Obliczenia naukowe - sprawozdanie lista 3

Piotr Kołodziejczyk

Listopad 2019

1 Opis problemu

Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zadanie polega na numerycznym znalezieniu pierwiastków r równania $f(r) = 0$ dla zadanych dokładności. Iteracyjne metody rozwiązania tego równania polegają na znajdowaniu ciągu kolejnych przybliżeń $x_{i+1} = \Phi(x_i)$, takich że $\lim_{i\to\infty} x_i = r$

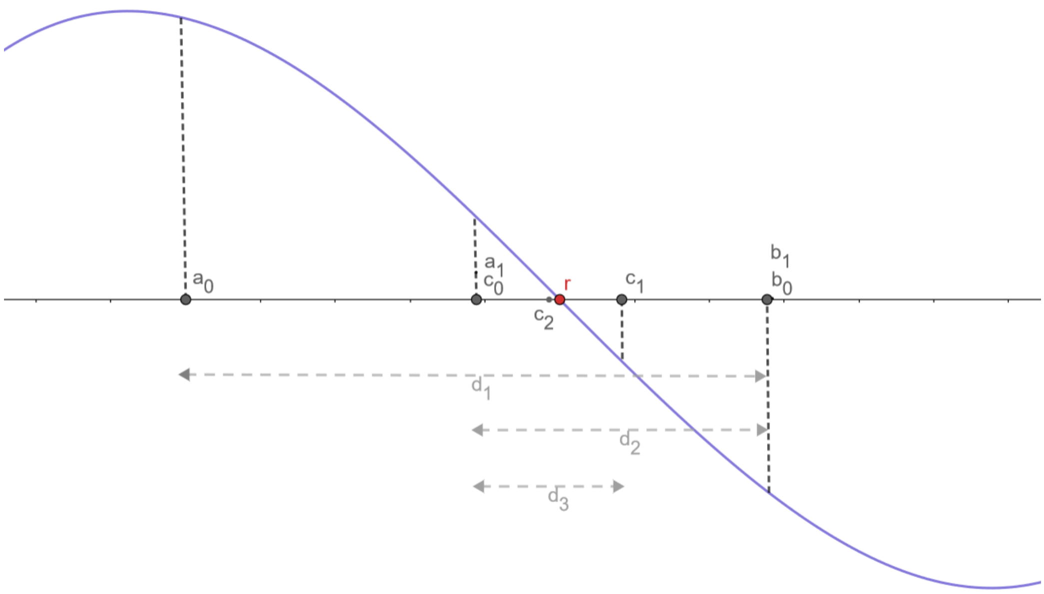
2 Metody

Omówię trzy metody numerycznego znajdowania pierwiastków równania $f(x) = 0$: metodę bisekcji, metodę stycznych (Newtona) oraz metodę siecznych. Wszystkie metody mają zadane dokładności jako parametry: δ - wskazuje na minimalną dokładność współrzędnej iksowej ($|\tilde{r}$-$r| < \delta$), a ϵ - maksymalna dopuszczalna różnica między wartością funkcji w danym punkcie a zerem ($|f(\tilde{r})| < \epsilon$).

2.1 Metoda bisekcji

Dana jest funkcja f ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$. W metodzie tej w każdej iteracji dzielimy zadany przedział na pół, by następnie wybrać jeden z tych nowych dwu, w którym funkcja zmienia znak. Iteracja kończy działanie, jeśli długość przedziału jest mniejsza od δ, lub wartość w punkcie jest mniejsza od ϵ. Kolejne przybliżenia pierwiastka wyrażają się więc wzorem:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$



