Clase 2 Practico (PC1)

20/5 → 27/5 (1er parcial)

Subespacios

Trabajamos en V con K-e.v. (cuerpo = IR o C)

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbb{C}^{n\times m}, C[0,1]$

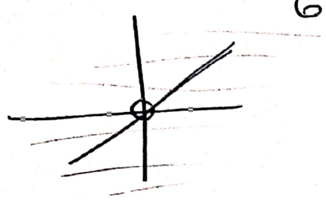
Def: $S \subset V$ es subespacio si cumple:

i) $\vec{O} \in S$ (origen)

ii) $u, v \in S \rightarrow u+v \in S$

iii) $v \in S \rightarrow \alpha.v \in S$ $\quad \forall \alpha \in K$

$V = \mathbb{R}^2$



En $\mathbb{R}^2$ los subespacios son

- $\{\vec{O}\}$
- cualquier recta q' pasa por el origen
- $\mathbb{R}^2$

Dos forma de representar un subespacio

- ecuaciones (implicita)
- generadores (explicita)

Ecuaciones → generadores.

Ej: $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \; 2x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 0\}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(si fuese $\neq 0$ entonces i) $\vec{O} \in S$ no estaría cumpliendo)

homogeneo $\longrightarrow$ 1 SC Trivial que el 0
(al menos 1 SC)

P2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 - 2F_1 = F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \ (I) \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \ (II) \end{cases}$$

(II) $2x_2 + 2x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = -x_2$

(I) $x_1 + x_2 + x_2 + x_4 = 0$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \longrightarrow$

$x_4 = -x_1 - 2x_2$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S = (x_1, x_2, -x_2, -x_1 - 2x_2)$$

$$= x_1(1,0,0,-1) + x_2(0,1,-1,-2)$$

$$\underbrace{S = \langle (1,0,0,-1), (0,1,-1,-2)}_{\text{generador}}$$

(grupo fabrican cualquier punto de S

$v \in S \to v = \alpha(1,0,0,-1) + \beta(0,1,-1,-2)$

y me fabrico un vector cualquiera

Generadores $\longrightarrow$ Ecuaciones

Ej: $V = \mathbb{C}^4$; $T = \langle (1,2,0,1)\,(0,i,-2,1) \rangle$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in T \longrightarrow$

fijo $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, 2, 0, 1) + \beta(0, i, -2, 1)$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \cancel{(\alpha, 2\alpha, 0, \alpha)}$
$(\alpha, 2\alpha + i\beta, -2\beta, \alpha + \beta)$

Queda sist de ecuaciones
(α y β son incognitas)

$$\begin{cases} \alpha = x_1 \\ 2\alpha + i\beta = x_2 \\ -2\beta = x_3 \\ \alpha + \beta = x_4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & i & x_2 \\ 0 & -2 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow[F_4 - F_1 = F_4]{F_2 - 2F_1 = F_2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & i & x_2 - 2x_i \\ 0 & -2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 - x_1 \end{array}\right)$$

chequeo 0s

$\xrightarrow[F_3 - 2iF_2 = F_3]{F_4 + iF_2 = F_4}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & i & x_2 - 2x_i \\ 0 & 0 & x_3 - 2i(x_2 - 2x_1) \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 + i(x_2 - 2x_1) \end{array}\right)$$

pensar

compatible necesito que

$x_3 - 2i(x_2 - 2x_i) = 0$

$x_4 - x_1 + i(x_2 - 2x_1) = 0$

homogéneos

R4

como $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in T$ el sol. no puede ser incompatible

luego debe valer

$$\begin{cases} x_3 - 2(x_2 - 2x_1) = 0 \\ x_4 - x_1 + i(x_2 - 2x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} 4i\, x_1 - 2i\, x_2 + x_3 = 0 \\ (-1-2i)x_1 + i x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$T = \{ x \in \mathbb{R}^4 / 4i\, x_1 - 2i\, x_2 + x_3 = 0,\ (-1-2i)x_1 + i x_2 + x_4 = 0 \}$$

——— o ———

Decidir si un vector pertenece a un subespacio

$V = \mathbb{R}^4$, $S = \{ x_1 + x_2 - x_3 + x_4,\ 2x_1 + 4x_2 + 0 + 2x_4$

¿$(1,1,-1,-3) \in S$?

Evaluo en las ecuaciones si las cumple,

$\in$ si !

