MATRICES

$\mathbb{K}^{m\times n}$ (m filas - n columnas)

$\mathbb{K}^{m\times n}$, +, · es un K-espacio vectorial.

$M \in K^{n\times m}$ $\quad N \in \mathbb{K}^{m\times \ell} \longrightarrow M \cdot N \in K^{n\times \ell}$

$$[M.N]_{ij} := \sum_{s=1}^{m} M_{is} N_{sj} \quad \text{con } 1 \leq i \leq n, \; 1 \leq j \leq \ell$$

HACER UNA COMBINACIÓN LINEAL

- EN particular si $K^{n\times n} \rightarrow$ ∘ $K^{n\times n} \times K^{n\times n} \longrightarrow K^{n\times n}$ (ES UNA ÁLGEBRA)

OBS: ∘ $\exists$ "1" llamada (I) / $M \times I = I \times M = M$

∘ ¿TIENE INVERSA?

DADO $M \in K^{n\times m}$, SI EXISTE $M^{-1} \in K^{n\times m}$ / $M \cdot M^{-1} = I$

SE LLAMA LA INVERSA DE M.

TAREA: 1) SI EXISTE $M^{-1} \longrightarrow M^{-1} M = I$.

2) SI EXISTE $M^{-1} \longrightarrow$ ES ÚNICA.

$\boxed{\text{Vamos a identificar con } K^m \approx K^{m\times 1}}$

$\rightsquigarrow M \in K^{n\times n} \rightarrow \underset{n\times n}{M} \cdot \underset{n\times 1}{X} = \underset{n\times 1}{b}$

ANALOGAMENTE

$M \in K^{n\times m} \longrightarrow \overset{n\times m}{M}\,\overset{n\times 1}{x} = \overset{n\times 1}{b}$

Si $\exists M^{-1} \longrightarrow (M^{-1}.M).x = M^{-1}b \longleftrightarrow x = M^{-1}b$

OBS: Si $\exists M^{-1} \rightarrow Mx = b$ (TIENE SOLUCIÓN ÚNICA $x = M^{-1}b$)

Prop: Si $\forall b \in K^n$. $\exists!$ solución de $Mx = b$ ($M \in K^{n\times n}$) $\rightarrow \exists M^{-1}$

OBS: Cant. (n, n)

MATRICES

$\mathbb{K}^{m\times n}$ (m filas - n columnas)

$\mathbb{K}^{m\times n}, +, \cdot$ ES UN $\mathbb{K}$-ESPACIO VECTORIAL.

$M \in K^{n\times m}$ $\quad N \in \mathbb{K}^{m\times l} \longrightarrow M\cdot N \in K^{n\times l}$

$$[M.N]_{ij} := \sum_{s=1}^{m} M_{is} N_{sj} \quad \text{con } \begin{array}{l} 1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq l \end{array}$$

HACER UNA COMBINACION LINEAL

- EN particular si $K^{n\times n} \rightarrow$ $\circ\, K^{n\times n} \times K^{n\times n} \longrightarrow K^{n\times n}$ (ES UNA ALGEBRA)

OBS: $\circ$ $\exists$ "1" llamada (I) / $M\cdot I = I\cdot M = M$

$\circ$ ¿TIENE INVERSA?

DADO $M \in K^{n\times m}$, SI EXISTE $M^{-1} \in K^{n\times m}$ / $M.M^{-1} = I$

SE LLAMA LA INVERSA DE M.

TAREA: 1) SI EXISTE $M^{-1} \longrightarrow M^{-1}M = I$.

2) SI EXISTE $M^{-1} \longrightarrow$ ES ÚNICA.

VAMOS A IDENTIFICAR CON $K^m \approx K^{m\times 1}$

$\leadsto$ $M \in K^{n\times n} \rightarrow \underset{n\times n}{M} \cdot \underset{n\times 1}{x} = \underset{n\times 1}{b}$

ANALOGAMENTE

$M \in K^{n\times m} \longrightarrow \overset{n\times m}{M} \overset{n\times 1}{x} = \overset{n\times 1}{b}$

SI $\exists M^{-1} \rightarrow (M^{-1}.M).x = M^{-1}b \longleftrightarrow x = M^{-1}b$

OBS: SI $\exists M^{-1} \rightarrow Mx = b$ (TIENE SOLUCION ÚNICA)
$x = M^{-1}b$

Prop: SI $\forall b \in K^n$. $\exists!$ SOLUCIÓN DE $Mx = b$ $(M \in K^{n\times n}) \rightarrow \exists M^{-1}$

OBS: Col. (a, n) ...

