

Analog Synthese

Frederick Dom

23 mei 2008

Inhoudsopgave

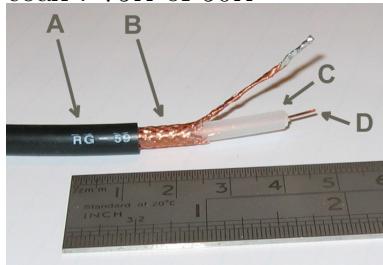
1 Transmissielijnen	2
1.1 Reflecties	3
1.2 In sinusoidaal regime	3
1.3 Oplossingenverzameling van de Diff. Vgl.	4
1.4 Contanten	5
1.5 Reflectiecoëfficient op de belasting	6
1.6 Voor een korte TL	8
1.7 Afgesloten TL $Z_L = Z_C$	8
1.8 Kortgesloten lijn	9
1.9 Open transmissielijn $Z'_L = \infty$	9
1.10 $\frac{\lambda}{2}$ lijn	10
1.11 $\frac{3\lambda}{2}$ lijn	10
2 Antennes	11
2.1 Open dipool	11
2.2 Ontvangst en gain	12
2.3 Staande golven, staande golfverhouding	13
2.4 Impedantietransformatie	14
2.5 Complexe impedantie	14
3 Z-transformatie	15
3.1 Voorbeeld $Z\{u(t)\}$	16
3.2 Voorbeeld $Z\{e^{at}\}$	17
3.3 Z-transformatie van het signaal	18
3.4 Voorbeeld $Z\{e^{-aT}u(t)\}$	20
3.5 Vermenigvuldiging met t	21
3.6 Vorm met $a^{\frac{t}{T}}$	21
4 IIR-filter	22
4.1 Inverse Z-transformatie	23
4.2 Opbouw van een digitaal verwerkend systeem	26
4.3 Implementatie van digitale filters	27
4.4 I.I.R.-filter implementeren	28
4.5 Directe programmering	28

4.6 Serieprogrammering	29
4.7 Standaardvorm1	30
4.8 Standaardvorm2	31
4.9 Hoe uitgaand van een filterspecificatie $H(s)$ te bepalen?	32
5 Butterworth	33
5.1 $H(s)$ voor de implementatie als analoog filter	34

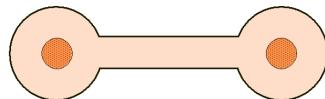
1 Transmissielijnen

Verschillende soorten :

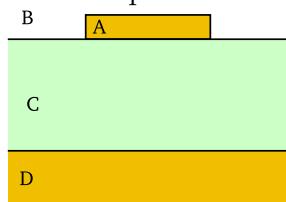
- coax : 75Ω of 50Ω



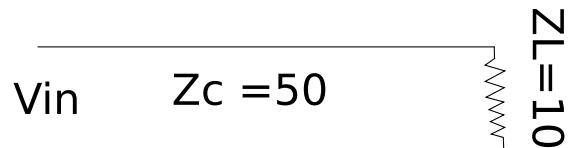
- lintkabel 300Ω



- microstrip



1.1 Reflecties



Voorwaartse reflectiecoëfficient

$$K_V = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \quad (1)$$

Of genormeerd

$$K_V = \frac{Z'_L - 1}{Z'_L + 1} \quad (2)$$

$$Z'_L = \frac{Z_L}{Z_C} \quad (3)$$

Teruggekaatste reflectiecoëfficient

$$K'_V = \frac{R_B - ZC}{R_B + ZC} \quad (4)$$

Spanningsverloop

$$V_{refl} = K_V \cdot V_f \quad (5)$$

$$I_{refl} = K_I \cdot I_f \quad (6)$$

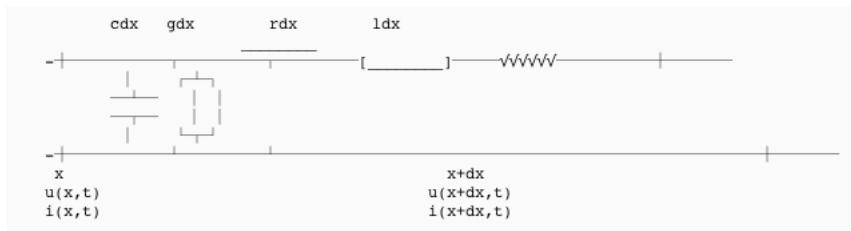
$$\text{met } K_I = -K_V \quad (7)$$

$$V_{reflbron} = K'_V \cdot K_V \cdot V_f \quad (8)$$

$$I_{reflbron} = K'_I \cdot K_I \cdot I_f \quad (9)$$

$V_{reflbron}$ en $I_{reflbron}$ zijn de gereflecteerde waarden aan de bron.

1.2 In sinusoidaal regime



$$z = r + j\omega l \quad (10)$$

$$y = g + j\omega c \quad (11)$$

Spanningsval over de TL.

$$\underbrace{v(x+dx) - v(x)}_{\text{spanning over de TL}} = i(x+dx) \cdot Z \cdot dx \quad (12)$$

Goede TL

$$i(x+dx) \approx i(x) \quad (13)$$

$$i(x+dx) - i(x) = -v(x) \cdot ydx \quad (14)$$

↓ Delen door dx

$$\frac{v(x+dx) - v(x)}{dx} = -i(x) \cdot z \quad (15)$$

$$\frac{i(x+dx) - i(x)}{dx} = -v(x) \cdot y \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -i \cdot z \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} = \frac{z \cdot \partial i}{\partial x} \quad (17)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -v \cdot z \rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial^2 x} = \frac{y \cdot \partial v}{\partial x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} = v \cdot z \cdot y \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial^2 x} = i \cdot z \cdot y \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} = \gamma^2 v \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial^2 x} = \gamma^2 i \quad (22)$$

met : γ = Propagatieconstante en D = operator

$$D^2 v = \gamma^2 v \rightarrow D = \pm \gamma \quad (23)$$

$$D^2 i = \gamma^2 i \rightarrow D = \pm \gamma \quad (24)$$

$$v(x) = A \cdot e^{\gamma x} + B \cdot e^{-\gamma x} \quad (25)$$

$$i(x) = A' \cdot e^{\gamma x} + B' \cdot e^{-\gamma x} \quad (26)$$

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = \sqrt{(r + j\omega l) \cdot (g + j\omega c)} \quad (27)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + jk \quad (28)$$

$$(29)$$

met k= golfgetal

1.3 Oplossingenverzameling van de Diff. Vgl.

$$\{e^{\alpha x}, e^{j k x}, e^{-\alpha x}, e^{-j k x}\} \quad (30)$$

Golf van (bron) naar (belasting) $e^{-\alpha x}$ gaat afnemen voor toenemende x-waarden = **heen-gaande golffront**.

Golf van de (*belasting*) naar (*bron*) $e^{\alpha x}$ gaat afnemen voor kleinere x-waarden = **gereflecteerd golffront**

1.4 Contanten

$$A', B' = ?$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -i \cdot z \quad (31)$$

$$\gamma A e^{\gamma x} - B \gamma e^{-\gamma x} = -z A' e^{\gamma x} - z B' e^{-\gamma x} \quad (32)$$

$$\gamma \cdot A = -z \cdot A' \rightarrow A' = \frac{-\sqrt{zy}A}{z} = -\sqrt{\frac{y}{z}} \cdot A \quad (33)$$

$$\gamma \cdot B = -z \cdot B' \rightarrow B' = \frac{\sqrt{zy}B}{z} = -\sqrt{\frac{y}{z}} \cdot B \quad (34)$$

$$v(x) = A \cdot e^{\gamma x} + B \cdot e^{-\gamma x} \quad (35)$$

$$i(x) = \sqrt{\frac{y}{z}}(A e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x}) \quad (36)$$

Als we een oneindig lange lijn beschouwen zijn er nooit reflecties.

Vin Zc = 50

ZL=infy

$$\frac{v(x)}{i(x)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{y}{z}}} = z(x) \quad (37)$$

$$z(x) = z_{in} = \sqrt{\frac{z}{y}} \quad (38)$$

$$z_c = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}} \rightarrow \text{Complex getal} \quad (39)$$

Verliesloze lijn :

$$r = 0, g = 0$$

$$z_c = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}} = \sqrt{\frac{l}{c}} \quad (40)$$

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)} \quad (41)$$

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \cdot l \cdot c} \quad (42)$$

$$\gamma = j\omega \sqrt{l \cdot c} \quad (43)$$

$$v_{\frac{m}{s}} = \frac{1}{\sqrt{lc}} \quad (44)$$

$$\gamma = \frac{j\omega}{v} = \frac{j2\pi f}{v} \quad (45)$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow \gamma = \frac{j2\pi}{\lambda} = jk \quad (46)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}} \quad (47)$$

μ = magnetische velden.

