

## Kielen merkitys matematiikan opiskelussa

*Näkökulmia matematiikan tehtävien kielellisiin piirteisiin, oppitunnilla tapahtuvaan monikieliseen matemaattiseen vuoropuheluun ja matemaattiseen perustelemiseen.*

Matematiikan osaaminen ei saisi olla kielestä kiinni. Eikä se olekaan, jos tehtävänanto on "laske" tai "derivoi", mutta jos kyse on mallintamistehtävästä tai muusta sanallisesta tehtävästä, kielestä voi tulla este.

Matematiikan kielen traditio on pitkä ja se on myös kulttuurisesti määrytynyt. Elegantti matematiikan kieli on tiivistä, tarkkaa ja yksiselitteistä, jossa väärinymmärryksen mahdollisuudet on minimoitu äärimmilleen. Matematiikan kieleen kuuluvat sanasto, symbolit, kuvat ja kuviot. Näiden lisäksi voidaan tarkastella erikseen käsitteitä ja prosesseja. Matematiikan kielellä on myös tietty rakenne, joka joskus määrytyy matemaattisen päättelyn perusteella kuten todistuksissa ja joskus vain tavoista ilmaista jokin matemaattinen ajatus.

Matematiikan sanasto on moniulotteista esimerkiksi sana *tulo* tarkoittaa sekä itse prosessia  $a \cdot b$ , että tulosta ja arkikielessä se liittyy mielessämme moniinkin eri yhteyksiin. Voimme puhua lumen tulosta, perille tulosta ja ansiotulosta. Lisäksi matematiikassa jotkin sanat saavat uuden merkityksen, kuten *itseisarvo*, joka esimerkiksi etiikassa tarkoittaa arvoa, jota ei tarvitse eikä voida perustella muilla arvoilla. Matematiikan kielessä käytämme myös teknisiä termejä kuten sieventäminen, todistaminen, osoittaminen, hahmotteleminen. Niillä kaikilla tarkoitetaan jotain tietynlaista matemaattista toimintaa. Lisäksi matematiikkaan kuuluu muitakin prosesseja kuten luokittelu ja järjestäminen, jotka tosin ovat samalaisia useillakin tieteenaloilla. Matematiikassa on myös omat vakiintuneet tapansa perustella ja selittää.

Kielentäminen on työkalu oman ajattelun kuvaamiseen, kehittämiseen ja arviointiin. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkäjäsenarvioinnissa (vuosina 2005-2012), jossa samoja oppilaita seurattiin kolmannelta luokalta yhdeksännelle luokalle, huomattiin, että yksittäisten luokan aktiviteettien joukossa eräs tehokas tapa oppia näytti olevan se, että oppilaat neuvoivat toisiaan ja selittivät omia ratkaisujaan toisille oppilaille. On siis tärkeää käyttää tunnilla tehtäviä, joissa tällainen työskentely on mahdollista.

### Sanalliset tehtävät haastavat opiskelijoita kielellisesti

Sanallisia tehtäviä käytetään matematiikan tunneilla opeteltaessa ongelmanratkaisua ja kytkettäessä matematiikkaa arjen ilmiöihin. Sanalliset tehtävät ovat tehtäviä, joissa tulee vastata yhteen tai useampaan kysymykseen käyttäen apuna tehtävässä annettua matemaattista informaatiota. Sanalliset tehtävät voidaan jakaa kahteen joukkoon: arjen sanallisilla sovellustehtävillä tutustutaan reaali maailman ongelmiin, keinotekoisilla sanallisilla tehtävillä harjoitetaan matematiikan menetelmiä. Monet menetelmiä harjoittavat tehtävät ovat tehtäviä, joita arkielämässä tuskin koskaan tarkasteltaisiin matematiikan avulla. Hyvä esimerkki on tuttu lampaiden ja kanojen jalkojen ongelma, tuskin kukaan selvittäisi niiden lukumääriä yhtälöparilla.

Koulun arjessa, ja myös monissa tutkimuksissa on havaittu, että sanallisia tehtäviä ratkoessaan opiskelijat usein vain poimivat lukuja tekstistä ja suorittavat niillä joitain laskutoimituksia, joita kyseisessä kappaleessa harjoitellaan. Miksi näin? Ensimmäisen haasteen heittää sanojen määrä.