Rysunek 1: Graficzna interpretacja metody bisekcji

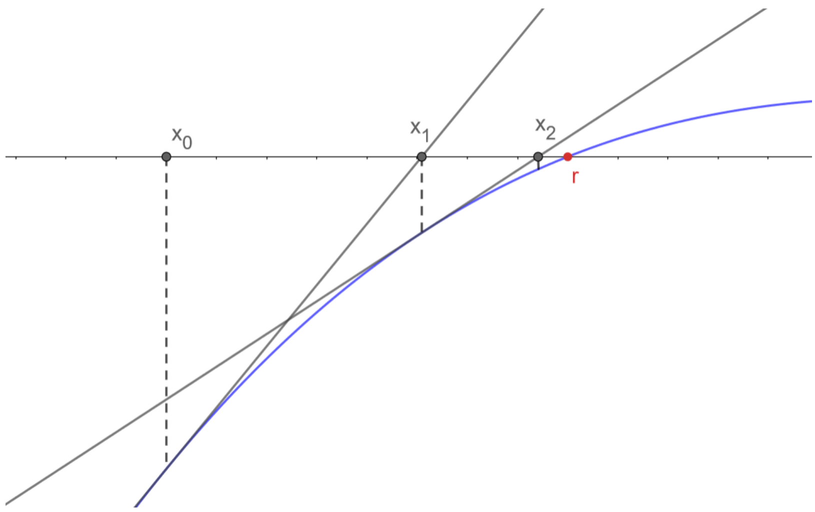
2.1.1 Pseudokod metody bisekcji

Dane: f, a, b, δ, ϵ
Wynik: r, $f(r)$, it
$u \leftarrow f(a)$, $v \leftarrow f(b)$, $it \leftarrow 0$
$e \leftarrow b - a$
if $sgn(u) = sgn(v)$ **then**
  return error
end if
while $|e| > \delta$ **do**
  $it \leftarrow it + 1$
  $e \leftarrow e/2$, $c \leftarrow a + e$
  $w \leftarrow f(c)$
  if $|w| < \epsilon$ **then**
    return c, w, it
  end if
  if $sgn(w) \neq sgn(u)$ **then**
    $b \leftarrow c, v \leftarrow w$
  else
    $a \leftarrow c, u \leftarrow w$
  end if
end while
return c, w, it

2.2 Metoda stycznych (Newtona)

Dana jest punkt początkowy x_0, przedział $[a, b]$, funkcja f, taka że $f(a) \cdot f(b) < 0$ oraz f ciągła na $[a, b]$ oraz posiada niezerową pierwszą pochodną na tym przedziale. W pierwszym kroku obliczana jest pochodna funkcji w punkcie (początkowym), a następnie wyznaczana jest styczna do funkcji w tym punkcie i punkt przecięcia z osią OX, stanowiący potencjalne przybliżenie pierwiastka. Jeśli nie spełniamy dokładności - powtarzamy procedurę z ostatnio wyliczonym punktem jako punktem początkowym. Kolejne przybliżenia przestawia wzór:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Rysunek 2: Graficzna interpretacja metody Newtona

2.2.1 Pseudokod metody Newtona

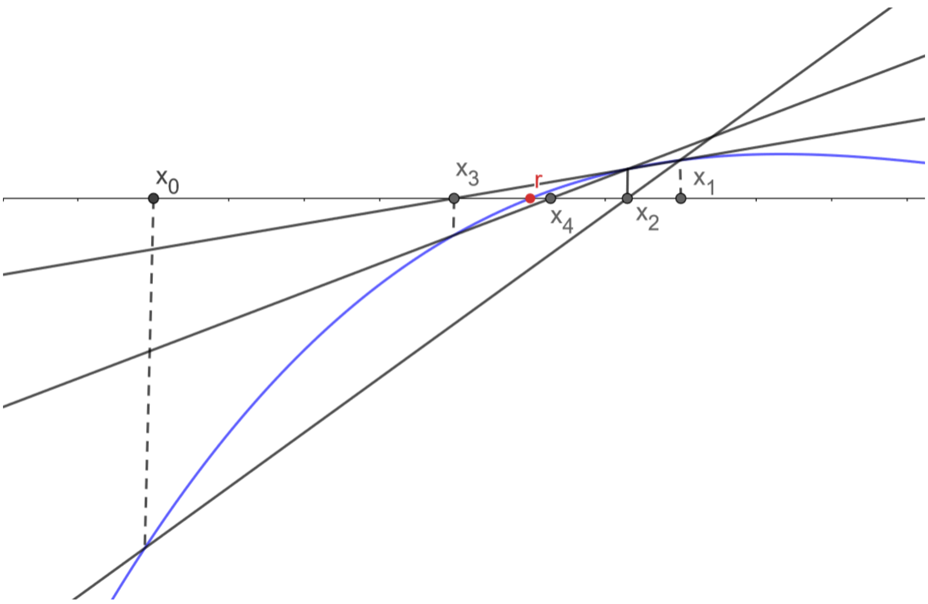
Dane: f, x_0, maxIt δ, ϵ
Wynik: r, $f(r)$, it
$v \leftarrow f(x_0)$
if $|v| < \epsilon$ **then**
  return $x_0, v, 0$
end if
for $it \leftarrow 1$ **to** $maxIt$ **do**
  if $|f'(x_0)| < \epsilon$ **then**
    return error
  end if
  $x_1 \leftarrow x_0 - \frac{v}{f'(x_0)}$
  $v \leftarrow f(x_1)$
  if $|x_1 - x_0| < \delta$ **or** $|v| < \epsilon$ **then**
    return x_1, v, it
  end if
  $x_0 \leftarrow x_1$
end for
return x_0, v, $maxIt$, error

