Praktikum V

Drehpendel: Reglerentwurf hängendes und stehendes Pendel mit Hilfe der Wurzelortskurve

Gruppe für Regelungstechnik & Advanced Control – 10. November 2025

Aufbauend auf der bestehenden Geschwindigkeitsregelung des DC-Motors wird in diesem Praktikum das System mit angebrachtem Pendel untersucht und geregelt. Es wird vorausgesetzt, dass eine funktionierende Strom- und überlagerte Drehzahlregelkaskade implementiert ist. Der Systemeingang ist somit die Solldrehzahl der Drehzahlregelung. Der Systemausgang ist der Winkel des Pendels. Ziel ist es nun, eine Winkelregelung für das hängende und das stehende Pendel zu entwerfen und zu implementieren. Für den Entwurf der Regler verwenden wir das Wurzelortskurvenverfahren (engl. *Root Locus*).

Lernziele

- Linearisierung eines nichtlinearen mechanischen Systems um gegebene Arbeitspunkte.
- Herleitung und Interpretation von Übertragungsfunktionen.
- Entwurf eines PI-Reglers mithilfe der Wurzelortskurve (Root Locus).
- Umsetzung und Test der Regelung am realen System inkl. Enable/Reset-Logik.

1 Differentialgleichung

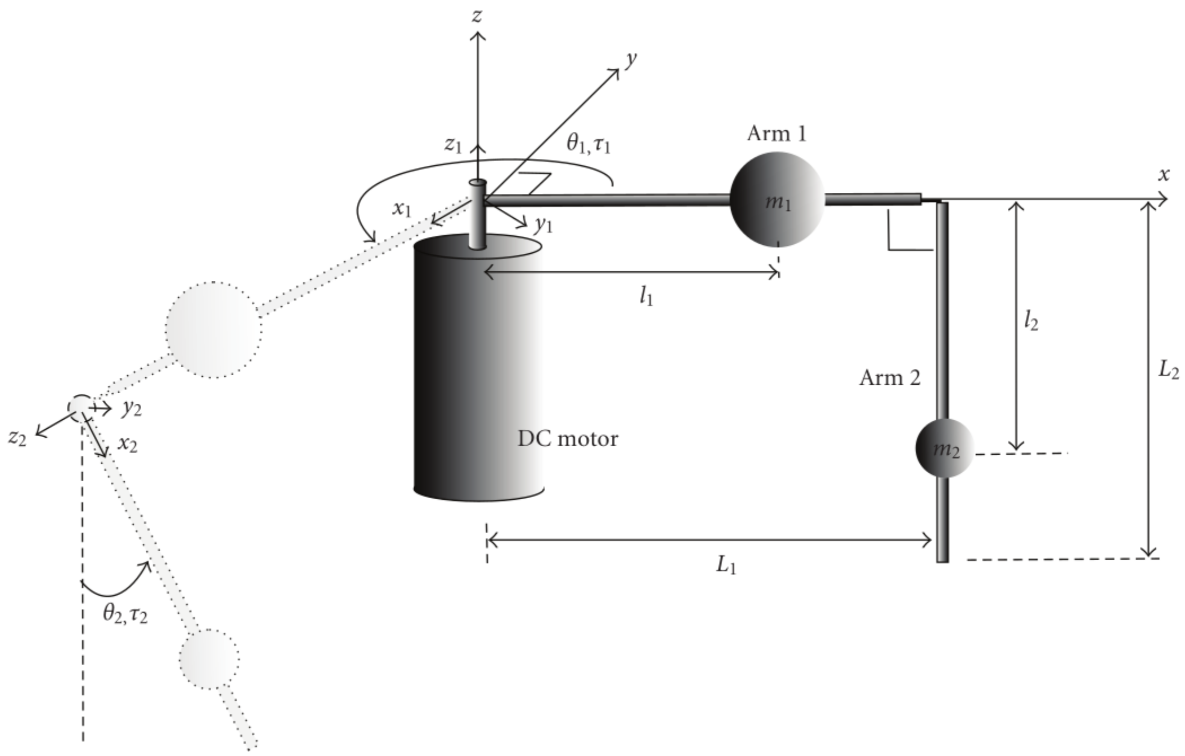

Abbildung 1: Skizze Drehpendel aus [1].

