



MSE-Masterarbeit

Entwicklung und Mehrgrößenregelung einer schwebenden Waage

Institut für Mechatronische Systeme



Ausgabe: 01. November 2012

Einreichung: 13. Mai 2013

Autor: Michael Ernst Peter

Betreuer: Prof. Dr. Ruprecht Altenburger

Industriepartner: Daniel Reber, Mettler Toledo AG

Externer Experte: Dr. Beat Aeschlimann

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Konzeption, die theoretische und experimentelle Modellbildung, die Positionsregelung sowie die Systemanalyse einer neuartigen, schwebenden Waage. Die Erfindung geht auf D. Reber von der Mettler Toledo AG zurück.

Die schwebende Waage weist sechs mechanische Freiheitsgrade auf. Diese werden über sechs positionsgeregelte Voice-Coil-Aktoren angebunden. Das Wägeprinzip basiert auf der Kompensation der Gewichtskraft des Prüfkörpers. Aufgrund des proportionalen Zusammenhangs zwischen Spulenstrom und Aktorkraft kann die Masse des Prüfkörpers messtechnisch ermittelt werden. Die Grundidee ist es, drei Aktoren mit vertikaler und drei Aktoren mit horizontaler Kraftrichtung anzubringen. Die Kraftvektoren der horizontalen Aktoren liegen in einer Ebene und sind, sofern die Waage ausnivelliert ist, orthogonal zu den Kraftvektoren der vertikalen Aktoren und orthogonal zur Gravitationskraft des Prüfkörpers. Die Information der Kompensationskraft ist folglich vollständig im Summenstrom der drei vertikalen Aktoren enthalten und unabhängig vom Ort, wo der Prüfkörper auf die Waage gelegt wird. Die horizontalen Aktoren werden lediglich für die Positionsregelung der Waage benötigt.

Bei der theoretischen Modellbildung gilt es stets, die Wirklichkeit so genau als nötig zu abstrahieren. Es muss also versucht werden, die wesentlichen Wechselwirkungen des betrachteten Systems anhand von physikalischen Naturgesetzen zu beschreiben und die unwesentlichen Wechselwirkungen zu vernachlässigen. In diesem Sinne wird ein vereinfachtes, lineares Modell der Waage erstellt und die grundlegenden Systemeigenschaften analysiert. Hierfür wird ein einfacher mathematischer Formalismus für die Beschreibung der Bewegungsgleichung der schwebenden Waage ausgearbeitet. Die Mechanik des schwebenden Teils der Waage lässt sich im wesentlichen als Starrkörper beschreiben. Die linearisierte Bewegungsgleichung wird um die Dynamik der Aktorik erweitert.

Die geometrische Anordnung der Aktoren wird über ein Optimierungsproblem eruiert. Über das theoretische Modell werden Masszahlen für Kraftübertragungsgüte und Steuerbarkeit abgeleitet und untersucht. Es zeigt sich, dass die unter diesen Masszahlen optimale Anordnung eine 3-zählige Rotationssymmetrie aufweist. Die horizontalen Aktoren liegen dabei näher beim Zentrum der Mechanik als die vertikalen Aktoren. Durch die kinematische Konfiguration ist das Mehrgrößensystem sowohl statisch, als auch dynamisch schwach verkoppelt. In Zusammenarbeit mit Mettler Toledo wird ein Funktionsmuster der Waage konzipiert und gefertigt, hierzu zählt die Mechanik und der erforderliche Leistungsteil.

Die Sensitivität des Systems auf die Verkippung im Gravitationsfeld, Temperaturänderung und den statischen Auftrieb wird untersucht. Der Einfluss des statischen Auftriebs auf das Wägesystem ist beim bestehenden Funktionsmuster gross. Durch eine geeignete Wahl des Materials könnte dieser Einfluss jedoch deutlich verringert werden.

Aufgrund der schwachen Verkoppelung ist das System für eine dezentrale Positionsregelung geeignet. Die Position wird hierbei über sechs einfache PID-Regler festgehalten. Dieser Ansatz erlaubt es die Positionsregelung zukünftig über analoge PID-Regler zu realisieren. Alternativ wird eine modellbasierte prädiktive Regelung am System ausgetestet. Es lässt sich zeigen, dass der gewählte Ansatz auf eine

erweiterte, optimale Zustandsregelung führt.

Der Reglersynthese wird ein Black-Box-Modell der Regelstrecke zugrundegelegt. Eine Prädiktionsfehler-Methode zur Mehrgrössensystemidentifikation der Waage wird implementiert. Die Modellgüte des identifizierten Modells bildet das reale Systemverhalten im Zeit- und im Frequenzbereich gut ab. Ein wesentliches Merkmal des Systems ist es, dass Messungen nur im Regelbetrieb durchgeführt werden können.

Die Regelgüte und die Robustheit der beiden umgesetzten Regelstrategien wird über verschiedene Experimente verifiziert. Die PID-Regelung ist grundsätzlich für die Regelung der schwebenden Waage geeignet. Die modellprädiktive Regelung übertrifft die PID-Regelung in den Bereichen Führungs- und Störverhalten sowie Robustheit. Die Stellamplituden sind bei der MPC-Regelung deutlich kleiner als bei der PID-Regelung. Die Signalqualität der Stellgröße ist bei der momentanen Parametrierung der MPC-Regelung schlechter als bei der dezentralen PID-Regelung.

Das Grundkonzept, die Masse des Prüfkörpers über den Summenstrom der vertikalen Aktoren zu bestimmen wird experimentell untersucht. Hier zeigt sich, dass das Funktionsmuster nicht als Präzisionswaage geeignet ist. Unter Anbetracht der Tatsache, dass das Funktionsmuster in erster Linie der Erprobung der Regelung dient, sind die Resultate jedoch gut. Es wird aufgezeigt, wie die Schieflage der Waage rein über die Strommessung ermittelt werden kann.

Die zentrale Erkenntnis der theoretischen Modellbildung, der theoretischen und der experimentellen Systemanalyse ist, dass für die Bestimmung der Masse die Strommessung aller sechs Aktoren herangezogen werden sollte. Im Rahmen dieser Arbeit konnte dies jedoch nicht messtechnisch überprüft werden.



Erklärung betreffend das selbständige Verfassen einer Masterthesis an der School of Engineering

Mit der Abgabe dieser Masterthesis versichert der/die Studierende, dass er/sie die Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst hat

Der/die unterzeichnende Studierende erklärt, dass alle zitierten Quellen (auch Internetseiten) im Text oder Anhang korrekt nachgewiesen sind, d.h. dass die Masterthesis keine Plagiate enthält, also keine Teile, die teilweise oder vollständig aus einem fremden Text oder einer fremden Arbeit unter Vorgabe der eigenen Urheberschaft bzw. ohne Quellenangabe übernommen worden sind.

Bei Verfehlungen aller Art treten der Paragraph 39 (Unredlichkeit und Verfahren bei Unredlichkeit) der ZHAW Rahmenprüfungsordnung sowie die Bestimmungen der Disziplinarmassnahmen der Hochschulordnung in Kraft.

Ort, Datum:

Unterschriften:

.....

.....

.....

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
1.1 Aufgabenstellung	1
1.2 Die statische Waage	3
2 Theoretische Modellbildung	5
2.1 Voice-Coil-Aktor	5
2.2 Wägezelle Piranha	15
2.3 VC6	22
3 Optimierung der kinematischen Konfiguration	33
3.1 Grundsätzliches zum Optimierungsproblem	33
3.2 Die Singulärwertzerlegung und die Konditionszahl	36
3.3 Optimierung der kinematischen Konfiguration	39
3.4 Konstruktive Umsetzung	44
3.5 Sensitivitätsanalyse	51
4 Positionsregelung	57
4.1 Systemtheorie für die Regelung von Mehrgrößensystemen	59
4.2 Dezentrale Regelung	70
4.3 MPC-Regelung	79
5 Experimentelle Modellbildung	93
5.1 Grundlagen der Black-Box-Systemidentifikation	93
5.2 Praktische Aspekte der Systemidentifikation	100
5.3 Black-Box-Systemidentifikation des FUMU1	103
5.4 Frequenzgangmessungen der Strecke	107
6 Experimentelle Systemanalyse	111
6.1 Grundsätzliches zum Prüfstand	111
6.2 Messungen zur Regelgüte	118
6.3 Messungen zum System als Waage	122
7 Schlussbetrachtung	129
Anhang	133
A.1 Messungen	133
A.2 Identifiziertes Modell	141
A.3 Vergleich der Singulärwertdiagramme der Regelungen	143
A.4 Fotos	144