ϵ = elektrische velden.

$$v = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}}_{lichtsnelheidCo} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}} \quad (48)$$

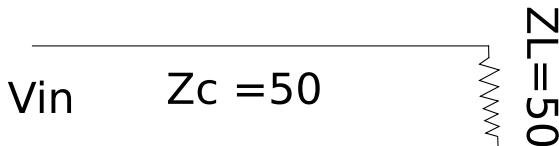
$$v = \frac{C_o}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}} \quad (49)$$

Formule's voor verliesloze kabels

$$v(x) = A e^{j k x} + B e^{-j k x} \quad (50)$$

$$i(x) = \frac{1}{2c} (-A e^{j k x} + B e^{-j k x}) \quad (51)$$

1.5 Reflectiecoëfficient op de belasting



$$Z'_L = \frac{Z_L}{Z_C} \quad (52)$$

$$v(L) = Z_L \cdot i(L) \quad (53)$$

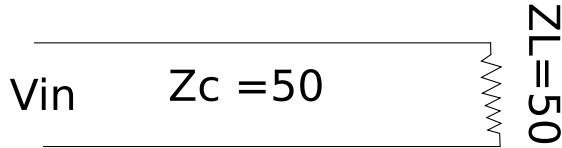
$$A \cdot e^{jkL} + B \cdot e^{-jkL} \quad (54)$$

$$= \frac{Z_L}{Z_C} (-Ae^{jkL} + Be^{-jkL}) \quad (55)$$

$$A \cdot e^{jkL} + Be^{-jkL} \quad (56)$$

$$= Z'_L (-A \cdot e^{jkL} + B \cdot e^{-jkL}) \quad (57)$$

$$A = Be^{-2jkL} \underbrace{\left(\frac{Z'_L - 1}{Z'_L + 1} \right)}_K \quad (58)$$



$$V(L) = I(Z) \cdot Z_L \quad (59)$$

$$Ae^{jkl} + Be^{-jkl} \quad (60)$$

$$= \frac{Z_L}{Z_C} (-Ae^{jkl} + Be^{-jkl}) \quad (61)$$

$$A^{jkl} + Be^{-jkl} = Z'_L (-Ae^{jkl} + Be^{-jkl}) \quad (62)$$

$$A = Be^{-2jkl} \left(\frac{Z'_L - 1}{Z'_L + 1} \right) \quad (63)$$

$$\frac{Ae^{jkl}}{Be^{-jkl}} = K \quad (64)$$

K ligt tussen -1 en +1 met 0 als ideaal geval (=geen reflectie)

$$K = \frac{Z' - 1}{Z' + 1} \quad (65)$$

$$\rightarrow Z' = Z'_L \quad (66)$$

↓ Veralgemeen

$$K(x) = \frac{Z'(x) - 1}{Z'(x) + 1} \quad (67)$$

$$v(x) = Ae^{jklx} + Be^{-jklx} \quad (68)$$

$K(x)$ = de reflectiecoëfficient op plaats x

$$K(x) = \frac{Ae^{jkx}}{Be^{-jkx}} \quad (69)$$

$$K(x) = e^{-2jkL} \cdot e^{+2jkx} \quad (70)$$

$$K(x) = Ke^{-2jk(L-x)} \quad (71)$$

$$z(x)' = \frac{1 + Ke^{-2jk(L-x)}}{1 - Ke^{-2jk(L-x)}} \quad (72)$$

↓ Na veel rekenen zonder fouten

$$Z(x)' = \frac{Z'_L + jt g(k(L-x))}{1 + Z'_L t g(k(L-x))} \quad (73)$$

Ingangsimpedantie → x=0

$$Z(0)' = \frac{Z'_L + jt g(kL)}{1 + Z'_L t g(kL)} \quad (74)$$

1.6 Voor een korte TL

$$k \cdot L = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad (75)$$

$$L \ll \lambda \quad (76)$$

$$\rightarrow t g(kL) = 0 \quad (77)$$

$$Z'_{in} = Z'_L \text{ of } Z_{in} = Z_L \quad (78)$$

= zoals in de klassieke elektriciteit / elektronica

1.7 Afgesloten TL $Z_L = Z_C$

aanpassing $Z'_L = 1$

$$Z'_{in} = \frac{1 + jt g(kL)}{1 + jt g(kL)} = 1 \quad (79)$$

$$Z_{in} = Z_L \quad (80)$$

1.8 Kortgesloten lijn

$$Z_L = 0 \quad (81)$$

$$Z'_L = 0 \quad (82)$$

$$Z'_{in} = jtg(kL) \quad (83)$$

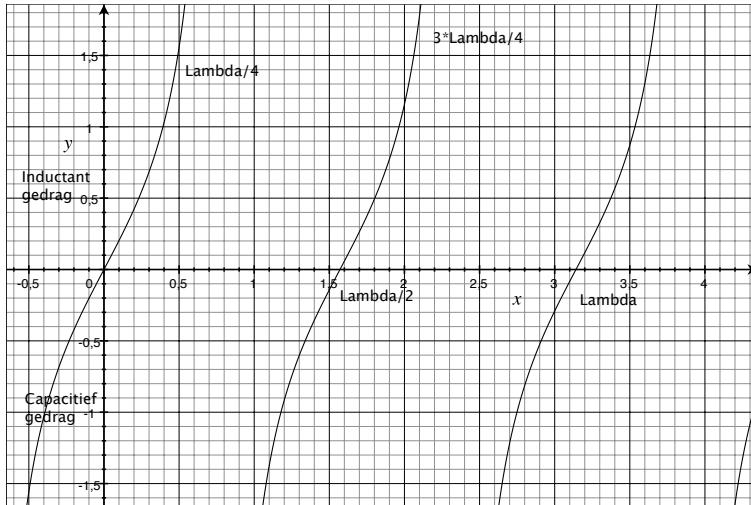
$$\rightarrow z_{in} = jZ_c tg(kL) \quad (84)$$

$$\rightarrow \text{Reactantie } X_{in} = \frac{Z_{in}}{j} \quad (85)$$

$$X_{in} = Z_c tg(kL) \quad (86)$$

We gaan voor verschillende lengtes, het gedrag van de reactantie bepalen.
 $L = \lambda$ (bijvoorbeeld)

$$k \cdot L = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \lambda \quad (87)$$

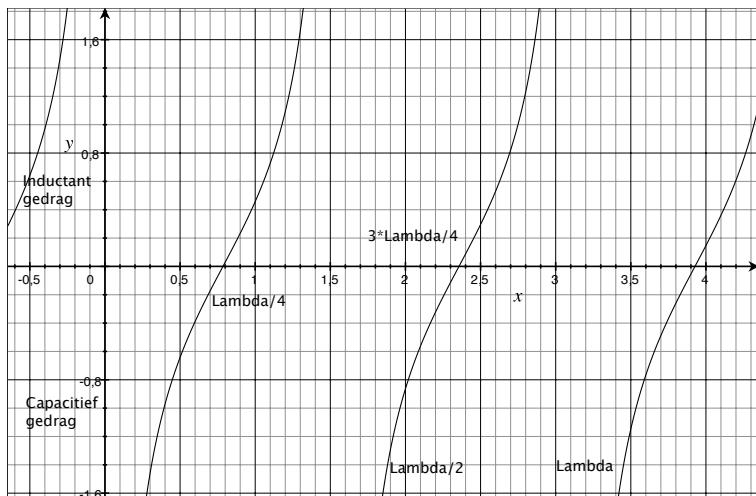


= Serieresonantie

1.9 Open transmissielijn $Z'_L = \infty$

$$Z'_{in} = \frac{1}{jtg(kL)} \quad (88)$$

$$X'_{in} = \frac{1}{-tg(kL)} \quad (89)$$



=Parallelresonantie

1.10 $\frac{\lambda}{2}$ lijn

$$Z'_{in} = Z'_L \quad (90)$$

$$Z_{in} = Z_L \quad (91)$$

1.11 $\frac{3*\lambda}{2}$ lijn

$$Z'_{in} = \frac{1}{Z'_L} \quad (92)$$

$$Z_{in} = \frac{Z_C}{\frac{Z_L}{Z_C}} \text{ denormeren, en } ZL' \text{ uitwerken} \quad (93)$$

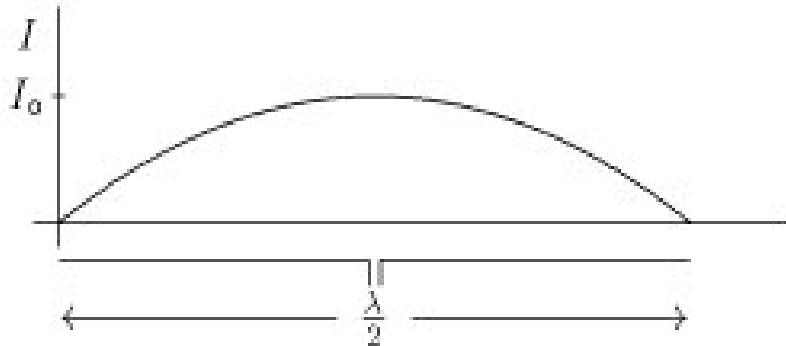
$$Z_{in} = \frac{Z_C^2}{Z_L} \quad (94)$$

$$Z'_L = \infty \quad (95)$$

$$\rightarrow Z_{in} = 0 \quad (96)$$

2 Antennes

2.1 Open dipool



Staandegolfpatroon voor de stroom.

$$P = U \cdot I \quad (97)$$

$$[W] = [V] * [A] \quad (98)$$

$$\vec{P} = \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (99)$$

Power density vector.