Die vollständige Herleitung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen des Drehpendels ist in [1] im Detail beschrieben (2 mechanische DOF → 2 nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung). Unter Vernachlässigung von Corioliskräften lautet die nichtlineare Differentialgleichung für das Pendel:

$$\left(J_p + m_2 l_2^2\right) \ddot{\theta}_2 + b_2 \dot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin\theta_2 = -m_2 L_1 l_2 \cos\theta_2 \, \ddot{\theta}_1$$

Um konsistent mit den vergangenen Praktika zu sein, verwenden wir weiterführend für die Winkel anstelle von θ_1 und θ_2 die Bezeichnung φ_1 für den Winkel des Motors und φ_2 für den Winkel des Pendels.

$$\left(J_p + m_2 l_2^2\right) \ddot{\varphi}_2 + b_2 \dot{\varphi}_2 + m_2 g l_2 \sin\varphi_2 = -m_2 L_1 l_2 \cos\varphi_2 \, \ddot{\varphi}_1$$

Hierbei ist zu beachten, dass:

- Der Nullwinkel des Pendels ist gegeben, wenn das Pendel hängend ist.
- Die Drehrichtung der rotativen Achsen ist mathematisch positiv gewählt (Rechte-Hand-Regel).

Grösse	**Wert**
Armlänge des Motors L_1	$0.0855\,\mathrm{m}$
Trägheitsmoment des Pendels J_p	$6.063 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$
Masse des Pendels m_2	$0.028\,\mathrm{kg}$
Abstand zum Schwerpunkt l_2	$0.0805\,\mathrm{m}$
Reibungskoeffizient b_2	$4.4 \times 10^{-5}\,\mathrm{N\,m/(rad\,s)}$
Erdbeschleunigung g	$9.81\,\mathrm{m/s^2}$

Tabelle 1: Parameter des Drehpendels

Aufgaben

1. Skizzieren Sie die angreifenden Kräfte und Momente am Pendel.
2. Welche Grösse bestimmt den Systemeingang und welche den Systemausgang?

2 Pendel hängend

Im ersten Teil wird das Pendel in seiner stabilen Gleichgewichtslage, also *hängend*, untersucht. Ziel ist es, das Systemverhalten um diesen Arbeitspunkt zu analysieren und einen geeigneten Regler entwerfen zu können. Dazu wird die nichtlineare Differentialgleichung zunächst linearisiert und in eine Übertragungsfunktion überführt. Anschliessend erfolgt die Bewertung der Stabilität und des statischen Verhaltens, bevor im nächsten Schritt, auf Basis des Wurzelortskurvenverfahrens, der Regler ausgelegt wird.

Systemanalyse

Aufgaben

1. Linearisieren Sie die Differentialgleichung um den Arbeitspunkt des hängenden Pendels ($\varphi_{2,0} = 0$) symbolisch. Nutzen Sie hierfür die Approximation für kleine Winkel: $\sin \varphi_2 \approx \varphi_2$ und $\cos \varphi_2 \approx 1$.
2. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von Systemeingang *Winkelbeschleunigung des Motors* $\ddot{\varphi}_1(s)$ zu Systemausgang *Pendelwinkel* $\varphi_2(s)$.
3. Wir verwenden das Drehpendel mit unterlagerter Drehzahlregelung. Bestimmen Sie deshalb die Übertragungsfunktion von Systemeingang *Winkelgeschwindigkeit des Motors* $\omega_1(s) = \dot{\varphi}_1(s)$ zu Systemausgang *Pendelwinkel* $\varphi_2(s)$. Verändern Sie ausserdem das Vorzeichen der Regelstrecke so, dass ein positiver Eingang zu einer positiven Ausgangsänderung führt. Beachten Sie, dass Sie dieses Vorzeichen unbedingt auch beim realen System berücksichtigen müssen.
4. Vernachlässigen Sie die Reibung ($b_2 = 0$) und berechnen Sie die Übertragungsfunktion mit Zahlenwerten.
5. Bestimmen Sie die Pol- und die Nullstellen der Übertragungsfunktion.
6. Um was für ein System handelt es sich hinsichtlich statischem Verhalten und Stabilität?

