Cada filtro tiene una rta al impulso h[m]. Si sabes h[m], podes calcular su rta en frec. como: $H(\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]\, e^{-j\omega m}$ Pag 411

lo que vi en el Holton: $H(\omega) = e^{-j\omega M} \sum_{m=0}^{M} h[m]\, e^{-j\omega(m-M)}$ es una version desplazada que centra la fase (por eso aparece $e^{-j\omega M}$) para obtener fase lineal.

En los filtros de media movil, el impulso h[m] es simplemente una secuencia de unos:

$$h[m] = \begin{cases} 1, & m = 0, 1, \ldots, M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esa suma geometrica tiene una forma cerrada:

$$H(\omega) = e^{-j\omega \frac{(M-1)}{2}} \frac{\sin\left(\frac{M\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

Resolución

- $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$
- La rta en frec. es $H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$
- Sumas geometricas utiles: $\displaystyle\sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\omega m} = e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{M\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

a) $z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1 = T(z)$

Rta en frec $\rightarrow$ $H(e^{j\omega}) = T(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

$H(e^{j\omega}) = e^{-3j\omega} + e^{-2j\omega} + e^{-j\omega} + 1$

$H(e^{j\omega}) = e^{-3/2 j\omega}\left(e^{3/2 j\omega} + e^{-j 1/2\omega} + e^{j 1/2 \omega} + e^{3/2 j\omega}\right)$

$H(e^{j\omega}) = e^{-3/2 j\omega}\left[\left(e^{3/2 j\omega} + e^{-3/2 j\omega}\right) + \left(e^{-j 1/2\omega} + e^{j 1/2\omega}\right)\right]$

$H(e^{j\omega}) = e^{-3/2 j\omega}\left[2\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$

$H(e^{j\omega}) = 2\, e^{-3/2 j\omega}\left[\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$

uso $\rightarrow$ $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ $A = \frac{3\omega}{2}$, $B = \frac{\omega}{2}$

$H(e^{j\omega}) = 2\, e^{-3/2 j\omega}\left[2\cos(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = 4\, e^{-3/2 j\omega}\left[\cos(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]}$$

Modulo $\rightarrow$ $|H(e^{j\omega})|$ Fase $\rightarrow$ $\measuredangle H(e^{j\omega})$

$|H(e^{j\omega})| = 4\, \left|\cos(\omega) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|$

$\measuredangle H(e^{j\omega}) = -3/2\, \omega$

b) $H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}$

$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 4} + e^{-3j\omega} + e^{-2j\omega} + e^{-j\omega} + 1$

$H(e^{j\omega}) = e^{-2j\omega}\,(e^{2j\omega} + e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega})$

$H(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\,[2\cos(2\omega) + 2\cos(\omega) + 1]$

$|H(e^{j\omega})| = |1 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega)|$

$\measuredangle H(e^{j\omega}) = -2\omega$

c) $H(z) = 1 - z^{-1}$

Rta. frec. $H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2}\,(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) = e^{-j\omega/2} \cdot 2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$H(e^{j\omega}) = 2j\,e^{-j\omega/2}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$|H(e^{j\omega})| = \left|2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|$

La fase tiene 2 partes, el $e^{-j\omega/2}$ aporta $-\omega/2$ y j aporta $+\pi/2$

$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \pi/2 - \omega/2$

d) $H(z) = 1 - z^{-2}$

$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j2\omega} = e^{-j\omega}\,(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = 2j\,e^{-j\omega}\sin(\omega)$

Lo mismo que el c, $e^{-j\omega}$ aporta $-\omega$ y j aporta $+\pi/2$

$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \pi/2 - \omega$