

位相幾何

Fefr

目次

1	位相空間の (コ) ホモロジー	2
1.1	圏と関手	2

1 位相空間の (コ) ホモロジー

1.1 圏と関手

圏の定義は略。

圏の例をすこしあげる。

例 1

位相空間 X から位相空間 Y への写像の族 $f_t : X \rightarrow Y$ に対し、写像 $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ を

$$F(x, t) = f_t(x) \quad (x \in X, t \in [0, 1])$$

で定義するとき、 F が連続ならば写像族 $\{f_t\}$ を f_0 から f_1 への**ホモトピー** (homotopy) という。

連続写像 $f, f' : X \rightarrow Y$ に対し、 f から f' へのホモトピーが存在するとき f は f' に**ホモトープ** (homotop) であるといい、 $f \simeq f' : X \rightarrow Y$ で表す。

ホモトープという関係は同値関係となる。

実際、反射律は $f \simeq f : X \rightarrow Y$ は $f_t = f$ とすることにより、対称律は $f \simeq f' : X \rightarrow Y$ とすると、 f' の f へのホモトピー $\{f'_t\}$ は f の f' へのホモトピー $\{f_t\}$ を用いて $f'_t = f_{1-t}$ で与えられる。推移律は、 $f \simeq f', f' \simeq f'' : X \rightarrow Y$ ならば f の f'' へのホモトピー $\{h_t\}$ が f から f' へのホモトピー $\{f_t\}$ 、 f' から f'' へのホモトピー $\{g_t\}$ を用いて

$$h_t = \begin{cases} f_{2t} & (0 \leq t \leq 1/2) \\ g_{2t-1} & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で与えられる。

上の同値類を連続写像の**ホモトピー類** (えいやくだれか教えて) という。

明らかに $f \simeq f' : X \rightarrow Y$ で $g \simeq g' : Y \rightarrow Z$ ならば

$$g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f' \simeq g' \circ f : X \rightarrow Z$$

である。 ($\{g \circ f_t\}$ が $g \circ f$ から $g \circ f'$ へのホモトピーを与え、 $\{g_t \circ f'\}$ が $g \circ f'$ から $g' \circ f'$ へのホモトピーを与える。)

すなわち、ホモトープな連続写像の合成はホモトープである。

よって、対象を位相空間とし、射を連続写像のホモトピー類で定義することにより、1つの圏が得られる。

ホモトープな例

$X = \mathbf{R}, Y = \mathbf{R}^2$ とし、それぞれ通常の位相を入れる。そして、 $f, g : X \rightarrow Y$ を

$$f(x) = (x, 0), \quad g(x) = (x, 1)$$

で定義する。そして、 $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ を

$$F(x, t) = (x, t)$$

で定義すれば、 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$ となり、位相空間論の知識より F, f, g は連続なので f, g はホモトープである。

加群, 加群の準同型写像の定義は略。 R 加群、 R 準同型写像を単に加群、準同型写像という。簡単のため R を可換環と仮定する。可換性が必要がない場面もある。

例 2

整数の集合 \mathbf{Z} を添字集合とする R 上の加群の族 $C = \{C_q\}$ を R 上の**次数つき加群** (graded module) といい、 C_q の元 c を C の**次数 q の元** といって、 $q = \deg c$ と書く。 C, C' を次数つき加群とし、 d を 1 つの整数とする。このとき \mathbf{Z} を添字集合とする準同型写像 $\varphi_q : C_q \rightarrow C_{q+d}$ の族 $\varphi = \{\varphi_q\}$ を C から C' への**次数 d の準同型写像** といい、 $\varphi : C \rightarrow C'$ で表す。

C'' も加群とし、 $\varphi' : C' \rightarrow C''$ を次数 d' の準同型写像とすると、次数 $d + d'$ の準同型写像 $\varphi' \circ \varphi : C \rightarrow C''$ を

$$(\varphi' \circ \varphi)_q = \varphi'_{d+q} \circ \varphi_q$$

で定義し、 φ と φ' の合成という。いま、次の二つの圏が得られる。

- 次数つき加群を対象とし、任意の次数の準同型写像を射とする圏
- 次数つき加群を対象とし、次数 0 の準同型写像を射とする圏

例 3

R 上の次数つき加群 C において、次数 -1 の準同型写像 $\partial : C \rightarrow C$ で

$$\partial \circ \partial = 0$$

を満たすものが与えられたとき、 (C, ∂) を R 上の**チェイン複体** (chain complex) という。チェイン複体は加群 C_q と準同型写像 $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$ の列