Analogamente

(T2)

$M \in \mathbb{K}^{n \times m}$

$M \cdot x = b$

$n \times m \quad m \times 1 = n \times 1$

En el caso $n \times n$

$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} i$

canonicos obtiene un 1 en i

$Mx = b$

si $\exists M^{-1}$ $(M^{-1} M) x = M^{-1} b$

$\underbrace{I}_{\text{Leeré}} . \overbrace{X}^{\text{vector columna}} = M^{-1} b = X$

OBS $\rightarrow$ si existiría $M^{-1} \rightarrow Mx = b$ tiene SC unica

$x = M^{-1} b$

$M\hat{x} = b \rightarrow \hat{x} = M^{-1} b$

Prop.: Si $\forall b \in K^n \; \exists!$ sol de $Mx = b$ $(M \in K^{n \times n}) \rightarrow \exists M^{-1}$

D/

no son coordenadas

$M x^1 = e_1$

$M x^2 = e_2$

$M x^n = e_n$

Columna n

$M^{-1} = [x^1 | x^2 | \dots | x^n] \in K^{n \times n}$

Propuesto ✓ entonces es la inversa

$\text{Columna}_j(M \circ [x^1 | x^2 | \dots | x^n]) = M x^j = e_j$

OBS = $\underbrace{A}\,\underbrace{B}$

matriz A y B con tamaños correctos

$\underbrace{\text{col}_j}_{\text{quiero columna } j \text{ del producto}} (A.B) = \boxed{A.\text{col}_j . B}$

OBS =

$I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Simetrico

vector

$M(e_1 | e_2 | \dots | e_n) = (Me_1 | Me_2 | \dots | Me_n)$

Disgrecion

filas de longitud m

$A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ Elementos Bien

$v \in \mathbb{K}^{m \times 1}$

$A.V \in \mathbb{K}^{n \times 1}$

$[AV]_{i1} = \sum_{s=1}^{m} A_{is} V_{s1}$

$1 \leq i \leq n$

eso debo responder

T3

$$i \to \left(\boxed{/\!/} \right) = [AV]_i$$

$$A = [C_1(A) \mid C_2(A) \mid .. \mid C_n(A)]$$

$$A(:,1) \quad A(:,2) \; ... \; A(:,n)$$

todas las filas de de la columna 1

$\to$ si

$$\sum_{s=1}^{n} A(:,s) v_s = Av$$

$$[AV]_i = \sum_{s=1}^{n} A(i,s) v_s)$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Columna}_1(M)$$

$$\underbrace{(M e_1 \mid M e_2 \mid \dots \mid M e_n)}_{C_1(M) \quad C_2(M) \quad \dots \quad C_n(M)} = M$$

~~M / Verificado~~ =

Interpretación

$b = A \cdot v =$ ~~Columna~~ $\underbrace{C_1(A) v_1 + C_2(A) v_2 + .. + C_n(A) v_n}$

b tiene coordenadas $(v_1, v_2, \dots v_n)$
en la base dada por $\{C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)\}$

Resolver $Ax = b$
quiere decir ~~$Ax = b$~~
hallar las coordenadas
de b en la base
$\{C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)\}$

suponiendo
LI

vi son las
coordenadas
de b en ésta

BASE

Definiciones diversas

i) $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $A^T \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

ii) $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ $\quad \underbrace{A^*}_{\text{matriz conjugada}} = (A^T)^{\text{conjugada}}$

$$\text{Si } A \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad A^* = A^T$$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1+2i & i \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{C}^{1\times 1} \quad A = (1+3i) \quad A^* = 1-3i$$

Matriz Triangular (APUNTE)

iii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice simetrica

$$A = A^T$$

iv) $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ se dice hermitiana si $A^* = A$

En general $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$

$$A / \mathbb{K}^{m\times 1} \xrightarrow{\text{matriz}} \mathbb{K}^{n\times 1}$$

$$\underbrace{A}_{\text{matriz}} \cdot \underbrace{x}_{\text{vector}} = y \quad \text{(Transfor. Lineal)}$$

OBS — producto de matrices

i) $A \cdot (x+z) = Ax + Az$

ii) $\alpha \in \mathbb{K}$, $A(\alpha \cdot x) = \alpha A x$

En general

$T: \mathbb{W} \to \mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{V}$ $\mathbb{K}$-EV's Espacios vectoriales

i) $T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{W}$

ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall x \in \mathbb{W}, \alpha \in \mathbb{K}$

Se llama Transfor. Lineal de $\mathbb{W}$ en $\mathbb{V}$

MAP/MAPPING

TS

a $T: \mathbb{K}^{m\times 1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times 1}$

$B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ Base de ~~T~~ $\mathbb{K}^{m\times 1}$

$\hat{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ —— $\mathbb{K}^{n\times 1}$

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} w_j$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{2n} \\ A_{21} & \ldots & & A_{2n} \\ A_{n1} & \ldots & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[T]_{B\hat{B}} \overset{\text{defino}}{=} A$$

$T(v)$?

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} w_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} A_{ij} \alpha_i \right] w_j$$

Profe tiene algo mal todos que viene se resuelve