

## Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami (przypadek ciągły)

Daną funkcję  $f(x)$  ciągłą w przedziale  $< a; b >$  mamy aproksymować wielomianem ustalonego stopnia  $k$

$$P(x) = \sum_{j=0}^k p_j x^j = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_k x^k.$$

Wielomian  $P$  powinien przybliżać daną funkcję  $f$  możliwie najdokładniej w sensie metody najmniejszych kwadratów dla przypadku ciągłego, tzn. następująca funkcja mierząca odchylenie funkcji  $f$  od wielomianu  $P$  na przedziale  $< a; b >$  powinna być jak najmniejsza:

$$S = S(p_0, p_1, \dots, p_k) := \int_a^b [\varepsilon(x)]^2 dx \leftarrow \min,$$

gdzie  $\varepsilon(x) = f(x) - P(x)$ . Funkcja  $S$  jest funkcją  $k+1$  zmiennych  $p_0, p_1, \dots, p_k$ . Wielomian  $P$  będziemy znali, jeżeli znamy jego współczynniki  $p_0, p_1, \dots, p_k$ . Odpowiedni układ równań z niewiadomymi  $p_0, p_1, \dots, p_k$  otrzymamy z  $k+1$  warunków koniecznych do istnienia ekstremum funkcji  $S$ :

$$\frac{\partial S}{\partial p_j} = 0, \quad \text{dla } j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Po zróżniczkowaniu funkcji  $S$  po zmiennej  $p_j$  otrzymamy

$$\frac{\partial S}{\partial p_j} = 2 \cdot \int_a^b [f(x) - P(x)] \frac{\partial P}{\partial p_j} dx = 0,$$

gdzie  $\frac{\partial P}{\partial p_j} = x^j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ .

Korzystając z liniowości całki (tu: całka różnicy/sumy dwóch funkcji równa się różnicy/sumie całek tych funkcji) otrzymujemy

$$\int_a^b f(x) \frac{\partial P}{\partial p_j} dx = \int_a^b P(x) \frac{\partial P}{\partial p_j} dx$$

dla każdego  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ .

Lewa całka wynosi  $I_j := \int_a^b f(x) x^j dx$ . Prawa całka wynosi

$$\int_a^b (p_0 + p_1 x + \dots + p_k x^k) x^j dx = \frac{\Delta_{j+1}}{j+1} p_0 + \frac{\Delta_{j+2}}{j+2} p_1 + \dots + \frac{\Delta_{j+k+1}}{j+k+1} p_k,$$

gdzie  $\Delta_i := b^i - a^i$ ,  $i = j+1, \dots, j+k+1$ . Otrzymamy wówczas układ  $k+1$  równań z  $k+1$  niewiadomymi  $p_0, p_1, \dots, p_k$ , którego macierz uzupełniona ma postać:

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \frac{\Delta_1}{1} & \frac{\Delta_2}{2} & \frac{\Delta_3}{3} & \dots & \frac{\Delta_{k+1}}{k+1} & I_0 \\ \frac{\Delta_2}{2} & \frac{\Delta_3}{3} & \frac{\Delta_4}{4} & \dots & \frac{\Delta_{k+2}}{k+2} & I_1 \\ \frac{\Delta_3}{3} & \frac{\Delta_4}{4} & \dots & \dots & \frac{\Delta_{k+3}}{k+3} & I_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta_{k+1}}{k+1} & \frac{\Delta_{k+2}}{k+2} & \dots & \dots & \frac{\Delta_{2k+1}}{2k+1} & I_k \end{array} \right]$$