

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami (przypadek ciągły)

Daną funkcję $f(x)$ ciągłą w przedziale $a; b$ mamy aproksymować wielomianem ustalonego stopnia k

$$P(x) = \sum_{j=0}^k p_j x^j = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_k x^k.$$

Wielomian P powinien przybliżać daną funkcję f możliwie najdokładniej w sensie metody najmniejszych kwadratów dla przypadku ciągłego, tzn. następująca funkcja mierząca odchylenie funkcji f od wielomianu P na przedziale $a; b$ powinna być jak najmniejsza:

$$S = S(p_0, p_1, \dots, p_k) := \int_a^b [\varepsilon(x)]^2 dx \leftarrow \min,$$

gdzie $\varepsilon(x) = f(x) - P(x)$. Funkcja S jest funkcją $k+1$ zmiennych p_0, p_1, \dots, p_k . Wielomian P będziemy znali, jeżeli znamy jego współczynniki p_0, p_1, \dots, p_k . Odpowiedni układ równań z niewiadomymi p_0, p_1, \dots, p_k otrzymamy z $k+1$ warunków koniecznych do istnienia ekstremum funkcji S :

$$\frac{\partial S}{\partial p_j} = 0, \quad \text{dla } j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Po zróżniczkowaniu funkcji S po zmiennej p_j otrzymamy

$$\frac{\partial S}{\partial p_j} = 2 \cdot \int_a^b [f(x) - P(x)] \frac{\partial P}{\partial p_j} dx = 0,$$

gdzie $\frac{\partial P}{\partial p_j} = x^j$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$.

Korzystając z liniowości całki (tu: całka różnicicy/sumy dwóch funkcji równa się różnicicy/sumie całek tych funkcji) otrzymujemy

$$\int_a^b f(x) \frac{\partial P}{\partial p_j} dx = \int_a^b P(x) \frac{\partial P}{\partial p_j} dx$$

dla każdego $j = 0, 1, 2, \dots, k$.

Lewa całka wynosi $I_j := \int_a^b f(x)x^j dx$. Prawa całka wynosi

$$\int_a^b (p_0 + p_1 x + \dots + p_k x^k) x^j dx = \frac{\Delta_{j+1}}{j+1} p_0 + \frac{\Delta_{j+2}}{j+2} p_1 + \dots + \frac{\Delta_{j+k+1}}{j+k+1} p_k,$$

gdzie $\Delta_i := b^i - a^i$, $i = j+1, \dots, j+k+1$. Otrzymamy wówczas układ $k+1$ równań z $k+1$ niewiadomymi p_0, p_1, \dots, p_k , którego macierz uzupełniona ma postać:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{\Delta_1}{1} & \frac{\Delta_2}{2} & \frac{\Delta_3}{3} & \cdots & \frac{\Delta_{k+1}}{k+1} & I_0 \\ \frac{\Delta_2}{2} & \frac{\Delta_3}{3} & \frac{\Delta_4}{4} & \cdots & \frac{\Delta_{k+2}}{k+2} & I_1 \\ \frac{\Delta_3}{3} & \frac{\Delta_4}{4} & \cdots & \cdots & \frac{\Delta_{k+3}}{k+3} & I_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta_{k+1}}{k+1} & \frac{\Delta_{k+2}}{k+2} & \cdots & \cdots & \frac{\Delta_{2k+1}}{2k+1} & I_k \end{array} \right]$$