Obliczenia naukowe - lista 4.

Piotr Kołodziejczyk

Grudzień 2019

1 Wstęp

Niech dana będzie funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz wektor $\overline{x}$ węzłów x_0,...,x_n (i odpowiadający mu wektor $\overline{y}$ wartości funkcji w tych węzłach. Mówimy, że wielomian $p(x)$ interpoluje wartości y_k w węzłach x_k (lub funkcję f) jeśli

$$p(x_i) = y_i \qquad 0 \leqslant i \leqslant n$$

Dodatkowo oznaczamy $p_n \in \Pi_n$ wielomian stopnia co najwyżej n-tego.

1.1 Postać Newtona

Jednym z przedstawień wielomianu interpolacyjnego stopnia k jest postać Newtona:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \qquad (1)$$

Wielomiany kolejnych stopni powstają przez dodanie do poprzedniego pojedynczego składnika:

$$p(k) = c_0 + c_1(x - x_0) + ... + c_k(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})$$

Na podstawie kolejnych węzłów i wartościach funkcji można obliczyć kolejne współczynniki c_i, co jest jednak kosztowne i może powodować nadmierne błędy zaokrągleń, dlatego powszechnie stosowana jest metoda ilorazów różnicowych.

2 Ilorazy różnicowe

Jeśli dany jest wielomian interpolacyjny postaci Newtona (1), to współczynnik c_i nazywamy ilorazem różnicowym rzędu i funkcji f i oznaczamy $f[x_0, x_1, ..., x_i]$. Z zadanej postaci widać od razu, że wartości c_i zależą tylko od zadanych węzłów i wartości w tych węzłach. Pierwsze dwie postaci mają oczywistą formę:

$$f[x_0] = f(x_0), \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

natomiast kolejne wartości spełniają zależność rekurencyjną

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_k] - f[x_0, x_1, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

2.1 Metoda obliczania

Choć wzór na ilorazy różnicowe sugeruje użycie dwuwymiarowej macierzy, bardziej efektywnym (oszczędność pamięci) jest użycie wzoru rekurencyjnego, korzystający z poprzednio obliczonych wartości,co przedstawia poniższy pseudokod:

Dane: $\overline{x}$, $\underline{f}$
Wynik: $\overline{fx}$
$length \leftarrow$ `length`(a)
$nt \leftarrow fx[length]$
for $i \leftarrow length$ **downto** 1 **do**
  $nt \leftarrow fx[i] + (t - x[i])) \cdot nt$
end for
return fx

3 Obliczanie wartości wielomianu interpolacyjnego

Niech dany będzie wektor węzłów oraz wektor odpowiadających im ilorazów różnicowych funkcji f. Za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera możliwym jest obliczenie wartości wielomianu interpolacyjnego w danym punkcie w czasie liniowym od stopnia wielomianu.

3.1 Algorytm, uogólniony algorytm Hornera

Wzór interpolacyjny Newtona można przedstawić jako

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}).$$

Uogólniony algorytm Hornera pozwala policzyć go na podstawie wzorów:

$$w_n(x) = f[x_0, ..., x_n],$$

$$w_k(x) = f[x_0, ..., x_{k-1}]w_{k+1}(x),$$

$$N_n(x) = w_0(x).$$

Na tej podstawie, pseudokod obliczenia wartości wielomianu interpolacyjnego w danym punkcie w czasie liniowym może wyglądać następująco:

Dane: $\overline{x}$, $\overline{fx}$, t
Wynik: nt
$length \leftarrow$ `length`(a)
$nt \leftarrow fx[length]$
for $i \leftarrow length$ **downto** 1 **do**
  $nt \leftarrow fx[i] + (t - x[i])) \cdot nt$
end for
return nt

4 Postać naturalna wielomianu Newtona

Znając współczynniki wielomianu interpolacyjnego (kolejne ilorazy różnicowe) oraz węzły, jesteśmy w stanie wyznaczyć jego postać naturalną w czasie $\mathcal{O}(n^2)$. Używając jak w zadaniu wyżej uogólnionego algorytmu Hornera, w podwójnej pętli możemy obliczyć współczynniki postaci naturalnej wielomianu. Algorytm polega na zamianie na postać naturalną wielomianów otrzymywanych w kolejnych iteracjach i odpowiednim sumowaniu, co przedstawia poniższy pseudokod:

