ALC Practica clase 8

(P1)

Norma ej: $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Prop ~~son~~ todas las normas en equi a $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ son equiva-lentes

$\forall$ par $\|\,\|_a$, $\|\,\|_b$ en K^n, $\exists n$ $c_1^{>0} \wedge c_2^{>0}$ /

$c_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2 \|x\|_a \quad \forall x \in K^n$

c_1 y c_2 depende del EV. pero no de x

Ej hallar c_1 y c_2 / $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$

$(c_1 = 1, c_2 = n)$

$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

para cualquier i

$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \geq |x_i|$ tomamos j / max

$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_j|$

luego

$\|x\|_1 \geq |x_j| = \|x\|_\infty$

$\|x\|_\infty = n . \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Para otro

$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

$\leq |x_j| + \dots |x_j|$ para j

cual es el indice /

$|x_j| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$\leq n\,|x_j| = n \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = n\,\|x\|_\infty$

(P2)

Aplicación: Def

c todas las coordenadas tienden a 0

Dada $\{\vec{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^m$ (conj. vectores) $\vec{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff (\vec{x}_n)_i \xrightarrow{n\to\infty} 0\ \forall i$

Prop $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff$

si $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ para alguna norma $\|\ \|$ de $\mathbb{R}^m$ (cualquier norma)

Dem: Lo probamos para $\|\ \|_\infty$

Si $\|\vec{x}_n\|_\infty \longrightarrow 0$,

$\max_{1\leq i\leq m} |(\vec{x}_n)_i| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \forall i\ |(\vec{x}_n)_i| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ xq. $0\leq |(\vec{x}_n)_i| \leq \|\vec{x}_n\|_\infty$ uso especie de sandwich

Al revez

todas sus coordenadas tienden a 0

Si $(\vec{x}_n)_i \xrightarrow{n\to\infty} 0\ \forall i$

$\Rightarrow 0\leq \max_{1\leq i\leq m} \left(|(\vec{x}_n)_i|\right)$

(aclaración: el profe confundió un poco el n y m)

Ej: en $\mathbb{R}^5$, $\vec{x}_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n^2}, \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)$

terminar.

Si lo terminamos de probar para $\| \|_\infty$ (P3)

Queremos ver que vale para cualquier norma

Es decir $\|\vec{x_n}\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Longleftrightarrow \|\vec{x_n}\|_a \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Para cualquier norma $\| \|_a$

Por equiv de normas $\exists\, c_1$ y c_2 /

$$c_1\|x_n\|_a \leq \|x_n\|_\infty \leq c_2\|x_n\|_a$$

Luego, $0 \leq c_1\|x_n\|_a \leq \|x_n\|_\infty$

$$\underset{0}{0} \leq \|x_n\|_a \leq \underbrace{\frac{1}{c_1}\|x_n\|_\infty}_{0}$$

$c_1 > 0$

Sanduch $n \to 0$

Luego, si $\|x_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

$\|x_n\|_a \xrightarrow{n\to\infty} 0$ por Sanduch

Reciprocamente, si $\|x_n\|_a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Como $\underbrace{c_1\|x_n\|_a}_{0} \leq \|x_n\|_\infty \leq \underbrace{c_2\|x_n\|_a}_{0}$

$\|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ Sanduch

5

Normas de matrices. $\mathbb{R}^{n\times m}$ o $\mathbb{C}^{n\times m}$ (Preg)

a) Podemos considerar $K^{n\times m}$ como Esp Vectorial y ~~eso~~ usar ~~normas~~ normas de EV

Ej: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}|^2}$ Frobenius $\boxed{\text{Preg}}$

b) Normas inducidas $\boxed{\text{Preg}}$

Trabajamos en $\mathbb{R}^{n\times n}$ o $\mathbb{C}^{n\times n}$

Dada una norma $\| \ \|$ de K^n, definimos

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in K^n\\ x\neq \vec{0}}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

lo llamo y $\|y\|=1$

$$= \sup_{\substack{x\in K^n\\ x\neq \vec{0}}} \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \Big\| A \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{tiene norma } 1} \Big\| \quad (\text{Idea})$$

$$\|A\| = \sup_{\substack{y\in K^n\\ \|y\|=1}} \|Ay\|$$

Ej.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

calculamos $\|A\|_2$

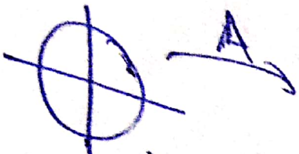
el borde $\|x\|_2 = 1$ es el conj (vectores) que