Nabije veld

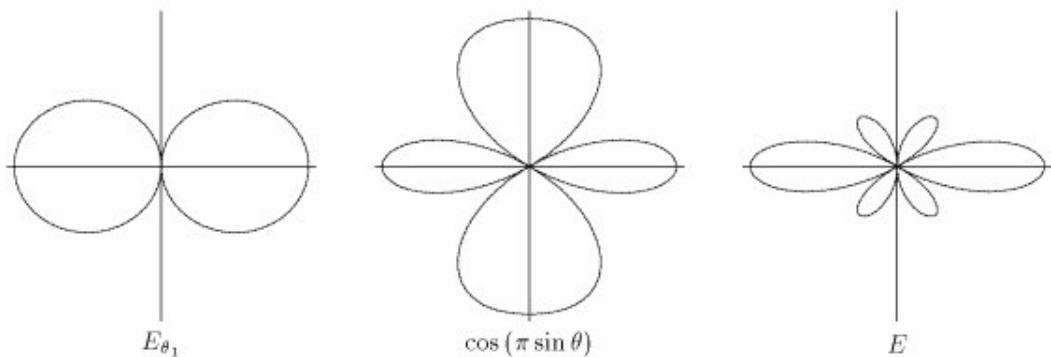
Ver veld r_{ff} = far field distance.

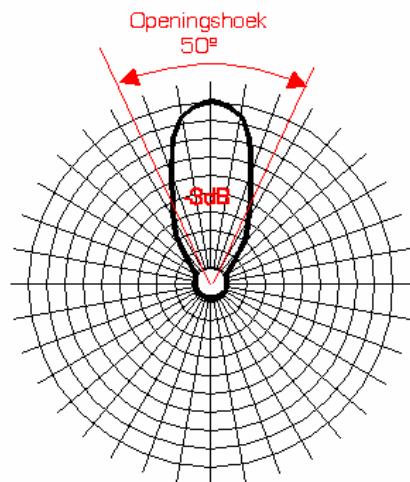
$= \frac{\lambda}{2\pi}$ → asymptoot.

→ praktisch het dubbel.

Omdat er veel tekeningen staan, kan je best je eigen notities nazien.

Omnidirectionele stralingskarakteristiek.





En een gerichte antenne met een "gain" naar 1 richting

2.2 Ontvangst en gain

W_R = ontvangstvermogen door antenne

G_T = gain door de transmitter

G_R = gain door de ontvanger

$$W_R = P_R \cdot A_{eff} \quad (100)$$

$$A_{eff} = \frac{\lambda^2 G_R}{4\pi} \quad (101)$$

$$W_R = \frac{W_T \cdot G_T \cdot \lambda^2 G_R}{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 4 \cdot \pi} \quad (102)$$

$$W_R = \frac{W_T \cdot G_T \cdot \lambda^2 \cdot G_R}{(4 \cdot \pi \cdot r)^2} \quad (103)$$

G_T geeft vermogenswinst maar vermindert de spreiding.

$$W_R = \frac{V_{tuner}^2}{R_{tuner}} \quad (104)$$

2.3 Staande golven, staande golfverhouding

$$v(x) = B \cdot |1 + K(x)| \quad (105)$$

Kortsluiting $Z'_L = 0$

$$K(x) = -e^{-2jk(L-x)} \cdot K \quad (106)$$

$$\text{met :} K = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

$$|1 + K(x)| = |1 - e^{-2jk(L-x)}| \downarrow \text{Euler}$$

$$|1 - \cos(2k(L-x)) + j\sin(2k(L-x))| \quad (107)$$

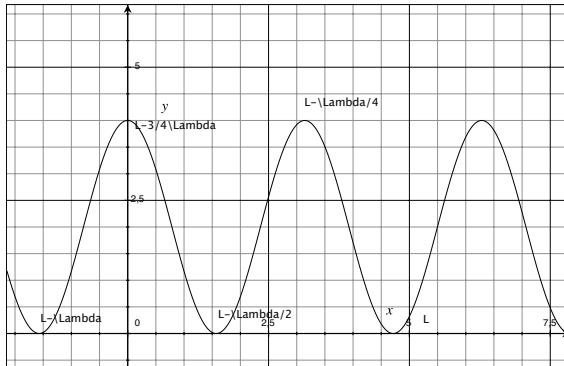
$$\sqrt{1 + \underbrace{\cos^2(2k(L-x)) + \sin^2(2k(L-x))}_{=1} - 2\cos(2k(L-x))} \quad (108)$$

$$\min = \cos(2k(L-x)) = +1 \quad (109)$$

$$2k(L-x_{\min}) = 2\pi n \quad (110)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (111)$$

$$x_{\max} = L - \frac{(1+2n) \cdot \lambda}{4} \quad (112)$$



Als echte transmissielijn, heeft dit weinig zin.

Open Lijn

$$Z'_L = \infty \quad (113)$$

$$K = +1 \quad (114)$$

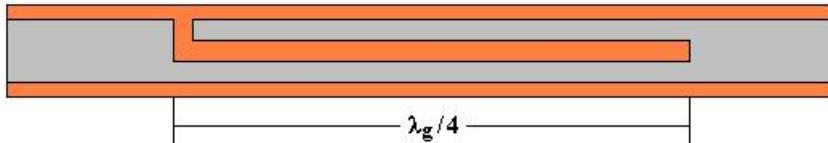
$$K(x) = 1 + e^{-2jk(L-x)} \quad (115)$$

$$v(x) = |1 + K(x)| \quad (116)$$

Identiek probleem, om de frequenties waar de spanning 0 is heeft het geen zin om via een antenne vermogen te willen uitstralen.

Enkele toepassingen

- Resonatoren
- Maken van filters



signaal voor $\frac{\lambda}{4}$ is een kortsluiting voor f_0 .
en $f_0 = \lambda$. → een $\frac{\lambda}{4}$ lijn is een filter voor $\lambda, 3\lambda, 5\lambda, \dots$

2.4 Impedantietransformatie

We hebben een $Z_L = 100\Omega$, maar we willen een Z_L van 50Ω .

We kunnen een weerstand parallel zetten, maar stel dat we met een vermogen van 200KW zitten, is dit niet mogelijk, dan moeten we met een $\frac{\lambda}{4}$ lijn de impedantie aanpassen.

$$Z_{in} = \frac{Z_C^2}{Z_L} \quad (117)$$

$$Z_{in} = 50\Omega \quad (118)$$

$$Z_L = 100\Omega \quad (119)$$

$$Z_C = \sqrt{Z_{in} \cdot Z_L} \quad (120)$$

Als we een transmissielijn van $\approx 70\Omega$ hebben dan zou het opgelost zijn;
helaas bestaat zo een lijn niet.

2.5 Complexe impedantie

$$Z_L = 50 + j50 \quad (121)$$

$$Z_C = \sqrt{50(50 + j50)} \quad (122)$$

→ complex getal

$$Z_C = u + jv \quad (123)$$

$$= \sqrt{\frac{r + j\omega l}{y + j\omega c}} \quad (124)$$

→ moeilijk om te maken met $u+jv$

$$= \sqrt{2500 + \underbrace{j2500}_{\neq verwaarloosbaar}} \quad (125)$$

$$Z_C = \sqrt{\frac{l}{c}} \quad (126)$$

Oplossing : Transmissielijn ertussen zetten met een andere Z_C
 We kunnen dit berekenen, maar veel simpeler is een **smith-chart**

3 Z-transformatie

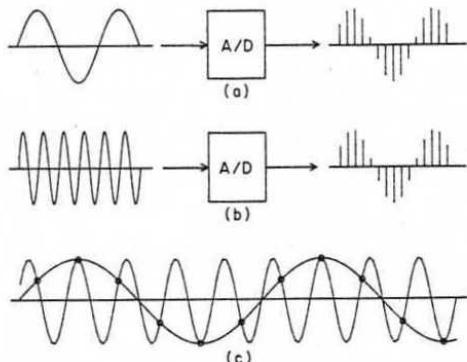
Uit Wikipedia, de vrije encyclopedie Ga naar: navigatie, zoeken

De Z-transformatie is een wiskundige techniek die wordt gebruikt voor het oplossen van differentievergelijkingen. Dit zijn vergelijkingen die met name aan de orde zijn bij tijd-discrete processen. De Z-transformatie is het discrete analogon van de Laplace-transformatie voor continue functies.

= bemonsteren (samenstellen)

$f(t)$ = signaal

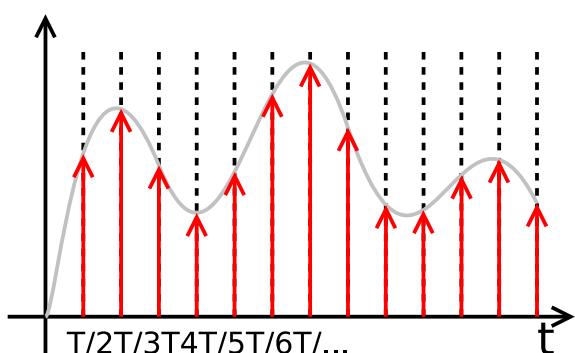
$f_s(t)$ = gesampled signaal



Schakelfrequentie = Samplefrequentie = $\frac{1}{T}$

T = periode van het schakelen.