Inhaltsverzeichnis

A.5 Umrechnung in die PID-Regelparameter	146
A.6 Auffinden eines reproduzierbaren Arbeitspunktes	146
A.7 Elektronik	148
A.8 Aufgabenstellung von MTAG	149
Literaturverzeichnis	151
Abbildungsverzeichnis	157
Tabellenverzeichnis	161

Abkürzungen

TK	Temperaturkoeffizient
FUMU1	Funktionsmuster 1
DOF	Degree-Of-Freedom
GLS	Gleichungssystem
DGL	Differenzialgleichungen
DGLS	Differenzialgleichungssystem
AP	Arbeitspunkt
AR	Arbeitsraum
VC6	Kurzbezeichnung für das Konzept der schwebenden Waage
MTAG	Mettler Toledo AG
LTI	Linear-Time-Invariant
TP	Tiefpass
IO	Input-Output
AI	Analog-Input
AO	Analog-Output
AAF	Anti-Aliasing-Filter
FIR	Finit-Impulse-Response
ZOH	Zero-Order-Hold
WOK	Wurzelortskurve
AWR	Anti-Windup-Reset
RGA	Relative-Gain-Array
SISO	Single-Input-Single-Output
SIMO	Single-Input-Multiple-Output
MISO	Multiple-Input-Single-Output
MIMO	Multiple-Input-Multiple-Output
GPC	Generalized Predictive Control
MPC	Model Predictive Control
LQR	Linear-Quadratic-Regulator
LQG	Linear-Quadratic-Gaussian
LTR	Loop-Transfer-Recovery
RBS	Random-Binary-Sequenz
PRBS	Pseudo-Random-Binary-Sequenz
ARX	Auto-Regressive-eXogenous
OE	Output-Error
BGR	Blau-Grün-Rot
CMS	Cyan-Magenta-Schwarz
BGRCMS	Blau-Grün-Rot-Cyan-Magenta-Schwarz

1 Einführung

1.1 Aufgabenstellung

Ausgangslage

In dieser Masterarbeit soll ein Funktionsmuster einer Wägeeinheit entwickelt werden, bei der der Träger des Wägegutes rein über elektromechanische Aktuatoren (Voice-Coil) positioniert und gehalten wird. Es ist somit keine mechanische Lagerung des Trägers nötig.

Die Grundidee dazu stammt von D. Reber von der Mettler Toledo AG. Es wird von ihm bereits eine Anordnung der Voice-Coil Aktuatoren und zwei Konfigurationen für die Waagschale vorgeschlagen. Am Ende der Arbeit soll ein erstes Funktionsmuster vorhanden sein, welches die Grundfunktionalität dahingehend erfüllt, dass das System stabil betrieben werden kann und erste Erfahrungen im Umgang mit dem System gesammelt werden können.

Aufgabenstellung Detail

Einarbeitung und Mechanische Konzeption

In diesem ersten Aufgabenteil soll die grundlegende mechanische Anordnung der Aktuatoren definiert werden. Um diese Anordnung geeignet bewerten zu können, soll ein einfacher mathematischer Formalismus ausgearbeitet werden, um ein solches System sinnvoll beschreiben zu können.

Als Ergebnis sollen Skizzen vorhanden sein, welche die wesentliche Anordnung und Bauteile beschreiben. Die konstruktive Ausarbeitung und Ableitung von Fertigungszeichnungen soll bei MTAG erfolgen.

Modellbildung

In diesem Teil soll ein dynamisches Modell des Systems ausgearbeitet werden. Auf mechanischer Seite ist dies im wesentlichen ein starrer Körper, der über sechs Aktuatoren Kräfte erfährt und über eine Sensorik sechs translatorische Freiheitsgrade (Positionen) misst. Auf Seiten der Aktorik und Ansteuerung umfasst es das Verhalten der Spulen und deren Ansteuerung.

Als Ergebnis dieses Aufgabenteils soll ein lineares Modell des Gesamtsystem vorhanden sein, so dass davon ausgehend ein Regler entworfen werden kann. Auf Seiten der Ansteuerung wird gemeinschaftlich mit MTAG die Elektronik konzipiert und von MTAG umgesetzt.

Reglerentwurf

Hier soll das System simulativ in Betrieb genommen werden. Da es sich um ein gekoppeltes System handelt, ist es (nach derzeitiger Meinung) zwingend einen Mehrgrößenregler zu entwerfen. Es wird vorgeschlagen, einen Zustandsregler als Ausgangsbasis zu verwenden.

Als Ergebnis ist ausgehend vom Modell ein parametrierter Regler vorhanden.

Inbetriebname des Systems

Das System soll mit Hilfe eines Rapid-Prototyping Systems in Betrieb gesetzt werden können. In diesem Aufgabenteil sollen ggf. erforderliche Korrekturen am Gesamtaufbau vorgenommen werden. Des Weiteren werden Erfahrungen beim Zusammenbau gesammelt.

Stabiler Betrieb und experimentelle Untersuchung

Bei diesem experimentellen Teil soll das System stabil betrieben werden können. Fragen die beispielsweise beantwortet werden können sind:

- Wie ist die Güte des verwendeten mechatronischen Modells?
- Wie kann das System ggf. im Betrieb identifiziert werden?
- Wie stabil sind die Stromsignale auf längeren Zeitskalen?
- Welche Regeltypen sind ebenfalls umsetzbar (z.B. $6 \times$ SISO mit Entkopplung)?
- Wie robust ist das System (mechanisch und regelungstechnisch) insbesondere bei maximaler Beladung?

Ergebnisdarstellung

Es ist eine Dokumentation im Rahmen von etwa 60 Seiten anzufertigen, zudem ist eine Präsentation der Ergebnisse im Umfang von etwa 30 Minuten vorgesehen.

1.1.1 Sonstiges

Beginn: 1.11.2012

Abgabe: 31.5.2013

ECTS-Punkte: 27 (entspricht 810 Zeitstunden)

Winterthur im Oktober 2012, Ruprecht Altenburger

1.2 Die statische Waage

Das Grundkonzept einer statischen Waage

Das Grundkonzept der statischen Waage hat sich im Verlauf der Geschichte nicht verändert. Das statische Wägeprinzip der Masse eines Körpers basiert auf der Kompensation von dessen Gewichtskraft. Bei ursprünglichen Waagen (einfacher Hebel in Abbildung 1.1) wurde die Gewichtskraft über Vergleichsmassen bzw. Gewichte kompensiert. Befindet sich der Hebel im Lot, entspricht die Masse des Prüfkörpers der Vergleichsmasse.

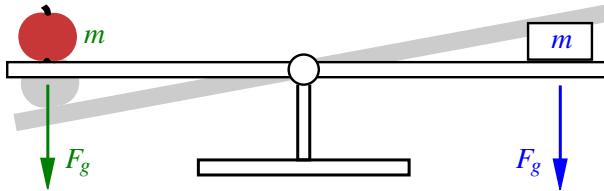


Abbildung 1.1: Eine statische Waage

Stand der Technik

MTAG produziert Waagen, bei denen fünf der sechs mechanischen Freiheitsgrade über eine Mechanik angebunden werden. Der verbleibende Freiheitsgrad zeigt in Richtung des Gravitationsfeldes und wird über einen positionsgeregelten Voice-Coil-Aktor angebunden. Über eine spezielle Mechanik mit Festkörpergelenken werden Hebelübersetzungen von 1:1000 und höher realisiert. Die Gewichtskraft des Prüfkörpers wirkt als Störung auf den Regelkreis und wird über die Positionsregelung durch den Voice-Coil-Aktor kompensiert. Durch den linearen Zusammenhang zwischen dem Strom der Spulenwicklung des Voice-Coil-Aktors und der daraus resultierenden Aktorkraft kann die Kompensationskraft und somit die Masse des Wägeguts über die Strommessung ermittelt werden. Die Hebelübersetzung, die Steifigkeit der Mechanik und Reibeffekte beeinflussen dabei die Wägegenauigkeit.

Das Konzept der schwebenden Waage

Das Konzept der schwebenden Waage geht auf D. Reber von MTAG zurück. Die Mechanik inkl. Waagschale ist ein einfacher Starrkörper, vergl. Abbildung (1.2). Die Grundidee ist es, alle sechs mechanischen Freiheitsgrade über positionsgeregelte Voice-Coil-Aktoren anzubinden. Es sind somit sechs Voice-Coil-Aktoren für die Krafteinbringung und sechs Sensoren für die Erfassung der Position notwendig.

