Clase 2

Teorica ALC ①

OBS vale la reciproca

$C=\{v_1,\dots,v_k\} \wedge \exists\, i / v_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{k} \alpha_j v_j$

$\longrightarrow$ C es LD (que no es LI)

↳ combinacion igualada a 0 donde no todos los coeficientes son 0

$D / 0 = \sum_{i=1, i\neq 1}^{k} \alpha_i v_i - 1 . v_i \rightarrow \exists$ CL → combinación lineal

no trivial "0" que dio "c="

Def $\mathbb{V}$ un K-EV, $S \subset \mathbb{V}$

Digo que S es un subespacio de $\mathbb{V}$

$\Longleftrightarrow$ i) $0 \in S$

ii) $u, v \in S \longrightarrow u+v \in S$

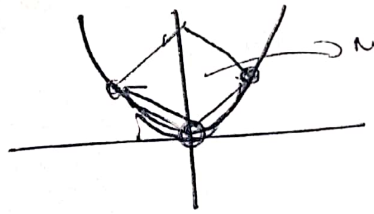
iii) $\alpha \in \mathbb{K}, v \in S \longrightarrow \alpha . v \in S$

} Esp. vectorial

ii $\wedge$ iii) $\Leftrightarrow \forall \alpha \in K, u, v \in S$

$\alpha u + v \in S$

Ej i) $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) / y = x^2\}$



→ no es cerrado por la expresión suma

→ no es subespacio

ii) En $\mathbb{W} = K^{n\times m}$, $S = \{A \in \mathbb{W} / a_{11} - a_{21} = 0\}$

?

$0 \in S$ ✓

$u+v \in S$ ✓ (dan 0)

$u . v \in S$ ✓

lo de 0 siempre sucede x lo matriz nula (2)

iii) $W = \mathbb{R}_{(n)}[x]$ a lo sumo grado (n) si no eso no es un espac vectorial

(Pol. al grado a lo sumo "n")

E.V.

$\$ = \{P \in W / P(1) = 0\}$ 1er raiz

$0 \in \$$ ✓

$P, Q \in \$$, $W(x) = P(x) + q(x) \xrightarrow{?} W(x) \in \$$? si!

$\alpha \in \mathbb{R}$, y $P(x) \in \$ \xrightarrow{?} \alpha . P(x) \in \$$

$W(x) = \alpha P(x)$

$W(1) = \alpha \underbrace{P(1)}_{0} = 0$ ✓ si!

Es un subespacio

OBS: $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset W$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$\$ = \{v / v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, donde $\alpha_i \in K$ $\forall 1 \leq i \leq k$, $v_i \in C$ $\forall 1 \leq i \leq k\}$

$\$ \subseteq W$

$0_V \in \$$? si xq tomo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \rightarrow$ 0 de cuerpo

$\rightarrow 0_V = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 0 v_i}$ escrito como combinación lineal.

$v, w \in \$ \xrightarrow{?}$ si!, $v + w \in \$$

$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ $\quad v = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$

estos no necesariamente

son los mismos

$v + w = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) v_i \rightarrow$ escribo esto como uno tomo

cuerpo

$\alpha \in K$, $v \in \$ \xrightarrow{?} \alpha . v \in \$$ si

Escaneado con CamScanner

(T3)

Notación $S = <v_1, v_2, \dots, v_k>$

se llama el subespacio generado por $\underline{C} = \{v_1 \dots v_k\}$ conjunto.

Def: Sea S (en V) y supongamos que $\exists\ C = \{v_1 \dots, v_k\} / S = <v_1, v_k>$

$\longrightarrow$ C se llama un sist. de generadores de S (SG) (sg)

$n = k$

El profe se confundió

Para todos y el dado

Ej: $S = \{P \in \mathbb{R}_n[x] / P(1) = 0\}$ Todos los pol. que en el 1 mueren

sea $p \in S$, $P(1) = 0$
$P \neq 0$

puedo dividir $x-1$ y no quedaría resto

$\longrightarrow P(x) = (x-1)\,q(x)$

$q(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ (bajo de grado)

y ahora no tiene ninguna restricción

$$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{k-1} x^{k-1}$$

$$\tilde{C} = \{1, x, \dots, x^{k-1}\}$$

$\tilde{C}$ es sg de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$

$$P(x) = (x-1)\left(a_0 1 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1}\right)$$

$$P(x) = a_0(x-1) + a_1 (x-1)x + \dots + a_{k-1}(x-1)x^{k-1}$$

$$C = \{(x-1), (x-1)x, \dots, (x-1)x^{k-1}\}$$

Es un sg de S

Tu

Buscar Def Unicidad

Def: $C = \{v_1, \dots v_k\} \subset \$ (\mathbb{K})$

Es un sg, **si** C es **Li**

$\longleftrightarrow$ C se llama Base

Observación $B = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \$$ /

B es Base $\longrightarrow \forall v \in \$$

$\exists!\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \ / \ v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

