ALC Teoricas 1 clase (T1)

Gabriel Acosta

$\mathbb{C} = \{a+ib \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$

$+ \quad \circ$

$z \in \mathbb{C}$, $Re(z) = a$ $\quad Im(z) = b$

$a+bi$

$i^2 = i.i = -1$

Teo fund. del Algebra (TFA)

Todo polinomio en $\mathbb{C}[x]$ de grado "n" tiene n Raices (c/multiplicidad)

conjunto x complejo

raiz repetida : doble

$$z.\hat{z} = (a+bi)(\hat{a}+i\hat{b}) = (a\hat{a} - b.\hat{b}) + i(a\hat{b} + \hat{a}b)$$

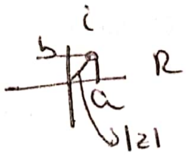
$$z+\hat{z} = (a+bi)+(\hat{a}+\hat{b}i) = (a+\hat{a}) + i(b+\hat{b})$$

Propiedades

con $z = a+bi$ $\quad \hat{z} = \hat{a} + \hat{b}i$

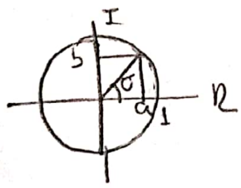
i) $\bar{z} = a - bi$

ii) $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$



iii) $z.\bar{z} = (a+ib)(a-ib)$
$= a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z.\bar{z} = |z|^2$

iv)



$|z| = 1$

$z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

$e^{i\theta} \underset{\text{definición}}{=} \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ (para $\theta = 1$ y fijo)

Ej. $\quad e^{i(\theta+\hat{\theta})} = e^{i\theta} . e^{i\hat{\theta}}$ (Probar)

v) $z \neq 0$, normalizar al dividir por el modulo

$\rightarrow \dfrac{z}{|z|} \quad \rightsquigarrow z = |z| e^{i\theta}$

vi) $z \neq 0$, $\quad z . \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$ OBS: $\forall z \neq 0 \; \exists \; z^{-1} \,/\, z.z^{-1} = 1$

VII) En $\mathbb{C}$ $\exists$ 1 (el uso del 1) / i.G es decir

$\forall z \in \mathbb{C}$ $z \cdot 1 = z$

VIII) En $\mathbb{C}$ $\exists$ "0" (cero) i.G $\forall z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = z$

$\downarrow$

$0 + i0$

Def $\mathbb{K}$ un cjto. con dos operaciones $+$ y $\circ$

$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ (2 argumentos y devuelve un resultado)

$\circ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

y con las siguientes Propiedades.

$\forall a, b, c \in \mathbb{K}$

i) $a + b = b + a$

$a \cdot b = b \cdot a$ (conmutativo)

Binario (Al menos 2 cosas donde 1)

ii) $(a+b)+c = a+(b+c)$

$(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$ (Asociativo)

iii) $\exists 0 / \overset{\forall a,}{a} + 0 = a$, $\exists 1 / \overset{\forall a \ne 0,}{a} \cdot 1 = a$ (Neutro)

$\in \mathbb{K}$

iv) $\forall a \in \mathbb{K}$ $\exists -a \in \mathbb{K} / a + (-a) = 0$

$\forall a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ $\exists a^{-1} \in \mathbb{K}$, $a \cdot a^{-1} = 1$

v) $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ aditivo multip.

$\rightarrow$ $\mathbb{K}$ se llama cuerpo (Sin ~~cero~~ ~~mult.~~)

$\boxed{\mathbb{N} \text{ no}}$

ej// $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$

OBS: $\mathbb{K}$ cuerpo, $a \cdot 0 = 0$

$0 + 0 = 0$ ✓

$a \cdot 0 = a(0+0)$ ✓ $= a \cdot 0 + a \cdot 0$

$= a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$\exists b / a \cdot 0$ $\quad a \cdot 0 + b = 0$

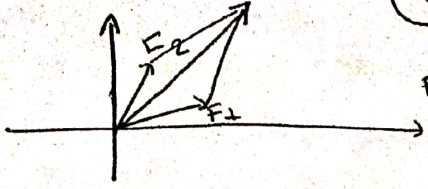
inverso aditivo

$a \cdot 0 + b = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + b)$

$0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$

T8

$\mathbb{R}^n$



$F_1 = (a_1, a_2)$
$F_2 = (b_1, b_2)$
$F_3 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

not $v \in \mathbb{R}^n$

es uno v

$v = (v_1, v_2, \ldots v_n)$

v_i - i-esima coordenada

$v, w \in \mathbb{R}^n$

$v + w \in \mathbb{R}^n$

$[v + w]_i = v_i + w_i$ definicion

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad [\alpha \circ v]_i = \alpha \cdot v_i$ coordenada i

$\mathbb{K}$ quiere decir $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (corona)

Def: un cjt $\mathbb{V}$ se dice un $\mathbb{K}$- Espacio vectorial si tiene estas propiedades

$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$

$\circ : \underbrace{\mathbb{K}}_{\text{escalar}} \times \underbrace{\mathbb{V}}_{} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{V}}_{\text{vector}}$

$\forall\, v, w, z \in \mathbb{V}, \ a, b, c \in K$

i) $v + w = w + v$

ii) $(v + w) + z = v + (w + z)$

iii) $\exists\, 0 \,/\, v + 0 = v \quad \forall v \in \mathbb{V}$

$\Rightarrow$ 0 no es comun, $\exists\, 0 \in \mathbb{V}$

iv) $\forall v \in \mathbb{V}, \exists -v \,/\, v + (-v) = 0 \in \mathbb{V}$

v) $1 \in K \quad 1 \cdot v = v \quad \forall\, v \in \mathbb{V}$

vi) $(a + b) v = v \cdot a + b \cdot w$

vii) $a(v + w) = a v + a \cdot w$

viii) $\underline{(a \cdot b) \cdot v} = a \circ (b \circ v)$

esto por no son el mismo

Ejemplo i) $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-esp. vectorial

ii) $\mathbb{C}^{n\times m}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

iii) $\mathbb{R}[x]$ (conjunto de todos los polinomios) es un $\mathbb{R}$-esp. vectorial

si cumple las propiedades ya dicho

(iv) $\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continuas} \}$

Def: Un conjunto $C = \{v_1 \ldots v_k\} \subset V$ con V un $\mathbb{K}$-$\underline{EV}$ (espacio vec.)

Se dice Linealmente Independiente (LI) $\Longleftrightarrow$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i . v_i = 0 \longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \cdots = \alpha_k = 0 \right)$$

OBS: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot v_i$ se llama combinación lineal de vectores.

Def El C de la definición previa, se dice LD (linealmente dependiente) $\Longleftrightarrow$ $\underline{\text{no}}$ es LI

OBS: 1) Si $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es LD

$\rightarrow \exists \{\alpha_1 \ldots, \alpha_k\} \subset \mathbb{K}$

con al menos un $\alpha_i \neq 0$

$/ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j = 0$

$$\rightarrow \alpha_i v_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{k} \alpha_j v_j$$

$$\rightarrow v_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{k} \left(\frac{-\alpha_j}{\alpha_i} \right) v_j$$