Die Kraftrichtung von drei Voice-Coil-Aktoren zeigt in die vertikale Richtung und die Kraftrichtung von drei Voice-Coil-Aktoren liegt in der horizontalen Ebene. Die Gravitationskraft des Prüfkörpers wird vollständig durch die drei vertikalen Aktoren kompensiert. Die Information über die Gewichtskraft ist im Summenstrom der drei vertikalen Aktoren enthalten und unabhängig davon, wo das Wägegut auf die Waage gelegt wird. Es handelt sich um ein Direktwägesystem. Der Einfluss der Hebelübersetzung von bisherigen Waagen wird umgangen. Ein weiterer Vorteil ist, dass das System keine Reibung aufweist.

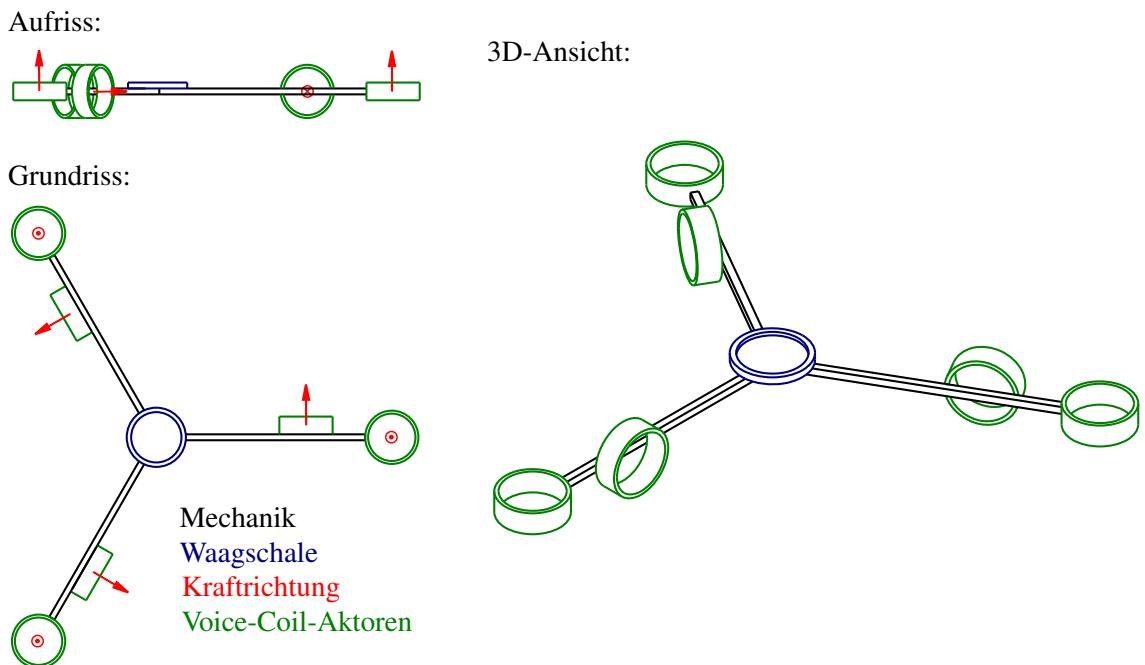


Abbildung 1.2: Konzeptskizze

2 Theoretische Modellbildung

2.1 Voice-Coil-Aktor

Für die Krafteinbringung des VC6 werden Voice-Coil-Aktoren eingesetzt. Aufgrund der kleinen bewegten Massen zeichnen sich Voice-Coil-Aktoren durch eine sehr hohe Dynamik aus. Zwischen dem Spulenstrom und der Aktorkraft besteht ein nahezu linearer Zusammenhang. Leistungsseitig wird eine lineare Spannungsansteuerung eingesetzt. Neben dem Spulenpaar bestimmt ein Kurzschlussring die dynamischen Eigenschaften des elektromagnetischen Teils des Voice-Coil-Aktors massgeblich.

2.1.1 Wirkprinzip

Das Wirkprinzip der Voice-Coil-Aktoren basiert auf der Gesetzmässigkeit der Lorentz Kraft:

Die auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld wirkende Kraft ist proportional zur magnetischen Feldstärke und zum Strom. Die Richtung des Stroms bestimmt die Richtung der Kraft. In einem konstanten Magnetfeld, resultiert ein linearer Zusammenhang zwischen Stromstärke und Kraft [Bal99].

2.1.2 Theoretische Modellbildung der Voice-Coil Dynamik

Für die Herleitung eines mathematischen Modells des Aktors soll die Funktionsskizze in Abbildung 2.1 betrachtet werden. Kernstück des Aktors ist ein Permanentmagnet sowie Spule und Kurzschlussring. Der Einfachheit halber ist in der Funktionsskizze nur eine Spule eingezeichnet, beim Aktor sind jedoch zwei Spulen parallel geschaltet. Die beiden Spulen werden so verdrahtet, dass sich die wirkende Kraft in Bezug auf die Spannung verdoppelt. Die Bauform des Voice-Coil-Aktors ist so ausgelegt, dass ein möglichst homogenes Magnetfeld entsteht, bei welchem die Flussrichtung senkrecht zum Spulenstrom wirkt. Der magnetische Fluss bzw. die magnetische Flussdichte kann in guter Näherung als konstant angenommen werden.

Die Modellbildung des Voice-Coil-Aktors mit Kurzschlussring ist durch die Werke [Mos96, LY10, HSSK12] motiviert.

Die Dynamik des verwendeten Voice-Coil-Aktors mit Kurzschlussring kann durch nachfolgendes Modell beschrieben werden.

$$u = R_1 i_1 + L_1 \frac{d}{dt} i_1 - M \frac{d}{dt} i_2 + k_{m1} \frac{d}{dt} x \quad (\text{Spule bzw. Spulenpaar}) \quad (2.1a)$$

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{d}{dt} i_2 - M \frac{d}{dt} i_1 + k_{m2} \frac{d}{dt} x \quad (\text{Kurzschlussring}) \quad (2.1b)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = w_{e1} i_1 + w_{e2} i_2 \quad (\text{Mechanik}) \quad (2.1c)$$

Die freien Größen $i_{1,2}$ und x beschreiben den Spulenstrom bzw. den Strom durch den Kurzschlussring sowie die Position der Spule in x -Richtung. $R_{1,2}$ und $L_{1,2}$ bezeichnen den Widerstand und die Induktivität

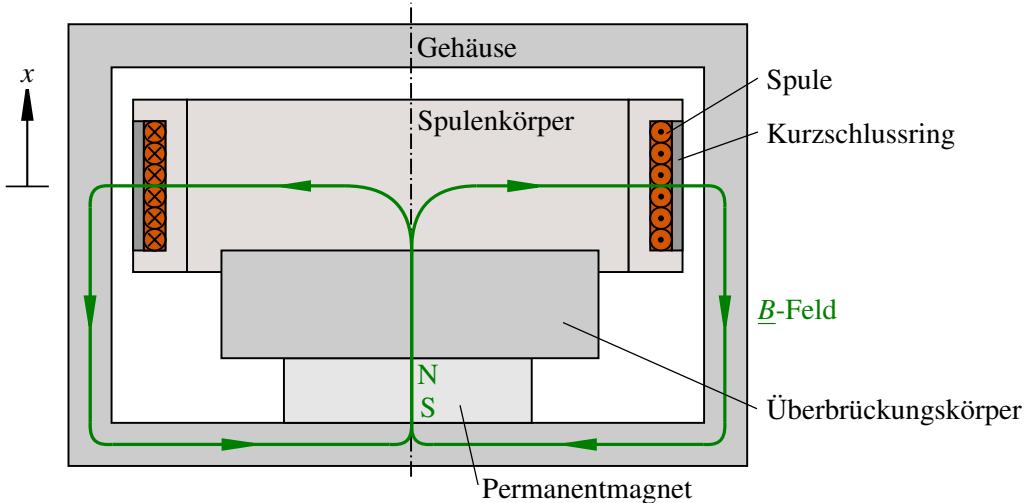


Abbildung 2.1: Funktionsskizze Voice-Coil-Aktor (Schnitt durch den rotationssymmetrischen Körper)

der Spule bzw. des Kurzschlussrings und M die Gegeninduktivität. u bezeichnet die Spannung über dem Spulenpaar. Die Terme $k_{m1,2} \dot{x}$ beschreiben den Einfluss der Selbst- bzw. der Gegeninduktion der im Magnetfeld bewegten Leiter und $w_{e1,2}$ die Komponenten der zum Strom $i_{1,2}$ proportionalen Lorentz Kraft und somit die Koppelung zwischen dem elektromagnetischen und mechanischen Teil des Aktors. In einem ersten Schritt soll die Dynamik des Aktors bei mechanischem Kurzschluss betrachtet werden. Die transformatorische Koppelung der Spule und der Kurzschlusswicklung wird als einfacher 2-Pol beschrieben.

