

位相幾何

Fefr

目次

1	位相空間の (コ) ホモロジー	2
1.1	圏と関手	2

1 位相空間の (コ) ホモロジー

1.1 圏と関手

圏の定義は略。

圏の例をすこしあげる。

例 1

位相空間 X から位相空間 Y への写像の族 $f_i : X \rightarrow Y$ に対し、写像 $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ を

$$F(x, t) = f_i(x) \quad (x \in X, t \in [0, 1])$$

で定義するとき、 F が連続ならば写像族 $\{f_i\}$ を f_0 から f_1 への**ホモトピー** (homotopy) という。

連続写像 $f, f' : X \rightarrow Y$ に対し、 f から f' へのホモトピーが存在するとき f は f' に**ホモトープ** (homotop) であるといい、 $f \simeq f' : X \rightarrow Y$ で表す。

ホモトープという関係は同値関係となる。

実際、反射律は $f \simeq f : X \rightarrow Y$ は $f_t = f$ とすることにより、対称律は $f \simeq f' : X \rightarrow Y$ とすると、 f' の f へのホモトピー $\{f'_t\}$ は f の f' へのホモトピー $\{f_t\}$ を用いて $f'_t = f_{1-t}$ で与えられる。推移律は、 $f \simeq f', f' \simeq f'' : X \rightarrow Y$ ならば f の f'' へのホモトピー $\{h_t\}$ が f から f' へのホモトピー $\{f_t\}$ 、 f' から f'' へのホモトピー $\{g_t\}$ を用いて

$$h_t = \begin{cases} f_{2t} & (0 \leq t \leq 1/2) \\ g_{2t-1} & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で与えられる。

上の同値類を連続写像の**ホモトピー類** (えいやくだれか教えて) という。

明らかに $f \simeq f' : X \rightarrow Y$ で $g \simeq g' : Y \rightarrow Z$ ならば

$$g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f' \simeq g' \circ f : X \rightarrow Z$$

である。 ($\{g \circ f_t\}$ が $g \circ f$ から $g \circ f'$ へのホモトピーを与え、 $\{g_t \circ f'\}$ が $g \circ f'$ から $g' \circ f'$ へのホモトピーを与える。)

すなわち、ホモトープな連続写像の合成はホモトープである。

よって、対象を位相空間とし、射を連続写像のホモトピー類で定義することにより、1つの圏が得られる。

加群, 加群の準同型写像の定義は略。 R 加群、 R 準同型写像を単に加群、準同型写像という。簡単のため R を可換環と仮定する。可換性が必要がない場面もある。

例 2

整数の集合 \mathbf{Z} を添字集合とする R 上の加群の族 $C = \{C_q\}$ を R 上の**次数つき加群** (graded module) といい、 C_q の元 c を C の**次数 q の元** といって、 $q = \deg c$ と書く。 C, C' を次数つき加群とし、 d を 1 つの整数とする。このとき \mathbf{Z} を添字集合とする準同型写像 $\varphi_q : C_q \rightarrow C_{q+d}$ の族 $\varphi = \{\varphi_q\}$ を C から C' への**次数 d の準同型写像** といい、 $\varphi : C \rightarrow C'$ で表す。

C'' も加群とし、 $\varphi' : C' \rightarrow C''$ を次数 d' の準同型写像とすると、次数 $d + d'$ の準同型写像 $\varphi' \circ \varphi : C \rightarrow C''$ を

$$(\varphi' \circ \varphi)_q = \varphi'_q \circ \varphi_q$$

で定義し、 φ と φ' の合成という。いま、次の二つの圏が得られる。

- 次数つき加群を対象とし、任意の次数の準同型写像を射とする圏
- 次数つき加群を対象とし、次数 0 の準同型写像を射とする圏