Dane: $\overline{x}$, $\overline{fx}$, t
Wynik: $\overline{a}$
$length \leftarrow$ `length`(a)
$a[length] \leftarrow fx[length]$
for $i \leftarrow length - 1$ **downto** 1 **do**
  $a[i] \leftarrow fx[i] - a[i+1] \cdot x[i]$
  for $j \leftarrow i + 1$ **to** $length - 1$ **do**
    $a[j] \leftarrow a[j] - a[j+1] \cdot x[i]$
  end for
  return a

5 Interpretacja graficzna

Mając dane węzły oraz funkcję, możemy graficznie porównać wielomian interpolujący z interpolowaną przez niego funkcją. Funkcja `rysujNnfx` na zadanym przedziale $[a, b]$ rysuje wykresy funkcji f oraz wielomianu interpolacyjnego p. W pierwszym etapie wyznaczone są ilorazy różnicowe dla równoodległych węzłów na przedziale $[a, b]$, a następnie funkcją `warNewton` obliczone wartości, na podstawie których generowany jest wykres (niech liczba tych punktów równa się $10 \cdot n$). Same wykresy generowane są z użyciem modułu `Plots` w języku Julia.

6 Przykłady interpolacji

6.1 Zadanie 5

Zadanie polega na przeprowadzeniu testów zaimplementowanej funkcji `rysujNnfx` dla zadanych funkcji:

- $f(x) = e^x$, na przedziale $[0, 1]$, dla n=5,10,15
- $f(x) = x^2 sin(x)$ na przedziale $[-1, 1]$ dla n=5,10,15