Opiskelijat eivät tunnu jaksavan lukea pitkiä tehtävänantoja. Toinen haaste syntyy tehtävän kompleksisuudesta. Ei välttämättä kielellisestä kompleksisuudesta, vaan esimerkiksi visuaalisten elementtien lukumäärästä. Usein sanallisiin tehtäviin liittyy muutakin informaatiota, diagrammeja ja kuvioita, tutkittavaksi samanaikaisesti. Nämä yhdessä lisäävät kognitiivista kuormaa ja asioiden mielessä pitämistä. On myös huomattu, että kontekstin tuttuudella on merkitystä. Jos aihealue on itselle vieras, niin silloin tekstin joukkoon mahtuu ihan outoja käsitteitä ja muutenkin on vaikea hahmottaa tehtävässä esiteltyä tilannetta. Tämä käy ilmi esimerkiksi talousmatematiikassa. Muutenkin matematiikan osa-alueella on merkitystä.

Mittaamiseen ja geometriaan liittyvien tehtävien on huomattu olevan vaikeimpia hahmottaa pelkän sanallisen tekstin perusteella. Kaiken tuon lisäksi vaikuttaa se, millaista matemaattista osaamista tehtävässä edellytetään. Pitäisikö tehtävänannon perusteella tietää jotain, soveltaa jotakin, vai jopa osata perustella jotakin? Myös tilasto- ja todennäköisyystehtävät ovat kielellisesti vaikeita. Niissä on yleensä paljon pitkiä sanoja ja tiiviisti kirjoitettuna. Realistisuuden nimissä tehtäviin on myös lisätty seurojen, yritysten ja henkilöiden nimiä. Tilastotehtäviin liittyy myös tarkkuutta lisääviä sanoja kuten enemmän, yhteensä, varmuudella, verrattuna, lainkaan ja niin edelleen, joilla on tässä yhteydessä aivan erityinen merkitys. Joukossa on myös sanontoja, joilla on erityinen, tekninen merkitys kuten ”alle 14 vuotta” tai ”yhtä suuri kuin”.

### Matikkapuhetta ja perustelemista

Opettajan kannattaa siis suosia tehtäviä, jotka herättävät keskustelua. Monikielisessä luokassa tämä tarkoittaa myös kunkin oman äidinkielen käyttämistä. Sillä äidinkielemme on myös usein ajattelumme kieli. Monikielisessä luokassa annat myös mahdollisuuden sille, että opiskelijoilla on tilaisuus testata ymmärrystään aiheesta. Tällaisia keskusteluja herättäviä tehtäviä ovat yleensä käsitteellistä ymmärrystä edellyttävät tehtävät. Vertaile seuraavia esimerkkejä, niin huomaat, mitä tarkoitan.

| Matemaattisia menetelmiä harjoittavia tehtäviä                         | Käsitteellistä ymmärrystä kehittäviä tehtäviä   |
|--|---|
| Laske huoneen pinta-ala.   | Arvioi huoneen pinta-ala ja perustele arviosi.  |
| Jos nukut 9 tuntia yössä, kuinka monta prosenttia se on vuorokaudesta? | Voidaanko väittää, että ihmiset nukkuvat keskimäärin 30 % vuorokaudesta? Miksi näin on?                 |
| Laske $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ .                      | Laskematta päättele, kuinka paljon on $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ . Perustele.            |
| Yhdistä avaruuskappale ja sen tilavuutta ilmaiseva kaava.              | Kerro, miten päättelet, mikä kaava liittyy mihinkin avaruuskappaleeseen.                                |
| Laske $24 \cdot 12$ .  | Kerro, miten laskisit päässäsi tulon $24 \cdot 12$ . Voitko laskea sen jollain toisella tavalla, miten? |
| Kirjoita yhtälöksi ja ratkaise.  | Keksi yhtälöön sopiva käytännön esimerkki. Mistä tiedät olevasi oikeassa?                               |

Lähde: <http://teachingmathliteracy.weebly.com/conceptual-vs-procedural-knowledge.html>