Reglerentwurf

Der zu entwerfende Regler soll das hängende Pendel dämpfen. Mithilfe des Wurzelortskurvenverfahrens wird untersucht, wie sich die Pole des geschlossenen Regelkreises in Abhängigkeit von der Verstärkung in der komplexen Ebene bewegen. Auf dieser Grundlage wird zunächst die Nachstellzeit T_i vorgegeben und anschliessend die erforderliche Verstärkung k_p bestimmt, sodass der geschlossene Regelkreis eine doppelte Polstelle aufweist. Die Dynamik der Drehzahlregelung kann hierbei vernachlässigt werden, da diese deutlich schneller ist als die Dynamik des Pendels.

Als Reglerstruktur wählen wir einen PI-Regler vom Typ:

$$C(s) = k_p \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right)$$

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Nachstellzeit T_i, sodass eine Nullstelle bei $z = -9$ entsteht.
2. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises (engl. *Loop*) $L(s)$ mit Zahlenwerten. Kürzen Sie, falls möglich, Pol- und Nullstellen, die nicht in der rechten Halbebene liegen.
3. Normieren Sie die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises gemäss $k\tilde{L}(s)$.
4. Skizzieren Sie die Wurzelortskurve und gehen Sie dabei wie folgt vor:
   - 4.a) Skizzieren Sie die Pol- und Nullstellen von $\tilde{L}(s)$ in der komplexen Ebene.
   - 4.b) Bestimmen Sie den Polüberschuss sowie den Schnittpunkt der Asymptoten s_A.
   - 4.c) Überlegen Sie, welche Teile der reellen Achse zur Wurzelortskurve gehören.
   - 4.d) Bestimmen Sie die Kandidaten der Verzweigungspunkte (Abzweig- und Zusammenflusspunkte, engl. *breakaway und break-in points*). Entscheiden Sie, welche der Kandidaten tatsächlich Verzweigungspunkte sind, und tragen Sie diese in die Skizze ein.
   - 4.e) Vervollständigen Sie die Skizze der Wurzelortskurve.
   - 4.f) Bestimmen Sie anhand des Amplitudenkriteriums (engl. *magnitude condition*) die Verstärkung k, sodass eine doppelte reelle Polstelle entsteht. Bestimmen Sie anschliessend die Reglerverstärkung k_p.

Implementation und Testen der Regelung

In dem erhaltenen *Simulink*-Template ist die Regelung so implementiert, dass sowohl die PI-Regler selbst als auch der eigentliche Motortreiber nur dann aktiv sind, wenn der Winkel innerhalb eines vorgegebenen Bereichs liegt (siehe *Simulink*-Modell). Grundsätzlich ist der Logikblock so aufgebaut, dass die Regler bei der Aktivierung neu initialisiert werden (Reset der Integratoren). Nichtsdestotrotz ist der Logikblock so implementiert, dass die Regelung sowie die Leistungselektronik nur ein einziges Mal aktiv wird. Gerät das Pendel ausserhalb des Bereichs, so wird die Regelung deaktiviert und der Motor ausgeschaltet. Um das System neu zu initialisieren, muss das gesamte *Simulink*-Modell gestoppt und neu gestartet werden. Überlagern Sie die PI-Winkelregelung der bestehenden Drehzahlregelung inklusive der Enable/Reset-Logik und berücksichtigen Sie das negative Vorzeichen am Solldrehzahl-Eingang der Drehzahlregelung.

3 Pendel stehend

Im zweiten Teil des Praktikums wird das Pendel in seiner instabilen Gleichgewichtslage, also *stehend*, untersucht. Wiederum linearisieren wir die nichtlineare Differentialgleichung um diesen Arbeitspunkt und überführen sie in eine Übertragungsfunktion. Äquivalent zum ersten Teil erfolgt die Bewertung der Stabilität und des statischen Verhaltens, bevor im nächsten Schritt, auf Basis des Wurzelortskurvenverfahrens, der stabilisierende Regler ausgelegt wird.