6.1.1 Wykresy

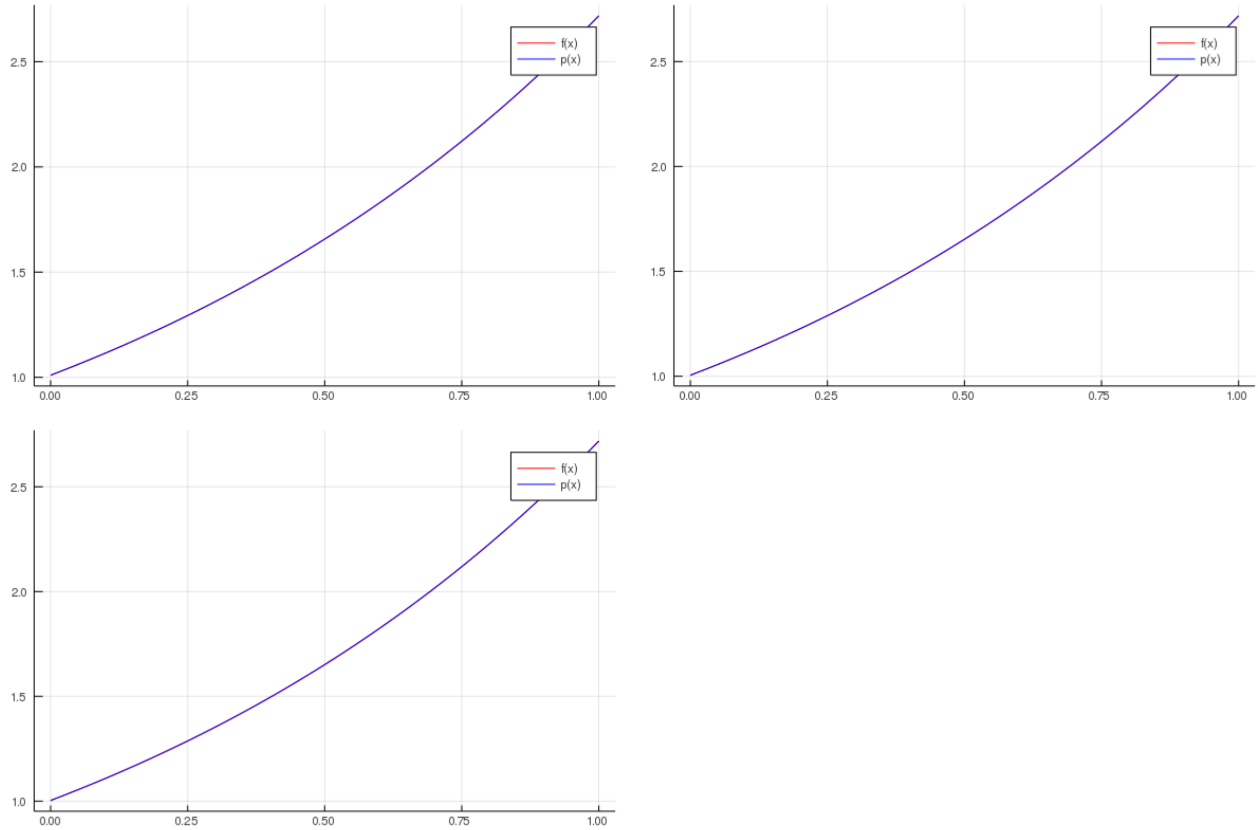
6.1.2 Obserwacje

Dla zadanych argumentów wykresy funkcji oraz wielomianu interpolacyjnego pokrywają się dla każdego n. Można przypuszczać, że funkcje te należą do kategorii funkcji łatwo interpolowanych.

6.2 Zadanie 6

Zadanie, podobnie jak poprzednie, polega na przeprowadzeniu testów zaimplementowanej funkcji `rysujNnfx` dla zadanych funkcji:

- $f(x) = |x|$, na przedziale $[-1, 1]$, dla n=5,10,15
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[-5, 5]$ dla n=5,10,15



