习题3-2.

(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\cancel{\lim\limits_{x\to a}\frac{ma}{n}}\quad\frac{ma^{m-n}}{n}$

(7) $\cancel{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x^2)}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\tan 7x}\cdot\frac{1}{\cos^2 7x}\cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{7\tan 2x}{2\tan 7x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 7x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{7\cdot 2}{\cos^2 2x}}{\frac{2\cdot 7}{\cos^2 7x}}=1$$

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot}x}$, $\because$ $y=\tan x$, $\frac{1}{y}=\cot x$ $\Rightarrow$ $\arctan y=x$, $\operatorname{arccot}\frac{1}{y}=x$

$\therefore \arctan x=\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$

又$\because$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0^+}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}\ \cancel{=\lim\limits_{x\to 0}x^2(e^{\frac{1}{x^2}}-1)}$. 令 $t=\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}t=\infty$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^t}{t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^t}{1}=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2-(x+1)}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1-x}{x^2-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}-\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}$

(16) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\tan x\ln\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{\ln x\cdot\sin x}{\cos x}}$

$=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{\cos x}{\sin x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\sin^2x-\cos^2x}{\cancel{\cos^2x}\sin^2x}}}\cancel{=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin^2x}{x}}=1$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}1+\frac{\sin x}{x}=1$

但不能使用洛必达

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 中、$\frac{x+\sin x}{x}$ 中分子分母求导后为 $\frac{1+\cos x}{1}$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ 不存在，∴原命题成立.

习题3-3

1. $x-4=m$

$f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ 　　$f(4)=-56$

$f'(x)=4x^3-15x^2+2x-3$ 　　$f'(4)=21$

$f''(x)=12x^2-30x+2$ 　　$f''(4)=74$

$f'''(x)=24x-30$ 　　$f'''(4)=66$

$f''''(x)=24$ 　　$f^{(4)}(4)=24$

$f'''''(x)=0$

$f(x)$按$x-4$的幂展开为$f(x)=f(4)+\frac{f'(4)}{1!}(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x$

2. $f(x)=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$

4. $f(x)=\ln x$

$f'(x)=\frac{1}{x}$

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n}$，$f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!2^n}$

$f(x)=\ln 2+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o(x^n)$

$=\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i!(i-1)!\cdot 2^i}(x-2)^i+o(x^n)$

5. $f(x)=\frac{1}{x}$，$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{n!x^{n+1}}$

$f(x)=\cancel{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{n!\cdot n!x^{n+1}}}\ -1+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{i!\cdot i!\cdot(-1)^{i+1}}(x+1)^i+R_n(x)$

$=-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{-(x+1)^i}{i!\cdot i!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!(n+1)!(-\theta)^{n+2}}(x+1)^{n+1}$

6. $f(x)=\tan x$ 　　$f(0)=0$

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ 　　$f'(0)=1$

$f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ 　　$f''(0)=0$

$f'''(x)=\frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x}$ 　$f'''(0)=2$.

$\therefore \tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

8. 公式 $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ 来源于 e^x 的3阶麦克劳林公式

而带拉格朗日余项的麦克劳林公式为 $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_3(x)=e^x$

其中，$R_3(x)=\frac{(\theta x)^4}{24}$ $(\theta \in (0,1))$

$R_3(x) \le \frac{x^4}{24}$ 因此，当 $0<x\le\frac{1}{2}$ 时

$R_3(x) \le \frac{x^4}{24} \le \frac{1}{24\cdot 16} < \frac{1}{100} = 0.01$

以此公式计算 $\sqrt{e}$，即令 $x=\frac{1}{2}$

$e^x \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48} \approx 1.627$

9. 设 $f(x)=\cancel{30^x}\ 3\cdot\sqrt[3]{1+x}$ ~~ln30 = ln2+ln3+ln5~~

~~$f'(x)=30^x \ln 30$~~

~~f(x)的带拉格朗日余项的~~

设 $f(x)=3\sqrt[3]{1+x}$，$x=\frac{1}{9}$ 时 $f(x)=\sqrt[3]{30}$

~~$f'(x)=$~~

f(x)的带拉格朗日余项的麦克劳林公式为

$f(x)=3\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{x^3}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+R_3(x)\right)$

$=3+x-\frac{x^2}{3}+\frac{10x^3}{54}+3R_3(x)$

$f\left(\frac{1}{9}\right)=3+\frac{1}{9}-\frac{1}{3^5}+\frac{5}{3^9}+3R_3(x)$

其中 $3R_3(x)=3\cdot\frac{(\theta x)^4}{24}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)$

$=-\frac{10(\theta x)^4}{81} \le \frac{-10}{9^4\cdot 81} = \frac{-10}{3^{12}}$