Interpolacja za pomocą bazowych funkcji sklejanych 3-go stopnia

Na przedziale $[a;b]$ mamy dane $(n+1)$ punktów $x_0, x_1, \dots, x_n$, przy czym

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

oraz wartości pewnej funkcji f w tych punktach: $f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Punkty x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, nazywamy *węzłami funkcji sklejanej*. Określają one pewien podział przedziału $[a;b]$ na n podprzedziałów.
Na przedziale $[a;b]$ można określić funkcję sklejaną stopnia k ($k \geqslant 1$), która na każdym przedziale $(x_i; x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, jest wielomianem stopnia co najwyżej k oraz jest klasy $C^{k-1}([a;b])$, tzn. sama funkcja oraz jej wszystkie pochodne aż do rzędu $(k-1)$ są ciągłe na całym przedziale $[a;b]$. Tu zajmiemy się funkcjami sklejanymi stopnia 3 określonymi na przedziale $[a;b]$ z węzłami równoodległymi i przedstawionymi w postaci kombinacji liniowej elementów bazy przestrzeni $\mathbf{S}_3(\Delta_n)$ wszystkich funkcji sklejanych stopnia 3 na $[a;b]$ z węzłami równoodległymi

$$x_i = x_0 + ih, \qquad h = \frac{b-a}{n}, \qquad i = 0, 1, \dots, n.$$

Oznaczmy dodatkowo przez $x_{-2}, x_{-1}, x_{n+1}, x_{n+2}$ punkty $x_i = x_0 + ih$ dla $i = -2, -1, n+1, n+2$. Bazowe funkcje sklejane $B_i^3(x)$, $i = -1, 0, 1, \dots, n+1$, są określone w następujący sposób

$$B_i^3(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+2} - x)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{dla pozostałych } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Każdą funkcję sklejaną $s_n(x) \in \mathbf{S}_3(\Delta_n)$ można więc przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$s_n(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i^3(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

gdzie c_i są liczbami rzeczywistymi.
Ponieważ każda funkcja bazowa B_i^3, $i \in \mathbb{Z}$, jest niezerowa tylko na przedziale o długości $4h$, więc dla dowolnego $x \in [a, b]$, $x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1}$ jest

$$\begin{aligned} s_n(x) &= c_{m-1}B_{m-1}^3(x) + c_m B_m^3(x) + c_{m+1}B_{m+1}^3(x) + c_{m+2}B_{m+2}^3(x) = \\ &= \frac{1}{h^3}\Big\{ c_{m-1}(x_{m+1} - x)^3 + c_m\big[h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3\big] + \\ &\quad + c_{m+1}\big[h^3 + 3h^2(x - x_m) + 3h(x - x_m)^2 - 3(x - x_m)^3\big] + c_{m+2}(x - x_m)^3 \Big\}. \end{aligned}$$

Oznaczając $t = \dfrac{x - x_m}{h}$ mamy $x = tx_{m+1} + (1-t)x_m$. Stąd możemy otrzymać

$$s_n(x) = \Big\{ c_{m-1}(1-t)^3 + c_m\big[(2-t)^3 - 4(1-t)^3\big] + c_{m+1}\big[(1+t)^3 - 4t^3\big] + c_{m+2}t^3 \Big\}.$$

Na końcach przedziału $[a, b]$ musimy jeszcze nałożyć ograniczenia na pierwsze albo drugie pochodne jednostronne funkcji sklejanej. Np. zakładając, że znamy pierwsze pochodne: $s_n'(a^+) = \alpha$ oraz $s_n'(b^-) = \beta$, współczynniki c_i, $i = 0, \ldots, n$ wyliczamy z układu równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + \frac{1}{3}h\alpha \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - \frac{1}{3}h\beta \end{bmatrix}$$

a pozostałe dwa wzorami

$$c_{-1} = c_1 - \tfrac{1}{3}h\alpha, \qquad c_{n+1} = c_{n-1} + \tfrac{1}{3}h\beta.$$

Po rozwiązaniu tego układu równań znamy wszystkie współczynniki c_i, $i = -1, 0, \ldots, n, n+1$.