Elektrisches Ersatzschaltbild

Abbildung 2.2 zeigt ein allgemeines elektrisches Ersatzschaltbild von zwei elektromagnetisch gekoppelten Spulen (Transformator) mit den Induktivitäten L_1 und L_2 sowie der Gegeninduktivität M [Lat09].

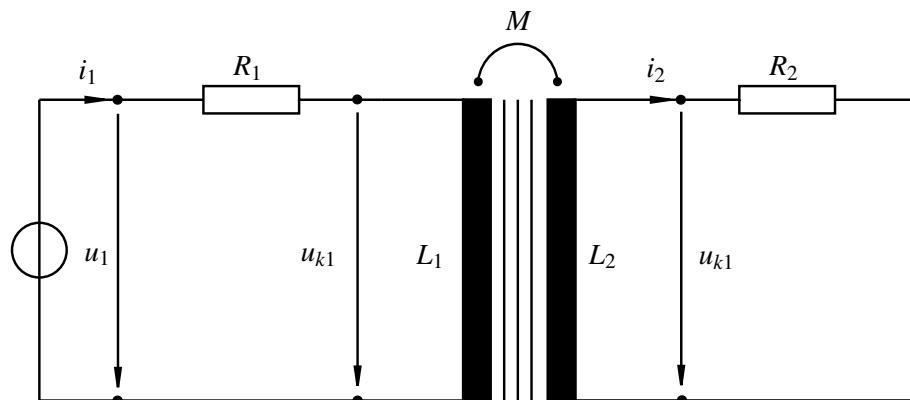


Abbildung 2.2: Allgemeines Ersatzschaltbild von zwei gekoppelten Spulen

Davon ausgehend, dass das System mit einer linearen Spannungsquelle betrieben wird, genügt das

dynamische Verhalten den Beziehungen

$$u = R_1 i_1 + \underbrace{L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}}_{u_{k1}} \quad (2.2a)$$

$$0 = R_2 i_2 + \underbrace{L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}}_{u_{k2}} \quad (2.2b)$$

Hierbei handelt es sich um ein einfaches Klemmenmodell. Mit $\underline{x}^T = [i_1 \ i_2]$ kann nachfolgendes DGLS erster Ordnung angesetzt werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{bmatrix}}_F \frac{d}{dt} \underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix}}_A \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u \quad (2.3)$$

\mathcal{L} -Transformation von Gleichung (2.3) liefert

$$\underline{F} \underline{X}(s)s = \underline{A} \underline{X}(s) + \underline{B} U(s) \quad (2.4)$$

Die Übertragungsfunktionen von der Eingangsspannung zum Strom der Wicklung bzw. zum Strom des Kurzschlussrings lassen sich anhand von

$$\underline{G}(s) = \frac{\underline{X}(s)}{\underline{U}(s)} = (\underline{F} s - \underline{A})^{-1} \underline{B} \quad (2.5)$$

bestimmen, wobei

$$\begin{bmatrix} G_{i_1 u}(s) \\ G_{i_2 u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2 s + R_2}{(L_1 L_2 - M^2)s^2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1)s + R_1 R_2} \\ \frac{M s}{(L_1 L_2 - M^2)s^2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1)s + R_1 R_2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

ist. Dabei interessiert die Übertragungsfunktion von der Eingangsspannung zum Spulenstrom $G_{i_1 u}(s)$. Das System weist eine Nullstelle bei

$$z = -\frac{R_2}{L_2} \quad (2.7)$$

und zwei Polstellen bei

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2(L_1 L_2 - M^2)} \left[(L_1 R_2 + L_2 R_1) \pm \sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4(L_1 L_2 - M^2)R_1 R_2} \right] \quad (2.8)$$

auf. Die statische Verstärkung beträgt $1/R_1$.

Black-Box-Systemidentifikation des elektromagnetischen Teils des Voice-Coil-Aktors

Die Modellparameter aus den Gleichungen (2.2a) und (2.2b) werden messtechnisch ermittelt. Hierfür wird ein zeitdiskretes Black-Box-Modell der Form

$$G(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (2.9)$$

angesetzt. Für die Identifikation wird das System mit einem PRBS-Signal beaufschlagt. Als Identifikationsmethode wird eine mehrstufige lineare Ausgleichsmethode nach [Lju87] mit Hilfe von Instrumental-Variablen angesetzt¹. Ein Ausschnitt des Eingangssignals ist in Abbildung 2.3(a) und ein Ausschnitt der Gegenüberstellung von Messung und Simulation des identifizierten Modells ist in Abbildung 2.3(b) dargestellt.

Die identifizierte Übertragungsfunktion aus Gleichung (2.9) wird mit Hilfe der inversen ZOH- Transformation vom \mathcal{Z} - in den \mathcal{S} -Bereich transformiert.

$$G(z^{-1}) = \frac{10.480 \cdot 10^{-4}z^{-1} - 9.357 \cdot 10^{-4}z^{-2}}{1 - 1.4000z^{-1} + 0.4345z^{-2}} \xrightarrow{z \rightarrow s} G(s) = \frac{58.510s + 2.659 \cdot 10^5}{s^2 + 3.335 \cdot 10^4s + 8.126 \cdot 10^7} \quad (2.10)$$

Die zeitkontinuierliche Übertragungsfunktion weist eine Nullstelle bei

$$z = -0.4544 \cdot 10^4 \quad (2.11)$$

und zwei Polstellen bei

$$p_1 = -3.0699 \cdot 10^4 \quad p_2 = -0.2647 \cdot 10^4 \quad (2.12)$$

auf.

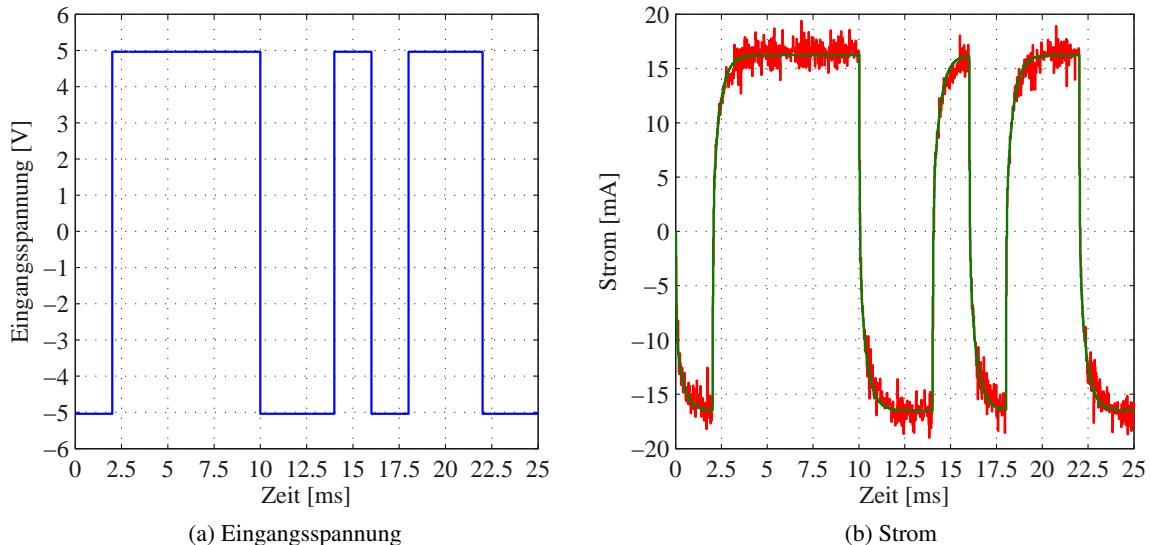


Abbildung 2.3: Gegenüberstellung von Messung und identifiziertem Modell im Zeitbereich

Die Gegenüberstellung von Messung und identifiziertem Modell im Frequenzbereich ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Die Identifikation im Zeitbereich sowie die Frequenzgangmessung wurde mit einer Spule und mit parallel geschaltetem Spulenpaar durchgeführt. Der Vergleich zwischen den Modellen und den Messungen zeigt eine hohe Modellgüte.

Neben der statischen Verstärkung wird durch die Parallelschaltung der Spulen die Dynamik des elektromagnetischen Systems verlangsamt (Pol- und Nullstellen sind im Amplituden- und Phasengang niederfrequenter).