D/

$\exists$ ✓ (Trivial) xq B es sg

$v \in \$ \ \exists \alpha_1, \dots \alpha_k \in \mathbb{K}, \ v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$

supongamos $\exists \ \beta_1 \dots \beta_k \in \mathbb{K}$ $\quad \sum_{i=1}^{k} \beta . v_i = v$

$\rightsquigarrow \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(\alpha_i - \beta_i)}_{\gamma_i} v_i = 0_{\mathbb{K}}$

Como B es $Li \longrightarrow \gamma_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k$

$\longrightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \rightarrow \alpha_i = \beta_i \ \forall i$

Def: si $B = \{v_1, \dots v_n\} \subset \$$ es Base de $\$$ y $v \in \$$

$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$

los $(\alpha_1, \dots \alpha_k)$ se llaman coordenadas de V. En la Base B

(15)

Prop: Sea $C = \{v_1, \dots v_K\} \subset \$$ un Sg de $\$$
$\longrightarrow \forall v \in \$, v \neq 0$

$\exists i, 1 \leq i \leq K$ / si considero

$\tilde{C} = \{v_1, v_2, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots v_K\}$

es Sg de $\$$

D/ $v \in \$, v \neq 0$, como $\langle v_1, \dots v_K \rangle = \$$

$v = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i v_i$ con $v \neq 0$

$\exists i / \alpha_i \neq 0, \rightarrow v_i = \frac{1}{\alpha_i} v - \sum_{j=1, j \neq i}^{K} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} v_j$

$\longrightarrow \exists B_i / v_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{K} B_j v_j + B_i v$

Reemplazo $v_i \leftrightarrow v$

$\tilde{C} = \{v_1, v_2, \dots v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_K\}$

Sea $w \in \$ \rightarrow$ con C es Sg

$\exists \{l_i\}_{1 \leq i \leq K}$ $w = \sum_{j=1}^{K} \gamma_j v_j =$

$\sum_{j=1, j\neq i}^{K} \gamma_j v_j + \gamma_i v_i$

$= \sum_{j \neq i}^{K} \gamma_j v_j + \gamma_i \left[\sum_{j=1, j\neq i}^{K} B_j v_j + B_i v\right]$

$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} [\gamma_j + \gamma_i B_j] v_j + \gamma_i B_i v$

T6

~~Prop~~
Prop: sea $B = \{v_1, \dots, v_l\}$ y $\tilde{B} = \{w_1, \dots, w_k\}$ dos bases de $\$ \Rightarrow k = l$

OBS: $\# B$ se llama la Dimensión De $\$$

D/

$B = \{v_1 \dots v_l\}$ es Base $\rightarrow$ sg
Considero w_1 y se que $\exists\, i$

$\{w_1, v_2, \dots, w_1, v_{i+1}, \dots, v_l\}$
sigue siendo un sg

$\longrightarrow$ Tomo w_2 y lo intercambio
$\{v_1, w_2, v_3, \dots, v_{i-1}, w_1, v_{i+1}, \dots, v_l\}$

sup. que hasta el paso j
intercambié los w con los v

considero $w_{j+1} = \sum_{s=1}^{j} \alpha_s w_s + \sum_{s=j+1}^{l} \beta_s v_{i_s}$

i subs

combinación lineal de los v que van quedando

$\exists\, \beta_s \neq 0$

$\# \tilde{C} \leq \# C$
Argumentando al revés $\# C \leq \# \tilde{C}$
$\rightarrow \# C = \# \tilde{C}$

Prop: Dado $C = \{v_1, \dots v_n\} \subseteq \$$ sg de $\$$
$\rightsquigarrow$ ~~$\exists$~~ Se puede extraer una Base