$\notin$ si no.

$$1 + 1 - (-1) + (-3) = 0$$

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2(-3) = 0$$

$$\Rightarrow (1,1,-1,-3) \in O$$

Escaneado con CamScanner

homogeneo ⟶ 1 SC Trivial que el 0

(5)

Generadores $V = \mathbb{C}^4$ $T = \langle (1,2,0,1), (0,i,-2,1) \rangle$

¿$(2,0,0,1) \in T$?

1° forma
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & i & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1 = F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & i & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4iF_2 = F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & i & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8i & -1-4i \end{pmatrix}$$ no pertenece

Como la fila de $(2,0,0,1)$ NO se anulo no $(2,0,0,1) \notin T$

Pues no es CL de los generadores $(1,2,0,1)$ y $(0,i,-2,1)$

$(2,0,0,1) = \alpha(1,2,0,1) + \beta(0,i,-2,1)$

$\alpha = 2$

$2\alpha + i\beta = 0$

$-2\beta = 0$

$\alpha + \beta = 1$

$$\begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & i & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & i & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -2 & x_3 - 2i(x_2 - 2x_1) \\ 0 & 1 & x_4 - x_1 + i(x_2 - 2x_1) \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & -4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1-4i \end{array}\right)$$ segunda forma.

ST subespacio ¿ $S \subseteq T$?
Chequeo si todos los generadores
de S están en T
1°) Busco generadores de S
2do) chequeo si c/ generador $\in T$

Intersección de subespacios

Prop: S y T son subespacios $\rightarrow$ $S \cap T$ es subespacio

~~Def: Si $S \cap T = \{\vec{0}\}$~~

Ecuaciones - Ecuaciones

$V = \mathbb{R}^3$ $\quad S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

$T = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 = 0\}$

$x \in S \rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$x \in T \rightarrow x_1 - 2x_2 = 0$

$$x \in S \cap T \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$S \cap T = \{x \in \mathbb{R}^3 / \quad \}$

generadores - Ecuaciones

$V = \mathbb{C}^3$ $\quad S = \langle (1,1,2)\ (-1,-1,1) \rangle$

$T = \{x \in \mathbb{C}^3 / (i+1)x_1 - x_2 + 2x_3 i = 0\}$

$x \in S \rightarrow x = \alpha(1,1,2) + \beta(-1,-1,1) =$

$= (\alpha - \beta, \alpha - \beta, 2\alpha + \beta)$

$x \in T \rightarrow (i+1)x_1 - x_2 + 2i x_3 = 0$

$x \in S \cap T \rightarrow$ Reemplazo $x_1 = \alpha - \beta$

$x_2 = \alpha - \beta$

$x_3 = 2\alpha + \beta$

$(1+i)(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) + 2i(2\alpha + \beta) = 0$

$\Longleftrightarrow 5i\alpha + i\beta = 0$

$\beta = -5\alpha$

$\Longleftrightarrow x \in S \cap T \Longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (\alpha - (-5\alpha), \alpha - (-5\alpha), 2\alpha + (-5\alpha))$

$= (6\alpha, 6\alpha, -3\alpha)$

$= \alpha(6,6,-3)$

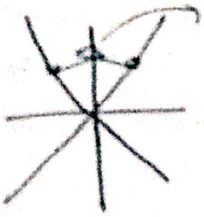
$\boxed{S \cap T = \langle (6,6,-3) \rangle}$ generador

GENS — GENS

Para uno de los subesp a ecuaciones.

¿ $S \cup T$?

en general no es un subespacio



no está la suma.

Obs: en general $S \cup T$ no es subespacio

~~Prop~~

Def $S \cap T$ subespacio, definimos

$S+T = \{x \in V / x = s + t$ con $s \in S, t \in T\}$

Prop: $S+T$ es subespacio

Definición si $S \cap T = \{0\}$ decimos que S y T están en suma directa y notamos $S \oplus T$

Ej

Gens de Generadores

$V = \mathbb{R}^4$ $S = \langle (1,0,-1,2)(2,1,3,5) \rangle$

$T = \langle (0,1,1,0)(1,3,0,2) \rangle$

hallar $s+T$

$s \in S \longrightarrow s = \alpha(1,0,-1,2) + \beta(2,1,3,5)$

$t \in T \longrightarrow T = \gamma(0,1,1,0) + \delta(1,3,0,2)$

$S+T = \alpha(1,0,-1,2) + \beta(2,1,3,5) + \gamma(0,1,1,0) + \delta(1,3,0,2$

$S+T = \langle (1,0,-1,2)(2,1,3,5)(0,1,1,0)(1,3,0,$