

代数幾何学

Fefr

2025 年 9 月 12 日

目 次

第 1 章 代数多様体	1
1.1 アフィン空間	1
1.2 アフィン空間内の代数的集合	2
1.3 アフィン代数多様体	3

まえがき

本書は古典的な代数幾何について論ずる．主に [?] を参考にするつもりである．

第1章 代数多様体

この章では代数幾何の対象である”代数多様体 (algebraic variety)”を定義する.

1.1 アフィン空間

アフィン空間を復習する.

定義 1.1.1. \mathbf{A} を空でない集合. V を \mathbf{C} 上の有限次元ベクトル空間とする. 次の条件を満たす写像の族 $\{T_v : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} : v \in V\}$ が与えられているとき, 組 (\mathbf{A}, V) あるいは単に \mathbf{A} を**アフィン空間**という.

1. 任意の $v, w \in V$ に対して, $T_{v+w} = T_v \circ T_w$ が成り立つ.
2. 任意の $P, Q \in \mathbf{A}$ に対して, ただ一つの $v \in V$ が存在して, $T_v(P) = Q$ となる.

定義 1.1.2. アフィン空間 \mathbf{A} の次元はそれに伴うベクトル空間 V の次元 $\dim V$ で定める.

次は容易にわかる.

命題 1.1.3. (\mathbf{A}, V) をアフィン空間とすると, 次が成り立つ.

1. $0 \in V$ に対応する写像 T_0 は恒等写像 $1_{\mathbf{A}}$ である.
2. 任意の $v \in V$ に対して, T_v は全単射.

定義 1.1.4. 定義の2の v を \overrightarrow{PQ} とかく¹. また, $T_v(P)$ を $P + v$ とかく².

命題 1.1.5. (\mathbf{A}, V) をアフィン空間とすると, 任意の $P, Q, R \in \mathbf{A}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

Proof. $Q = P + \overrightarrow{PQ}$, $R = Q + \overrightarrow{QR}$ より,

$$R = P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$$

となる. 一方, $R = P + \overrightarrow{PR}$ であるから, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ が従う. □

有限次元ベクトル空間 V に座標系 $V \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}^n$ を入れるように, アフィン空間にも座標系を入れることができる.

定義 1.1.6. \mathbf{A} をアフィン空間とし, \mathbf{A} の点 O と V の基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ をとる. \mathbf{A} の任意の点 P に対して, $\overrightarrow{OP} \in V$ が定まり, V の基底を用いて, $\overrightarrow{OP} = \sum_i P_i e_i$ とできる. このときの対応

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{C}^n \\ P &\mapsto (P_1, \dots, P_n) \end{aligned}$$

を \mathbf{A} の (**アフィン**) **座標系**といい, $(O; e_1, \dots, e_n)$ とかく³.

¹従って, $-v$ に対応するのは \overrightarrow{QP} である.

²イメージは T_v は v だけ平行移動を行う写像である.

³アフィン座標系 $X : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}^n$ は各 i 成分への射影 π_i と合成し $X_i := \pi_i \circ X : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ が定義できることに注意する.

注意 1.1.7. 座標系を導入することで n 次元アフィン空間 \mathbf{A} の点は \mathbf{C}^n の点と一対一に対応する. 従って, 誤解のおそれがない場合 \mathbf{C}^n を n 次元アフィン空間ということがある.

命題 1.1.8. アフィン空間 \mathbf{A} に対して, 二つの異なる座標系 $(O; e_1, \dots, e_n)$, $(O'; e'_1, \dots, e'_n)$ が与えられたとする. このとき, ある $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ と $b \in \mathbf{C}^n$ が存在して, 任意の $P \in \mathbf{A}$ に対して,

$$\begin{pmatrix} P'_1 \\ \vdots \\ P'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} + b$$

が成り立つ.

Proof. 証明はベクトル空間における基底変換の議論と同様である. □

定義 1.1.9. 先程の命題における変換 $P' = AP + b$ を **アフィン変換** という.

