guía 2 finalizar.

clase 9 P1

Prop. $\|\cdot\|$ inducida vale que $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Prop: $\|\cdot\|$ norma inducida, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Número de condición

Def: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, $\underset{\substack{* \\ \text{cualq norma}}}{\text{cond}}(A) = \|A\|_* \|A^{-1}\|_*$

Propiedades: ① si la $\|\cdot\|$ norma inducida, $\text{cond}(A) \geq 1$

② $\text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A) \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \neq 0$

¿Para qué sirve?

Sup que quiero resolver $Ax = b$

obtengo $\tilde{x}$ aproximación numérica de x

me gustaría poder acotar $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$

llamamos residuo $r := b - A\tilde{x}$

Obs

$A(x-\tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - A\tilde{x} = r$

(P2)

~~vale (= texto)~~

Vale (Ej 12 P. 2) $\dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A)\dfrac{\|r\|}{\|b\|}$

$\circ)\ \|x-\tilde{x}\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\|\|r\|$

$\circ)\ \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \longrightarrow \dfrac{1}{\|x\|} \leq \dfrac{\|A\|}{\|b\|}$

$$\underbrace{\dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}}_{\leq \frac{\|A\|}{\|b\|}} \leq \dfrac{\|A^{-1}\|\|r\|}{} \cdot \dfrac{\|A\|}{\|b\|} = \underline{\text{cond}(A)\dfrac{\|r\|}{\|b\|}}$$

uno muy buena cota

Elijo LI matriz cuadrada → inversible

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}01 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 1{,}01 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto debe calcularse

$$A\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2{,}02 \\ 1{,}98 \end{pmatrix} \qquad \text{cond}_\infty(A) = 100$$

$$\|b - Ax\|_\infty = 0{,}02 \rightarrow \dfrac{\|r\|}{\|b\|} = 0{,}01$$

$$\|b\|_\infty = 2$$

$\dfrac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 100 \cdot 0{,}01 = 1$ (mi error relativo es a lo sumo 1)

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ → se por lo (sacado de la galera del profe)

$\dfrac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \dfrac{\|(-1,1)\|_\infty}{\|(1,1)\|_\infty} = 1$ se alcanza la cota

Ej: Calcula $\text{cond}_\infty(A)$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1/m & 1/m \end{pmatrix}$

con $m \in \mathbb{N}$

$$\text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

$\|A\|_\infty = 3$ calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[mF_2 \to F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & m \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + F_2 \to F_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & m \\ -1 & 1 & 0 & m \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 + F_1 \to F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 & 2m \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 2m \end{pmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 1 + 2m$$

$$\text{cond}_\infty(A) = 3(1 + 2m) = 3 + 6m$$

Obs. $\text{cond}_\infty(A) \xrightarrow{m \to \infty} +\infty$

CamScanner

(19)

Ej: Estimar $cond_2(A)$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ es la dimensión

En la guía: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \overset{(A)}{\leq} \|A\|_2 \overset{(B)}{\leq} \sqrt{n} \|A\|_\infty$

(A) $cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|A\|_\infty \frac{1}{\sqrt{2}} \|A^{-1}\|_\infty$

dim 2×2

$= \frac{1}{2} cond_\infty(A) = \frac{3}{2} + 3m$

(B) $cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \leq \sqrt{2} \|A\|_\infty \sqrt{2} \|A^{-1}\|_\infty$

$= 2 cond(A) = 6 + 12m$

Rta

$\underbrace{\frac{3}{2} + 3m}_{\substack{\to +\infty \\ m \to \infty}} \leq cond_2(A) \leq \underbrace{6 + 12m}_{\substack{\to +\infty \\ m \to +\infty}}$

$\Rightarrow cond_2(A) \xrightarrow[m \to \infty]{} +\infty$

↳ y esto pasa con todas las normas.

(P5)

Propiedad:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \leq \inf\left\{ \frac{\|A-B\|}{\|A\|} \,/\, B \text{ singular} \right\}$$

$$\text{cond}(A) \geq \sup\left\{ \frac{\|A\|}{\|A-B\|} \,/\, B \text{ singular} \right\}$$

Ej $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\varepsilon \\ 1 & -1 & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Estimar la condicion$_1$ (A) cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$

epsilón tiende a 0 oseo haciendo nos chico se parece que A es singular

$\|A\|_1 = 3$

$$\text{cond}_1(A) \geq \frac{\|A\|_1}{\|A-B\|_1} \,/\, B \text{ singular}$$

Quiero una B singular $/ \dfrac{\|A\|_1}{\|A-B\|_1} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$

Propongo $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ debo asegurar que B es singular

$\Rightarrow$ xq tiene columna de 0 $\neq$ Filas LI $\Longleftrightarrow$ Inversible

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \|A-B\|_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon$$

ε tiende a 0

$$\text{Cond}_1(A) \geq \frac{\|A\|_1}{\|A-B\|_1} = \boxed{\frac{3}{\varepsilon^2+\varepsilon}} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \longrightarrow +\infty$$

$\longrightarrow$ concluye $\text{cond}(A) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty$

CamScanner

(6)

Contraejemplo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|A - B\|_1 = 3$$

no me dice nada

$$\frac{\|A\|_1}{\|A - B\|_1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{cond}_1(A) \geq 1$$

Ej Parcial

Sea $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \\ 0 & \ddots & & & n-1 & n \\ 0 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Probar que la condicion$_1(A_n) \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$

$$\|A_n\|_1 = \sum^{n^2} \frac{n + n + \dots + n}{n \times n} = n^2$$

$$\text{cond}_1(A) \geq \frac{\|A\|_1}{\|A - B\|_1}$$

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \\ 0 & & & & n-1 & \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}}_{=A}$$

singular x la columna de 0_s

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|A - B\|_1 = 2 \longrightarrow \text{cond}_1(A) \geq \frac{n^2}{2} \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$$