

位相幾何

Fefr

目次

1	位相空間の (コ) ホモロジー	2
1.1	圏と関手	2
1.2	特異ホモロジー	7

1 位相空間の (コ) ホモロジー

1.1 圏と関手

圏の定義は略。

圏の例をすこしあげる。

例 1

位相空間 X から位相空間 Y への写像の族 $f_t : X \rightarrow Y$ に対し、写像 $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ を

$$F(x, t) = f_t(x) \quad (x \in X, t \in [0, 1])$$

で定義するとき、 F が連続ならば写像族 $\{f_t\}$ を f_0 から f_1 への**ホモトピー** (homotopy) という。

連続写像 $f, f' : X \rightarrow Y$ に対し、 f から f' へのホモトピーが存在するとき f は f' に**ホモトープ** (homotop) であるといい、 $f \simeq f' : X \rightarrow Y$ で表す。

ホモトープという関係は同値関係となる。

実際、反射律は $f \simeq f : X \rightarrow Y$ は $f_t = f$ とすることにより、対称律は $f \simeq f' : X \rightarrow Y$ とすると、 f' の f へのホモトピー $\{f'_t\}$ は f の f' へのホモトピー $\{f_t\}$ を用いて $f'_t = f_{1-t}$ で与えられる。推移律は、 $f \simeq f', f' \simeq f'' : X \rightarrow Y$ ならば f の f'' へのホモトピー $\{h_t\}$ が f から f' へのホモトピー $\{f_t\}$ 、 f' から f'' へのホモトピー $\{g_t\}$ を用いて

$$h_t = \begin{cases} f_{2t} & (0 \leq t \leq 1/2) \\ g_{2t-1} & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で与えられる。

上の同値類を連続写像の**ホモトピー類** (えいやくだれか教えて) という。

明らかに $f \simeq f' : X \rightarrow Y$ で $g \simeq g' : Y \rightarrow Z$ ならば

$$g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f' \simeq g' \circ f : X \rightarrow Z$$

である。 ($\{g \circ f_t\}$ が $g \circ f$ から $g \circ f'$ へのホモトピーを与え、 $\{g_t \circ f'\}$ が $g \circ f'$ から $g' \circ f'$ へのホモトピーを与える。)

すなわち、ホモトープな連続写像の合成はホモトープである。

よって、対象を位相空間とし、射を連続写像のホモトピー類で定義することにより、1つの圏が得られる。

ホモトープな例

$X = \mathbf{R}, Y = \mathbf{R}^2$ とし、それぞれ通常の位相を入れる。そして、 $f, g : X \rightarrow Y$ を

$$f(x) = (x, 0), \quad g(x) = (x, 1)$$

で定義する。そして、 $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ を

$$F(x, t) = (x, t)$$

で定義すれば、 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$ となり、位相空間論の知識より F, f, g は連続なので f, g はホモトープである。

加群、加群の準同型写像の定義は略。 R 加群、 R 準同型写像を単に加群、準同型写像という。簡単のため R を可換環と仮定する。可換性が必要がない場面もある。

例 2

整数の集合 \mathbf{Z} を添字集合とする R 上の加群の族 $C = \{C_q\}$ を R 上の**次数つき加群** (graded module) といい、 C_q の元 c を C の**次数 q の元** といって、 $q = \deg c$ と書く。 C, C' を次数つき加群とし、 d を 1 つの整数とする。このとき \mathbf{Z} を添字集合とする準同型写像 $\varphi_q : C_q \rightarrow C_{q+d}$ の族 $\varphi = \{\varphi_q\}$ を C から C' への**次数 d の準同型写像** といい、 $\varphi : C \rightarrow C'$ で表す。

C'' も加群とし、 $\varphi' : C' \rightarrow C''$ を次数 d' の準同型写像とすると、次数 $d + d'$ の準同型写像 $\varphi' \circ \varphi : C \rightarrow C''$ を

$$(\varphi' \circ \varphi)_q = \varphi'_{d+q} \circ \varphi_q$$

で定義し、 φ と φ' の合成という。いま、次の二つの圏が得られる。

- 次数つき加群を対象とし、任意の次数の準同型写像を射とする圏
- 次数つき加群を対象とし、次数 0 の準同型写像を射とする圏

例 3

R 上の次数つき加群 C において、次数 -1 の準同型写像 $\partial : C \rightarrow C$ で

$$\partial \circ \partial = 0$$

を満たすものが与えられたとき、 (C, ∂) を R 上の**チェイン複体** (chain complex) という。チェイン複体は加群 C_q と準同型写像 $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$ の列

