Clase 3 (T1)

Prop: $C = \{v_1, v_2, \ldots v_K\} \subset \$$ ó $\mathbb{V}$. c

de C Puede extraerse una Base

D/ Si C es LI ✓

Sino $\exists\, i$, SPG → sin perder generalidad $i \in K$ / → ~~lo seguiré el ultimo~~ → i no sé quién es, i puede ser cualquier caso, ordeno y pongo al final es algo más teori-césimo

$$V_K = \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i v_i \Rightarrow \hat{C} = \{v_1, \ldots, v_{K-1}\}$$

Sigue siendo SG (sistema de generadores), si es LI ya está sino repito el Argumento

($\$$, $\mathbb{V}$ de dimensión Finita)

Prop: si $\{v_1, \ldots v_K\} \subset \$$, $\mathbb{V}$ y C es LI

lo puedo extender a una <u>Base</u>

D/ si C es SG ✓ (termine, es LI, es SG, es Base)

sino $\langle v_1 \ldots v_K\rangle \subsetneq \$$ (Incluido pero no igual a $\$$ si fuese igual a $\$$ lo generamos)

→ $\exists$ V, lo llamo V_{K+1} / $V_{K+1} \in \$$, $V_{K+1} \notin \langle v_1 \ldots v_K\rangle$

Considero $\tilde{C} = \{v_1, \ldots v_K, v_{K+1}\} \subset \$$

Digo que $\tilde{C}$ es LI,

$$\sum_{i=1}^{K+1} \alpha_i v_i = 0$$, veremos que $\alpha_{K+1} = 0$

~~Sino~~ ~~$\sum_{i=1}^{K} \alpha_i v_i \neq t$~~

Sino si $\alpha_{K+1} \neq 0$ $$\sum_{i=1}^{K} -\frac{\alpha_i}{\alpha_{K+1}} V_i = V_{K+1}$$

Pues $V_{K+1} \notin \langle v_1, \ldots, v_K\rangle$

⇝ como $\alpha_{K+1} = 0$ tengo $\sum_{i=1}^{K} \alpha_K V_K = 0$

y como C es LI $\longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_K = 0$

→ $\hat{C}$ es LI

Prop 1 ⊂ es SG ✓

sino repito el argumento y con $\dim(S) < \infty$

→ termino en ~~∞~~ pasos.

Def $S, T \subseteq V$, subesp de V, $K\,\underline{EV}$

K espacio vectorial

$$S+T = \{u+v \;/\; u \in S, v \in T\}$$

$$S \cap T = \{u \;/\; u \in S \text{ y } u \in T\}$$

OBS i) $S+T$ es un subespacio de V pues $\forall u, v \;/\; u \in S, v \in T$, $u \in V, v \in V$, $u+v \in V$

D/ 1) $S+T \subset V$

2) $0 \in S+T$ pues $0+0=0$ $\in S$, $\in T$

3) $\underbrace{z, z' \in S+T}_{\text{2 elementos de la suma}} \to z = u+v$ $\to \exists\, u \in S, v \in T$ / $z = u+v$

$\exists\, u' \in S$, $v' \in T$ $z' = u'+v'$

$$z + z' = (u+v) + (u'+v') = \underbrace{(u+u')}_{\in S} + \underbrace{(v+v')}_{\in T}$$

4) $z \in S+T \to \alpha z \in S+T$

ii) $S \cap T$ es subespacio de V → V

$\subset S+T \supset$

$T \supset S \cap T \subset S$ → contenido

$\cup|$

$\{0\}$

→ mejor dibujo

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
 & S+T \arrow[u] & \\
T \arrow[ur] & & S \arrow[ul] \\
 & S \cap T \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & \{0\} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Def: si $S \cap T = \{0\} \rightarrow$
$S \oplus T$ la suma se llama directa

OBS: si $W = S \oplus T \rightarrow \forall w \in W$
$\underbrace{\exists!}_{\text{Existe único}} u \in S$ y $v \in T / w = u + v$

