{foton} foton hozam megváltozása a rezonátoron belül az A felületen keresztül egyenlő a kontroll térfogat t idő alatti csökkenésével. Ez a foton megmaradását fejezi ki. A folytonossági egyenlet általános formája tartalmaz egy úgynevezett nyelőt vagy forrást attól függően, hogy milyen folyamatot vizsgálunk. Ha csak a 15.) egyenletet vesszük alapul, akkor a rezonátor előbb-utóbb kiürül. Vagyis a rezonátor vesztesége matematikailag megfogalmazva nyelőként funkcionál. Ha csak a 12.) egyenletet vesszük alapul, akkor a rezonátorban fotonok számának növelésének következtében egy idő után az aktív közeg kifakul. Vagyis a 2-es és 1-es szintek közötti kényszerített emisszió az aktív közeg jelenlétében matematikailag megfogalmazva forrásként funkcionál.

A spontán emisszióból származó fotonok hozzájárulását elhanyagolhatjuk. Ennek a két folyamatnak az eredője fogja adni azt, amit tapasztalunk:

$$\frac{\partial \rho_{foton}}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \rho_{foton}}{\partial z} = \left(c \cdot \frac{g_0}{1 + \frac{\rho_{foton}}{\rho_{telítés}}} - \frac{1}{\tau_{foton}} \right) \cdot \rho_{foton} \qquad 21.)$$

A ρ_{foton} fotonszám sűrűséget átalakítva intenzitássá:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial I}{\partial z} = \left(c \cdot \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_{telítés}}} - \frac{1}{\tau_{foton}} \right) \cdot I \qquad 22.)$$

6 Felhasznált irodalom

Almási, G., Erdélyi, M., Fülöp, A. J., Hebling, J., Horváth, Z., Kovács, P. A., . . . Smausz, T. K. (2013). *Lézerfizika - elektronikus tananyag*. Forrás: https://eta.bibl.u-szeged.hu/1711/2/lezerfizika/titan.physx.u-szeged.hu/_bubo/Lezerfizika/book.html