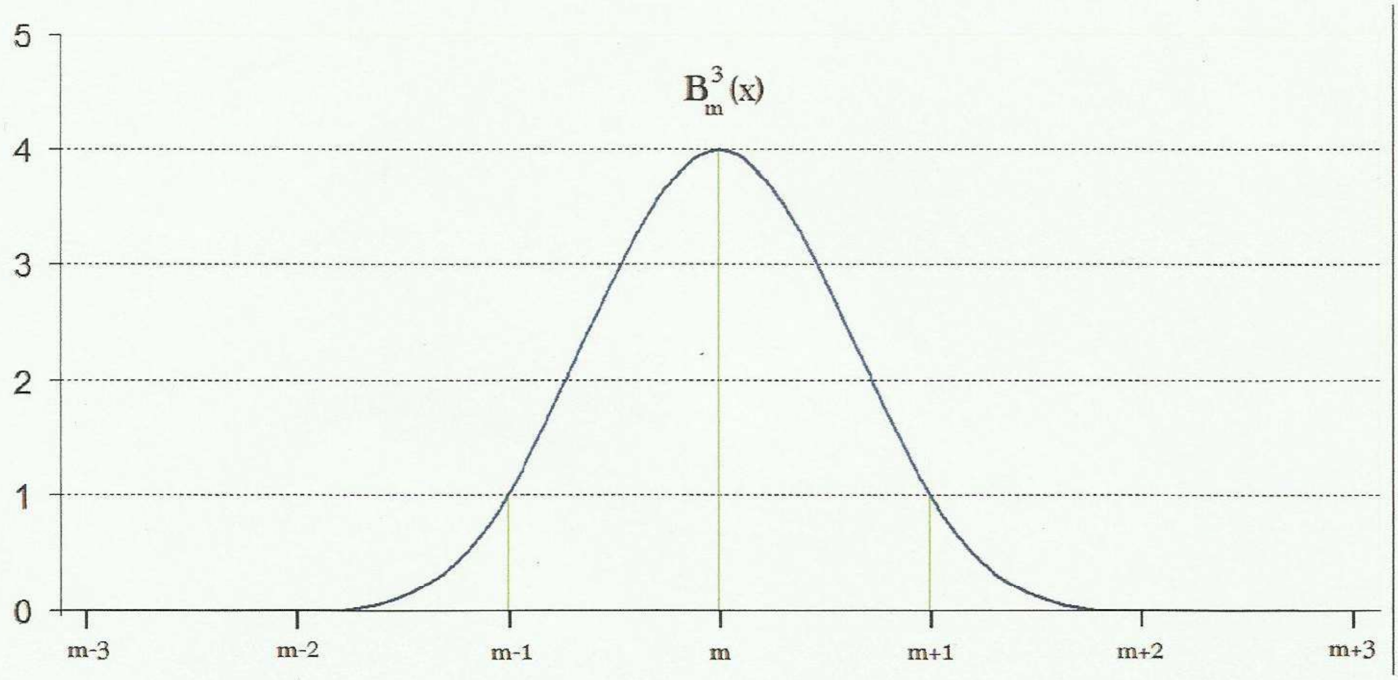
Obliczanie wartości funkcji sklejanej dla danego $x \in [a, b]$:

