Metoda Thomasa (algorytm "przeganiania")

Jeżeli w danym zagadnieniu mamy do rozwiązania tzw. 3-przekątniowy układ równań (np. w zadaniu interpolacji funkcjami sklejanymi), to szybszą metodą od metody eliminacji Gaussa jest metoda Thomasa.

Załóżmy, że mamy do rozwiązania następujący 3-przekątniowy układ równań:

$$0 = a_1 \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} c_n = 0 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Inny zapis tego układu:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$
$$\text{oraz } \ a_1 = 0, \ c_n = 0.$$

Rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$x_i = \beta_i \, x_{i+1} + \gamma_i \tag{2}$$

lub inaczej po przenumerowaniu:

$$x_{i-1} = \beta_{i-1} x_i + \gamma_{i-1}, \tag{3}$$

gdzie β_i, γ_i – nieznane współczynniki.
Po podstawieniu (3) do (1) i obliczeniu x_i:

$$x_i = -\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \, x_{i+1} + \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \tag{4}$$

Porównując prawe strony (2) i (4) otrzymamy:

$$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i}, \qquad \gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i}. \tag{5}$$

Wzory na β_1, γ_1 otrzymamy przekształcając odpowiednio (1) i (2) dla $i = 1$, a niewiadomą x_n otrzymamy z (1) i (3) dla $i = n$. Otrzymane wzory sprowadzą się do wzorów (4) i (5), jeżeli dodatkowo wprowadzimy współczynniki $a_1 = 0$ i $c_n = 0$ oraz dodatkową zmienną x_{n+1} o dowolnie nadanej wartości.
Otrzymamy wtedy $\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1}$, $\gamma_1 = \frac{d_1}{b_1}$ oraz $x_n = \gamma_n$.

W algorytmie przeganiania obliczamy najpierw w przód:

$$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i\beta_{i-1} + b_i}\,, \qquad \gamma_i = \frac{d_i - a_i\gamma_{i-1}}{a_i\beta_{i-1} + b_i},$$

dla $i = 2, \ldots, n$, gdzie $a_1 = 0$ oraz $c_n = 0$.
Następnie wyliczamy "od tyłu" kolejno niewiadome ze wzoru (4):

$$x_n = \gamma_n, \qquad x_i = \beta_i\, x_{i+1} + \gamma_i, \qquad i = n-1,\, n-2,\, \ldots, 1.$$

Wskazówka: Zamiast zapamiętywać całą macierz rozszerzoną układu $n \times (n+1)$ zawierającą większość zer dla dużych n, lepiej zapamiętać tylko jej trzy przekątne i wektor wyrazów wolnych w tablicy wymiaru $n \times 4$, gdzie w pierwszej kolumnie mamy a_i, w drugiej b_i, w trzeciej c_i i w czwartej wyrazy wolne d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (lub w 4 tablicach jednowymiarowych n-elementowych).
Dodatkowo należy wprowadzić tablicę wymiaru $n \times 2$ (lub 2 tablice jednowymiarowe) na pamiętanie kolejno wyliczanych współczynników β_i i γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Wektor X rozwiązań x_i można pamiętać osobno lub wprowadzać do jednej z kolumn powyższej tablicy $n \times 2$ w miejsce współczynników β_i lub lepiej γ_i, gdyż po wyliczeniu i-tej niewiadomej x_i współczynniki β i γ o tych i wyższych numerach nie są już potrzebne.