“impuls sampling” → dirac reeks



Voor $f_s(t)$

$$= f(0) \cdot \delta(t) + f(T) \cdot \delta(T) + f(2T) \cdot \delta(2T) + \dots \quad (127)$$

$$f_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT) \quad (128)$$

→ transformeren naar s-domein

$$F(s) = L\{f_s(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nsT} \quad (129)$$

$$F(s) = f(0) + f(T)e^{-sT} + f(2T)e^{-2sT} + \dots \quad (130)$$

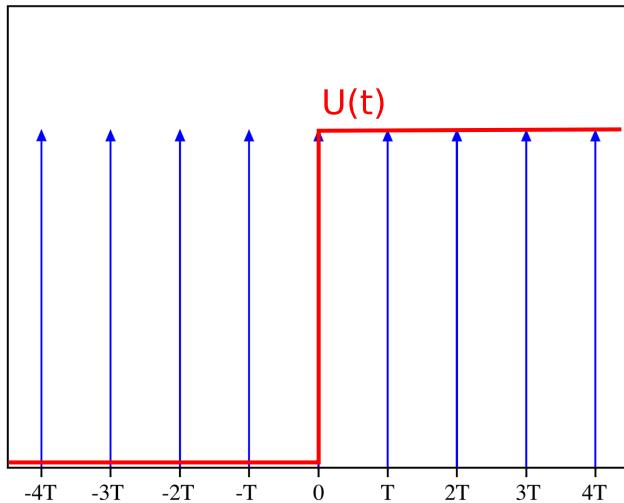
$$e^{st} = z \quad (131)$$

$$F(s) \text{ to } F(z) \quad (132)$$

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \quad (133)$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (134)$$

3.1 Voorbeeld $Z\{u(t)\}$



$$F(z) = Z\{u(t)\} \quad (135)$$

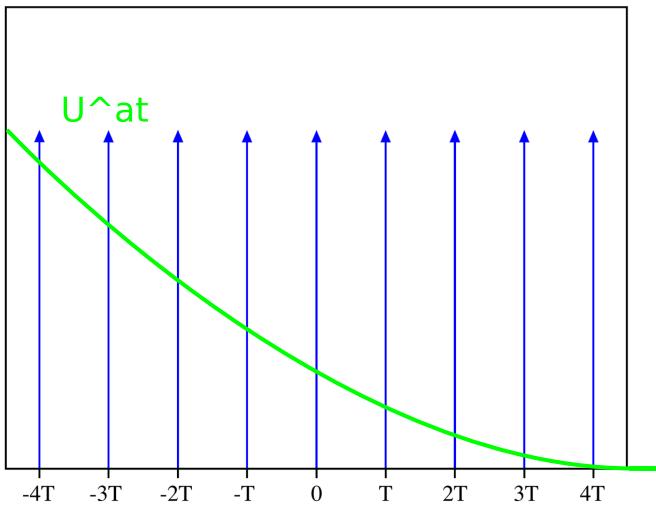
$$= 1 + 1 \cdot Z^{-1} + 1 \cdot Z^{-2} + 1 \cdot Z^{-3} + \dots \quad (136)$$

→ reeks

$$Z\{u(t)\} = \frac{1}{1 - Z^{-1}} \quad (137)$$

$$= \frac{Z}{Z - 1} \quad (138)$$

3.2 Voorbeeld $Z\{e^{at}\}$



$$F(z) = Z\{e^{-at}\} \quad (139)$$

$$= \underbrace{1 + e^{-aT}Z^{-1} + e^{2-aT}Z^{-2} + e^{-3aT}Z^{-3} + \dots}_{\text{zelfdesoortreeks}} \quad (140)$$

$$Z\{e^{-at}\} = \frac{1}{1 - e^{-at} \cdot Z^{-1}} \quad (141)$$

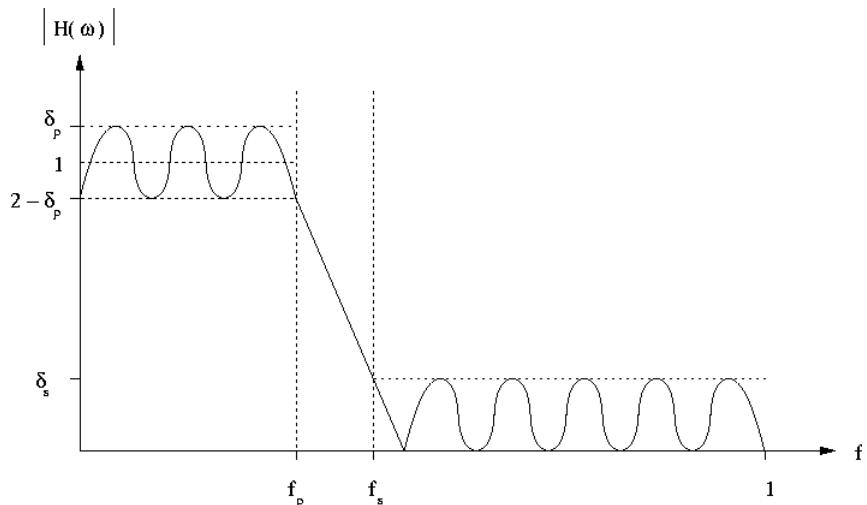
$$= \frac{Z}{Z - e^{-at}} \cdot Z^{-n} \quad (142)$$

$$\rightarrow e^{-n \cdot a \cdot t} \cdot Z^{-n} \quad (143)$$

Stel we hebben een moeilijker probleem :

$$f(t) \rightarrow F(s) \quad (144)$$

= \sum Partieelbreuken (eenvoudige)
omzetting \rightarrow Z-domein



Een filterspecificatie
omzetten $H(s) = \text{filtertransvertfunctie}$

$$= \frac{v_i(s)}{v_o(s)} \quad (145)$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (146)$$

$$= \frac{1}{s^2 + s} \quad (147)$$

$$= \underbrace{\frac{A}{s}}_{\text{stap}} + \underbrace{\frac{B}{s+1}}_{e-macht} \quad (148)$$

kunnen omvormen naar het z-domein.

3.3 Z-transformatie van het signaal

Moeilijke signalen/transfertfuncties → Partieelbreuken

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (149)$$

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \quad (150)$$

$$= A(s+1) + Bs = 1 \quad (151)$$

Dit is den Van Troyen truuck, eigenlijk is die simpeler dan die van den Samblanx.
Nu gaan we deze uitrekenen :

- $A(s+1) + Bs = 1$
- $s = 0 \rightarrow A = 1$

- $s = -1 \rightarrow B = -1$

$$F(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{stap}} - \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\text{e-macht}} \quad (152)$$

$$F(z) = \frac{Z}{Z+1} - \frac{Z}{Z \cdot e^{-T}} \quad (153)$$

$$\frac{Z(Z \cdot e^{-T} - Z(Z+1))}{(Z+1)(Z - e^{-T})} \quad (154)$$

$$\frac{1}{1 - Z^{-1}} - \frac{1}{1 - Z^{-1} \cdot e^{-T}} \quad (155)$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (156)$$

$$\rightarrow L\{cos(\omega t)\} \quad (157)$$

$$= \frac{1}{s + j\omega} + \frac{B}{s - j\omega} \quad (158)$$

$$\frac{A(s - j\omega) + B(s + j\omega)}{N} = \frac{s}{N} \quad (159)$$

$$= A(s - j\omega) + B(s + j\omega) = s \quad (160)$$

$$s = j\omega \quad (161)$$

$$B^2 j\omega = j\omega \quad (162)$$

$$\rightarrow B = \frac{1}{2} \quad (163)$$

$$*s = -j\omega \quad (164)$$

$$A(-2j\omega) = -j\omega \quad (165)$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2} \quad (166)$$

$$\frac{0,5}{s + j\omega} + \frac{0,5}{s - j\omega} \quad (167)$$

$$F(z) = \frac{0,5}{1 - Z^{-1} \cdot e^{-j\omega T}} + \frac{0,5}{1 - Z^{-1} \cdot e^{+j\omega T}} \quad (168)$$

$$= \frac{0,5(1 - Z^{-1} \cdot e^{j\omega T}) + 0,5(1 - Z^{-1} \cdot e^{-j\omega T})}{(1 - Z^{-1} \cdot e^{-j\omega T})(1 - Z^{-1} \cdot e^{+j\omega T})} \quad (169)$$

$$cos(\omega t) = \frac{e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (170)$$

$$= 0,5e^{j\omega t} + 0,5e^{-j\omega t} \quad (171)$$

a) Vermenigvuldiging

$$Z\{e^{-at}f(t)\} = F(z \cdot e^{+aT}) \quad (172)$$

$$L\{e^{-at}f(t)\} = F(s + a) \quad (173)$$

$$L\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s + a} \quad (174)$$

Reeks :

$$= f(0) + e^{-aT}f(T)Z^{-1} + e^{-2aT}f(2T)Z^{-2} + e^{-3aT}f(3T)Z^{-3} + \dots \quad (175)$$

$$= f(0)(2e^{aT})^0 + f(T)(Ze^{aT})^{-1} + f(2T)(Ze^{aT})^{-2} + f(3T)(Ze^{aT})^{-3} + \dots \quad (176)$$

$$= F(Ze^{aT}) \quad (177)$$

3.4 Voorbeeld $Z\{e^{-aT}u(t)\}$

$$u(t) \xrightarrow{\text{naar het } Z\text{-domein}} \frac{Z}{Z - 1} \quad (178)$$

$$= \frac{Ze^{aT}}{Ze^{aT} - 1} \quad (179)$$

$$= \frac{1}{1 - Z^{-1}e^{-aT}} \quad (180)$$

Verschuiving over bedrag nT

$$f(t - nT) \quad (181)$$

$$Z\{f(t - nT)\} \quad (182)$$

$$= f(0)Z^{-n} + f(T)Z^{-(n+1)} + f(2T)Z^{-(n+2)} \dots \quad (183)$$

$$= Z^{-n} \underbrace{[f(0) + f(T)Z^{-1} + f(2T)Z^{-2} + \dots]}_{F(Z)} \quad (184)$$

$$Z^{-n} \cdot F(z) \quad (185)$$

Fourier data aquisitie

$$f(t - \tau) = e^{-j\omega\tau}F(j\omega) \quad (186)$$

= Verschuivingseigenschap tijdsdomein.