¹MATLAB: iv4.m

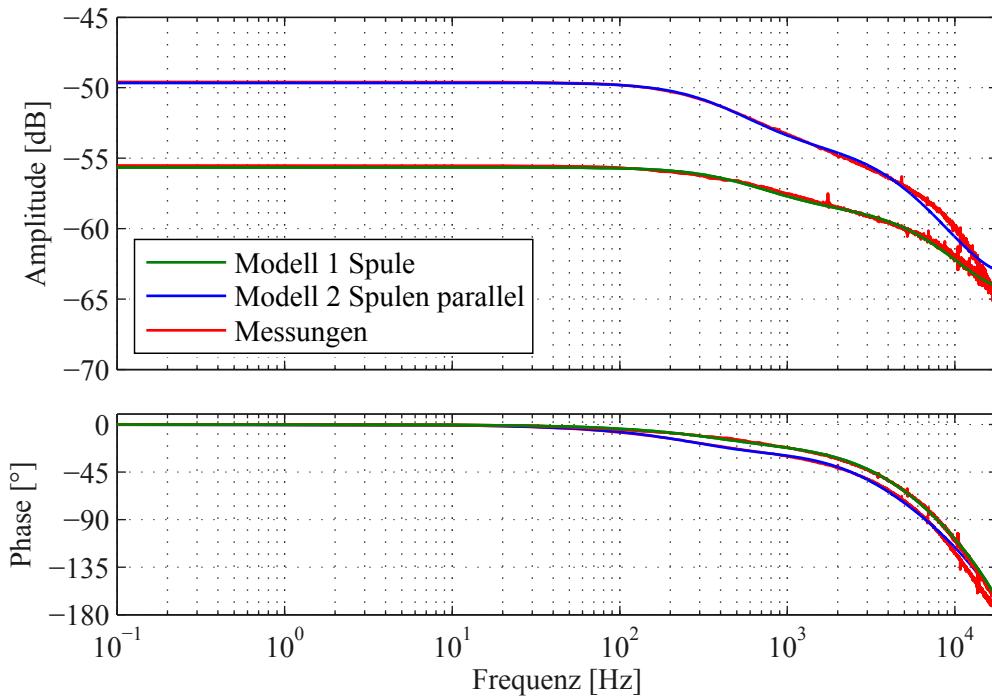


Abbildung 2.4: Gegenüberstellung des gemessenen Frequenzgang mit dem identifizierten Modell des Voice-Coil-Aktors bei mechanischem Kurzschluss

Ermittlung der unbekannten *Modellparameter anhand des identifizierten Modells*

Der Widerstand R_1 kann einfach messtechnisch ermittelt werden. Die Größenordnung des Widerstands R_2 wird theoretisch bestimmt. Die Induktivitäten L_1, L_2 und die Gegeninduktivität M können anhand der Lage der Null- und Polstellen des identifizierten Modells bestimmt werden. Die Gleichungen (2.7) und (2.8) werden nach den gesuchten Modellparametern umgeformt und es resultieren die Beziehungen

$$L_1 = R_1 \left[\frac{1}{z} - \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} \right] \quad (2.13a)$$

$$L_2 = -\frac{R_2}{z} \quad (2.13b)$$

$$M = -\frac{1}{z} \sqrt{\frac{R_1 R_2 (z - p_2)}{p_2} - \frac{R_1 R_2 z (z - p_2)}{p_1 p_2}} \quad (2.13c)$$

Offensichtlich ist bei dem gewählten Modellansatz die Induktivität L_1 nicht vom Widerstand des Kurzschlussringes R_2 abhängig. Die gefundenen Modellparameter sind in Tabelle 2.1 und 2.2 aufgeführt.

Nachfolgend soll die Induktivität der einfachen Spule L_1 durch eine Handrechnung verifiziert werden. Die Induktivität einer Spule lässt sich näherungsweise anhand von

$$L = N^2 \underbrace{\frac{\mu_0 \mu_r r^2 \pi}{l}}_{R_m} \quad (2.14)$$

abschätzen. N bezeichnet die Windungszahl, r den Spulenradius, μ_r die Permeabilität, μ_0 die magnetische

Tabelle 2.1: Modellparameter bei einer Spule

$R_1 [\Omega]$	$R_2 [m\Omega]$	$L_1 [mH]$	$L_2 [mH]$	$M [mH]$
607.0	0.1	60.37	$1.90 \cdot 10^{-5}$	$2.83 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 2.2: Modellparameter bei Parallelschaltung von zwei Spulen

$R_1 [\Omega]$	$R_2 [m\Omega]$	$L_1 [mH]$	$L_2 [mH]$	$M [mH]$
304.0	0.1	57.85	$2.20 \cdot 10^{-5}$	$3.00 \cdot 10^{-2}$

Feldkonstante und l die Spulenlänge. Mit den Zahlenwerten

$$N = 1000, \quad r = 11.06 \text{ mm}, \quad \mu_r = 1 - 6.4 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}, \quad l = 8 \text{ mm} \quad (2.15)$$

folgt für die einfache Spule

$$L = 60.36 \text{ mH} \quad (2.16)$$

Bezüglich der Induktivität L_1 kann das erstellte Modell folglich als physikalisch interpretiert werden.

2.1.3 Einfluss des Kurzschlussrings auf den elektromagnetischen Teil des Aktors

Der Einfluss des Kurzschlussrings auf das dynamische Verhalten des elektromagnetischen Teils der Voice-Coil-Aktoren wird nachfolgend aufgezeigt. Es wird das Verhalten der einfachen Spule im Zeitbereich untersucht. Ohne Kurzschlussring handelt es sich um ein RL-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G_{iu}(s) = \frac{1/R_1}{L_1/R_1 s + 1} \quad (2.17)$$

und der Zeitkonstanten L_1/R_1 . Mit Kurzschlussring lautet die Übertragungsfunktion aus Gleichung (2.6)

$$G_{i_1 u} = \frac{L_2 s + R_2}{(L_1 L_2 - M^2)s^2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1)s + R_1 R_2} \quad (2.18)$$

Der Vergleich der Sprungantworten der beiden Systeme ist in Abbildung 2.5 aufgeführt.

Diskussion:

- Durch den Kurzschlussring wird die Ansprechzeit des elektromagnetischen Teils des Aktors verringert, dies wirkt sich direkt auf die Mechanik aus. Beim Aktorprinzip ist die Beschleunigung proportional zum Strom. Der Ruck, welcher als die zeitliche Ableitung der Beschleunigung definiert ist ($r := d/dt \ddot{x}$), ist somit proportional zur zeitlichen Stromänderungsrate. Hinsichtlich der Mechanik können bei dem System mit Kurzschlussring folglich höhere Ruckwerte erreicht werden, als ohne Kurzschlussring. Die Anstiegszeit $T_{63\%}$ beträgt beim einfachen RL-Glied $L_1/R_1 = 99.4 \mu\text{s}$, bei dem System mit Kurzschlussring hingegen $T_{63\%} = 41.4 \mu\text{s}$, dies entspricht 41.6% der Anstiegszeit des Systems ohne Kurzschlussring.
- Die Anstiegszeit $T_{99\%}$ wird beim RL-Glied nach $T_{99\%} = 457.4 \mu\text{s}$ und beim System mit Kurzschlussring nach $T_{99\%} = 927.1 \mu\text{s}$ erreicht, dies entspricht 202.7%. Das System ohne Kurzschlussring erreicht den statischen Endwert zweimal schneller, was auf die gekoppelte Dynamik der Spule und des Kurzschlussring beim System mit Kurzschlussring zurückzuführen ist.

