位相幾何

Fefr

目次

1　位相空間の (コ) ホモロジー

1.1　圏と関手

圏の定義は略。
圏の例をすこしあげる。

例 1

位相空間 X から位相空間 Y への写像の族 $f_i : X \to Y$ に対し、写像 $F : X \times [0,1] \to Y$ を

$$F(x,t) = f_i(x) \qquad (x \in X, t \in [0,1])$$

で定義するとき、F が連続ならば写像族 $\{f_i\}$ を f_0 から f_1 への**ホモトピー** (homotopy) という。
連続写像 $f, f' : X \to Y$ に対し、f から f' へのホモトピーが存在するとき f は f' に**ホモトープ** (homotop) であるといい、$f \simeq f' : X \to Y$ で表す。
ホモトープという関係は同値関係となる。
実際、反射律は $f \simeq f : X \to Y$ は $f_t = f$ とすることにより、対称律は $f \simeq f' : X \to Y$ とすると、f' の f へのホモトピー $\{f'_t\}$ は f の f' へのホモトピー $\{f_t\}$ を用いて $f'_t = f_{1-t}$ で与えられる。推移律は、$f \simeq f', f' \simeq f'' : X \to Y$ ならば f の f'' へのホモトピー $\{h_t\}$ が f から f' へのホモトピー $\{f_t\}$、f' から f'' へのホモトピー $\{g_t\}$ を用いて

$$h_t = \begin{cases} f_{2t} & (0 \leq t \leq 1/2) \\ g_{2t-1} & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で与えれる。
上の同値類を連続写像の**ホモトピー類** (えいやくだれか教えて) という。
明らかに $f \simeq f' : X \to Y$ で $g \simeq g' : Y \to Z$ ならば

$$g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f' : X \to Z$$

である。すなわち、ホモトープな連続写像の合成はホモトープである。
よって、対象を位相空間とし、射を連続者像のホモトピー類で定義することにより、1 つの圏が得られる。