习题3-4

3. (1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$

$\Rightarrow y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$

$\therefore$ 当 $y'=0$ 时，$x=3$，$x=-1$

当 $x\in(-\infty,-1)$，$y'>0$，$\therefore y$ 单调递增

~~(7) $y=x^ne^{-x}$~~

当 $x\in(-1,3)$，$y'<0$ $\therefore y$ 单调递减

当 $x\in(3,+\infty)$，$y'>0$ $\therefore y$ 单调递增

$\therefore y$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$

单调递减区间为 $(-1,3)$

(7) $y=x^ne^{-x}$ $(n>0, x\geq 0)$;

$y'=nx^{n-1}e^{-x}-x^ne^{-x}$

$y'=0 \Leftrightarrow x=n$，$x=0$

$\therefore$ 当 $x\in[0,n)$ 时 $y'>0$，单调递增

当 $x\in(n,+\infty)$ 时 $y'<0$ 单调递减

5. (2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{x^2+1})>\sqrt{1+x^2}$

证：

令 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{1+x^2}+1$

$f'(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}})-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})>0$

$\therefore f(x)$ 单调增

$\therefore f(x)>f(0)=0$

$\therefore$ 原不等式成立

9. (2) $y=x+\frac{1}{x}$ $(x>0)$

设 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，下证 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geq f(\frac{x_1+x_2}{2})$

$\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}\geq\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{2}{x_1+x_2}$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2\geq 4x_1x_2$，显然成立

P108.

(3) $y' = 4(x+1)^3 + e^x$

$y'' = 12(x+1)^2 + e^x > 0$

∴ y为下凸函数，无拐点。

(6) $y = x^4(12\ln x - 7)$. $(x>0)$

$4x^3(12\ln x - 4)$

$12x^2(12\ln x - 4) + 4$

$y' = 4x^3(12\ln x - 7) + x^4 \cdot \frac{12}{x}$

$y'' = 12x^2(12\ln x - 7) + 4x^3 \cdot \frac{12}{x} + 36x^2$

$= 144x^2\ln x \cancel{+36x^2+12x^3} - 84x^2 + 48x^2 + 36x^2$

$= \cancel{12x^2(12\ln x + 3 + x)}\ 144x^2\ln x$

$y'' = 0$ 可得 $x = 1$. 当 $x \in (0,1)$ $y'' < 0$. 当 $x \in (1,+\infty)$ 时 $y'' > 0$

∴ 当 $x \in (0,1)$ y'' 上凸. 当 $x \in (1,+\infty)$ y'' 下凸.

拐点为 $x=1$

13.

$y' = 3ax^2 + 2bx$

$y'' = 6ax + 2b$

$y''|_{x=1} = 0 \quad y|_{x=1} = 3$

$$\therefore \begin{cases} a+b=3 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{9}{2} \end{cases}$$

14. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$

$$\begin{cases} f(-2) = 44 \\ f'(-2) = 0 \\ f''(1) = 0 \\ f(1) = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 44 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ a+b+c+d = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 8b \\ b = -3a \\ 26a = d + 10 \\ 28a = 44 - d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -24 \\ d = 16 \end{cases}$$

15. $f(x) = k(x^2-3)^2$

$f'(x) = 2k(x^2-3)\cdot 2x$

$f''(x) = 4k\cdot 2x\cdot x + 4k(x^2-3) = 12kx^2 - 12k$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1$

$f'(x_1) = -8k$, $f'(x_2) = 8k$

$f(x_{1/2}) = 4k$ 原命题 $\Leftrightarrow \frac{4k}{x_1} \cdot f(x_1) = \frac{4k}{x_2} f'(x_2) = -1$

$\therefore k = \sqrt{\frac{1}{32}}$

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$

$y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$

$y'=0$ 时 $x=3$ 或 -1

~~当~~ $x=3$ 时，$y=-47$ 为极小值

~~当~~ $x=-1$ 时 $y=17$ 为极大值

(5) $y'=\dfrac{3\sqrt{4+5x^2}-(1+3x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{4+5x^2}}\cdot 10x}{4+5x^2}$

$y'=0$ 时 $12+15x^2-5x-15x^2$，$x=\frac{12}{5}$

当 $x>\frac{12}{5}$ $y'(x)<0$

当 $x<\frac{12}{5}$ $y'(x)>0$

$\therefore$ $x=\frac{12}{5}$ 时 y 取到极大值 $\dfrac{41\sqrt{5}}{5\sqrt{164}}=\dfrac{\sqrt{41}}{2\sqrt{5}}$

(9) $f(x)=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=-\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$

~~由~~ $f'(x)$ 无零点

$\therefore f(x)$ 无驻点、，无不可导点、，无极值点、.

(10) $y'=1+\dfrac{1}{\cos^2x}>0$

~~y 单调~~ y 无驻点、．无极值点、

~~$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $k\in Z$ 为不可导点~~

5. 推4. $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数

$f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$

(1) n 奇，$f(x)$ 在 x_0 处无极值

(2) n 偶，$f(x)$ 在 x_0 处取极值

且 当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，$f^{(n)}(x_0)>0$，$f(x_0)$ 为极小值

$f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x \overset{①}{\geq} 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}+2\cos x=2+2\cos x \overset{②}{\geq} 0$

当 $e^x=e^{-x}$ 时，即 $x=0$ 时 等号①成立.

$f'(0)=0$ $f''(0)=0$ $f'''(0)=0$，$f''''(0)=4$

$\therefore f(x)$ 在 0 处取得极小值。

6.(2)
$f(x)=x^4-8x^2+2 \quad -1 \le x \le 3$

$f'(x)=4x^3-16x$

$f'(x)=0$ 时 $x=0, 2, -2$

$f(0)=2$, $f(2)=-14$, $f(-2)=-14$

$f(-1)=-5$, $f(3)=11$

$\therefore$ 当 $x=3$, $f(x)_{max}=11$

当 $x=2$, $f(x)_{min}=-14$

10. ~~当~~设其中一条边长度 x

$S=x\cdot\frac{20-2x}{2}=10x-x^2$, $x\in(0,10)$

$S'=10-2x \qquad S'=0$ 时 $x=5$

$S|_{x=0}=0$, $S|_{x=10}=0$

$\therefore$ 当 $x=5$ 时 S 取到最大值 25

12. $S=xy+\pi\cdot(\frac{x}{2})^2\cdot\frac{1}{2}=5 \qquad y=\frac{5-\pi\cdot\frac{x^2}{8}}{x}$

$C=x+2y+\frac{1}{2}\pi x$

$C=x+\frac{10}{x}-\frac{\pi x}{4}+\frac{1}{2}\pi x$

$C=x+\frac{\pi x}{4}+\frac{10}{x}\geq 2\sqrt{(\frac{\pi}{4}+1)\cdot 10}=\sqrt{(4+\pi)10}$

此时，$x=\sqrt{\frac{20}{4+\pi}}$

15. 此圆锥 $C_底=\varphi R$，底面圆心半径 r

$2\pi r=\varphi R$

$r=\frac{\varphi R}{2\pi}$，$\sqrt{R^2-r^2}=h$，$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\sqrt{R^2-r^2}=\frac{\varphi^2R^3}{12\pi}\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}}$

$=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\varphi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}$ ~~设f(φ)=~~ $\leq\frac{R^3}{12\pi^2}\sqrt{(\frac{4\pi^2}{3})^3}=\frac{2\pi R^3\sqrt{3}}{27}$，$\varphi=\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ ✓