Systemanalyse

Aufgaben

1. Linearisieren Sie die Differentialgleichung um den Arbeitspunkt stehendes Pendel ($\varphi_{2,0} = \pi$) symbolisch. Nutzen Sie hierfür die Approximation für kleine Winkel: $\sin(\varphi_2 - \pi) \approx -\varphi_2$ und $\cos(\varphi_2 - \pi) \approx -1$.
2. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von Systemeingang *Winkelgeschwindigkeit des Motors* $\omega_1(s) = \dot{\varphi}_1(s)$ zu Systemausgang *Pendelwinkel* $\varphi_2(s)$. Das Vorzeichen der Regelstrecke muss hier nicht verändert werden. Die Nulllage des Pendels ist um den Arbeitspunkt gegeben, wenn das Pendel steht.
3. Vernachlässigen Sie die Reibung ($b_2 = 0$) und berechnen Sie die Übertragungsfunktion mit Zahlenwerten.
4. Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion.
5. Um was für ein System handelt es sich hinsichtlich statischem Verhalten und Stabilität?

Reglerentwurf

Nun soll der zu entwerfende Regler das stehende Pendel stabilisieren. Ziel ist es also, den instabilen Pol der Regelstrecke in die linke Halbebene zu verschieben. Wie beim hängenden Pendel verwenden wir einen PI-Regler und entwerfen diesen mithilfe des Wurzelortskurvenverfahrens. Die Nullstelle des PI-Reglers wird wiederum vorgegeben, sodass wir uns ausschliesslich auf die Konstruktion der Wurzelortskurve und die Bestimmung der Verstärkung konzentrieren können.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Nachstellzeit T_i, sodass eine Nullstelle bei $z = -18$ entsteht.
2. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises (engl. *Loop*) $L(s)$ mit Zahlenwerten. Kürzen Sie, falls möglich, Pol- und Nullstellen, die nicht in der rechten Halbebene liegen.
3. Normieren Sie die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises gemäss $k\tilde{L}(s)$.
4. Skizzieren Sie die Wurzelortskurve und gehen Sie dabei wie folgt vor:

   4.a) Skizzieren Sie die Pol- und Nullstellen von $\tilde{L}(s)$ in der komplexen Ebene.

   4.b) Bestimmen Sie den Polüberschuss sowie den Schnittpunkt der Asymptoten s_A.

   4.c) Überlegen Sie, welche Teile der reellen Achse zur Wurzelortskurve gehören.

   4.d) Bestimmen Sie die Kandidaten der Verzweigungspunkte (Abzweig- und Zusammenflusspunkte, engl. *breakaway* und *break-in points*). Entscheiden Sie, welche der Kandidaten tatsächlich Verzweigungspunkte sind, und tragen Sie diese in die Skizze ein.

   4.e) Vervollständigen Sie die Skizze der Wurzelortskurve.

   4.f) Bestimmen Sie anhand des Amplitudenkriteriums (engl. *magnitude condition*) die Verstärkung k. Anhand der Wurzelortskurve ist ersichtlich, dass wir zwei Möglichkeiten zur Parametrierung einer doppelten Polstelle des geschlossenen Regelkreises haben. Bestimmen Sie beide Verstärkungen und anschliessend die zugehörigen Reglerverstärkungen k_p.

   4.g) Überlegen Sie sich nun, wie die Verstärkung k so gewählt werden kann, dass wir ein System auslegen, bei dem ein Pol am höchsten Punkt der Wurzelortskurve und ein Pol am tiefsten Punkt der Wurzelortskurve zu liegen kommt. Bestimmen Sie anschliessend die zugehörige Reglerverstärkung k_p und implementieren Sie diesen Regler.

Implementation und Testen der Regelung

Implementieren Sie die Winkelregelung für das stehende Pendel analog zum hängenden Pendel. Beachten Sie, dass das Vorzeichen am Solldrehzahl-Eingang der Drehzahlregelung hier positiv sein muss. Ausserdem ist die Nulllage des Pendels um den Arbeitspunkt gegeben, wenn das Pendel steht. Folglich müssen Sie vom gemessenen Winkel φ_2 noch π abziehen, um den betrachteten Arbeitspunkt zu erhalten.

