INT 1

Wielomian interpolacyjny:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n .$$ Tu: $u_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$

$(x^0 \equiv 1$, ilość węzłów $= n+1)$

Dla każdego $i = 0, 1, \ldots, n$: $P_n(x_i) = y_i$, skąd:

$$\left.\begin{array}{ll}
i=0: & P_n(x_0) = a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + \ldots + a_n \cdot x_0^n = y_0 \\
i=1: & P_n(x_1) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + \ldots + a_n \cdot x_1^n = y_1 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
i=n: & P_n(x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_n + a_2 \cdot x_n^2 + \ldots + a_n \cdot x_n^n = y_n
\end{array}\right\}$$

$(n+1)$ równań

z $(n+1)$ niewiadomymi

$a_0, a_1, \ldots, a_n$

Macierz rozszerzona układu (wymiaru $(n+1) \times (n+2)$):

$$A = \begin{array}{c} \\ i=0 \\ i=1 \\ \\ i=n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} j=0 & j=1 & & & j=n & j=n+1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n & y_0 \\
1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n & y_1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n & y_n
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \leftarrow a_0 \\ \leftarrow a_1 \\ \vdots \\ \leftarrow a_n \end{array}$$

po rozwiązaniu (metodą GJ):

$$a_i = A[i][n+1]$$

Wyniki do wyświetlenia: (1) $a_0 = \ldots$, $a_1 = \ldots$, $\ldots$, $a_n = \ldots$ // współcz. wielomianu int. P_n

(2) użytkownik podaje różne wartości x $(x \in \langle x_0, x_n \rangle)$, program wyświetla wartość $P_n(x)$ // bez powtórnego obliczania wsp. a_i .

Jak sprawdzić, czy program dobrze działa? na węzłach (x_i z tabelki) wartości wielomianu interpolacyjnego P_n muszą się zgadzać z wartościami z tabelki, czyli

$$P_n(x_i) = y_i \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Obliczanie elementów macierzy rozszerzonej A:

a) Najpierw wypełnić $A[i][0] = 1$ i $A[i][n+1] = y[i]$, $i = 0, 1, \ldots, n$

b) następnie w pętli dla wiersza $i = 0, 1, \ldots, n$:

```
for ( int j = 1; j <= n ; j++)
{
    A[i][j] = A[i][j-1] * x[i];
}
```

Funkcja rozwiązująca układ równań:

```
void GJ(unsigned int n, double ** A)
{
    // tu kod
}
```

Wywołanie tej funkcji w programie:

```
GJ(n+1, tab);
```

nazwa tablicy w programie

Obliczanie wartości wielomianu (interpolac.):

np. dla $n = 3$: $\quad w = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$

$$= \left[(a_3 x + a_2) \cdot x + a_1 \right] \cdot x + a_0$$

kod C++:

```
double P(double x, double ** A)
{
    double w = A[n][n+1]    // równe a_n
    for (int j = n-1; j >= 0; j--)
    {
        w = w * x + A[j][n+1];
    }
    return w;
}
```