Rysunek 1: Wykresy funkcji e^x i wielomianu interpolującego dla kolejnych n

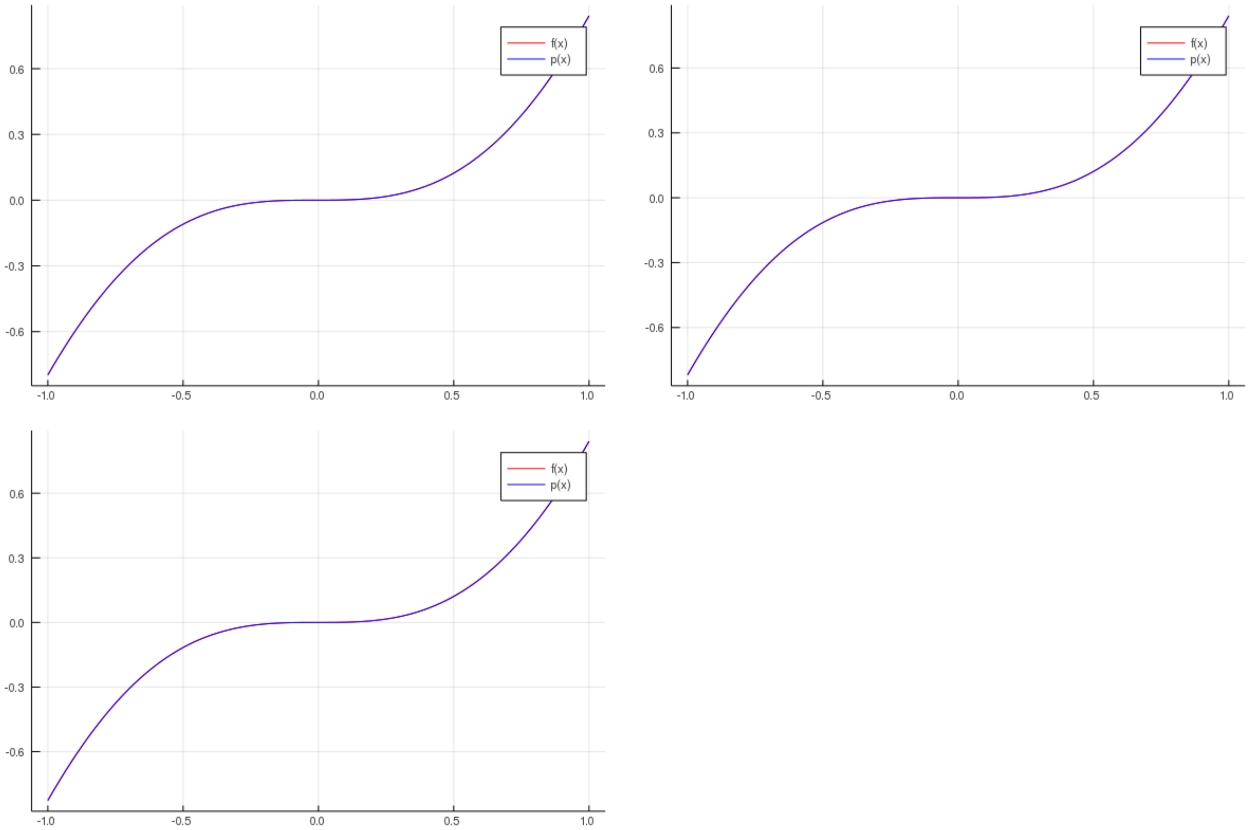
6.2.1 Wykresy

6.2.2 Obserwacje

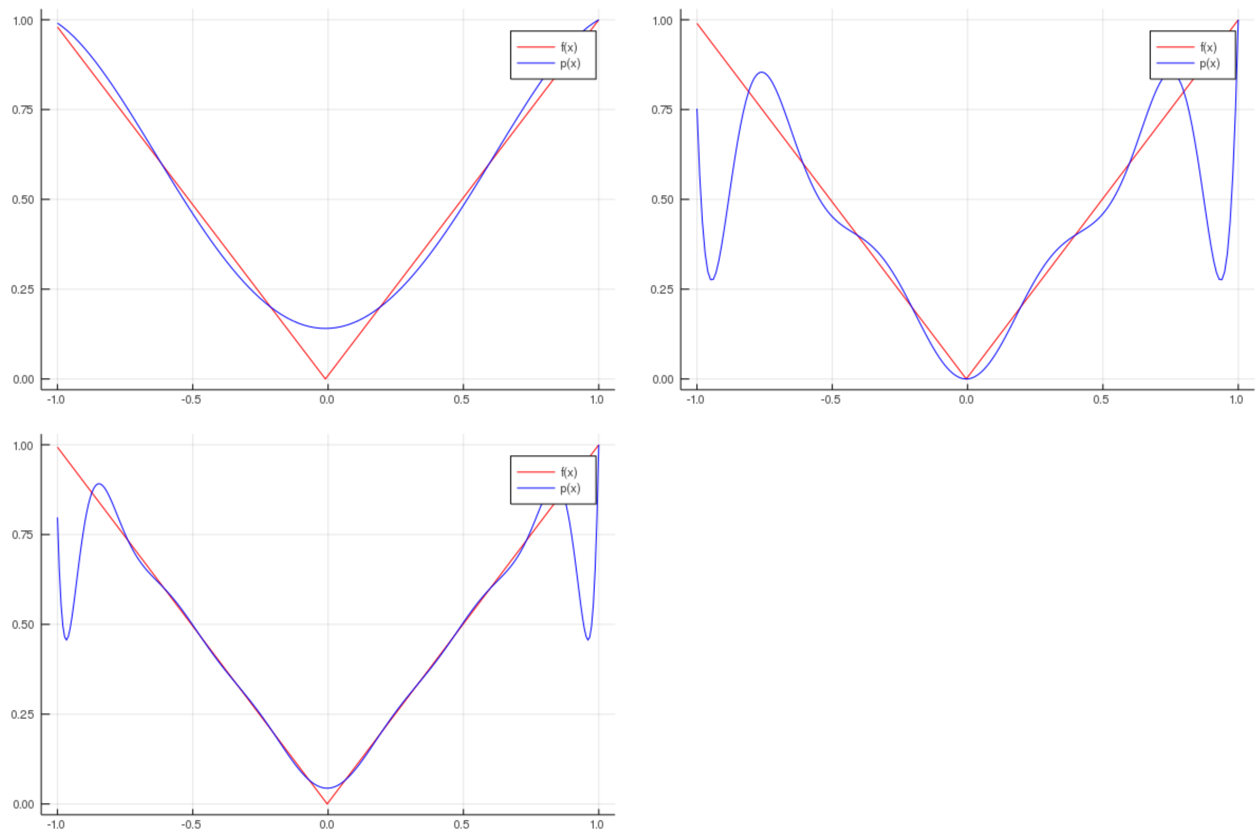
Funkcję $|x|$ na danym przedziale najlepiej interpoluje wielomian stopnia trzeciego, dla większych n dochodzi do niespodziewanych skoków wartości na krańcach przedziałów. W okolicy ostrza funkcji, zgodnie z intuicją, przybliżenie nie jest dokładne. Podobny efekt jest dla drugiej funkcji. Dla n=10 wykres w środkowej części jest znacznie dokładniejszy niż dla n=5, jednak na krańcach przedziału wykres odbiega znacznie od funkcji. Dla n=15 na krańcach różnica między poprawną wartością a interpolowaną jest jeszcze większa.