1.2 アフィン空間内の代数的集合

ここで, 可微分多様体の定義を思い出すと, それは

\mathbf{C} 上の n 次元アフィン空間を \mathbf{A} (または次元を明示して \mathbf{A}^n) とかく. 一組のアフィン座標 X_1, \dots, X_n をとると, \mathbf{A} の点 p は座標 $(X_1(p), \dots, X_n(p))$ で表される.

定義 1.2.1. $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ が **アフィン関数** とは, 多項式 $F(X_1, \dots, X_n)$ があって, すべての $p \in \mathbf{A}$ に対して,

$$f(p) = F(X_1(p), \dots, X_n(p))$$

となってるいときを言う. アフィン関数という概念はアフィン座標の取り方によらず定まる⁴.

\mathbf{A} 上のアフィン関数全体 $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ は自然に環. さらに \mathbf{C} -代数になる. $f \mapsto F$ という対応によって, 同型

$$\mathbf{C}[\mathbf{A}] \cong \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$$

が誘導される. \mathbf{A} に $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ を付随させて考えるとき, 代数多様体としてのアフィン空間という. 以下この意味でアフィン空間という言葉を用いる.

定義 1.2.2. \mathbf{A} の部分集合 V が (**アフィン**) **代数的集合** であるとは, $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ の元 f_1, \dots, f_r があって,

$$V = \{p \in \mathbf{A} : f_1(p) = \dots = f_r(p) = 0\}$$

となるときをいう.

このとき, V は閉集合である. $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ の関数の V への制限を V 上のアフィン関数という. その全体 $\mathbf{C}[V]$ も同様に \mathbf{C} -代数となる. 以降代数的集合 V というときは, $\mathbf{C}[V]$ を付随させて考えるものとする.

制限写像

$$\mathbf{C}[\mathbf{A}] \rightarrow \mathbf{C}[V]; f \mapsto f|_V$$

は \mathbf{C} -代数の準同型であり, その定め方から全射となる. その核を $I(V)$ と書くことにすれば,

$$I(V) = \{f \in \mathbf{C}[\mathbf{A}] : f|_V = 0\}$$

$$\mathbf{C}[V] \cong \mathbf{C}[\mathbf{A}] / I(V)$$

となる. この $I(V)$ を V の **定義イデアル** という.

次のことは基本的である.

⁴つまり, アフィン変換で不変ということである.

命題 1.2.3. V_1, V_2 を代数的集合とすると、以下が成り立つ.

1. $V = \{p \in \mathbf{A} : \forall f \in I(V), f(p) = 0\}$
2. $V_1 \subset V_2 \Leftrightarrow I(V_2) \subset I(V_1)$
3. $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ の元 f に対して、自然数 n があって $f^n \in I(V)$ ならば $f \in I(V)$ となる⁵.

定義 1.2.4. $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ のイデアル I に対して、その**零点集合** $V(I)$ は次のように定義される.

$$V(I) = \{p \in \mathbf{A} : \forall f \in I, f(p) = 0\}$$

先程の命題の 1 は $V = V(I(V))$ とかける.

命題 1.2.5. 代数的集合の定義イデアルは有限個の素イデアルの共通部分である. 逆に $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ の素イデアルの共通部分はある代数的集合の定義イデアルである.

Proof. 代数的集合 V の定義イデアル $I(V)$ は、ネーター環 $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ のイデアルだから、有限個の準素イデアルの共通部分として表される:

$$I(V) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$$

\mathfrak{q}_j が準素イデアルなのでその根基 $\sqrt{\mathfrak{q}_j}$ は素イデアルで、 $\mathfrak{q}_j \subset \sqrt{\mathfrak{q}_j}$ なので

$$I(V) \subset \sqrt{\mathfrak{q}_1} \cap \cdots \cap \sqrt{\mathfrak{q}_r} \quad \cdots (*)$$