T = sampleperiode

$T = \frac{1}{f_s} \rightarrow f_s$ = samplefrequentie

Discrete of gesampled signaal.

→ dezelfde eigenschappen blijven geldig

alle eigenschappen Z-transformeerden blijven.

Transfertfunctie

analoog : $\rightarrow H_s$

$$H_s = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0} \quad (187)$$

$$H_s = \frac{v_o}{v_i} \quad (188)$$

$$= \frac{1}{RCs + 1} \quad (189)$$

Z^{-1} blokken \rightarrow tijdsvertrangende blokken

digitaal: $\rightarrow H_z$

$$= \frac{a_n Z^{-n} + a_{n-1} Z^{-n+1} + \dots + a_0}{\text{veelterm in } Z} \quad (190)$$

3.5 Vermenigvuldiging met t

Eigenlijk hetzelfde zoals bij Laplace.

$$Z\{-tf(t)\} = -ZT \frac{dF(Z)}{dZ} \quad (191)$$

$$= -ZT \frac{d}{dZ} [f(0) + f(T)Z^{-1} + f(2T)Z^{-2} + f(3T)Z^{-3} + \dots] \quad (192)$$

\downarrow afleiden

$$= -ZT[0 + (-1)f(T)Z^{-2} + (-2)f(2T)Z^{-3} + \dots] \quad (193)$$

$$= [0 + f(T) \cdot T \cdot Z^{-1} + f(2T) \cdot 2T \cdot Z^{-2} + f(3T) \cdot 3T \cdot Z^{-3} + \dots] \quad (194)$$

$$Z\{tf(t)\} \quad (195)$$

3.6 Vorm met $a^{\frac{t}{T}}$

$$Z\{a^{\frac{t}{T}} f(t)\} \quad (196)$$

$$= a^0 f(0) + a^1 f(T)Z^{-1} + a^2 f(2T)Z^{-2} + \dots \quad (197)$$

$$= f(0) + f(T)(\frac{Z}{a})^{-1} + f(2T)(\frac{Z}{a})^{-2} + \dots \quad (198)$$

$$= F(\frac{Z}{a}) \quad (199)$$

4 IIR-filter

IIR-filters = infinity impulse response.

X_1 = hulpvariabele

$$\frac{uit}{in} = \frac{T(Z) \cdot X_1}{N(Z) \cdot X_1} \quad (200)$$

↓ hier gaf 'm toe da 't ni strikt wiskundig klopt.

$$uit = T(Z)X_1 \quad (201)$$

$$= X_1(a_n Z^{-n} + a_{n-1} \cdot Z^{-n+1} + \dots + a_1 Z^{-1} + a_0) \quad (202)$$

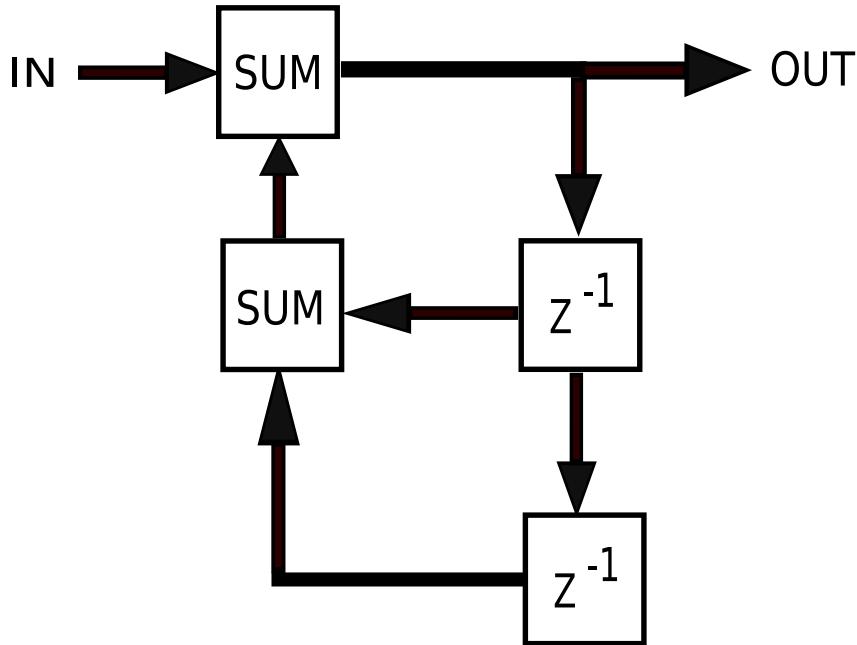
$$in = N(Z)X_1 \quad (203)$$

$$= X_1(b_n Z^{-n} + b_{n-1} \cdot Z^{-n+1} + \dots + b_1 Z^{-1} + b_0) \quad (204)$$

$$\rightarrow = b_n Z^{-n} X_1 + b_{n-1} Z^{-n+1} X_1 + \dots + b_1 Z^{-1} X_1 + b_0 X_1 \quad (205)$$

$$X_1 = \frac{in - b_n Z^{-n} X_1 - b_{n-1} Z^{-n+1} X_1 - \dots - b_1 Z^{-1} X_1}{b_0} \quad (206)$$

→ implementeren



$$uit = a_n Z^{-n} X_1 + a_{n-1} Z^{-n+1} X_1 + \dots + a_1 Z^{-1} X_1 + a_0 X_1 \quad (207)$$

Tijdsvertraging over T.