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \longrightarrow \cdots$$

で、各 q に対し

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$$

の成り立つもの、と言い換えることができる。 $\partial = \{\partial_q\}$ を**バウンダリ作用素** (boundary operator) という。チェイン複体 (C, ∂) を単に C で表す。

C, C' をチェイン複体とすると、次数 0 の準同型写像 $\varphi : C \rightarrow C'$ で、 C, C' のバウンダリ作用素 ∂, ∂' に対し

$$\partial' \circ \varphi = \varphi \circ \partial$$

を満たすものを**チェイン写像** (chain map) という。すなわち、準同型写像 $\varphi_q : C_q \rightarrow C'_q$ の族 $\varphi = \{\varphi_q\}$ で、各 q に対し

$$\partial'_q \circ \varphi_q = \varphi_{q-1} \circ \partial_q$$

の成り立つものがチェイン写像である。

チェイン複体の恒等写像 (恒等射) はチェイン写像であり ($\partial' \varphi = \varphi \partial$ で次数 0 だから)

チェイン写像の合成はチェイン写像である。(確かめること)

よって、チェイン複体を対象とし、射をチェイン写像とすることにより、1つの圏を得る。

例 4

チェイン写像 $\varphi, \varphi' : C \rightarrow C'$ に対し、次数 +1 の準同型写像 $\Phi : C \rightarrow C'$ があって、

$$\partial \circ \Phi + \Phi \circ \partial = \varphi - \varphi'$$

が成り立つとき、 φ は φ' へのチェインホモトピーであるといい、 $\varphi \simeq \varphi' : C \rightarrow C'$ で表す。 Φ を φ の φ' へのチェインホモトピーという。

チェインホモトピーという関係は C から C' へのチェイン写像の集合における同値関係である。(あとで証明を追加したい。) この同値類をチェインホモトピー類という。

$\varphi \simeq \varphi' : C \rightarrow C'$ で $\psi \simeq \psi' : C' \rightarrow C''$ ならば、 $\psi \circ \varphi \simeq \psi' \circ \varphi' : C \rightarrow C''$ である。実際、 Φ を φ から φ' への、 Ψ を ψ から ψ' へのチェインホモトピーとすると

$$\psi' \circ \Phi + \Psi \circ \varphi : C \rightarrow C''$$

は $\psi \circ \varphi$ から $\psi' \circ \varphi'$ へのチェインホモトピーである。

よって、チェイン複体を対象とし、チェイン写像のチェインホモトピー類を射とすることにより、1 つの圏が得られる。

同型射、同型、関手の定義は略。例 1 の圏における同型射、同型はふつうホモトピー同値写像、ホモトピー同値とよばれている。

例 4 での同型射をチェイン同値写像という。

例 5

C をチェイン複体とする。

$$Z_q(C) = \text{Ker } \partial_q, \quad B_q(C) = \text{Im } \partial_{q+1}$$

とおけば、 $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ だから、 $B_q(C) \subset Z_q(C)$ である。商加群

$$H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$$

を C の q **ホモロジー群** といい、次数つき加群 $H_*(C) = \{H_q(C)\}$ を C の **ホモロジー群** という。 C_q の元を C の q **チェイン**。 $Z_q(C)$ の元を q **サイクル**。 $B_q(C)$ の元を q **バウンダリ** といい、 $c \in Z_q(C)$ で代表される $H_q(C)$ の元を $[c]$ で表して、 c の **ホモロジー類** という。チェイン写像 $\varphi: C \rightarrow C'$ は C の q サイクル、 q バウンダリを C' の q サイクル、 q バウンダリに移す。実際、 $c \in Z_q(C) = \text{Ker } \partial_q$ をとると、 $\partial_q(c) = 0$ だから

$$\partial'_q(\varphi(c)) = (\partial'_q \circ \varphi)(c) = (\varphi \circ \partial_q)(c) = \varphi(\partial_q(c)) = \varphi(0) = 0$$

よって、 $c \in Z_q(C) \Rightarrow \varphi(c) \in Z_q(C')$ が成り立つ。

また、 $a \in B_q(C)$ をとると、ある $b \in C_{q+1}$ があって $a = \partial_{q+1}(b)$ を満たすから

$$\varphi(a) = \varphi(\partial_{q+1}(b)) = (\varphi \circ \partial_{q+1})(b) = (\partial'_{q+1} \circ \varphi)(b) = \partial'_{q+1}(\varphi(b)) \in B_q(C')$$

