代数幾何学

Fefr

2025 年 8 月 25 日

目 次

まえがき

本書は古典的な代数幾何について論ずる．主に [?] を参考にするつもりである．

第1章　代数多様体

この章では代数幾何の対象である”代数多様体 (algebraic variety)”を定義する．

1.1　アフィン空間

アフィン空間を復習する．

定義 1.1.1. $\mathbf{A}$ を空でない集合．V を $\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．次の条件を満たす写像の族 $\{T_v : \mathbf{A} \to \mathbf{A} : v \in V\}$ が与えられているとき，組 $(\mathbf{A}, V)$ あるいは単に $\mathbf{A}$ を**アフィン空間**という．

1. 任意の $v, w \in V$ に対して，$T_{v+w} = T_v \circ T_w$ が成り立つ．
2. 任意の $P, Q \in \mathbf{A}$ に対して，ただ一つの $v \in V$ が存在して，$T_v(P) = Q$ となる．

定義 1.1.2. アフィン空間 $\mathbf{A}$ の次元はそれに伴うベクトル空間 V の次元 $\dim V$ で定める．

次は容易にわかる．

命題 1.1.3. $(\mathbf{A}, V)$ をアフィン空間とすると，次が成り立つ．

1. $0 \in V$ に対応する写像 T_0 は恒等写像 $1_{\mathbf{A}}$ である．

2. 任意の $v \in V$ に対して，T_v は全単射．

定義 1.1.4. 定義の 2 の v を $\overrightarrow{PQ}$ とかく[1]．また，$T_v(P)$ を $P + v$ とかく[2]．

命題 1.1.5. $(\mathbf{A}, V)$ をアフィン空間とすると，任意の $P, Q, R \in \mathbf{A}$ に対して，次が成り立つ．

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

Proof. $Q = P + \overrightarrow{PQ}$，$R = Q + \overrightarrow{QR}$ より，

$$R = P + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$$

となる．一方，$R = P + \overrightarrow{PR}$ であるから，$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ が従う．　□

有限次元ベクトル空間 V に座標系 $V \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}^n$ を入れるように，アフィン空間にも座標系を入れることができる．

定義 1.1.6. $\mathbf{A}$ をアフィン空間とし，$\mathbf{A}$ の点 O と V の基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ をとる．$\mathbf{A}$ の任意の点 P に対して，$\overrightarrow{OP} \in V$ が定まり，V の基底を用いて，$\overrightarrow{OP} = \sum_i P_i e_i$ とできる．このときの対応

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \to & \mathbf{C}^n \\ P & \mapsto & (P_1, \cdots, P_n) \end{array}$$

を $\mathbf{A}$ の **(アフィン) 座標系**といい，$(O; e_1, \cdots, e_n)$ とかく[3]．

[1]従って，$-v$ に対応するのは $\overrightarrow{QP}$ である．
[2]イメージは T_v は v だけ平行移動を行う写像である．
[3]アフィン座標系 $X : \mathbf{A} \to \mathbf{C}^n$ は各 i 成分への射影 π_i と合成し $X_i := \pi_i \circ X : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ が定義できることに注意する．

注意 1.1.7. 座標系を導入することで n 次元アフィン空間 $\mathbf{A}$ の点は $\mathbf{C}^n$ の点と一対一に対応する．従って，誤解のおそれがない場合 $\mathbf{C}^n$ を n 次元アフィン空間ということがある．

命題 1.1.8. アフィン空間 $\mathbf{A}$ に対して，二つの異なる座標系 $(O; e_1, \cdots, e_n)$，$(O'; e'_1, \cdots, e'_n)$ が与えられたとする．このとき，ある $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ と $b \in \mathbf{C}^n$ が存在して，任意の $P \in \mathbf{A}$ に対して，

$$\begin{pmatrix} P'_1 \\ \vdots \\ P'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} + b$$

が成り立つ．

Proof. 証明はベクトル空間における基底変換の議論と同様である． □

定義 1.1.9. 先程の命題における変換 $P' = AP + b$ を**アフィン変換**という．

1.2 アフィン空間内の代数的集合

ここで，可微分多様体の定義を思い出すと，それは

$\mathbf{C}$ 上の n 次元アフィン空間を $\mathbf{A}$(または次元を明示して $\mathbf{A}^n$) とかく．一組のアフィン座標 $X_1, \cdots, X_n$ をとると，$\mathbf{A}$ の点 p は座標 $(X_1(p), \cdots, X_n(p))$ で表される．

定義 1.2.1. $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ が**アフィン関数**とは，多項式 $F(X_1, \cdots, X_n)$ があって，すべての $p \in \mathbf{A}$ に対して，

$$f(p) = F(X_1(p), \cdots, X_n(p))$$

となってるいるときを言う．アフィン関数という概念はアフィン座標の取り方によらず定まり，アフィン空間 $\mathbf{A}$ 上のアフィン関数全体 $\mathbf{C}[\mathbf{A}]$ は $\mathbf{C}$ 上の可換環をなす．

索 引

ア