IIR = Infinite impulse response

FIR = Finite impulse response

→ geen feedback

4.1 Inverse Z-transformatie

$$F(Z) = \frac{(1 - e^{-T})^Z}{(Z - 1)(Z - e^{-T})} \quad (208)$$

$\frac{Z}{Z - 1} \rightarrow$ afkomstig uit $u(t)$

$\frac{Z}{Z - e^{-T}} \rightarrow$ afkomstig van e-macht

$$\left[\frac{1 - e^{-T}}{(Z - 1)(Z - e^{-T})} \right] \cdot Z \quad (209)$$

↓ partieelbreukensplitsing

$$\frac{A}{Z - 1} + \frac{B}{Z - e^{-T}} \quad (210)$$

$$A(Z - e^{-T} + B(Z - 1) = 1 - e^{-T}) \quad (211)$$

$$Z = 1 \rightarrow A(e^{-e-T} = 1 - e^{-T}) \quad (212)$$

$$\rightarrow A = 1 \quad (213)$$

$$Z = e^{-T} \rightarrow B(e^{-T} - 1) = 1 - e^{-T} \quad (214)$$

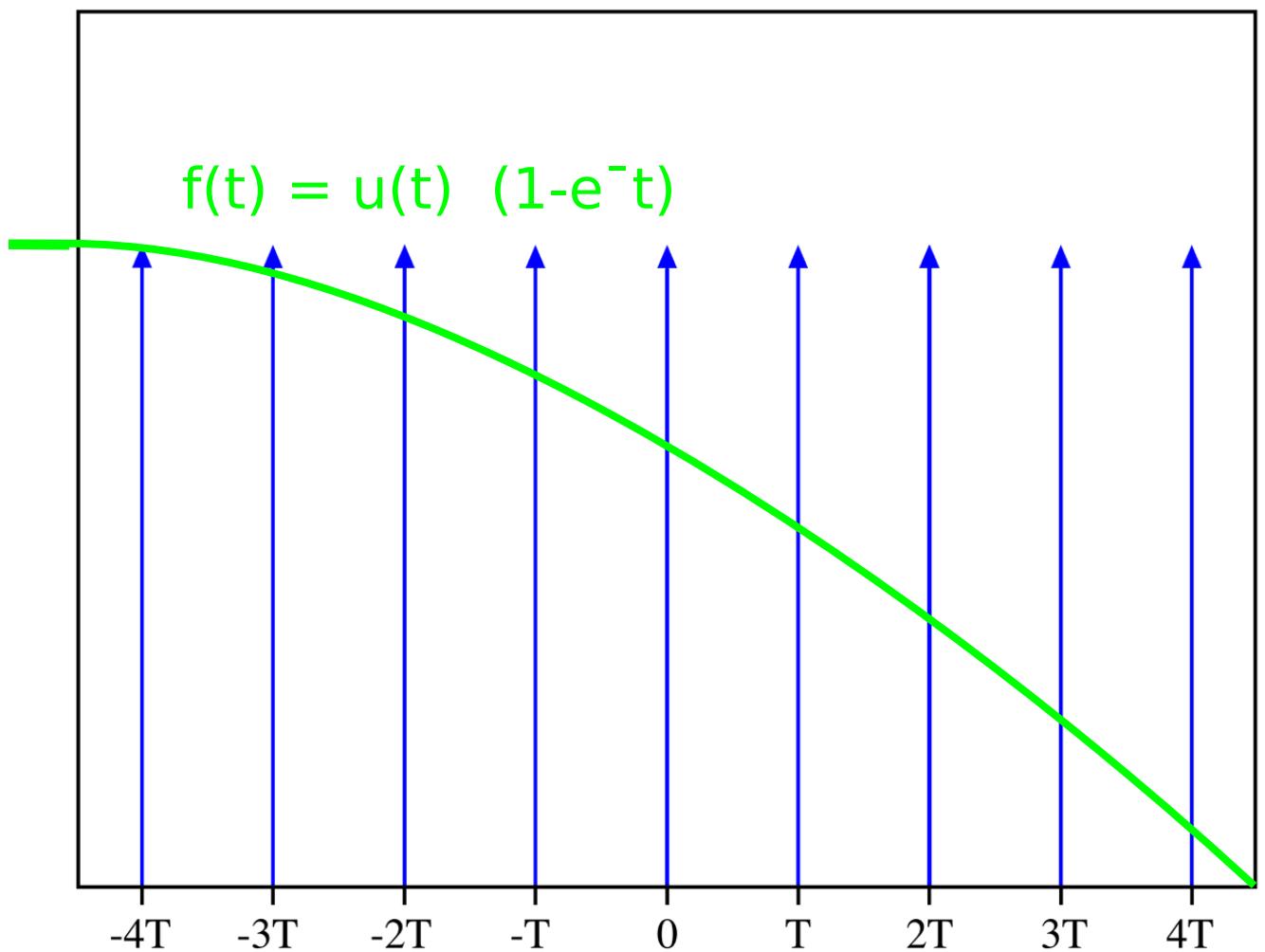
$$\rightarrow B = -1 \quad (215)$$

$\mathbb{Z} \neq$ de ruimte van gehele getallen

$$\mathbb{Z}[zwart] = \frac{1 \cdot \mathbb{Z}}{Z - 1} - \frac{1 \cdot \mathbb{Z}}{Z - e^{-T}} \quad (216)$$

$$F(Z) = \underbrace{\frac{Z}{Z - 1}}_{u(t)} - \underbrace{\frac{Z}{Z - e^{-T}}}_{e^{-t}u(t)} \quad (217)$$

$$f(t) = u(t)[1 - e^{-t}] \quad (218)$$

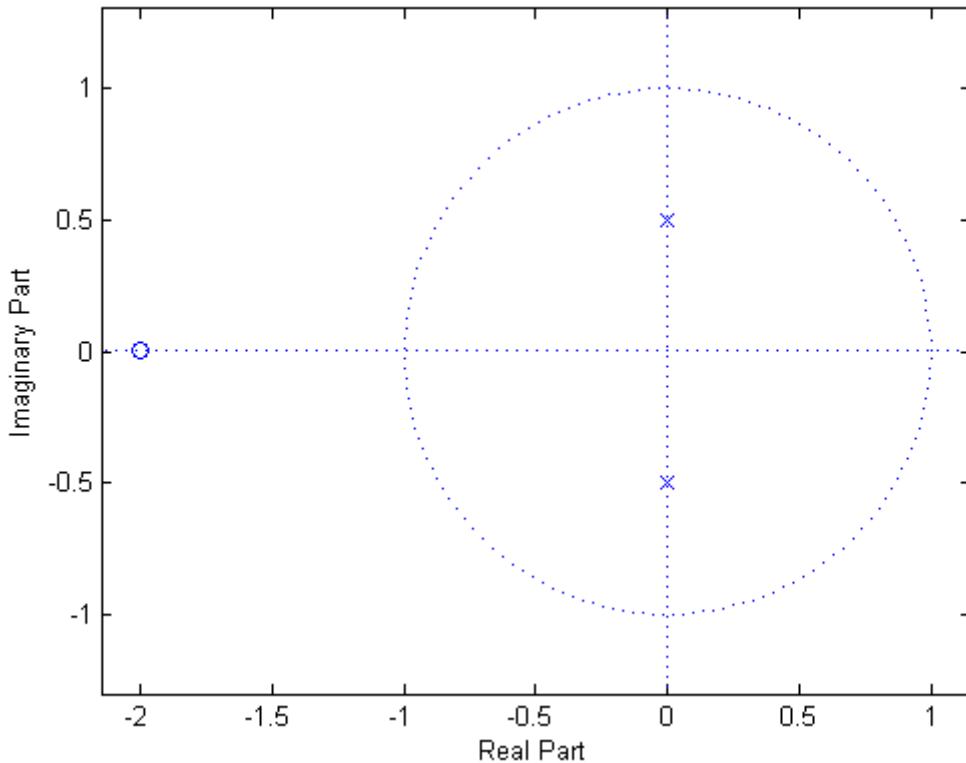


$\mathbb{Z}\{f(t)\} \rightarrow$ Laplace transformatie

$$\{f_s(t)\}|_{e^{st}=Z}$$

(219)

Stabiliteit S-domein $h(t) \rightarrow H(s)$
 polen onderzoeken \rightarrow waar?



Rechterhalfvlak is onstabiel

Z-domein?

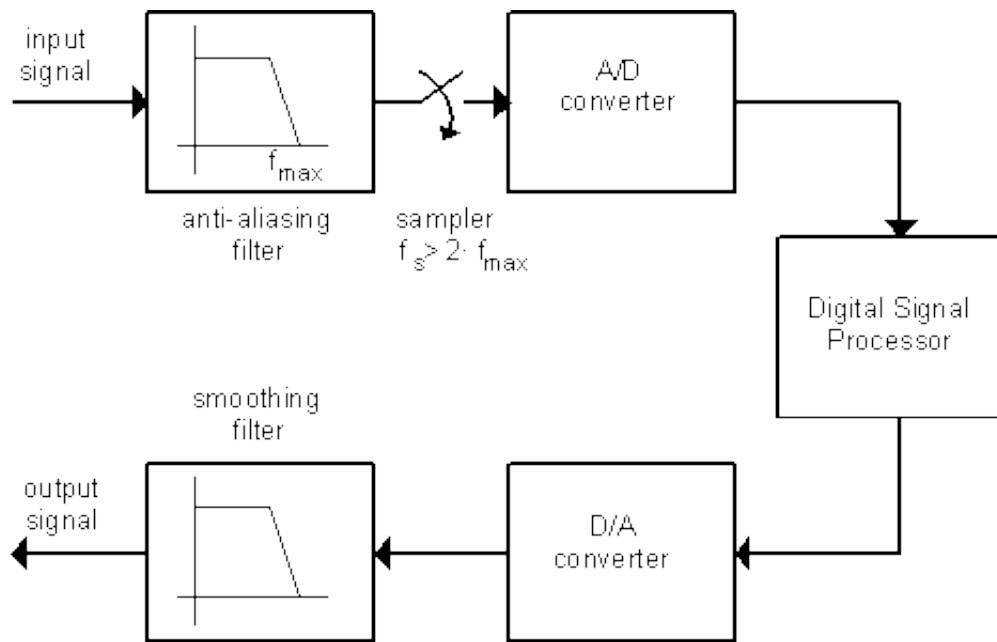
$$Z = e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)T} \quad (220)$$

$$|Z| = |e^{(\sigma+j\omega)T}| = |e^{\sigma T} \cdot \underbrace{e^{j\omega T}}_{grootte=1}| \quad (221)$$