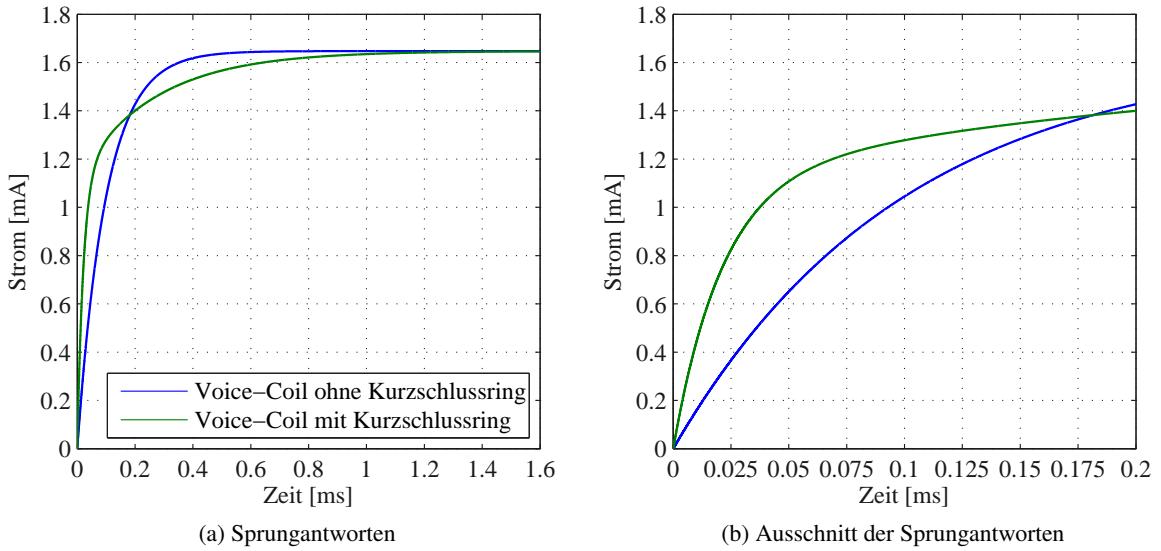


Abbildung 2.5: Sprungantwort des elektromagnetischen Teils des Voice-Coil-Aktors mit und ohne Kurzschlussring

2.1.4 Vernachlässigung der Spulendynamik

In Bezug auf die Dynamik der Mechanik ist die Dynamik des elektromagnetischen Teils vernachlässigbar.
Für die Gleichungen (2.1a) bis (2.1c) folgt

$$u_e = R_1 i_1 + k_{m1} \frac{d}{dt} x \quad (2.19a)$$

$$0 = R_2 i_2 + k_{m2} \frac{d}{dt} x \quad (2.19b)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = w_{e1} i_1 + w_{e2} i_2 \quad (2.19c)$$

Werden die Gleichungen (2.19a) und (2.19b) nach dem Strom i_1 und i_2 umgeformt und in Gleichung (2.19c) eingesetzt resultiert für die Mechanik

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = \underbrace{\frac{w_{e1}}{R_1} (u_e - k_{m1} \left(1 + \frac{w_{e2}}{w_{e1}} \frac{k_{m2}}{k_{m1}} \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{d}{dt} x)}_{k_m} \quad (2.20)$$

Der Term k_m wird messtechnisch ermittelt, siehe dazu Abschnitt 2.2.3. Zur Überprüfung des Modells kann mit dem Ansatz $w_{e1} = k_{m1}$ und $w_{e2} = k_{m2}$ die Wandlerkonstante

$$w_{e2} = \sqrt{w_{e1} \frac{R_2}{R_1} (k_m - w_{e1})} \quad (2.21)$$

ermittelt werden. Diese sollte sinnvollerweise im Bereich von w_{e1}/N liegen.

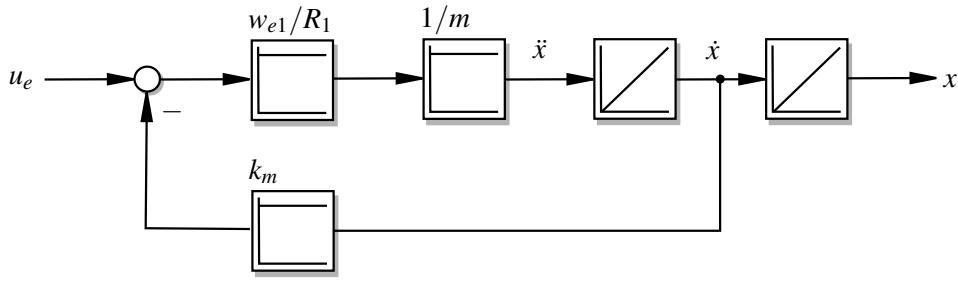


Abbildung 2.6: Blockschaltbild der Dynamik des Voice-Coil-Aktors

2.1.5 Sensitivität der Aktorik auf das Verkippen im Magnetfeld

Bei bisherigen Wägezellen werden fünf der sechs DOF über eine Mechanik festgehalten. Beim VC6 werden alle sechs DOF über sechs positionsgeregelte Voice-Coil-Aktoren gebunden. Für die Wägegenauigkeit ist der proportionale Zusammenhang zwischen Spulenstrom und Aktorkraft von fundamentaler Bedeutung, wobei die idealisierte Annahme gemacht wird, dass die Aktorkraft senkrecht auf der von der Spule aufgespannten Kreisfläche steht. Hinsichtlich der erreichbaren Messgenauigkeit wird deshalb untersucht, inwiefern sich das Verkippen der Spule im Magnetfeld auf die einzelnen Kraftkomponenten auswirkt. Mögliche Ursachen hierfür sind bspw. Abweichungen der Mechanik innerhalb der Fertigungs- und Montagetoleranzen. Abweichungen der Sensorik werden über die Regelung rückgekoppelt und führen somit statisch auf eine Verkippung, was in der Auswirkung einer Abweichung der geometrischen Anordnung der Aktorik gleich kommt.

Für die analytische Beschreibung, der von der stromdurchflossenen Leiterschleife im Magnetfeld hervorgerufenen Lorenz Kraft, soll Abbildung 2.7 betrachtet werden.

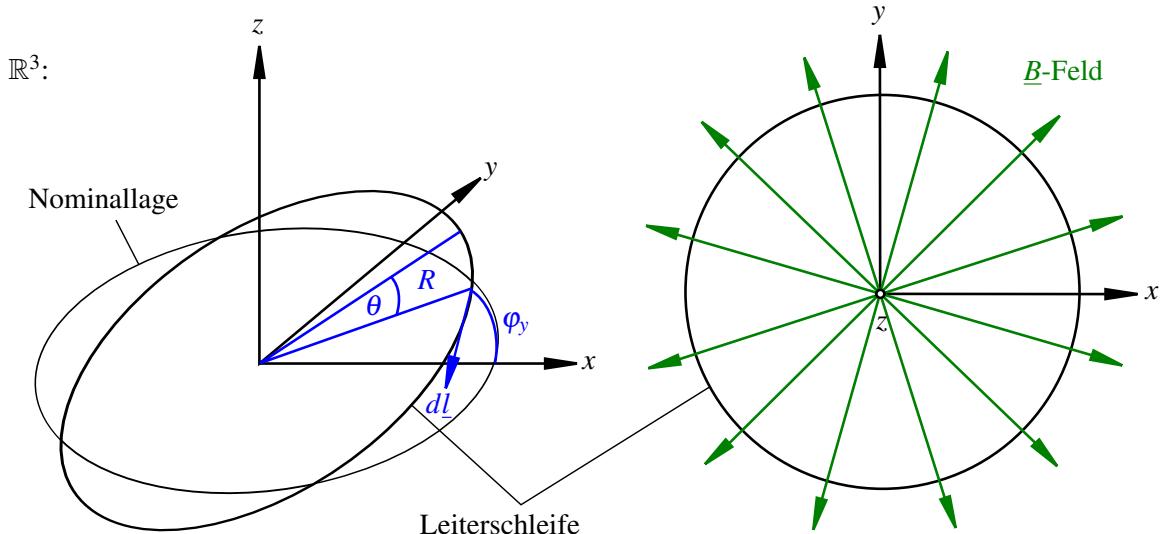


Abbildung 2.7: Leiterschleife im Magnetfeld

Analytische Beschreibung

Nachfolgende mathematische Beschreibung wurde gemeinschaftlich mit M. Robbiani durchgeführt.

Wird eine Leiterschleife durch Anlegen einer Spannung in $d\underline{l}$ -Richtung ein Strom i eingeprägt, so erhält man mit der Lorentz Kraft die auf den Leiter wirkende elektrodynamische Kraft

$$\underline{F}_e = i \int_l d\underline{l} \times \underline{B} = i \underline{w}_e \quad (2.22)$$

$d\underline{l}$ bezeichnet dabei ein infinitesimales Linienelement, \underline{B} das Feld der magnetischen Flussdichte und \underline{w}_E die Wanderkonstante [Bal99]. Eine parametrische Darstellung des idealisierten \underline{B} -Feldes aus Abbildung 2.7 kann durch

$$\underline{B}(x, y, z) = \frac{B_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{wobei} \quad \|\underline{B}(x, y, z)\|_2 = B_0 \quad (2.23)$$

geschrieben werden. In der Nominallage sind die Kraftkomponenten in x - und y -Richtung gleich Null und

$$F_{ez0} = i w_{ez} \quad \text{wobei} \quad w_{ez0} = 2\pi R B_0 \quad (2.24)$$