Zakładamy, że znamy wcześniej przedział $[a, b]$, ilość podprzedziałów n oraz $x \in [a, b]$.
Obliczamy $h = \dfrac{b-a}{n}$ oraz $m = \left\lfloor \dfrac{x-a}{h} \right\rfloor$ (część całkowita - tzw. funkcja "podłoga" lub z ang. "floor function") gdy $x \neq b$. Gdy $x = b$ podstawiamy $m = n - 1$ (aby nie wyjść poza zakres tablicy).
Zakładamy, że znamy wartości y_i funkcji w równoodległych węzłach $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Obliczamy współczynniki c_i, $i = -1, 0, \ldots, n, n+1$.
Następnie obliczamy $x_m = a + mh$ oraz $t = \dfrac{x - x_m}{h}$ (w węzłach $t = 0$, a dla $x = b$ jest $t = 1$).
Możemy teraz ostatecznie obliczyć wartość naszej funkcji sklejanej w podanym punkcie $x \in [a, b]$:

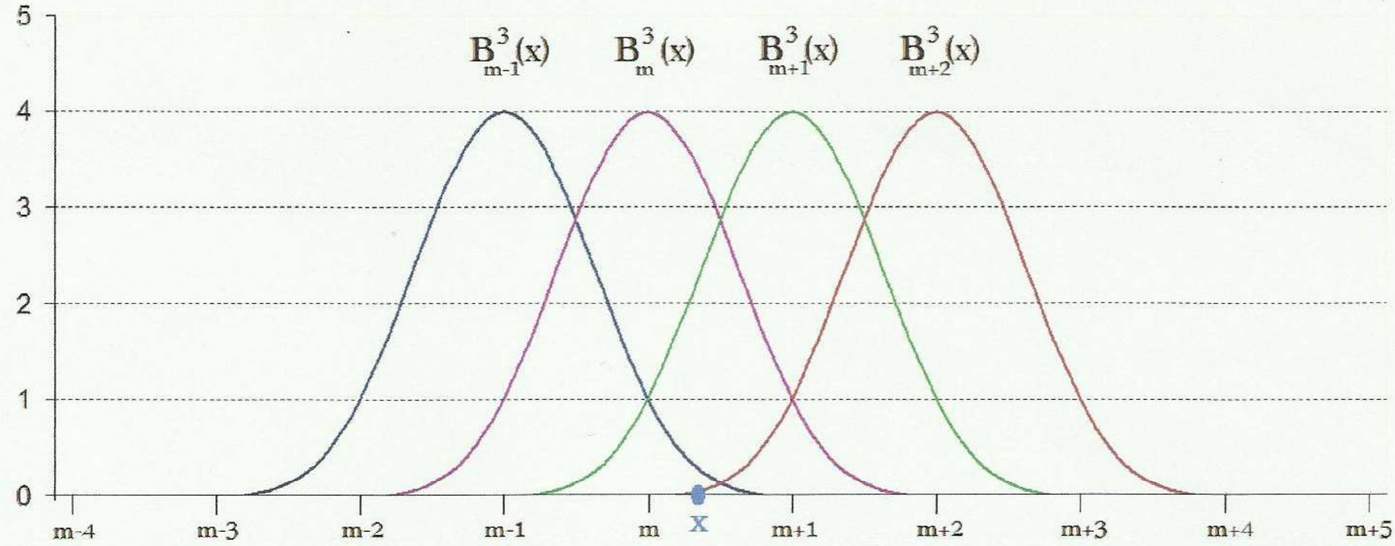
$$s = c_{m-1}(1-t)^3 + c_m\left[(2-t)^3 - 4(1-t)^3\right] + c_{m+1}\left[(1+t)^3 - 4t^3\right] + c_{m+2}t^3.$$

Uwaga: Możemy też obliczyć wartości pierwszej i drugiej pochodnej funkcji sklejanej interpolującej daną funkcję. Wystarczy zróżniczkować powyższą funkcję $s = s(x)$ traktując ją jako funkcję złożoną $s = s[t(x)]$, gdzie $t(x) = (x - x_m)/h$.

<u>Bazowe funkcje sklejane 3-go stopnia</u>



Funkcja bazowa (dla $h = 1$)



Cztery funkcje bazowe, które nie zerują się dla podanego **x**