また、右辺の元 f をとると、ある自然数 n_j があって、 $f^{n_j} \in \mathfrak{q}_j$ であり、 $n = \max_j n_j$ とすると、

$$f^n \in \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r = I(V)$$

よって、 $f \in I(V)$ となり、(*) の等号が成り立つ. 逆はヒルベルトの零点定理による. \square

注意 1.2.6. 定義イデアル $I(V)$ の素イデアルへの分解 $I(V) = \bigcap_k \mathfrak{p}_k$ の \mathfrak{p}_i は他の素イデアルとの包含関係がないとして取れる. また、 $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ のネーター性から、任意のイデアル I に対してそれを含む極小素イデアルは有限個であり、

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{I \subset \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}: \text{prime ideal}}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{I \subset \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}: \text{prime ideal} \\ \mathfrak{p}: \text{minimal}}} \mathfrak{p}$$

が成り立つことと、 $\sqrt{I(V)} = I(V)$ からその素イデアルへの分解はそれぞれ極小素イデアルへの分解として取れることがわかる.

1.3 アフィン代数多様体

定義 1.3.1. アフィン空間 \mathbf{A} 内の代数的集合 V が**既約**⁶とは、任意の代数的集合 V_1, V_2 に対して $V = V_1 \cup V_2$ ならば $V = V_1$ または $V = V_2$ が成り立つときをいう.

命題 1.3.2. V が既約 $\Leftrightarrow I(V)$ が素イデアル

Proof. (\Rightarrow) $I(V) = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r$ が $I(V)$ の最短表示であって、 $r \geq 2$ とすると、

$$V(\mathfrak{p}_j) \not\subset \bigcup_{j \neq i} V(\mathfrak{p}_i)$$

であることに注意すれば、 V が既約であることに矛盾する. よって $r = 1$. これは $I(V)$ が素イデアルであることを示している.

(\Leftarrow) $V = V_1 \cup V_2$ で、 $V_1, V_2 \neq V$ とすると $I(V) = I(V_1) \cap I(V_2) = (\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r) \cap (\mathfrak{p}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}'_s)$ とかける. ここで、素イデアルの集合 $\{\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}'_j\}_{i,j}$ には少なくとも二つの極小元があることに注意する. 実際、一つならば $I(V) = I(V_1)$ か $I(V) = I(V_2)$ が成り立つのでおかしい. これは、 $I(V)$ が素イデアルであることに矛盾する. \square

⁵つまり、 $\sqrt{I(V)} = I(V)$ である.

⁶一般に位相空間 X が既約とは、 X の閉集合 X_1, X_2 を用いて $X = X_1 \cup X_2$ となるとき、 $X = X_1$ または $X = X_2$ が成り立つときをいう.

定義 1.3.3. アフィン空間の既約な代数的集合を**アフィン代数多様体**という。

命題 1.3.4. 代数的集合 V の中で包含関係で極大なアフィン代数多様体が存在する。

Proof. アフィン代数多様体の集合 $\mathcal{V} = \{V' \subset V : V' \text{ is affine algebraic variety}\}$ をとると, $\emptyset \in \mathcal{V}$ なので空ではなく, 包含関係で半順序である. 全順序部分集合 $\{V_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{V}$ をとると, $V_\infty = \bigcup_{i \in I} V_i$ は代数的集合であり, 既約である. 実際, $V_i = V(I(V_i))$ より $V_\infty = V(\bigcap_{i \in I} I(V_i))$ であり, 命題 1.2.5 から, $\bigcap_{i \in I} I(V_i)$ は代数的集合の定義イデアルなので V_∞ は代数的集合である. 既約であることは, $V_\infty = V_1 \cup V_2$ なる代数的集合 V_1, V_2 で $V_1, V_2 \neq V_\infty$ なるものを取る. すると, $V_1 \cup V_2 = V_j$ なる $j \in I$ が取れるが, V_j は既約なので $V_j = V_1$ または $V_j = V_2$ となり, すなわち, $V_\infty = V_1$ または $V_\infty = V_2$ となり矛盾である. 以上から $V_\infty \in \mathcal{V}$ であるから Zorn の補題より, 極大なアフィン代数多様体が存在する. \square

注意 1.3.5. 先程の証明はそのまま一般的な場合でも同様な証明が回る. つまり, 任意の位相空間には包含関係で極大な既約集合が存在する. また, このようなことを意識しなければ, 極小素イデアルの存在から言える. (実際 $\bigcap_{i \in I} I(V_i)$ は素イデアルであることがわかるので命題 1.3.2 から V_∞ は既約であることがわかる.)

