Clase 5 (P1)

(TL) hasta Ej 5 pract. 2

Def: V, W K-eV, $f: V \to W$ es TL

a) $f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in V$

b) $f(\lambda u) = \lambda f(u) \quad \forall \lambda \in K \ \forall u \in V$

Prop: f TL $\to f(0) = 0$

Ej 1) Determinar si las siguientes funciones son TL

(A) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + \cancel{3}\, i\, x_2, x_3 - x_2)$

$f: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$

• $f(0,0,0) = \dots = (0,0)$ ✓

a) $f((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3))$

$f((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)) =$

$(2(x_1+y_1) + i(x_2+y_2), (x_3+y_3) - (x_2+y_2))$

$= (\underbrace{2x_1 + i x_2} + \underbrace{2y_1 + i y_2}, \underbrace{x_3 - x_2} + \underbrace{y_3 - y_2})$

$= \underbrace{(2x_1 + i x_2, x_3 - x_2)}_{= f(x_1, x_2, x_3)} + \underbrace{(2y_1 + i y_2, y_3 - y_2)}_{= f(y_1, y_2, y_3)}$

$= f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3)$

(12)

(b) $f(\lambda(x_1,x_2,x_3)) =$

$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\cancel{2\lambda x_1}$
$= (2\lambda x_1 + i\lambda x_2, \lambda x_3 - \lambda x_2)$
$= (\lambda(2x_1 + i x_2), \lambda(x_3 - x_2)) =$
$= \lambda f(x_1, x_2, x_3)$

$\longrightarrow$ f es TL

---

(13) $f: R^{m\times n} \longrightarrow R^{n\times m}$ $\quad f(A) = -A^t$

a) $f(A+B) = -(A+B)^t = -(A^t + B^t)$

Ej (11) prácticos

$= -A^t - B^t =$
$= f(A) + f(B)$

b) $f(\lambda A) = -(\lambda A)^t = -\lambda . A^t =$

Ej 11 pract (c)

$= \lambda f(A)$

$\longrightarrow$ f es TL

c) $f: R^2 \longrightarrow R$ $\quad f(x_1, x_2) = x_1 . x_2$

a) $f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
$= (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = \underbrace{x_1 x_2}_{= f(x_1,x_2)} + x_1 y_2 + y_1 x_2 + \underbrace{y_1 y_2}_{= f(y_1,y_2)}$

$f(x_1; x_2) + f(y_1, y_2) = x_1 x_2 + y_1 . y_2 \neq f(x+y)$

$\longrightarrow$ f no es TL

Sea $B = \{v_1, \_\_\_, v_n\}$ base de V (P3)
$\exists\, v \in V$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \_\_\_ + \alpha_n v_n$$

$$\longrightarrow f(v) = f(\alpha v_1 + \_\_\_ + \alpha_n v_n) \overset{a)}{=}$$

$$= f(\alpha_1 v_1) + \_\_\_ + f(\alpha_n v_n) \overset{b)}{=}$$

$$= \underbrace{\alpha_1 f(v_1) + \_\_\_ + \alpha_n f(v_n)}$$

coordenadas de v en B

1^{era} conclusión: f esta univocamente determinada por los los valores que toma en una base $(f(v_1), .., f(v_n))$

Ej 2: Determinar si $\exists$ una TL f que cumpla:

A) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ /

$$f(1,2,1) = (1,1)$$
$$f(0,1,2) = (-1,-1)$$
$$f(1,2,0) = (0,2)$$
$$f(1,1,1) = (3,8)$$

Si puedo extraer una base

1) chequeo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

Escalonado con lo ~~que~~ vemos que $(1,1,1)$ es LD respecto al resto

000 es cohesivo c

$$B = \{(1,2,1)(0,1,2)(1,2,0)\}$$

Si f $\exists$ es unico.

Si f existe luego quiero ver si

Para ver ~~si~~ si f existe luego quiero ver si

$$f(1,1,1) \overset{?}{=} (3,8) \text{ (quiero calcular } f(1,1,1))$$

Escaneado con CamScanner

P4

Busco coordenadas de (1,1,1) en B

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\text{computadora}]{\text{Resuelto}} \begin{array}{l} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -2 \end{array}$$

Armado de columna

$$(1,1,1) = 3(1,2,1) - 1(0,1,2) - 2(1,2,0)$$

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= 3f(1,2,1) - f(0,1,2) - 2f(1,2,0) \\ &= 3(1,1) - (-1,-1) - 2(0,2) \\ &= (4,0) \neq \underbrace{(3,8)}_{\text{esto decía el enunciado}} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ no $\exists$ tal f

(B)

(B) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f(1,0,1,0) = (3,2) \\ f(1,2,0,1) = (5,4) \end{cases}$$ lo saco xq es (1)

~~$f(2,0,1,0) = (1,0)$~~

Como $(1,0,1,0)$ y $(1,1,0,1)$ son LI $\exists$ f que cumple pero no es única ($\exists$ inf TL)

conclusion 2: $f: V \to W$ $\nexists$ TL

$B = \{v_1 \text{———} v_n\}$ base de V,
la matriz asociada a f respecto de B
es aquella $M_B(f) = \left(\underset{\substack{\text{Columna} \\ \text{de } f(v_1)}}{f(v_1)} \,\middle|\, f(v_2) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, f(v_n) \right)$

y vale que
$$f(v) = M_B(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ej 3) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$f(-1,2,0) = (1,1)$ calcula $f(1,0,0)$

$f(1,1,1) = (-1,2)$

$f(2,0,1) = (0,1)$

Como $R = \{(-1,2,0), (1,1,1), (2,0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

$\exists!\ f$ /

Calcular coordenadas de $(1,0,0)$ en B

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Notebook}} \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = 2 \end{array}$$

Escaneado con CamScanner

Matriz Asociada

$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(OBS: $M_B(f)$ tiene dim W filas y dim V columnas)

$f(1,0,0) = M_B(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Def: $f: V \to W$ / definimos

$Nuf = \{v \in V / f(v) = 0\} \subset V$

$Imf = \{w \in W / \exists v \in V, f(v) = w\} \subset W$

Prop: Nuf e Imf son subespacios

Prop: B base de $V \longrightarrow Imf = \langle f(v_1), \ldots, f(v_n) \rangle$

Def: $f: V \to W$ TL

a) f es monomorfismo si $Nuf = \{0\}$

b) f es epimorfismo si $Imf = W$

c) f es isomorfismo si es monomorfismo y epimorfismo

P7

Ej 4 Calcular Núcleo f ó Im f $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Nuf

$f(1,0,1) = (1,-1,3)$

$f(-1,1,0) = (0,1,2)$

$f(0,0,2) = (1,-2,1)$

$Im f = \langle (1,-1,3)\ (0,1,2)\ (1,-2,1) \rangle$

busco base de Imf

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rolthoon}}$$

Escalonado
vemos que (1,-2,1) es
combinación lineal
de los otros 2

$\longrightarrow \dim(Im f) = 2 \longrightarrow f$ no es epimorfismo
por tener base de llegada
de 3

$Nuf = f(v) = 0 \longleftrightarrow M_\beta(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{matrix}$

$v = -\alpha_3(1,0,1) + \alpha_2(-1,1,0) + \alpha_3(0,0,2)$

$= \alpha_3(-2,1,1)$

$\longrightarrow Nuf = \langle (-2,1,1) \rangle$

$\longrightarrow f$ no es mono

Escaneado con CamScanner

P8

Teo de la dimensión: $f\ V \to W$ TL

$\dim(V) < \infty$, $\dim(V) = \dim(Nuf) + \dim(Imf)$