6.3 Wnioski

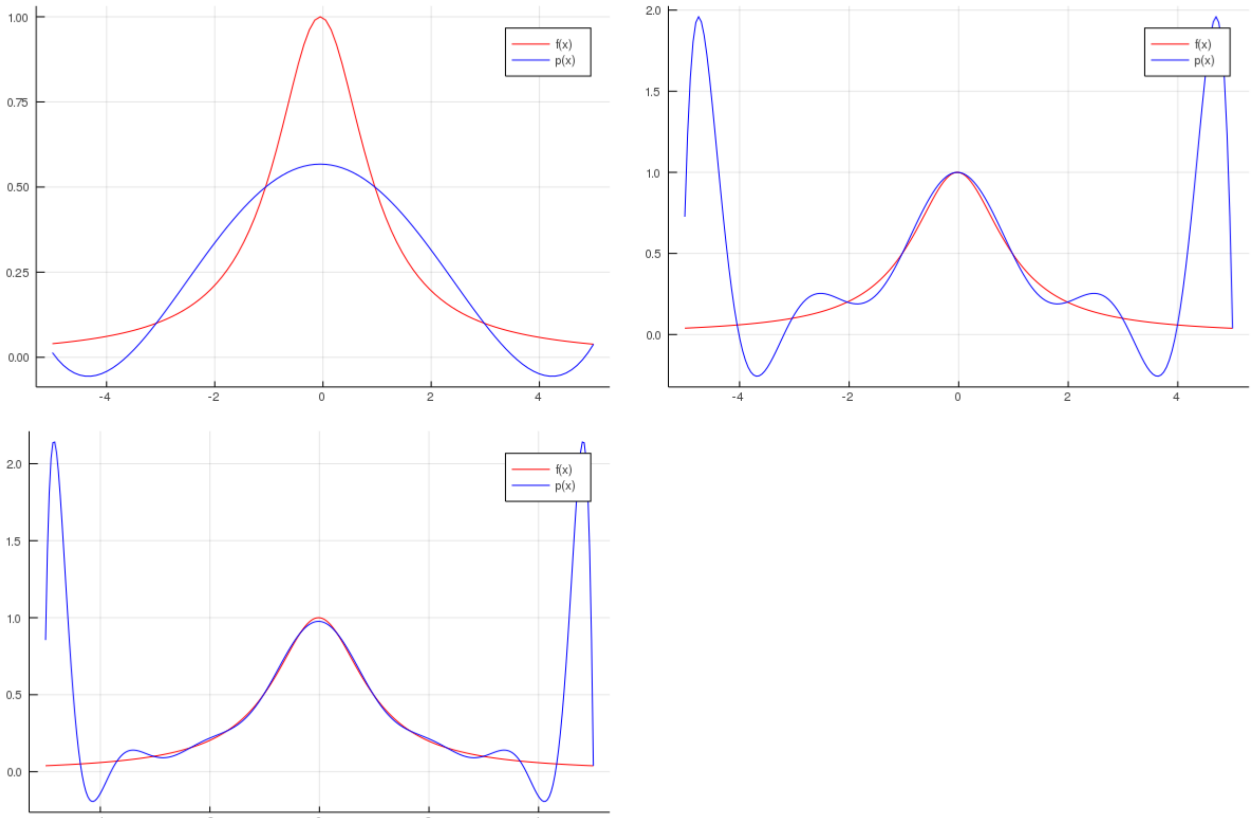
W zadaniu 6 występuje zjawisko Rungego. Polega ono na zwiększaniu się błędów interpolacji pomimo wzrostu stopnia wielomianu. Występuje ono często, gdy dane węzły są równoodległe a wielomian jest wysokiego stopnia lub gdy funkcje są nieregularne (nieciągłe czy dalekie od gładkich). Gęstsze węzły na krańcach przedziałów mogłyby częściowo złagodzić ten efekt. Ponadto funkcja $|x|$ nie jest różniczkowalna, tj. posiada ostrze, więc nie da się jej *dokadnie* zinterpolować.



Rysunek 2: Wykresy funkcji $x^2 sin(x)$ i wielomianu interpolującego dla kolejnych n



Rysunek 3: Wykresy funkcji `abs(x)` i wielomianu interpolującego dla kolejnych n



Rysunek 4: Wykresy funkcji $\frac{1}{1+x^2}$ i wielomianu interpolującego dla kolejnych n