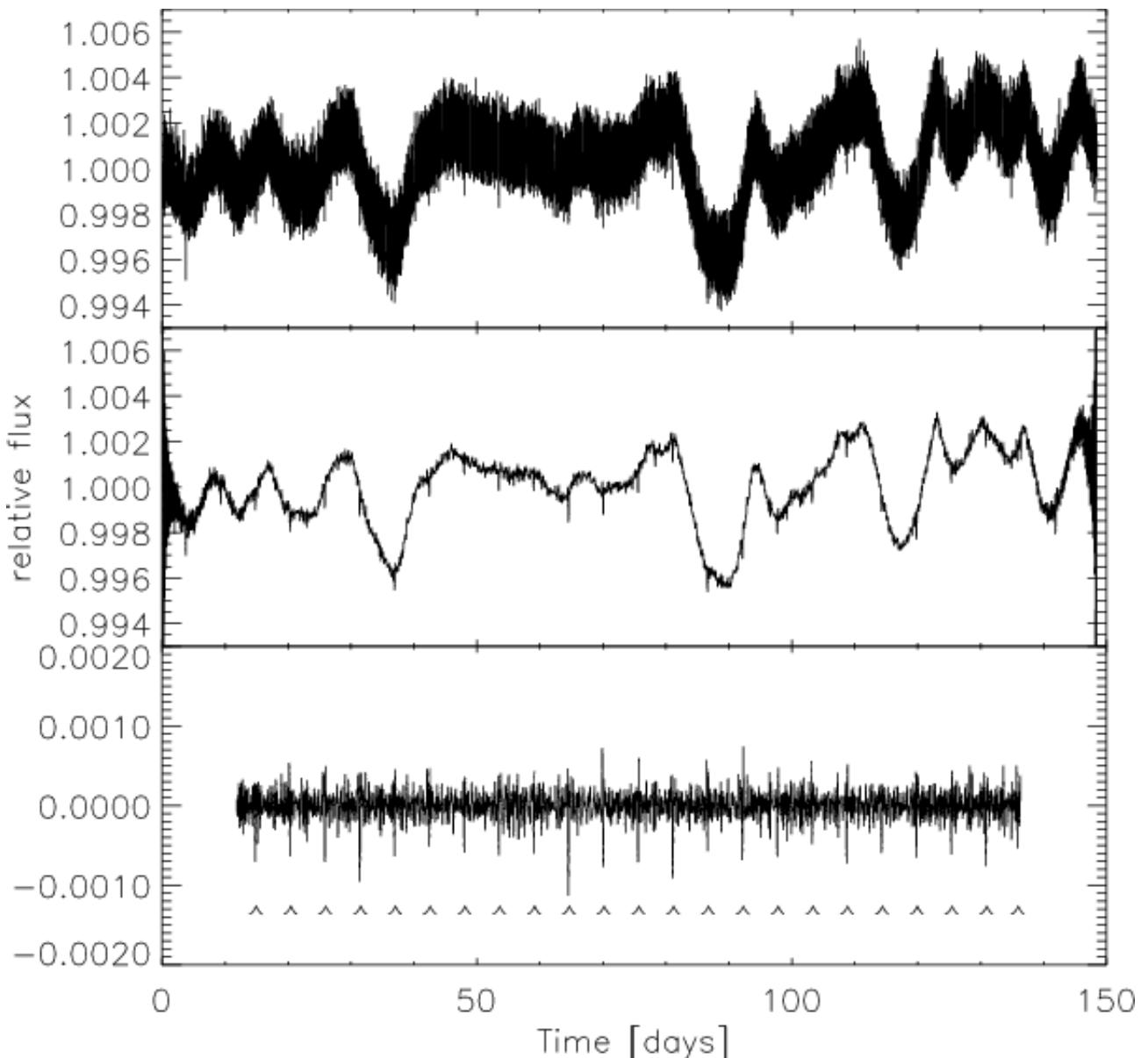
$$|Z| = e^{\sigma T} \rightarrow \text{Grens stabiel} \quad (222)$$

1. $\sigma = 0$ grens
2. $\sigma < 0$ stabiel
3. $\sigma > 0$ onstabiel

4.2 Opbouw van een digitaal verwerkend systeem



Door hoogfrequente jitter zie beleke hieronder krijg je een probleem in het frequentiedomein.



De jitter is het Zwarte signaal. In het frequentiedomein is normaal een put rond $\frac{f_s}{2}$, maar door de jitter kan die put opgevuld worden door de helling die minder stijl wordt.

Oplossing : Anti Aliasing Filter.

Er staan hier nog meer figuurkes, maar da kost te veel tijd.

4.3 Implementatie van digitale filters

Z^{-1} -blokken (tijdsvertragende blokken).

→ schuifregister voor analoge signalen.

minder Z^{-1} -blokken → goedkoper.

4.4 I.I.R.-filter implementeren

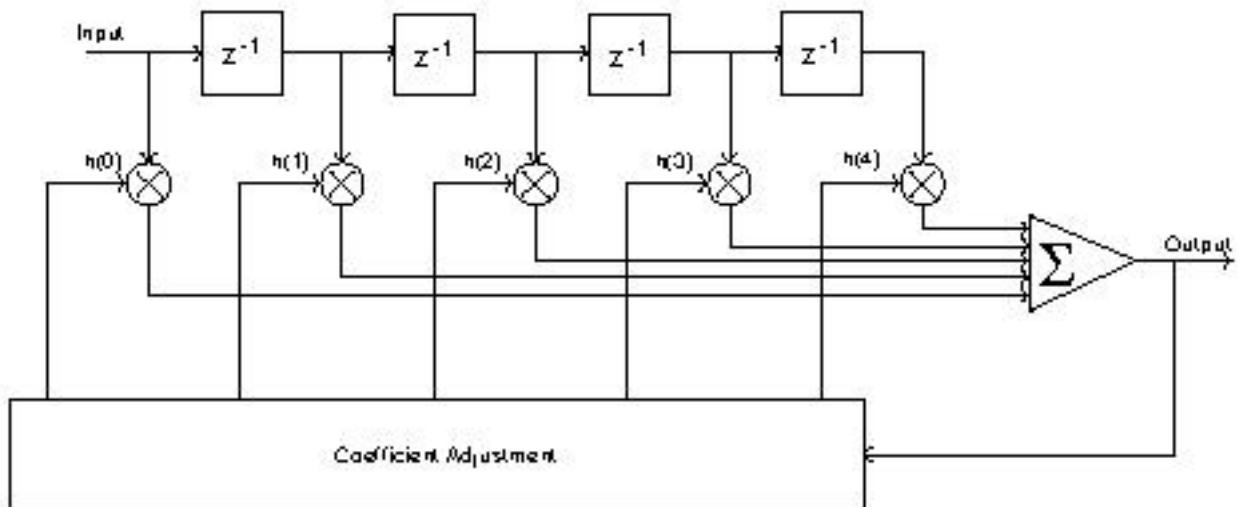
$$H(Z) = \frac{1 + 0,2Z^{-1}}{(1 - Z^{-1})(1 - 0,2Z^{-1})} \quad (223)$$

$$= \frac{1 + 0,2Z^{-1}}{1 - 1,2Z^{-1} + 0,2Z^{-2}} \quad (224)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\text{uitgaande}}{\text{ingaande}} \quad (225)$$

$$= \frac{1 + 0,2Z^{-1}}{1 - 1,2Z^{-1} + 0,2Z^{-2}} \quad (226)$$

4.5 Directe programmering



De onderstaande getallen horen bij de figuur die in je notities staat.

$X[n]$ = ingang

$Y[n]$ = uitgang

$$Y(Z) = (1 - 1,2Z^{-1} + 0,2Z^{-2}) = X(Z)(1 + 0,2Z^{-1}) \quad (227)$$

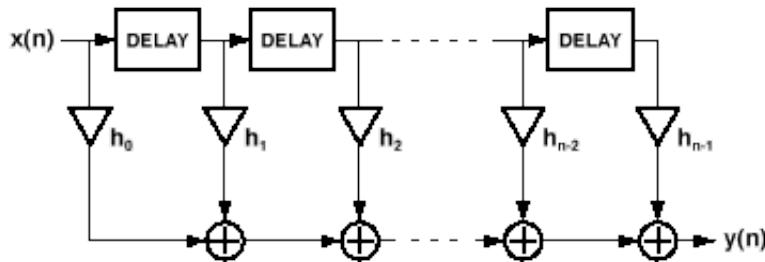
$$Y[n] - 1,2Y[n - 1] + 0,2Y[n - 2] = X[n] + 0,2X[n - 1] \quad (228)$$

$$\rightarrow Y[n] = X[n] + 0,2X[n - 1] + 1,2Y[n - 1] - 0,2Y[n - 2] \quad (229)$$

Implementatie van de transfertfunctie :

- $3 * Z^{-1}$
- 1 sommator (4 ingangen)
- 3 multiplicatoren

4.6 Serieprogrammering



$$H(Z) = \underbrace{\left[\frac{(1+0, 2Z^{-1})}{(1-Z^{-1})} \right]}_{Blok1} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{(1-0, 2Z^{-1})} \right]}_{Blok2} \quad (230)$$

Blok1:

$$\frac{1+0, 2Z^{-1}}{1-Z^{-1}} = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \quad (231)$$

$$y[n] - y[n-1] = x[n] + 0, 2x[n-1] \quad (232)$$

$$y[n] = x[n] + 0, 2x[n-1] + y[n-1] \quad (233)$$

Implementatie van de transfertfunctie :

- $2 * Z^{-1}$
- 1 sommator (3 ingangen)
- 1 multiplicatoren

Blok2:

$$\frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \quad (234)$$

$$y[n] - 0, 2y[n-1] = x[n] \quad (235)$$

$$y[n] = x[n] + 0, 2y[n-1] \quad (236)$$

- $1 * Z^{-1}$
- 1 sommator (4 ingangen)
- 1 multiplicatoren

Totaal :

- $3 * Z^{-1} \rightarrow$ niet bespaard
- 2 sommator (4 ingangen) \rightarrow duurder

- 2 multiplicatoren → goedkoper

$$H(Z) = \frac{1 + 0, 2Z^{-1}}{(1 - Z^{-1})(1 + 0, 2Z^{-1})} \quad (237)$$

$$= \frac{A}{1 - Z^{-1}} + \frac{B}{1 - 0, 2Z^{-1}} \quad (238)$$

$$A(1 - 0, 2Z^{-1}) + B(1 - Z^{-1}) = 1 + 0, 2Z^{-1} \quad (239)$$

Kiezen $A = 0$

$$Z^{-1} = 5 \quad (240)$$

$$B(1 - 5) = 1 + 1 \rightarrow B = \frac{-1}{2} \quad (241)$$

Kiezen $B = 0$

$$Z^{-1} = 1 \quad (242)$$

$$A(1 - 0, 2) = 1 + 0, 2 \rightarrow A = 1, 5 \quad (243)$$

$$= \underbrace{\frac{1, 5}{1 - Z^{-1}}}_{\text{Blok1}} - \underbrace{\frac{0, 5}{1 - 0, 2Z^{-1}}}_{\text{Blok2}} \quad (244)$$

