积分

不定积分要加C

线性性 $\int [kf(x)+lg(x)]\,dx = k\int f(x)dx + l\int g(x)dx$

积分表

$\int k\,dx = kx + C$ $\quad$ $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $\quad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ $\quad$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\quad$ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $\quad$ $\int \csc^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \sec x \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C$

$\int \csc x \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\csc x + C$ $\quad$ 余x 带负号

$\int \sec x\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\sec x + \tan x| + C$

正x 改余x

$\int \csc x\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\csc x - \cot x| + C$

以下做题时凑左边

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$ $\quad$ $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C \quad (a>0)$$

求导要熟

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \quad (a>0)$$

↓ 负 ↓ 上下交换

$$\left(\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\right)$$

分项操作 抄分母，加一个减一个

$$\int \frac{dx}{x^4(x^2+1)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^4(x^2+1)}dx = \int\frac{dx}{x^4} - \int\frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \int\frac{dx}{x^4} - \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \int(\sec^2 x-1)\,dx$$ $\tan^2 x$ 换 $\sec^2 x$

$$\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int\frac{1+\cos x}{2}\,dx$$ 三角降为一次

第一类换元法（凑微分）

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int d\sqrt{x}$$

第二类换元法 $x=\psi(t) \rightarrow t=\psi^{-1}(x)$ 要能反解

三角代换

$\sqrt{a^2-x^2}$ 令 $x=a\sin t$ $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 能反解 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$

$\sqrt{x^2+a^2}$ 令 $x=a\tan t$ $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$

$\sqrt{x^2-a^2}$ 令 $x=a\sec t$ $t\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$ $\sqrt{x^2-a^2}=a|\tan t|$

代回时，用辅助三角形

分部积分法

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x)$$ 更好积

反对幂指三

$$\int x^a \begin{cases} e^x \\ 三角 \\ \ln x \\ 反三角 \end{cases} dx$$

e^x、三角：好积，放d前面

$\ln x$、反三角：不好积，放d后面

常有可能消掉某些项

原函数存在定理，连续 → 可积

初等函数原函数不一定是初等

$\int \sin(x^2)\,dx \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx \quad \int \frac{dx}{\ln x} \quad \int e^{-x^2}\,dx$ 等积不出

化简有理式

【结论】含$\sin^m x \cdot \cos^n x$的积分

sinx奇次，cosx偶次 → d(cosx) 或 d(secx)

cosx奇次，sinx偶次 → d(sinx) 或 d(cscx)

cosx和sinx同为偶次或奇次 → d(tanx) 或 d(cotx)

$\int f(\tan x)\,d\tan x$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x} = \int \frac{\sec^6 x\,dx}{\tan^3 x} = \int \frac{\sec^4 x \cdot \sec^2 x}{\tan^3 x}\,dx$$

$(\div \cos^6 x)$

$$= \int \frac{(\tan^2 x+1)^2\,d(\tan x)}{\tan^3 x}$$

$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x \cdot \cos x}\,dx$ sin奇 cos偶 dcosx, dsecx

例5 $\int \tan^3 x \sec x\,dx = \int \tan^2 x \cdot \tan x \sec x\,dx$

$= \int (\sec^2 x - 1)\,d\sec x$

$= \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$

$\int (u^2-1)\,du = \frac{1}{3}u^3 - u + C$

1. 定义：

经 $\sin x, \cos x$ 以及常数经过有限次四则运算所构成的函数称为三角函数有理式，

记为 $R(\sin x, \cos x)$，积分 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 称为三角函数有理式的积分.

2. 积分法：

万能代换公式，令 $u = \tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2}du$，从而

$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du$ 化为有理函数积分.

sinx, cosx仅一次时好用