位相幾何

Fefr

目次

1　位相空間の (コ) ホモロジー

1.1　圏と関手

圏の定義は略。
圏の例をすこしあげる。

例 1

位相空間 X から位相空間 Y への写像の族 $f_t : X \to Y$ に対し、写像 $F : X \times [0,1] \to Y$ を

$$F(x,t) = f_t(x) \qquad (x \in X, t \in [0,1])$$

で定義するとき、F が連続ならば写像族 $\{f_t\}$ を f_0 から f_1 への**ホモトピー** (homotopy) という。
連続写像 $f, f' : X \to Y$ に対し、f から f' へのホモトピーが存在するとき f は f' に**ホモトープ** (homotop) であるといい、$f \simeq f' : X \to Y$ で表す。
ホモトープという関係は同値関係となる。
実際、反射律は $f \simeq f : X \to Y$ は $f_t = f$ とすることにより、対称律は $f \simeq f' : X \to Y$ とすると、f' の f へのホモトピー $\{f'_t\}$ は f の f' へのホモトピー $\{f_t\}$ を用いて $f'_t = f_{1-t}$ で与えられる。推移律は、$f \simeq f', f' \simeq f'' : X \to Y$ ならば f の f'' へのホモトピー $\{h_t\}$ が f から f' へのホモトピー $\{f_t\}$、f' から f'' へのホモトピー $\{g_t\}$ を用いて

$$h_t = \begin{cases} f_{2t} & (0 \leq t \leq 1/2) \\ g_{2t-1} & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で与えられる。
上の同値類を連続写像の**ホモトピー類** (えいやくだれか教えて) という。
明らかに $f \simeq f' : X \to Y$ で $g \simeq g' : Y \to Z$ ならば

$$g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f' \simeq g' \circ f : X \to Z$$

である。($\{g \circ f_t\}$ が $g \circ f$ から $g \circ f'$ へのホモトピーを与え、$\{g_t \circ f'\}$ が $g \circ f'$ から $g' \circ f'$ へのホモトピーを与える。)
すなわち、ホモトープな連続写像の合成はホモトープである。
よって、対象を位相空間とし、射を連続写像のホモトピー類で定義することにより、1 つの圏が得られる。

ホモトープな例

$X = \mathbf{R}, Y = \mathbf{R}^2$ とし、それぞれ通常の位相を入れる。そして、$f, g : X \to Y$ を

$$f(x) = (x, 0), \qquad g(x) = (x, 1)$$

で定義する。そして、$F : X \times [0, 1] \to Y$ を

$$F(x, t) = (x, t)$$

で定義すれば、$F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$ となり、位相空間論の知識より F, f, g は連続なので f, g はホモトープである。

加群, 加群の準同型写像の定義は略。R 加群、R 準同型写像を単に加群、準同型写像という。簡単のため R を可換環と仮定する。可換性が必要がない場面もある。

例 2

整数の集合 $\mathbf{Z}$ を添字集合とする R 上の加群の族 $C = \{C_q\}$ を R 上の**次数つき加群** (graded module) といい、C_q の元 c を C の**次数** q **の元**といって、$q = \deg c$ と書く。C, C' を次数つき加群とし、d を 1 つの整数とする。このとき $\mathbf{Z}$ を添字集合とする準同型写像 $\varphi_q : C_q \to C_{q+d}$ の族 $\varphi = \{\varphi_q\}$ を C から C' への**次数** d **の準同型写像**といい、$\varphi : C \to C'$ で表す。

C'' も加群とし、$\varphi' : C' \to C''$ を次数 d' の準同型写像とするとき、次数 $d + d'$ の準同型写像 $\varphi' \circ \varphi : C \to C''$ を

$$(\varphi' \circ \varphi)_q = \varphi'_{d+q} \circ \varphi_q$$

で定義し、φ と φ' の合成という。いま、次の二つの圏が得られる。

- 次数つき加群を対象とし、任意の次数の準同型写像を射とする圏
- 次数つき加群を対象とし、次数 0 の準同型写像を射とする圏

例 3

R 上の次数つき加群 C において、次数 -1 の準同型写像 $\partial : C \to C$ で

$$\partial \circ \partial = 0$$

を満たすものが与えられたとき、(C, ∂) を **R 上のチェイン複体** (chain complex) という。
チェイン複体は加群 C_q と準同型写像 $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ の列