4 Einleitung

Der vorliegende Antrieb besteht aus einem Maxon EC90 Motor mit Maximalstrom 15 A und Maximaldrehzahl 2000 rpm (≈ 33.3 Hz, ≈ 209.4 rad/s). Die Schwungmasse (Scheibe) wurde entfernt; im Fokus steht der EC-Motor.

In der Praxis werden Drehzahlen häufig in Umdr./min angegeben; für Modellierung und Regelung arbeiten wir konsequent mit SI-Einheiten (rad/s).

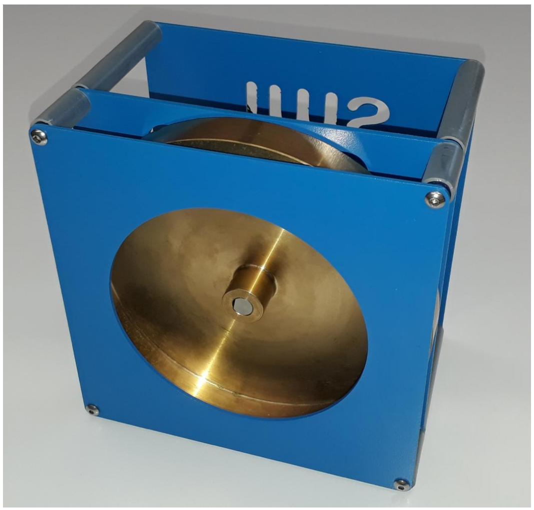

Abbildung: Cuboid (Foto)

CHARACTERISTICS	
Terminal resistance	2.28 Ω
Terminal inductance	2.5 mH
Torque constant	217 mNm/A
Speed constant	44 rpm/V
Speed / torque gradient	0.462 rpm/mNm
Mechanical time constant	14.8 ms
Rotor inertia	3060 gcm²

Abbildung: Ausschnitt aus dem EC90-Datenblatt

Häufig werden unterschiedliche Begriffe für ähnliche Regelkreise verwendet; meist ist dasselbe gemeint:

- Lageregler $\equiv$ Winkelregler $\equiv$ Positionsregler
- Drehzahlregler $\equiv$ Geschwindigkeitsregler

5 Systemidentifikation und Modellbildung

Wir betrachten den Pfad $i_{\text{soll}}(t) \to \omega(t)$. Ein einfaches rotatives Modell lautet:

$$J\,\dot{\omega}(t) + b\,\omega(t) \;=\; k_T\,i(t) - \tau_L(t),$$

mit Trägheitsmoment J, Reibung b, Drehmomentkonstante k_T und Störmoment τ_L.

Größe	**Wert**
Maximalstrom	15 A
Maximaldrehzahl	2000 rpm
Encoderauflösung	4×6400 Inkr./Umdrehung

Tabelle 2: Relevante Parameter (Beispielwerte)

Aufgaben

1. Führen Sie eine Frequenzgangmessung $i_{\text{soll}} \to \omega$ durch. Hinweis: fast reibungsfrei $\Rightarrow$ integrierendes Verhalten; einfache P-Regelung ist geeignet.

2. Modellieren Sie das System aus dem Datenblatt (Newton rotativ) und schätzen Sie J, b, k_T.
3. Verbessern Sie das Modell schrittweise (Bandbreite des Stromreglers, Totzeit, Messpfad der Geschwindigkeit).
4. Skizzieren Sie das gemessene System als Blockschaltbild (mit Einheiten).