2.3 Metoda siecznych

Dana jest funkcja f ciągła na przedziale $[a, b]$, spełniającym warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$ oraz na przedziale pierwsza pochodna jest różna od zera. Metoda ta jest podobna do metody stycznych, jednak zamiast obliczania pochodnej funkcji, przybliżamy ją ilorazem różnicowym otrzymując sieczną. W każdej iteracji otrzymujemy nowy punkt przecięcia siecznej z osią OX, a punkty te tworzą ciąg zbieżny do miejsca zerowego.

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Ponieważ x_{n+1} zależy od x_n oraz x_{n-1} potrzebne są dwa punkty początkowe.



Rysunek 3: Graficzna interpretacja metody siecznych

2.3.1 Pseudokod metody siecznych

Dane: a, b, $maxIt$ δ, ϵ
Wynik: r, $f(r)$, it
$fa \leftarrow f(a)$, $fb \leftarrow f(b)$
for $it \leftarrow 1$ **to** $maxIt$ **do**
  if $|fa| > |fb|$ **then**
    $a \leftrightarrow b$, $fa \leftrightarrow fb$
  end if
  $s \leftarrow \frac{b-a}{fb-fa}$
  $b \leftarrow a$, $fb \leftarrow fa$
  $a \leftarrow a - fa \cdot s$
  $fa \leftarrow f(a)$
  if $|b-a| < \delta$ **or** $|fa| < \epsilon$ **then**
    return a, fa, it
  end if
end for
return x_0, v, $maxIt$, error

3 Przykłady użycia metod

3.1 Zadanie 4

3.1.1 Dane zadania

Zadanie polega na wykorzystaniu każdej z powyższych metod do wyznaczenia pierwiastków dla funkcji $f(x) = sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2$ dla zadanych parametrów;

- metoda bisekcji z przedziałem początkowym $[1.5, 2]$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$,
- metoda Newtona z przybliżeniem początkowym 1.5, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$,
- metoda siecznych z przybliżeniami początkowymi $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.

3.1.2 Wyniki

Dla zadanej funkcji f każdy z algorytmów zwrócił taki sam wynik (z δ-dokładnością), bez komunikatu o błędzie. Dane początkowe były więc odpowiednie, a pochodna funkcji w danym przedziale nie była bliska zeru.

Metoda	r	$f(r)$	Liczba iteracji
bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16
stycznych	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4
siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4

Tabela 1: Wyniki numerycznych metod wyznaczenia miejsca zerowego funkcji $f(x) = sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2$

3.2 Zadanie 5

3.2.1 Opis zadania

Zadanie polega na znalezieniu punktu przecięcia funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$ metodą bisekcji z zadanymi dokładnościami $\delta = 10^{-4}$ oraz $\epsilon = 10^{-4}$.
Problem przecięcia się wykresów funkcji jest tożsamy ze znalezieniem miejsca zerowego różnicy tych funkcji, zatem wystarczy zastosować metodę bisekcji dla funkcji $f(x) = 3x - e^x$.

