MATEMATIKA 2

2020/2021

Marko Županj

DOLOČENI INTEGRAL

! DOKAZ FORMULE DOLOČENEGA INTEGRALA NA PDF DOKUMENTU

$$\int_a^b s_1(x)\,dx + \int_a^b s_2(x)\,dx \leq \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$$
$$\leq \int_a^b S_1(x) + \int_a^b S_2(x)\,dx$$

pomen členov preveri v prejšnjem predavanju oz pdf dokumentu

↳ neenakosti veljajo za poljubne stopničaste funkcije, ki zadoščajo zahtevi

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

SLEDI: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$

lastnosti

- $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- za poljubno konstanto $C \in \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b C\cdot f(x)\,dx = C\cdot\int_a^b f(x)\,dx$
- če je funkcija integrabilna na intervalu $[a,b]$ je integrabilna tudi na intervalih $[a,c]$ in $[c,b]$ $(a<c<b)$ (velja tudi v obratno smer)
- po definiciji je $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ in $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, če je f integrabilna na intervalu $[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$
  $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
- za katerikoli meji m in M; $m \leq f(x) \leq M$ na $a \leq x \leq b$ je $\quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad ; a \leq b$

  pozitivne in negativne

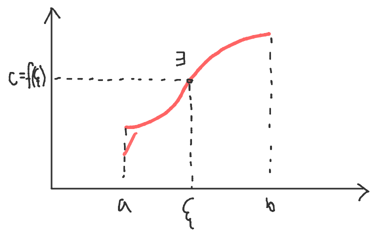
  ↳ samo pozitivne

IZREK O POVPREČNI VREDNOSTI

f zvezna funkcija na $[a,b]$

$\xi \in (a,b) \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

! Zagotovo obstaja ena točka, v kateri bo dosežena povprečna vrednost.



OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA

IZREK: naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$. Definirajmo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{za} \quad a \leq x \leq b$$

a x b

⇨ potem je F odvedljiva funkcija na intervalu $[a,b]$ in je

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \quad \text{za} \quad a \leq x \leq b$$

po definiciji odvoda $\quad \frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$

→ po izreku o povprečni vrednosti ↳ $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(z)$ za neko število z med x in $x+h$. → $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(z) \quad F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(z) = f'(z)$

posledica Leibnizovo pravilo $\quad \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

Naj bo F zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[a,b]$

dokaz Leibnizovega pravila

potem $\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a)$

$G(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$

Funkciji se razlikujeta za konstanto
$G(x)-F(x) = C$

$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t)dt \Rightarrow \boxed{\int_a^b F'(t)dt = F(b)-F(a)}$

ker $G(a)=F(a) \Rightarrow C=0 \Rightarrow G(x)=F(x)$

NEDOLOČENI INTEGRAL

Funkcija F je nedoločeni integral ali primitivna funkcija funkcije f, če $F'=f$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

! Vsaka zvezna funkcija ima integral.

primeri integralov

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

Konstanto C imamo, ker pri odvajanju konstanta odpade in je ne moremo natančno definirati.

Na različnih intervalih ima lahko integralska konstanta različno konstanto.