D/ $\hat{u} + \bar{v} = W = u + v$

$\underbrace{\hat{u} - u}_{\in S} = \underbrace{v - \bar{v}}_{\in T}$ $\quad v, \bar{v} \in T$; $u, \hat{u} \in S$

$\rightarrow \hat{u} - u, v - \bar{v} \in S \cap T = \{0\}$

$\rightarrow \hat{u} - u = 0$, $v - \bar{v} = 0 \rightarrow u = \hat{u}$, $v = \bar{v}$

Teo $S, T \subset W$, W es un KEV

$\dim W \rightarrow \dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$

D/
$S \cap T \subset S + T$

① si $S \cap T = \{0\}$, Sea $B = \{v_1, \dots v_k\}$, $\bar{B} = \{w_1, \dots w_n\}$
Bases de S y T Respectivamente
$\boxed{\tilde{B} = B \cup \bar{B}}$
$\rightarrow \tilde{B} = \{v_1 \dots v_k, w_1 \dots w_n\}$ es Base de $S+T$

a) es SG $u \in S+T \rightarrow \exists$ ~~...~~ S, ~~...~~ $T / u = v + w$
$v \in S$, $w \in T$

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j$$

$\rightarrow \tilde{B}$ genera

b) $\tilde{B}$ es LI

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j = 0$$

$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i}_{\in S} = \underbrace{-\sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j}_{\in T}$ Estos elementos están en la $\cap$ y son 0 xq son suma directa y si es LI α_i son 0, w es LI, β_j son 0

$\rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$

$\dim(S) = k \quad \dim(T) = n$ (74)

$\dim(S+T) = n + k - \underbrace{0}_{\text{vacío}}$

(2) $S \cap T \neq \{0\}$ sea

$\{u_1, \dots, u_r\}$ Base de $S \cap T$. En particular

$\{u_1, \dots, u_r\} \subset S$, $\subset T$, lo extiendo a Base de S

$B = \{u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_k\}$ Base de S

Análogamente $\{u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_n\} = \tilde{B}$ Base de T

$B \cup \tilde{B} = \{u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_k, w_{r+1}, \dots, w_n\}$

digo que es Base de $S+T$

SG $z \in S + T \rightarrow \exists\, v \in S,\ w \in T$

$z = v + w$

$$\rightarrow v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{k-r} \beta_j v_{j+r}$$

$$w = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i u_i + \sum_{j=1}^{n-r} \delta_j w_{j+r}$$

$\rightarrow z \in \langle u_1, u_2, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_k, w_{r+1}, \dots, w_n \rangle$

$B \cup \tilde{B}$ es LI

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{k-r} \beta_j v_{r+j} + \sum_{s=1}^{n-r} \gamma_s w_{r+s} = 0$$

(P5)

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n-k} \beta_j v_{r+j}}_{\in S} = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} (\alpha_i) v_i + \sum_{s=1}^{n-r} (-\gamma_s) w_{r+s}}_{\in T}$$

$\rightarrow$ en particular $\sum_{j=1}^{n-k} \beta_j \cdot v_{r+j} \in S \cap T$

$\rightarrow \exists\ \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ $\rightarrow$ Escalares /

$$\sum_{j=1}^{n-k} \beta_j v_{r+j} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$$

PASO TODO de un lado

$\longrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-k} = 0$ ($\mu_i = 0$)

$\rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$ y $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-r} = 0$

$B = \{v_1, \ldots v_r, v_{r+1}, \ldots v_k\}$ Base de S $\dim(S) = r + (k-r) = k$

$B^{\wedge} = \{v_1 \ldots v_r, w_{r+1}, \ldots w_n\}$ Base de T $\dim(T) = n$

$\{v_1, \ldots v_r\}$ Base de $S \cap T$ $\dim(S \cap T) = r$

$\hat{\tilde{B}} = \{v_1, \ldots v_r, v_{r+1}\ v_k, w_{r+1}, \ldots w_n\}$: Base de $S+T$

$\dim S+T = r + (k-r) + (n-r) = k+n-r$

✓