Blok1:

$$y_1[n] - y_1[n - 1] = 1, 5 \cdot x[n] \quad (245)$$

$$y_1[n] = 1, 5x[n] + y_1[n - 1] \quad (246)$$

Blok2:

$$y_2[n] - 0, 2y_2[n - 1] = 0, 5x[n] \quad (247)$$

$$y_2[n] = 0, 5[n] + y_2[n - 1] \quad (248)$$

- $2 * Z^{-1} \rightarrow$ beter, goedkoper
- 3 sommator (4 ingangen)
- 3 multiplicatoren

4.7 Standaardvorm1

Gemeenschappelijke Z^{-1} blokken voor X en Y signalen.
Figuren in de notities zoeken.

$$H(Z) = \frac{1 + 0, 2Z^{-1} + \gamma^{-2}}{1 - 1, 2Z^{-1} + 0, 2Z^{-1}} = \frac{Y(Z)}{X(Z)} \quad (249)$$

$$y[n] = x[n] + 0, 2x[n - 1] + 1, 2y[n - 1] - 0, 2Z^{-2} + \gamma x[n - 2] \quad (250)$$

4.8 Standaardvorm2

$$\frac{Y(Z)}{X(Z)} = H(Z) = \frac{1 + 0, 2Z^{-1}X_1}{1 - 1, 2Z^{-1} + 0, 2Z^{-2}X_1} \quad (251)$$

$$= \frac{T(Z)}{N(Z)} \cdot \frac{X_1}{X_1} \quad (252)$$

$$y[n] = X_1[n] + 0, 2X_1[n-1] \quad (253)$$

$$x[n] = X_1[n] + 1, 2X_1[n-1] - X_1[n-2] \quad (254)$$

$$X_1[n] = X[n] + 1, 2X_1[n-1] - 0, 2X_1[n-2] \quad (255)$$

$$Y(z) = X_1(z) + 0, 2X_1(z) \cdot Z^{-1} = (1 + 0, 2Z^{-1})X_1(z) \quad (256)$$

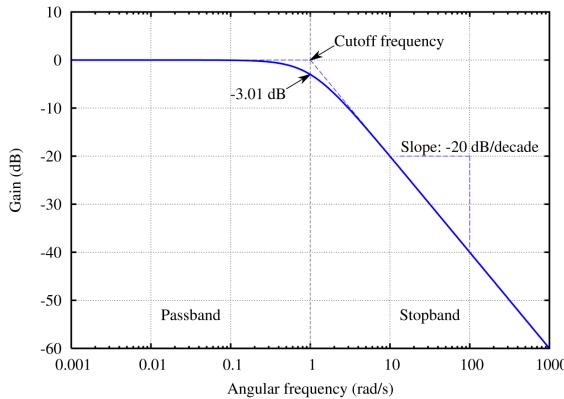
$$X_1(z) = \frac{X(z)}{1 - 1, 2Z^{-1} + 0, 2Z^{-2}} \quad (257)$$

$$X_1z = \frac{Y(z)}{1 + 0, 2Z^{-1}} \quad (258)$$

Transfertfunctie :

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 0, 2Z^{-1}}{1 - 1, 2Z^{-1} + 0, 2Z^{-2}} \quad (259)$$

4.9 Hoe uitgaand van een filterspecificatie $H(s)$ te bepalen?



$$\text{Filterspecificatie} \rightarrow H(s) = ? \leftrightarrow H(Z) \quad (260)$$

$$\omega_P = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (261)$$

$$\omega_S = 400 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (262)$$

$$100 \rightarrow 200 \rightarrow 400 \quad (263)$$

$$2\text{octaven}, n = 3 \quad (264)$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{K}{(s + a)(s^2 + \frac{\omega_o}{Q_o} + \omega_o^2)} \quad (265)$$

$$\text{stel : } a = 100, \omega_o = \omega_p$$

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} \quad (266)$$

$$= \frac{K}{(s + 100)(s^2 + \frac{100s}{Q_o} + 10^4)} \quad (267)$$

$$\omega = 0 \rightarrow \frac{v_o}{v_i} = 1 \quad (268)$$

$$\frac{K}{100 \cdot 10^4} = K = 10^6 \quad (269)$$

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{10^6}{(s + 100)(s^2 + \frac{100s}{Q_o} + 10^4)} \quad (270)$$

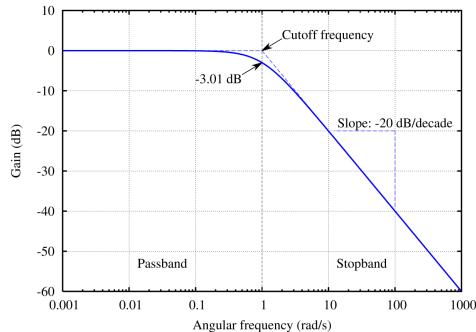
evalueren voor $s = j100$

$$\frac{10^6 Q_o}{\sqrt{100^2 + 100^2} \cdot \frac{100 \cdot 100}{Q_o}} = \sqrt{2} \quad (271)$$

$$Q_o = \frac{0,707 \cdot \sqrt{100^2 + 100^2} \cdot 100 \cdot 100}{10^6} \rightarrow Q_o = 1 \quad (272)$$

$$H(s) = \frac{10^6}{(s + 100)(s^2 + 100s + 10^4)} \quad (273)$$

5 Butterworth



In tegenstelling tot Chebychev gaat butterworth voor **maximale vlakheid**.

Loss(Athenuatie) $\| \frac{v_i}{v_o} \|^2 = \| H(j\omega) \|^2$

$$1 + \| K(j\omega) \|^2 = 1 + \| \frac{T(j\omega)}{N(j\omega)} \|^2 \quad (274)$$

Feld kellervergelijking

$$K(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots + a_n s^n \quad (275)$$

Butterworth :

$$K(s) = \left(\frac{\epsilon \cdot s}{\omega_p} \right)^n \rightarrow n\text{-de orde filter} \quad (276)$$

$$K(j\omega) = \epsilon \left(\frac{j\omega}{\omega_p} \right)^n \quad (277)$$

$$\| \frac{v_i}{v_o} \| = \sqrt{1 + \| K(j\omega) \|^2} = \sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n}} \quad (278)$$

Voor DC :

$$A(\omega) = \sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n}} \quad (279)$$

$$\omega = \omega_p \quad (280)$$

$$\rightarrow \sqrt{1 + \epsilon^2} \quad (281)$$

$$A(dB) = \frac{20}{2} \log \left[1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n} \right] \quad (282)$$

$$\left\| \frac{v_o}{v_i} \right\| = \sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega_n}{\omega_p} \right)^{2n}} \quad (283)$$

$$= A = Loss$$

$$freq = 0, \omega = 1 = A(dB)(DC) \quad (284)$$

$$A(dB) = 10 \log \left[1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n} \right]$$

→ 10 dB komt door die wortel die verrekend is

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{max}}{10} - 1}} \quad (285)$$

→ = Parameter die de waarde van A_{max} bepaalt.
indien $A_{max} = 3dB \rightarrow \epsilon = 1$

→ Meeste butterworth filters

$$\omega \gg \omega_p \quad (286)$$

$$A(dB) = 10 \log \left(\epsilon^2 \left(\frac{\omega^{2n}}{\omega_p} \right) \right) \quad (287)$$

$$= 20 \log \left(\epsilon \left(\frac{\omega^n}{\omega_p} \right) \right) \quad (288)$$

flankstijlheid = 20ndB/dec of 6ndB/oct, met n als de orde. $\delta A(dB)$ bij 10ω en ω
Normaliseren :

$$\Omega = \epsilon^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\omega^n}{\omega_p} \right) \quad (289)$$

$$A(\Omega) = \sqrt{1 + \Omega^{2n}} \quad (290)$$

5.1 H(s) voor de implementatie als analoog filter

Hoe gebeurt dit ?

$$\| H(j\Omega) \| = H(j\Omega) \cdot H^*(j\Omega) \quad (291)$$

als $h(t) = \text{reëel}$ (zie data aquisitie)

$$\| H(j\Omega) \|^2 = H(j\Omega) \cdot H(j\Omega) \quad (292)$$

$\downarrow Parseval$

$$\begin{cases} H(j\Omega) = \text{Stabiele polen} \\ H(-j\Omega) = \text{Onstabiele polen (nodig voor de wiskunde)} \end{cases} \quad (293)$$

Hebben we nodig om over te gaan naar $H(S)$.

→ Genormeerde frequenties

Bemerk : We spreken over de polen, maar dit zijn de **nulpunten** van $H(j\Omega)$ en $H(-j\Omega)$
 $=$ loss functie $\frac{v_i}{v_o}$

$$\begin{cases} H(j\Omega) \rightarrow Nullen(Linkservak) \\ H(-j\Omega) \rightarrow Nullen(Recherhalfvlak) \end{cases}$$

$$\| H(j\Omega) \|^2 = 1 + \Omega^{2n} \quad (294)$$

$$\| H(S) \|^2 = H(S) \cdot H(-S) \quad (295)$$

$$\begin{cases} H(S) \text{Stabiele polen : implementeren} \\ H(-S) \text{Onstabiele polen} \end{cases} \quad (296)$$