よって、 $c \in B_q(C) \Rightarrow \varphi(c) \in B_q(C')$ が成り立つ。

したがって次数 0 の準同型写像 $H_*(\varphi): H_*(C) \rightarrow H_*(C')$ が

$$H_*(\varphi)([c]) = [\varphi(c)] \quad (c \in Z_q(C))$$

により定義される。 $H_*(\varphi)$ を φ により**誘導される準同型写像**といい、しばしば φ_* でかく。明らかに、 $H_*(1) = 1, H_*(\varphi \circ \varphi') = H_*(\varphi) \circ H_*(\varphi')$ である。したがって H_* はチェイン複体とチェイン写像の圏 (例 3) から次数つき加群と次数 0 の準同型写像の圏 (例 2(2)) への共変関手である。 H_* を**ホモロジー関手**という。

例 6

チェイン写像 $\varphi, \varphi': C \rightarrow C'$ がチェインホモトピーならば、 φ の φ' へのチェインホモトピー Φ に対し

$$\varphi(c) - \varphi'(c) = \partial(\Phi(c)) \quad (c \in Z_q(C))$$

だから、 $[\varphi(c)] = [\varphi'(c)]$ で、したがって、 $H_*(\varphi) = H_*(\varphi'): H_*(C) \rightarrow H_*(C')$ よってホモロジー関手 H_* はまたチェイン複体とチェイン写像のチェインホモトピー類の圏 (例 4) から次数つき加群と次数 0 の準同型写像の圏への共変関手ともみられる。

例 7

位相空間 X に対し、 X の弧状連結成分の集合を考え、これより生成される自由加群を $H_0(X)$ で表す。また、位相空間の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し、次の条件によって準同型写像 $H_0(f): H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$ を定義する。 X の弧状連結成分 X_λ に対し、 $H_0(f)(X_\lambda)$ は $f(X_\lambda)$ を含む Y の弧状連結成分を表す。明らかに連続写像 $f, g: X \rightarrow Y$ がホモトープならば $H_0(f) = H_0(g)$

H_0 は位相空間と連続写像の圏、または位相空間と連続写像のホモトピー類の圏 (例 1) から加群の圏への共変関手である。

また、関手の定義から関手は同型を保存することがわかる。

1.2 特異ホモロジー

q 次元 Euclid 空間を \mathbf{R}^q で表し、その原点を P_0 , 第 i 軸上の単位点を P_i で表す ($i = 1, 2, \dots, q$) P_0, P_1, \dots, P_q で張られる q 次元単体を Δ^q で表し、**標準 q 単体**という。 $\Delta^1 = [0, 1]$ である。

$q \geq 1$ と $i = 0, 1, \dots, q$ に対し、

$$\varepsilon_q^i: \Delta^{q-1} \rightarrow \Delta^q$$

によって

$$\varepsilon_q^i(P_j) = \begin{cases} P_j & (j < i) \\ P_{j+1} & (j \geq i) \end{cases}$$

なる線型写像を表す。定義より明らかに

$$\varepsilon_{q+1}^j \circ \varepsilon_q^i = \varepsilon_{q+1}^i \circ \varepsilon_q^{j-1} \quad (i < j) \quad (1.1)$$

が成り立つ。

位相空間 X が与えられたとき、任意の連続写像 $\sigma: \Delta^q \rightarrow X$ を X の**特異 q 単体**という ($q \geq 0$) $q > 0$ のとき、各 $i = 0, 1, \dots, q$ に対し、特異 $q-1$ 単体 $\sigma \circ \varepsilon_q^i: \Delta^{q-1} \rightarrow X$ が得られるが、これを $d_i\sigma$ で表し、 σ の**第 i 面**という。

いま、単位元 1 をもつ可換環 R が与えられたとする。このとき次数つき加群 $S(X) = \{S_q(X)\}$ を $q \geq 0$ ならば $S_q(X)$ は X のすべての特異 q 単体の集合によって生成される自由加群を表し、 $q < 0$ ならば $S_q(X) = 0$ であるとして定義する。さらに次数 -1 の準同型写像 $\partial: S(X) \rightarrow S(X)$ を

$$\partial_q = \begin{cases} \sum_{i=0}^q (-1)^i d_i & (q > 0) \\ 0 & (q \leq 0) \end{cases}$$

によって定義する。ここに $d_i: S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$ は σ を $d_i\sigma$ にうつす準同型写像 (これを**面作用素**という)

(1.1) より明らかに

$$d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i \quad (i < j) \quad (1.2)$$

したがって

$$\begin{aligned}
\partial_q \circ \partial_{q+1} &= \sum_{i,j} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j \\
&= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} d_i \circ d_j \\
&= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} d_{j-1} \circ d_i + \sum_{i \geq j} d_i \circ d_j \\
&= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j+1} d_j \circ d_i + \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} d_j \circ d_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって $S(X)$ は ∂ をバウンダリ作用素としてチェイン複体である。

これを (\mathbb{R} に係数をもつ) X の特異チェイン複体という。