Lukiolaisilta odotetaan, että he oppisivat rakentamaan päteviä perusteluja ja arvioimaan toistensa päättelyä. Eräs keino saavuttaa näitä taitoja on opetella väittelemään. Väiteltäessä jokainen saa tilaisuuden kehittää ja yhdistellä ideoitaan, tunnistaa yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia, syventää käsitteellistä tai menetelmällistä osaamistaan, sekä keksiä esimerkkejä perusteluidensa tueksi. Väiteltäessä oikeaa tietoa muodostetaan lisäksi yhteistoimin ja joskus jopa rikkaammin kuin mitä opetusmateriaalit esittävät. Väittelytehtäviä voi kehittää esimerkiksi seuraavilla keinoilla:

- 1) Keksi esimerkkejä, joista opiskelijoiden tulee tunnistaa se, joka ei kuulu joukkoon. Joskus olisi hyvä, jos vastaukseksi kävisi vaihtoehtoista mikä tahansa. Valinnan perustelut vain olisivat erilaisia.
- 2) Ideoi aiheesta perinteisiä puolesta ja vastaan väittämiä.
- 3) Esitä jokin virheellinen tai puutteellinen ratkaisu. Opiskelijoiden tulee sitten korjata tai täydentää ratkaisua.
- 4) Näytä useampi erilainen ratkaisu samaan tehtävään. Opiskelijat voivat vertailla ratkaisuja eri näkökulmista.
- 5) Esitä jokin väite, laki tai määritelmä ja opiskelijoiden tulee perustella, miksi se pitää paikkansa.
- 6) Kerro jostain ilmiöstä ja opiskelijoiden tulee tunnistaa, mihin teoreettiseen näkökulmaan ilmiö liittyy.
- 7) Esittele jokin käsite tai menetelmä ja opiskelijoiden tulee keksiä esimerkki tai vastaesimerkki siihen liittyen.

Kun opettajana ohjaat väittelyä, anna riittävästi aikaa, jotta opiskelijat ennättävät muodostaa oman mielipiteensä. Jatka työskentelyä niin, että pienryhmät tai parit saavat hetken porista keskenään, näin varmistat, että jokaisella on mahdollisuus sanoa ajatuksensa ääneen. Kootkaa lopuksi yhdessä erilaisista perusteluista listaa ja vetäkää yhteen, mihin lopputulokseen keskustelussa päädytään. Uskon, että huomaat näissä keskusteluissa myös sen, millaisia virhekäsityksiä opiskelijoiden ajatteluun saattaa sisältyä ja pääset helpommin niitä korjaamaan.

#### **Kirjallisuutta:**

Abedi, J. & Lord, C. (2001). The language factor in mathematics tests. *Applied Measurement in Education*, 14(3), 219–234.

Ahlholm, M. & Portaankorva-Koivisto, P. (2018). The language factor – what exactly is it? Bilingual speakers of Russian and Finnish solving mathematical tasks. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 23(3–4), 101–123.

Bergvall, I., Wiksten Folkeryd, J. & Liberg, C. (2016). Linguistic features and their function in different mathematical content areas in TIMSS 2011. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 21(2), 45–68.

Hoogland, K., Pepin, B., de Koning, J., Bakker, A. & Gravemeijer, K. (2018). Word problems versus image-rich problems: an analysis of effects of task characteristics on students' performance on contextual mathematics problems. *Research in Mathematics Education*, 20(1), 37–52.

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisessa tutkimuksessa. – Kauppinen, M. & Tarnanen, M. (toim.) *Rajaton tulevaisuus: kohti kokonaisvaltaista oppimista*, s. 45–61.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. Teoksessa *The teaching and learning of mathematics at university level* (ss. 127-135). Springer, Dordrecht.

Osborne, J., Erduran, S., & Simon, S. (2004). Enhancing the Quality of Argumentation in School Science. *Journal of Research in Science Teaching*, 41(10), 994-1020.

Piippo, I., & Portaankorva-Koivisto, P. (2019). Monikielinen käsitteenoppiminen valmistavassa opetuksessa, esimerkkinä matematiikka. *Kieli, koulutus ja yhteiskunta*, 10(3).

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.