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \longrightarrow \cdots$$

で、各 q に対し

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$$

の成り立つもの、と言い換えることができる。 $\partial = \{\partial_q\}$ を**バウンダリ作用素** (boundary operator) という。チェイン複体 (C, ∂) を単に C で表す。

C, C' をチェイン複体とすると、次数 0 の準同型写像 $\varphi : C \rightarrow C'$ で、 C, C' のバウンダリ作用素 ∂ に対し

$$\partial \circ \varphi = \varphi \circ \partial$$

を満たすものを**チェイン写像** (chain map) という。すなわち、準同型写像 $\varphi_q : C_q \rightarrow C'_q$ の族 $\varphi = \{\varphi_q\}$ で、各 q に対し

$$\partial_q \circ \varphi_q = \varphi_{q-1} \circ \partial_q$$

の成り立つものがチェイン写像である。

チェイン複体の恒等写像 (恒等射) はチェイン写像であり ($\partial\varphi = \varphi\partial$ で次数 0 だから)

チェイン写像の合成はチェイン写像である。(確かめること)

よって、チェイン複体を対象とし、射をチェイン写像とすることにより、1つの圏を得る。

例 4

チェイン写像 $\varphi, \varphi' : C \rightarrow C'$ に対し、次数 $+1$ の準同型写像 $\Phi : C \rightarrow C'$ があって、

$$\partial \circ \Phi + \Phi \circ \partial = \varphi - \varphi'$$

が成り立つとき、 φ は φ' へのチェインホモトピーであるといい、 $\varphi \simeq \varphi' : C \rightarrow C'$ で表す。 Φ を φ の φ' へのチェインホモトピーという。

チェインホモトピーという関係は C から C' へのチェイン写像の集合における同値関係である。(あとで証明を追加したい。) この同値類をチェインホモトピー類という。

$\varphi \simeq \varphi' : C \rightarrow C'$ で $\psi \simeq \psi' : C' \rightarrow C''$ ならば、 $\psi \circ \varphi \simeq \psi' \circ \varphi' : C \rightarrow C''$ である。実際、 Φ を φ から φ' への、 Ψ を ψ から ψ' へのチェインホモトピーとすると

$$\psi' \circ \Phi + \Psi \circ \varphi : C \rightarrow C''$$

は $\psi \circ \varphi$ から $\psi' \circ \varphi'$ へのチェインホモトピーである。

よって、チェイン複体を対象とし、チェイン写像のチェインホモトピー類を射とすることにより、1 つの圏が得られる。

同型射、同型、関手の定義は略。例 1 の圏における同型射、同型はふつうホモトピー同値写像、ホモトピー同値とよばれている。

例 4 での同型射をチェイン同値写像という。

例 5

C をチェイン複体とする。

$$Z_q(C) = \text{Ker } \partial_q, \quad B_q(C) = \text{Im } \partial_{q+1}$$

とおけば、 $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ だから、 $B_q(C) \subset Z_q(C)$ である。商加群

$$H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$$

を C の q **ホモロジー群** といい、次数つき加群 $H_*(C) = \{H_q(C)\}$ を C の **ホモロジー群** という。 C_q の元を C の q **チェイン**。 $Z_q(C)$ の元を q **サイクル**。 $B_q(C)$ の元を q **バウンダリ** といい、 $c \in Z_q(C)$ で代表される $H_q(C)$ の元を $[c]$ で表して、 c の **ホモロジー類** という。チェイン写像 $\varphi: C \rightarrow C'$ は C の q サイクル、 q バウンダリを C' のそれらにうつす。したがって次数 0 の準同型写像 $H_*(\varphi): H_*(C) \rightarrow H_*(C')$ が

$$H_*(\varphi)([c]) = [\varphi(c)] \quad (c \in Z_q(C))$$

により定義される。 $H_*(\varphi)$ を φ により誘導される準同型写像といい、しばしば φ_* でかく。明らかに、 $H_*(1) = 1$, $H_*(\varphi \circ \varphi') = H_*(\varphi) \circ H_*(\varphi')$ である。したがって H_* はチェイン複体とチェイン写像の圏 (例 3) から次数つき加群と次数 0 の準同型写像の圏 (例 2(2)) への共変関手である。 H_* を **ホモロジー関手** という。