6 Demonstration aller Stil-Elemente

Mathematische Kurzformen

Die Ableitung nach der Zeit wird als

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

geschrieben. Die Lösung eines exponentiellen Ansatzes:

$$x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Automatisches Abbildungsverzeichnis

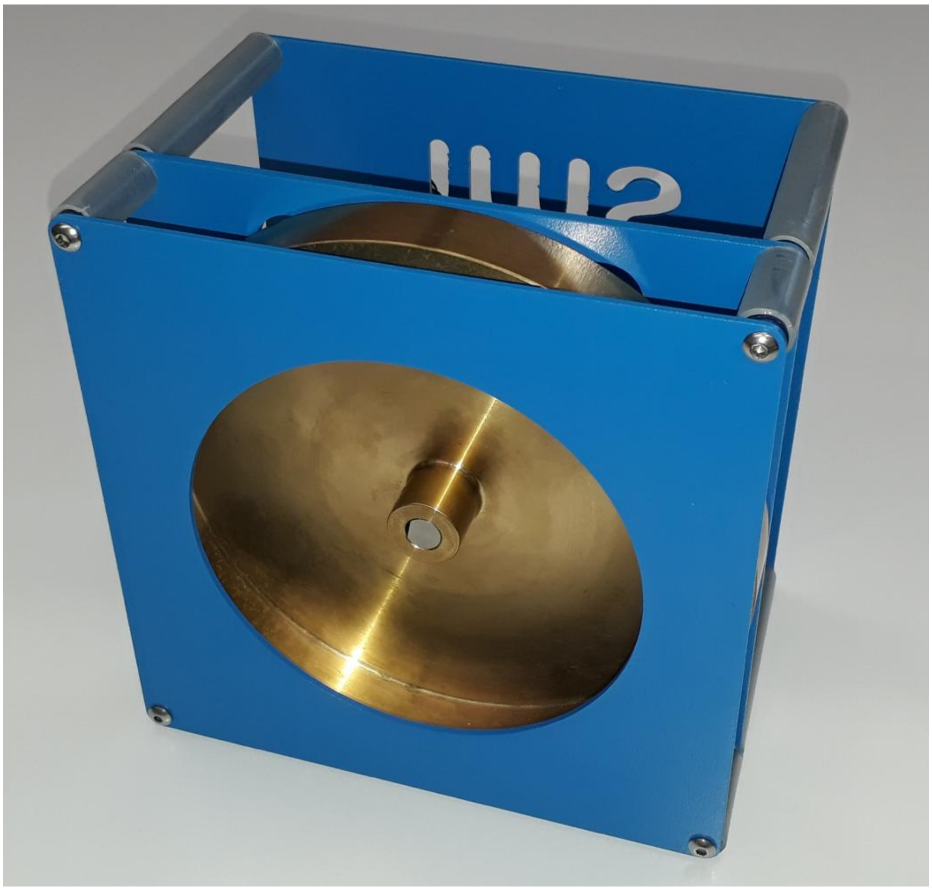

Abbildung 2: Beispiel: automatische Bildumgebung mit Label `fig:cuboid_foto_sm`.

Aufgaben-Umgebung mit anderem Titel

Zusatzaufgaben

1. Diskutieren Sie die Vor- und Nachteile der Modellvereinfachung.
2. Erweitern Sie Ihr Modell um ein nichtlineares Reibglied.

Links und Farben

Weitere Infos unter Maxon Motor AG. Beachten Sie die Farbdefinition `labColor` aus `labstyle.sty`.

7 Drehzahlregelung

Wir verwenden einen PI-Regler, Ziel: ausreichende Phasenreserve und keine Überschreitung von 15 A.

Aufgaben — Drehzahlregelung

1. Parametrieren Sie k_p und T_n für drei Varianten (500 ms, 100 ms, 10 ms).
2. Untersuchen Sie Führungsverhalten (Sprung) und Störverhalten (Drehmomentsprung 1 N m).
3. Ergänzen Sie ggf. ein Lead-Glied, um die Phasenreserve zu verbessern.

Hinweise

- Bilder liegen in `figures/` (alternativ `Figures/`); Pfad ist im Stilpaket gesetzt.
- Für Einheiten und Werte stets `\qty` und `\si` aus `siunitx` verwenden.
- Kompilieren Sie mit `lualatex` oder `pdflatex`.

Literatur

[1] B. S. Cazzolato and Z. Prime, "On the Dynamics of the Furuta Pendulum," *Journal of Control Science and Engineering*, vol. 2011, Article ID 528341, 8 pages. doi: 10.1155/2011/528341.