Rozwiązywanie równania różniczkowego zwyczajnego I rzędu metodą Rungego - Kutty

Przyjmujemy, że dane równanie różniczkowe da się zapisać w postaci:

$$(*) \qquad y' = f\big(x, y(x)\big), \qquad \text{gdzie } f(x,y) \text{ jest znaną funkcją.}$$

W zadaniu znamy wzór funkcji f i znana jest wartość szukanej funkcji $y = y(x)$ w danym punkcie x_0: $y(x_0) = y_0$. Należy znaleźć wartość funkcji y w punkcie x, tzn. $y(x)$.
Przedział $[x_0, x]$ (lub $[x, x_0]$, gdy $x < x_0$) możemy podzielić na N równych części o długości $|h| = |x - x_0|/N$ i obliczać wartość funkcji y w kolejnych punktach $x_n = x_0 + nh$, $n = 1, 2, \ldots, N$ aż dojdziemy do wartości $y_N = y(x_N) = y(x_0 + Nh) = y(x)$.

Do obliczenia szukanej wartości funkcji użyjemy wzorów Rungego-Kutty, a dokładniej formuł czwartego rzędu:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n)\\
k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1)\\
k_3 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_2)\\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3)\\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

RR

Równanie różniczkowe zwyczajne n-tego rzędu:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \ , \quad y = y(x) \text{ - niewiadoma funkcja}$$

Równanie różniczkowe zwyczajne I-go rzędu:

$$y' = f(x,y) \ , \quad y = y(x) \text{ - szukana funkcja} \ , \quad f(x,y) \text{ - dana funkcja} \ ,$$

$$y_0 = y(x_0) \text{ - warunek początkowy} \ , \quad x_0, y_0 \text{ - dane} .$$

Przykład r. r. zw. I-go rzędu:

(a) $y' = 2y$, $y = y(x) = ?$ $\quad (\text{tu: } f(x,y) = 2y)$ z war. początkowym:

(b) $y(x_0) = y_0$, np. $x_0 = 0$, $y_0 = 5$.

Ogólnym rozw. (a) jest każda funkcja postaci $y(x) = \underbrace{C \cdot e^{2x}}$, C - dowolna stała.

Sprawdzenie: $y'(x) = C \cdot 2e^{2x} = 2 \cdot \underbrace{Ce^{2x}} = 2 \cdot y(x)$

a np. z war. pocz. $y(\overset{x_0}{0}) = \overset{y_0}{5}$: $y(0) = C \cdot e^0 = C \cdot 1 = 5$, stąd $\underline{C = 5}$.

Rozw. (a) i (b) jest $\boxed{y(x) = 5 \cdot e^{2x}}$.

Rozwiązać r.r. I-go rzędu: $y' = x + y$, gdzie

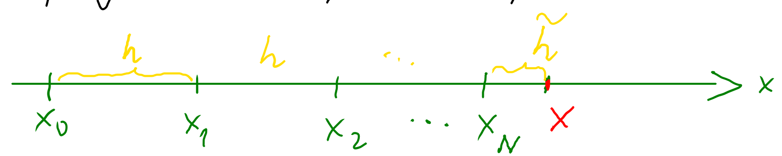
$y = y(x)$ - szukana funkcja. Tu: $f(x,y) = x+y$. Warunek początkowy: $y(\underset{x_0}{0}) = \underset{y_0}{1}$.

Zastosować wzory Rungego-Kutty 4-go rzędu.

Oblicz $y(1)$ używając kroku $h = 0{,}01$ do $h = 10^{-5}$.

Dane w zadaniu: $f(x,y) = x+y$, $x_0 = 0$, $y_0 = f(x_0) = 1$, $x = 1$,

$$h = 10^{-2} \div 10^{-5}.$$



(Wynik: $y(1) = 3{,}436563657\ldots$)

h-dane, wyliczamy: $N = \lceil (x - x_0)/h \rceil$.
ceil(·)

potem poprawka h: $h = (x - x_0)/N$.

Wyświetlić dla każdego h:

$h = 0{,}01$
$y(1) =$

$h = 0{,}001$
$y(1) =$

$\vdots$