Obliczanie całek

Obliczamy całkę $\int_a^b f(x)\,dx$.

Oznaczenia:

$$h = \frac{b-a}{m}; \qquad x_i = a + ih, \quad y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

Przyjmiemy $m = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Wtedy

$$h = h_k = \frac{b-a}{2^k} = \frac{h_{k-1}}{2}, \qquad h_0 = b - a.$$

Będziemy tak długo podwajać ilość przedziałów podziału odcinka $[a, b]$ (na równe części), aż zmiana kolejnych wartości coraz dokładniej liczonych całek nie przekroczy ε podanego przez użytkownika. Przyjmiemy $\varepsilon = 10^{-4}$.

Metoda trapezów

Wartość całki liczymy ze wzoru

$$T_k = \frac{h_k}{2}\left(f(a) + f(b) + 2 \cdot \text{suma}\right), \qquad \text{gdzie suma} = \sum_{i=1}^{m-1} y_i,$$

dopóki $|T_k - T_{k-1}| \geqslant \varepsilon$.

Metoda Simpsona (parabol)

Stosujemy wzór

$$S_k = \frac{h_k}{3}\left(y_0 + y_m + 4 \cdot \text{Suma1} + 2 \cdot \text{Suma2}\right), \qquad \text{gdzie} \quad \text{Suma1} = \sum_{\substack{i=1 \\ (\text{co } 2)}}^{m-1} y_i, \quad \text{Suma2} = \sum_{\substack{i=2 \\ (\text{co } 2)}}^{m-2} y_i,$$

dopóki $|S_k - S_{k-1}| \geqslant \varepsilon$.

Metoda Romberga

Stosujemy wzór

$$\begin{cases} R_0 = \dfrac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a), \\ R_k = \frac{1}{2} R_{k-1} + h_k \cdot \text{SUMA}, \quad \text{dla } k \geqslant 1, \end{cases}$$

gdzie SUMA$= \sum_{i=1}^{2^{k-1}} f\big(a + (2i-1)h_k\big)$, dopóki $|R_k - R_{k-1}| \geqslant \varepsilon$.