INT 2

Wielomian interpolacyjny:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u_k(x) = a_0 \cdot u_0(x) + a_1 \cdot u_1(x) + \ldots + a_n \cdot u_n(x). \quad \text{Tu: } u_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } k=0, \\ 2\cdot x, & \text{dla } k=1, \\ 2\cdot x \cdot u_{k-1}(x) - 2\cdot(k-1)\cdot u_{k-2}(x), & k \geq 2. \end{cases}$$

Dla każdego $i = 0, 1, \ldots, n$: $P_n(x_i) = y_i$, skąd:

$$\left.\begin{array}{ll} i=0: & P_n(x_0) = a_0 \cdot u_0(x_0) + a_1 \cdot u_1(x_0) + a_2 \cdot u_2(x_0) + \ldots + a_n \cdot u_n(x_0) = y_0 \\ i=1: & P_n(x_1) = a_0 \cdot u_0(x_1) + a_1 \cdot u_1(x_1) + a_2 \cdot u_2(x_1) + \ldots + a_n \cdot u_n(x_1) = y_1 \\ \ldots & \ldots \\ i=n: & P_n(x_n) = a_0 \cdot u_0(x_n) + a_1 \cdot u_1(x_n) + a_2 \cdot u_2(x_n) + \ldots + a_n \cdot u_n(x_n) = y_n \end{array}\right\}$$

$(n+1)$ równań z $(n+1)$ niewiadomymi $a_0, a_1, \ldots, a_n$

Macierz rozszerzona układu (wymiaru $(n+1) \times (n+2)$):

$$A = \begin{array}{c|ccccc|c|c} & j=0 & j=1 & j=2 & & j=n & j=n+1 & \\ \hline i=0 & u_0(x_0) & u_1(x_0) & u_2(x_0) & \ldots & u_n(x_0) & y_0 & \leftarrow a_0 \\ i=1 & u_0(x_1) & u_1(x_1) & u_2(x_1) & \ldots & u_n(x_1) & y_1 & \leftarrow a_1 \\ & u_0(x_2) & u_1(x_2) & u_2(x_2) & \ldots & u_n(x_2) & & \vdots \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ i=n & u_0(x_n) & u_1(x_n) & u_2(x_n) & \ldots & u_n(x_n) & y_n & \leftarrow a_n \end{array}$$

po rozwiązaniu (metodą GJ):

$$a_i = A[i][n+1]$$

Wyniki do wyświetlenia: (1) $a_0 = \ldots, a_1 = \ldots, \ldots, a_n = \ldots$ // współcz. wielomianu int. P_n

(2) użytkownik podaje różne wartości x ($x \in \langle x_0, x_n \rangle$), program wyświetla wartości $P_n(x)$ // bez powtórnego obliczania wsp. a_i.

Jak sprawdzić, czy program dobrze działa? na węzłach (x_i z tabelki) wartości wielomianu interpolacyjnego P_n muszą się zgadzać z wartościami z tabelki, czyli

$$P_n(x_i) = y_i \ , \ i = 0, 1, \dots, n .$$

1) Wpisz tabelkę funkcji f na węzłach: $x[i], y[i], \ i = 0, 1, \dots, n$.

2) Wypełnij macierz układu korzystając z definicji rekurencyjnej funkcji bazowych:

$$\begin{cases} u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = 2 \cdot x, \\ u_k(x) = 2 \cdot x \cdot u_{k-1}(x) - 2 \cdot (k-1) \cdot u_{k-2}(x) \quad \text{dla } k \geqslant 2. \end{cases}$$

W kodzie:

```
double u(double x, unsigned k)
{
    // tu: obliczenia zwracające wartość u_k(x)
}
```

3) Rozwiąż układ.

4) Wypisz $a_0, a_1, \dots, a_n$.

5) Wypisuj wartości $P(x)$ dla podawanych x. $\longrightarrow$

```
double P(double x, unsigned n, double **A)
{
    // tu obliczenia
}
```