Ej

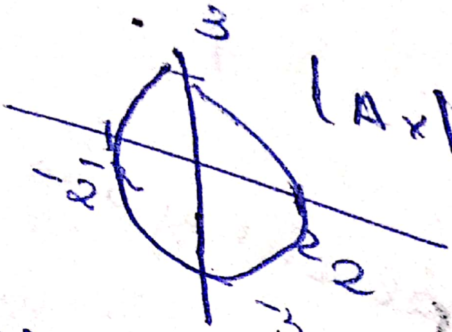
$\begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\|x\| = 1$



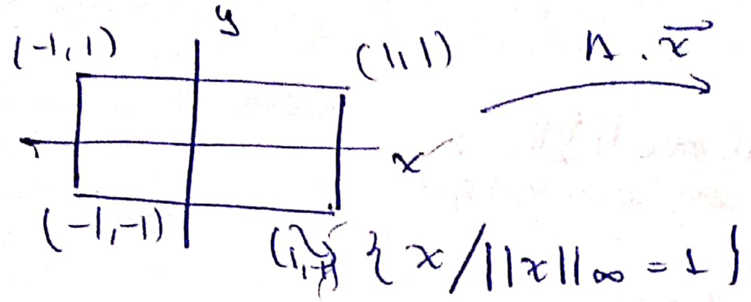
$\{Ax \mid \|x\| = 1\}$

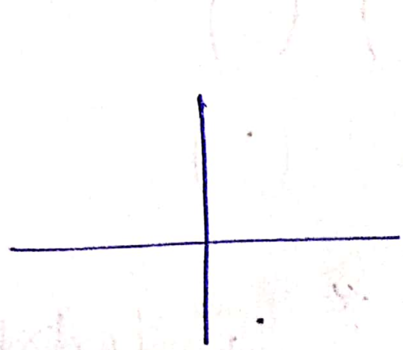
luego $\|A\| = 3$

Pc

Ej. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular la imagen de $\{x / \|x\|_\infty = 1\}$ al aplicarle A y deducir $\|A\|_\infty$ cuadrado