Das Verkippen der Leiterschleife wird durch eine Drehung um die y -Achse anhand von

$$\begin{aligned} x(\theta) &= R \cos \theta \cos \varphi_y \\ y(\theta) &= R \sin \theta \\ z(\theta) &= R \cos \theta \sin \varphi_y \end{aligned} \quad (2.25)$$

beschrieben. Infinitesimal lauten diese Gleichungen

$$\begin{aligned} dx(\theta) &= -R \sin \theta \cos \varphi_y d\theta \\ dy(\theta) &= R \cos \theta d\theta \\ dz(\theta) &= -R \sin \theta \sin \varphi_y d\theta \end{aligned} \quad (2.26)$$

Einsetzen der Gleichungen (2.25) in (2.23) führt auf

$$\underline{B}(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = \frac{B_0}{\sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi_y + \sin^2 \theta}} \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi_y \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

In dieser parametrischen Beschreibung lautet das Integral aus Gleichung (2.22)

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} dx(\theta) \\ dy(\theta) \\ dz(\theta) \end{bmatrix} \times \underline{B}(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) d\theta \quad (2.28)$$

Es wird also über die vektorwertige Funktion

$$\frac{B_0 R}{\sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi_y + \sin^2 \theta}} \begin{bmatrix} \sin^2 \theta \sin \varphi_y \\ -\sin \theta \cos \theta \sin \varphi_y \cos \varphi_y \\ \cos \varphi_y \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

im Intervall $(0, 2\pi)$ integriert. Die y -Komponente verschwindet, für die x - und z -Komponente kann man zeigen, dass es sich um elliptische Integrale zweiter Art handelt (Substitution durch $u = \cos \theta$) für welche keine geschlossene Lösung existiert. Die Berechnung des Integrals aus Gleichung 2.28 wird deshalb numerisch durchgeführt.

Grafische Auswertung

Bei N -Wicklungen führt Gleichung (2.28) mit den Zahlenwerten

$$B_0 = 0.27 \text{ T} \quad R = 11 \text{ mm} \quad N = 1000$$

für das betrachtete Intervall $\varphi_y \in [-90, 90]^\circ$ auf die nachfolgende Abbildung. Das Ergebnis ist plausibel, für kleine Winkel Verhält sich die x -Komponente näherungsweise linear und die z -Komponente ähnlich einem Kosinus.

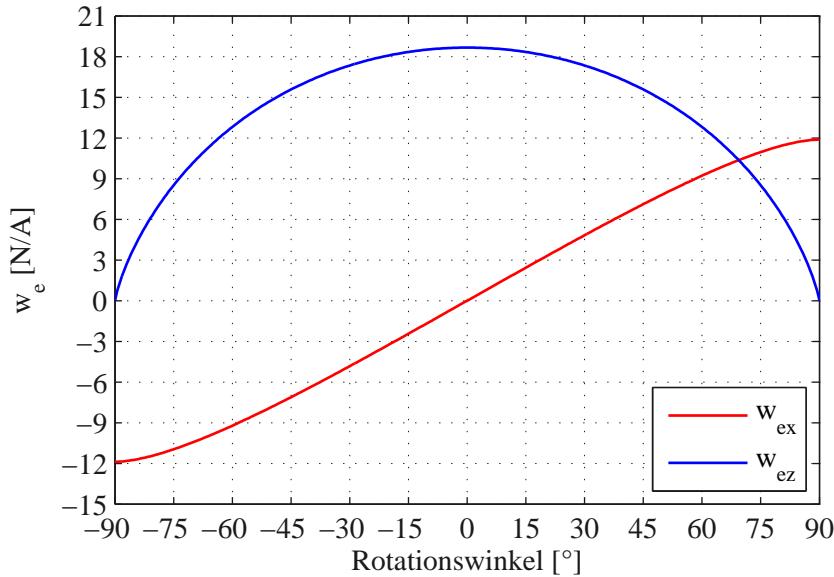


Abbildung 2.8: Komponenten der Wandlerkonstanten in Abhängigkeit des Rotationswinkels

In Abbildung 2.9(a) wird die prozentuale Abweichung der x -Komponente relativ zum Beitrag der z -Komponente in Nominallage ($\varphi_y = 0$) aus Gleichung (2.24) anhand von

$$\Delta w_{exr} = 100\% \left(1 - \frac{w_{ex}}{w_{ez0}} \right) \quad (2.30)$$

und in Abbildung 2.9(b) die relative Änderung der z -Komponente nach

$$w_{ezr} = 100\% \frac{w_{ez}}{w_{ez0}} \quad (2.31)$$

betrachtet.

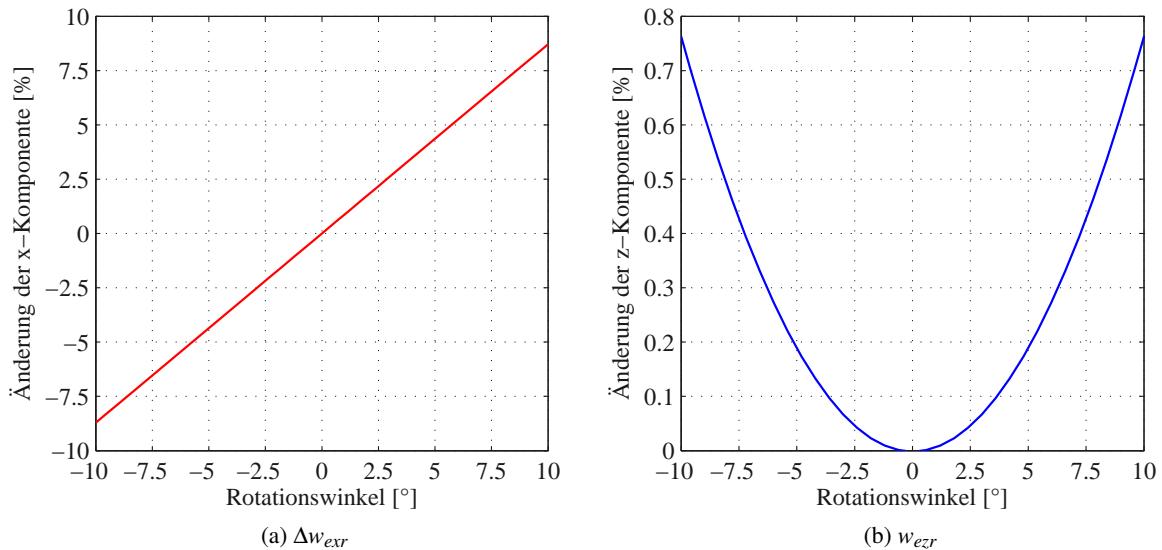


Abbildung 2.9: Kraftkomponenten bei Verkippung der Spule im Magnetfeld

Diskussion der Ergebnisse

Für kleine Winkel lässt sich Δw_{exr} in guter Näherung als lineare Funktion des Rotationswinkels φ_y approximieren und liegt im betrachteten Bereich von $\pm 10^\circ$ innerhalb von $\pm 10\%$. Der relative Einfluss auf die z -Komponente w_{ezr} liegt innerhalb von $\pm 10^\circ$ unter 1%.

2.2 Wägezelle Piranha

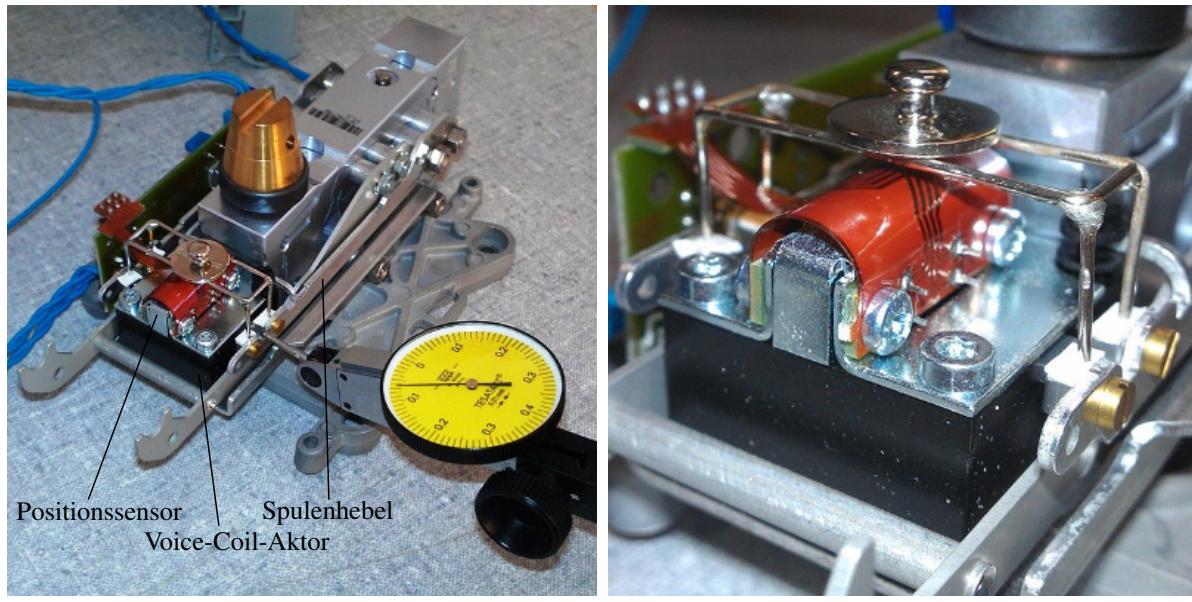
Um erste mess- und regelungstechnische Erfahrungen zu sammeln, sowie die für die theoretische Modellbildung des VC6 erforderlichen Modellparameter messtechnisch zu ermitteln wurde von MTAG eine Wägezelle Piranha 8001 zur Verfügung gestellt, vergl. Abbildung 2.10. Es wird die gleiche Aktorik und Sensorik wie beim VC6 verwendet. Leistungsseitig wird eine lineare Spannungsquelle eingesetzt. Der Systemeingang ist die Spannung über dem parallel geschalteten Spulenpaar und der Systemausgang ist die Positionsmessung des Spulenhebels.

