Interpolacja

W zagadnieniu interpolacji danych jest $n+1$ różnych punktów $x_0, x_1, \dots, x_n$ z pewnego przedziału $\langle a; b\rangle$ nazywanych *węzłami interpolacji* oraz wartości pewnej funkcji $y = f(x)$ w tych punktach

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad \dots \quad f(x_n) = y_n.$$

Zadanie polega na wyznaczeniu takiej funkcji pewnej określonej postaci, aby jej wartości we wszystkich węzłach interpolacji przyjęły takie same wartości co funkcja $y = f(x)$.

Postać analityczna funkcji f może być znana lub nie. Jeśli nie jest znana, wtedy znamy tylko $n+1$ jej wartości i próbujemy przewidzieć wartości funkcji w punktach pośrednich. Ponieważ można to zrobić na nieskończenie wiele sposobów, zadajemy z góry możliwą postać funkcji (ograniczamy się do jednej rodziny funkcji mającej taką własność, że każdą funkcję w zadaniu interpolacji da się przybliżyć tylko na jeden sposób skończoną kombinacją liniową funkcji z wybranej rodziny, zwanych *funkcjami bazowymi*).

Jeżeli postać analityczna funkcji f jest znana, zadanie interpolacji sprowadza się do przybliżenia funkcji f funkcją zadanej postaci (zwykle danej prostszym wzorem lub łatwiejszą w obliczeniach) na przedziale $\langle a; b\rangle$, ale – w odróżnieniu od zadania aproksymacji – w węzłach interpolacji wartości obu funkcji muszą być te same.

Rodziną funkcji (bazowych) używaną w zadaniach interpolacji najczęściej jest pewna rodzina wielomianów (jednomiany lub częściej jedna z tzw. rodzin trójkątnych wielomianów, np. wielomiany Czebyszewa) lub rodzina wielomianów trygonometrycznych.

Poszukujemy uogólnionego wielomianu interpolacyjnego postaci:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i(x) = a_0 u_0(x) + a_1 u_1(x) + \dots + a_i u_i(x) + \dots + a_n u_n(x)$$

Funkcje $u_0(x)$, $u_1(x)$, ... , $u_n(x)$ są znanymi funkcjami bazowymi wybranej rodziny funkcji. Należy tak dobrać wartości współczynników $a_0, a_1, \dots, a_n$, aby wartości wielomianu P_n były równe wartościom funkcji interpolowanej f we wszystkich węzłach interpolacji x_i, $i = 0, \dots, n$

$$P_n(x_k) = f(x_k) = y_k, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

Z powyższego warunku wynika, że współczynniki $a_0, a_1, \dots, a_n$ powinny spełniać następujący układ równań:

$$\begin{cases} a_0u_0(x_0) + a_1u_1(x_0) + \dots + a_nu_n(x_0) = y_0 \\ a_0u_0(x_1) + a_1u_1(x_1) + \dots + a_nu_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ a_0u_0(x_n) + a_1u_1(x_n) + \dots + a_nu_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie $u_i(x_k) = u_{ki}$, to powyższy układ można zapisać w postaci macierzy rozszerzonej

$$\left[\begin{array}{cccc|c} u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0n} & y_0 \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1n} & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{n0} & u_{n1} & \dots & u_{nn} & y_n \end{array}\right]$$

z niewiadomymi $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Interpolacja w bazie jednomianów

Wyznacz współczynniki wielomianu interpolacyjnego

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i u_i(x),$$

gdzie $u_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, mając daną tabelę wartości funkcji

1.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1,5	2	2,5	3,5	3,8	4,1
y_i	2	5	-1	0,5	3	7

Następnie oblicz wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie $x = 3$.

2.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-2	-0,5	1,2	3	3,5	5	5,5
y_i	7	5	1	-0,5	2	1	-1

Następnie oblicz wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie $x = 2$.

Do obliczenia współczynników użyj np. metody eliminacji Gaussa.