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \longrightarrow \cdots$$

で、各 q に対し

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$$

の成り立つもの、と言い換えることができる。$\partial = \{\partial_q\}$ を**バウンダリ作用素** (boundary operator) という。チェイン複体 (C, ∂) を単に C で表す。
C, C' をチェイン複体とするとき、次数 0 の準同型写像 $\varphi : C \to C'$ で、C, C' のバウンダリ作用素 ∂, ∂' に対し

$$\partial' \circ \varphi = \varphi \circ \partial$$

を満たすものを**チェイン写像** (chain map) という。すなわち、準同型写像 $\varphi_q : C_q \to C'_q$ の族 $\varphi = \{\varphi_q\}$ で、各 q に対し

$$\partial'_q \circ \varphi_q = \varphi_{q-1} \circ \partial_q$$

の成り立つものがチェイン写像である。
チェイン複体の恒等写像 (恒等射) はチェイン写像であり ($\partial'\varphi = \varphi\partial$ で次数 0 だから)
チェイン写像の合成はチェイン写像である。(確かめること)
よって、チェイン複体を対象とし、射をチェイン写像とすることにより、1 つの圏を得る。

例 4

チェイン写像 $\varphi, \varphi' : C \to C'$ に対し、次数 $+1$ の準同型写像 $\Phi : C \to C'$ があって、

$$\partial \circ \Phi + \Phi \circ \partial = \varphi - \varphi'$$

が成り立つとき、φ は φ' への**チェインホモトープ**であるといい、$\varphi \simeq \varphi' : C \to C'$ で表す。Φ を φ の φ' への**チェインホモトピー**という。
チェインホモトープという関係は C から C' へのチェイン写像の集合における同値関係である。(あとで証明を追加したい。) この同値類を**チェインホモトピー類**という。
$\varphi \simeq \varphi' : C \to C'$ で $\psi \simeq \psi' : C' \to C''$ ならば、$\psi \circ \varphi \simeq \psi' \circ \varphi' : C \to C''$ である。実際、Φ を φ から φ' への、Ψ を ψ から ψ' へのチェインホモトピーとするとき

$$\psi' \circ \Phi + \Psi \circ \varphi : C \to C''$$

は $\psi \circ \varphi$ から $\psi' \circ \varphi'$ へのチェインホモトピーである。
よって、チェイン複体を対象とし、チェイン写像のチェインホモトピー類を射とすることにより、1 つの圏が得られる。

同型射、同型、関手の定義は略。例 1 の圏における同型射、同型はふつう**ホモトピー同値写像**、**ホモトピー同値**とよばれている。
例 4 での同型射を**チェイン同値写像**という。

例 5

C をチェイン複体とする。

$$Z_q(C) = \operatorname{Ker}\partial_q, \qquad B_q(C) = \operatorname{Im}\partial_{q+1}$$

とおけば、$\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ だから、$B_q(C) \subset Z_q(C)$ である。商加群

$$H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$$

を C の q **ホモロジー群**といい、次数つき加群 $H_*(C) = \{H_q(C)\}$ を C の**ホモロジー群**という。C_q の元を C の q **チェイン**。$Z_q(C)$ の元を q **サイクル**。$B_q(C)$ の元を q **バウンダリ**といい、$c \in Z_q(C)$ で代表される $H_q(C)$ の元を $[c]$ で表して、c の**ホモロジー類**という。
チェイン写像 $\varphi\colon C \to C'$ は C の q サイクル、q バウンダリを C' の q サイクル、q バウンダリに移す。実際、$c \in Z_q(C) = \operatorname{Ker}\partial_q$ をとると、$\partial_q(c) = 0$ だから

$$\partial'_q(\varphi(c)) = (\partial'_q \circ \varphi)(c) = (\varphi \circ \partial_q)(c) = \varphi(\partial_q(c)) = \varphi(0) = 0$$

よって、$c \in Z_q(C) \Rightarrow \varphi(c) \in Z_q(C')$ が成り立つ。
また、$a \in B_q(C)$ をとると、ある $b \in C_{q+1}$ があって $a = \partial_{q+1}(b)$ を満たすから

$$\varphi(a) = \varphi(\partial_{q+1}(b)) = (\varphi \circ \partial_{q+1})(b) = (\partial'_{q+1} \circ \varphi)(b) = \partial'_{q+1}(\varphi(b)) \in B_q(C')$$

よって、$c \in B_q(C) \Rightarrow \varphi(c) \in B_q(C')$ が成り立つ。
したがって次数 0 の準同型写像 $H_*(\varphi)\colon H_*(C) \to H_*(C')$ が

$$H_*(\varphi)([c]) = [\varphi(c)] \qquad (c \in Z_q(C))$$

により定義される。$H_*(\varphi)$ を φ により**誘導される準同型写像**といい、しばしば φ_* でかく。
明らかに、$H_*(1) = 1, H_*(\varphi \circ \varphi') = H_*(\varphi) \circ H_*(\varphi')$ である。したがって H_* はチェイン複体とチェイン写像の圏 (例 3) から次数つき加群と次数 0 の準同型写像の圏 (例 2(2)) への共変関手である。H_* を**ホモロジー函手**という。