3.2.2 Rozwiązanie

Pierwszym etapem jest znalezienie odpowiedniego przedziału początkowego. Dla $x = 0$ zachodzi nierówność $3x < e^x$ oraz funkcja e^x zbiega do nieskończoności szybciej od funkcji liniowej, wobec czego istnieją dwa punkty przecięcia (poniżej zera funkcja wykładnicza pozostaje dodatnia, więc tam na pewno funkcje się nie przecinają). Dla $x = 1$ mamy $3 \cdot 1 > e^1$, a dla $x = 2$: $3 \cdot 2 < e^2$, więc dwoma rozpatrywanymi przedziałami mogą być $[0, 1]$ oraz $[1, 2]$.

Przedział	r	$f(r)$	Liczba iteracji
[0,1]	0.619140625	9.066320343276146e-5	9
[1,2]	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13

Tabela 2: Wyniki działania metody bisekcji dla funkcji $f(x) = 3x - e^x$ dla zadanych przedziałów

3.3 Zadanie 6

Zadanie polega na znalezieniu miejsc zerowych funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ i $f_2(x) = xe^{-x}$ wszystkimi trzema metodami z zadanymi dokładnościami $\delta = 10^{-5}$ oraz $\epsilon = 10^{-5}$.

3.3.1 Rozwiązanie

Wykres funkcji f_1 to w pewien sposób przesunięty i odbity wykres funkcji e^x, na podstawie czego możemy sądzić, że miejsce zerowe znajdzie się na przykład w przedziale $[-1, 2]$ (lub można podstawić $x = 1$ co natychmiast daje wynik). Niech $x_0 = 0$ w metodzie Newtona (sądzimy, że pierwiastek znajduje się w pobliżu), a w metodzie siecznych za początkowe punkty przyjmijmy końce przedziału z metody bisekcji. Powyższe dane dają następujące wyniki:

Metoda	r	$f(r)$	Liczba iteracji
bisekcji	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16
stycznych	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4
siecznych	0.9999990036367258	9.963637706000839e-7	7

Tabela 3: Wyniki dla funkcji f_1

Funkcja f_2 ma trywialny pierwiastek $x = 0$. Wybierając symetryczny przedział bisekcji np. [-1,1] otrzymamy dokładny wynik już w pierwszym kroku, dlatego dla sprawdzenia numerycznej poprawności metody wybiorę np. [-1.5, 2]. Niech $x_0 = 0.5$ w metodzie Newtona, a początkowe przybliżenia x_0 i x_1 w metodzie siecznych to odpowiednio -1 i 1. Daje to wyniki jak następuje:

Metoda	r	$f(r)$	Liczba iteracji
bisekcji	7.62939453125e-6	7.62933632381113e-6	15
stycznych	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5
siecznych	1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8	18

Tabela 4: Wyniki dla funkcji f_2

3.3.2 Uwagi o danych początkowych

- w metodzie bisekcji wybierając przedział symetryczny wokół miejsca zerowego, już w pierwszym kroku dostaniemy dokładny wynik,

- $\lim_{x\to\infty} f_1'(x) = 0$, więc dla dostatecznie dużych argumentów wartość pochodnej będzie bliska zeru, co uniemożliwi poprawne wyliczenie kolejnych przybliżeń (dla małych iksów zwiększenie liczby iteracji pozwala jeszcze uzyskać poprawny wynik, dla iksów rzędu kilkanaście zwracany jest komunikat błędu o pochodnej mniejszej granicy błędu),

- $f_2'(1) = 0$, wobec czego x_0 nie może równać się zeru - styczna będzie równoległa do osi OX, więc nie będzie możliwe wyznaczenie punktu przecięcia (zwrócony zostanie komunikat błędu). W przypadku f_2 również nie możemy wybrać dużego x_0, gdyż funkcja zbiega do zera - wartość funkcji w punkcie będzie poniżej wymaganej dokładności, więc metoda wykryje miejsce zerowe, pomimo jego braku na całej półprostej $(0, \infty)$.