Aproksymacja średniokwadratowa punktowa

Mamy dane $n+1$ wartości funkcji f dla $n+1$ wartości agumentów tej funkcji (węzłów aproksymacji). Funkcja f może być dana w postaci tabeli wartości lub wzorem (w drugim przypadku węzły można dobierać dowolnie na zadanym przedziale). W zadaniu aproksymacji liniowej szukamy wielomianu aproksymacyjnego uogólnionego P stopnia m, gdzie $m < n$ (dla $m = n$ mielibyśmy interpolację, którą można traktować jako szczególny przypadek aproksymacji):

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i\varphi_i(x) = p_0\varphi_0(x) + p_1\varphi_1(x) + \ldots + p_m\varphi_m(x),$$

gdzie $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, są danymi funkcjami bazowymi, a p_i są poszukiwanymi współczynnikami.
Wielomian uogólniony P powinien przybliżać daną funkcję f możliwie najdokładniej, w tym przypadku najdokładniej w sensie metody najmniejszych kwadratów, tzn. suma kwadratów odchyleń wartości wielomianu od wartości funkcji na węzłach x_j (gdzie $j = 0, \ldots, n$) powinna być jak najmniejsza:

$$S = S(p_0, p_1, \ldots, p_m) := \sum_{j=0}^{n} [\varepsilon(x_j)]^2 \ \leftarrow \ \min,$$

gdzie $\varepsilon(x_j) = P(x_j) - y_j, \ y_j = f(x_j)$. Funkcja S jest funkcją $m+1$ zmiennych $p_0, p_1, \ldots, p_m$. Wielomian P będziemy znali, jeżeli znamy jego współczynniki $p_0, p_1, \ldots, p_m$. Odpowiedni układ równań z niewiadomymi $p_0, p_1, \ldots, p_m$ otrzymamy z $m+1$ warunków koniecznych do istnienia ekstremum funkcji S:

$$\frac{\partial S}{\partial p_i} = 0, \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Otrzymamy układ $m+1$ równań z $m+1$ niewiadomymi $p_0, p_1, \ldots, p_m$, którego macierz uzupełniona ma postać:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}
\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_0(x_j)\varphi_0(x_j) & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_0(x_j)\varphi_1(x_j) & \ldots & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_0(x_j)\varphi_m(x_j) & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_0(x_j)y_j \\
\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_1(x_j)\varphi_0(x_j) & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_1(x_j)\varphi_1(x_j) & \ldots & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_1(x_j)\varphi_m(x_j) & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_1(x_j)y_j \\
\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_2(x_j)\varphi_0(x_j) & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_2(x_j)\varphi_1(x_j) & \ldots & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_2(x_j)\varphi_m(x_j) & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_2(x_j)y_j \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_m(x_j)\varphi_0(x_j) & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_m(x_j)\varphi_1(x_j) & \ldots & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_m(x_j)\varphi_m(x_j) & \sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_m(x_j)y_j
\end{array}\right]$$

Elementy k-tego wiersza i i-tej kolumny powyższej macierzy wynoszą $\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_k(x_j)\varphi_i(x_j)$ dla $k, i = 0, 1, \ldots, m$, a elementy kolumny numer $(m+1)$: $\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\varphi_k(x_j)y_j$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Funkcja $w(x)$ jest tu funkcją wagową.

Przykładowe zadanie:

Funkcje bazowe dane są wzorem rekurencyjnym: $\varphi_k(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } k = 0, \\ x+1 & \text{dla } k = 1, \\ \frac{k-1}{k+1}\, x\, \varphi_{k-1}(x) - \frac{1}{k}\, \varphi_{k-2}(x) & \text{dla } k \geqslant 2. \end{cases}$

Funkcja wagowa $w(x) \equiv 1$.
Dana jest tabela wartości funkcji $f(x)$ na węzłach:

x_j	1	1,5	2	4	6	7
y_j	−0,7	−0,35	−0,05	1,45	3,95	5,35

tu: $n = 5 \quad (j = 0, 1, \ldots, n)$

Program należy napisać tak, aby użytkownik mógł zmieniać m w wybranym zakresie $1 \leqslant m \leqslant n$ ($m = 0$ nie bierzemy pod uwagę – wtedy mamy funkcję stałą).

Należy wyznaczyć:

1. współczynniki $p_0, p_1, \ldots, p_m$,
2. Wartość funkcji błędu $S(p_0, \ldots, p_m)$,
3. $P_m(x)$ (x podaje użytkownik).

Jak sprawdzić: Biorąc $m = n$ mamy interpolację, wówczas sprawdzenie wygląda tak samo jak dla interpolacji: musi być $P_m(x_j) = y_j$, $j = 0, \ldots, n$.

Kolejne czynności:

- Zdefiniuj funkcje φ, w, P_m, S
- Wpisz tablice wartości węzłów i wartości funkcji f na tych węzłach
- Wczytaj wartość m
- Wypełnij macierz rozszerzoną układu równań liniowych (z niewiadomymi $p_0, \ldots, p_m$)
- Rozwiąż układ równań
- Wypisz wyniki