定義 1.3.6. 代数的集合 V の極大な既約代数的集合 (つまりアフィン代数多様体) を V の**既約成分**という。

命題 1.3.7. 代数的集合 V は有限個の既約成分の和集合として一意的に表される。

Proof. まず, 有限個であることを示す. 有限個のアフィン代数多様体の和集合として表されない代数的集合が存在すると仮定し, それらの成す集合 \mathcal{V} とする. \mathcal{V} に対応するイデアルの集合を $\mathcal{I} = \{I(V) : V \in \mathcal{V}\}$ とする. $\mathbb{C}[\mathbf{A}]$ はネーター環なので, \mathcal{I} は極大元 I_0 を持つ. $I_0 = I(V_0)$ となる V_0 をとると, V_0 は \mathcal{V} の極小元となる. V_0 は既約ではないので

$$V_0 = V_1 \cup V_2$$

なる代数的集合 $V_1, V_2 \subsetneq V_0$ が取れる. すると, V_1, V_2 は有限個の既約成分の和集合として表されるので, V_0 も有限個の既約成分の和集合として表されることになり矛盾.

一意性を示す前に次の補題を示そう.

補題 1.3.8. 代数的集合 V が既約代数的集合 V_1, \dots, V_r の和集合で表され, かつ, それぞれの V_i は他のものとの包含関係を持たないとき, それぞれ V_i は既約成分である。

Proof. $V' \subset V$ なる既約代数的集合 V' をとると, ある k があって, $V' \subset V_k$ が成り立つ. 実際成り立たないとすると, 任意の i に対して $V' \not\subset V_i$ となり, $V' \cap V_i$ は V' の真の代数的集合であるが,

$$V' = \bigcup_{i=1}^r (V' \cap V_i)$$

より, V' が既約であることに矛盾する. 従って, ある k があって, $V' \subset V_k$ が成り立つ.

以上より, $V_i \subsetneq V' \subset V$ なる既約代数的集合 V' が取れたとすると, $V' \subset V_k$ なる k が取れる. 従って,

$$V_i \subsetneq V' \subset V_k$$

となるが, 仮定から $i = k$ であり, これは矛盾である. \square

上の補題から, $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$ でそれぞれ V_i が他のものとの包含関係を持たない既約代数的集合の場合に, その表示の一意性を示せば良い. 別の表示 $V = W_1 \cup \dots \cup W_s$ があったとする. 上の証明にもあったように, 任意の k に対してある i があって $W_k \subset V_i$ だが, W_k は極大なので $W_k = V_i$ となる. つまり, $s \leq r$ だが, 同様に $s \geq r$ も成り立つ. よって, W_k は V_i を並び替えたものである. \square

V の定義イデアルを $I(V) = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_r$ と最短表示すれば, $V = V(\mathfrak{p}_1) \cup \dots \cup V(\mathfrak{p}_r)$ であり, それぞれの $V(\mathfrak{p}_i)$ は他のものの和集合に含まれない. 従って, これら $V(\mathfrak{p}_1), \dots, V(\mathfrak{p}_r)$ は V の既約成分である. 実際, $V(\mathfrak{p}_i) \subsetneq V' \subset V$ なるアフィン代数多様体 V' があれば, $\mathfrak{p}_i \supsetneq I(V') \supset I(V)$ となり, $\mathfrak{p}_i \cap (\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j) = I(V) \supsetneq I(V') \cap (\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j)$ だが

索引

ア

アフィン関数, 2
アフィン空間, 1
アフィン座標系, 1
アフィン代数多様体, 4
アフィン代数的集合, 2
アフィン変換, 2

カ

既約, 3
既約成分, 4

タ

定義イデアル, 2

ラ

零点集合, 3