paralelogramo

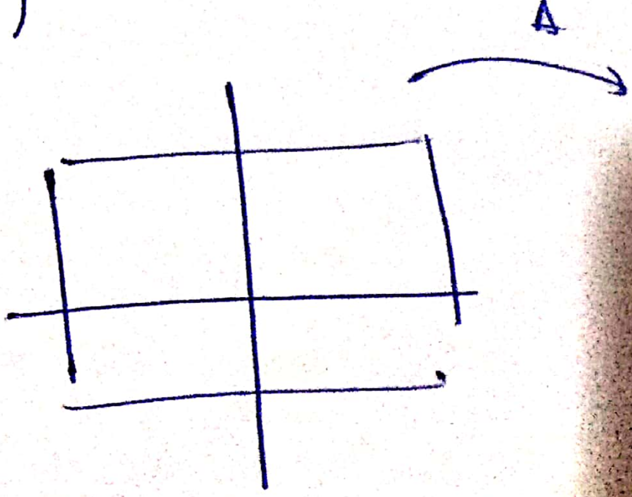
calcula las imagenes de los vertices

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

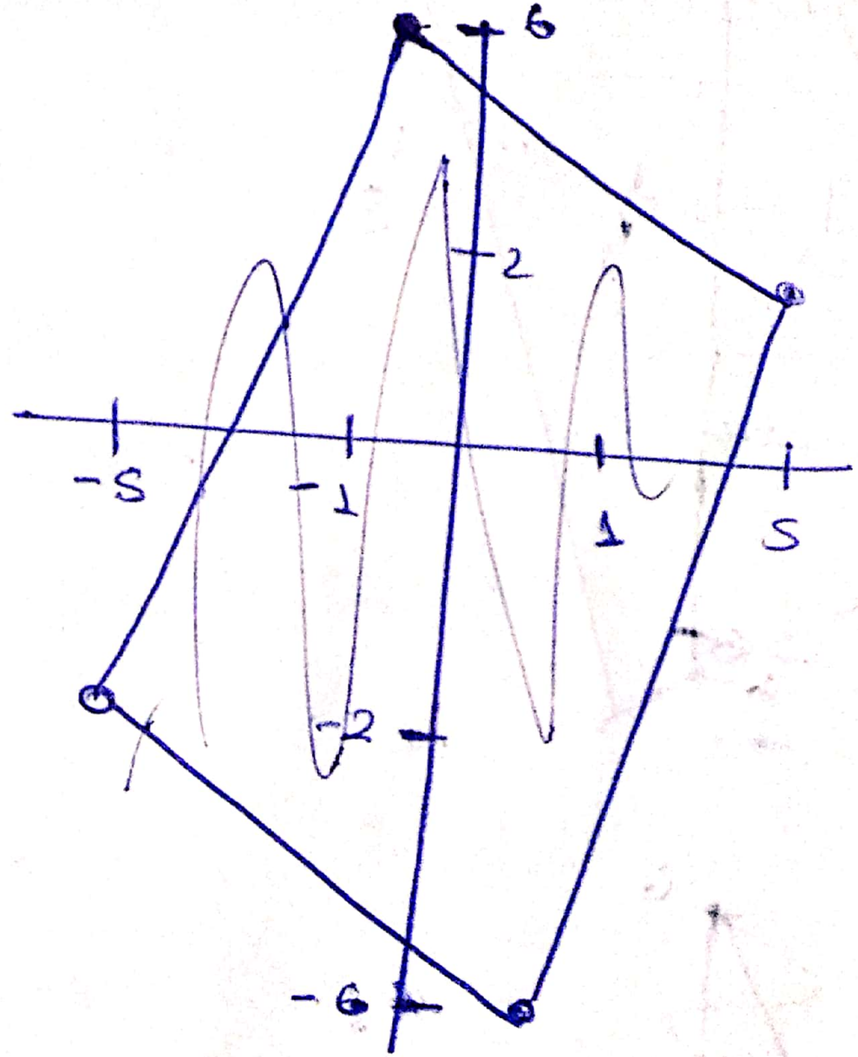
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$



P7

fd



Por el grafico $\|A\|_\infty = 6$ es la mayor norma ∞ ($\| \|_\infty$) de los vectores de la imagen

P8

Prop. si $A \in K^{n \times n}$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{1 \le j \le n} |a_{ij}| \right)$$

Dem: veamos 1ero que $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{1 \le j \le n} |a_{ij}| \right)$

$$Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n|$$

queremos ver que $\max_{1 \le i \le n} |a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n|$

$\le \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{1 \le j \le n} |a_{ij}| \right) \forall x / \|x\|_\infty = 1$

$$\max_{1 \le i \le n} \left(|a_{i1} + \dots + a_{in}x_n| \right)$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \left(|a_{i1}x_1| + \dots + |a_{in}x_n| \right)$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \left(|a_{i1}| \underbrace{|x_1|}_{\le 1} + \dots + |a_{in}| \underbrace{|x_n|}_{\le 1} \right)$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \left(|a_{i1}| + \dots + |a_{in}| \right)$$

Luego $\|Ax\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} (|a_{i1}| + \dots + |a_{in}|)$

$\forall x / \|x\|_\infty = 1$

y tomando supremo

$$\sup \|Ax\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} (|a_{i1}| + \dots |a_{in}|)$$

falta ver que el maximo

$$\max(|a_{i1}| + \dots + |a_{in}|) \le \|A\|_\infty$$

Para esto, elegimos tomar x

con $\|x\| = 1$ / se cumple

la igualdad

$$\max_{1\le i\le n}(|a_{i1}| + \dots + |a_{in}|) = \|Ax\|_\infty$$

Ej: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & -8 & -9 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ tomar $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

para que quede [illegible]