2.2.1 Untersuchungen zum Echtzeit-Target System

Target System

Erste Erfahrungen mit dem Echtzeitsystem konnten bei der Inbetriebnahme und bei der experimentellen Untersuchung der Wägezelle gemacht werden. Als Leitsystem wird MATLAB/SIMULINK/XPC-Target eingesetzt. Als Target Rechner wird eine Education real-time target machine von SPEEDGOAT verwendet. Dieses erfüllt die gestellten Anforderungen an die analogen Ein- und Ausgänge für die Regelung des VC6 gemäss:

- $6 \times \text{AO (Stellsignal)}$: $\pm 10 \text{ V}, 16 \text{ Bit}$
- $12 \times \text{AI (Messsignal)}$: $\pm 3.3 \text{ V}, 16 \text{ Bit}$, differenzielle Messung



(a) Überprüfung der Position mit Hilfe eines Messtasters (b) Aufbau zur Ermittlung der Strom-Kraft-Konstanten

Abbildung 2.10: Piranha 8001

Anti-Aliasing-Filter

Beim Target System wurde festgestellt, dass hardwareseitig kein AAF vorhanden ist, weshalb ein einfaches RC-Filter für die Positionsmeßung zwischengeschaltet wurde. Die Grenzfrequenz in Hz berechnet sich gemäß

$$f_g = \frac{1}{2\pi R C} \quad (2.32)$$

Zur Ermittlung der Signalqualität wurde das Positionssignal mit und ohne AAF gemessen. In Abbildung 2.11(b) sind die zugehörigen Leistungsdichtespektren eingezeichnet (Methode von Welch [Hay96]).

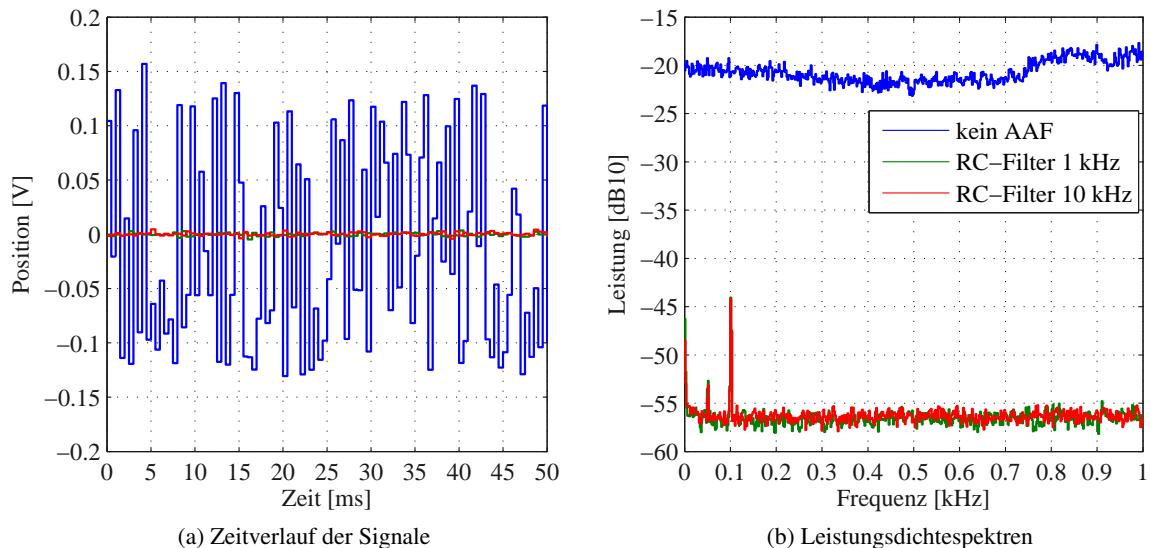


Abbildung 2.11: Signalqualität im Zeit- und im Frequenzbereich mit und ohne AAF

Mit AAF steigt die Signalqualität um rund 36 dB, was eindeutig auf ein fehlendes AAF bei der Messkarte zurückzuführen ist. Zwischen dem Signal mit AAF mit Grenzfrequenz 1 und 10 kHz besteht kein merklicher Unterschied. Neben dem Netzbrummen bei 50 Hz ist ein deutlicher Peak bei 100 Hz ersichtlich. Nach MTAG handelt es sich dabei um den Einfluss der künstlichen Beleuchtung im Versuchsraum. Die Standardabweichung des gefilterten Positionssignal kann anhand von

$$\sigma = \sqrt{10^{\frac{-56}{10}}} \approx 1.6 \text{ mV} \quad (2.33)$$

aus dem Leistungsdichtespektrum abgeschätzt werden. Es ist zu beachten, dass das Leistungsdichtespektrum üblicherweise in [dB10] = [10 log₁₀] angegeben wird. Die Signalqualität ist für die experimentelle Analyse und die Regelung hinreichend.

Wiederholgenauigkeit

In Bezug auf den VC6, muss die Nulllage des Positionssignals nicht zwingend der erforderlichen Nulllage der Mechanik entsprechen. Die Nulllage muss deshalb über feste Bezugswerte verändert werden können, dabei ist die Wiederholgenauigkeit des Messsystems von zentraler Bedeutung. Um die Wiederholgenauigkeit messtechnisch zu ermitteln werden exemplarisch drei der 16 analog Eingänge über Spannungsquellen mit einer konstanten Spannung beaufschlagt. Es werden 20 Messreihen von jeweils 20 Sekunden mit einer Abtastfrequenz von 2 kHz erfasst. In Abbildung 2.12 sind die Mittelwerte der jeweiligen Messung der drei Kanäle über die 20 Messreihen dargestellt.

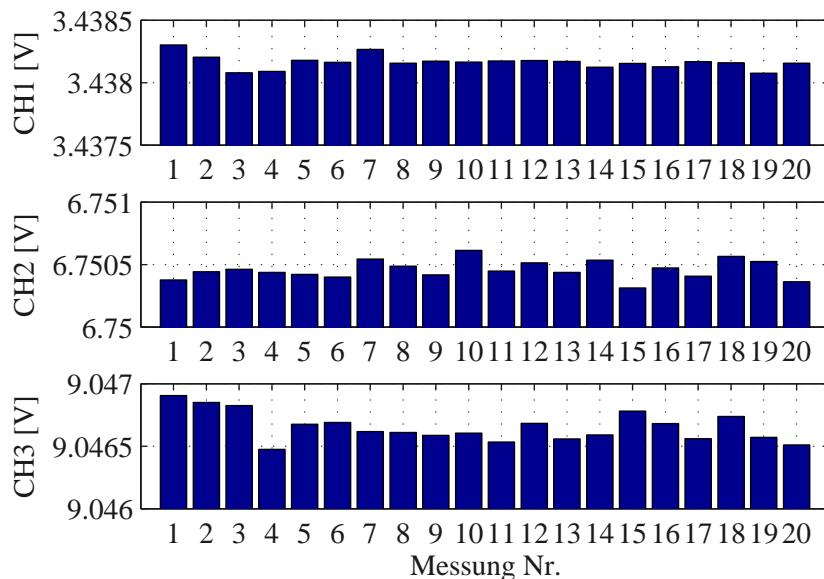


Abbildung 2.12: Wiederholgenauigkeit des Target Systems, Mittelwerte der jeweils 20 Messungen

Bei allen drei Kanälen liegen die Mittelwerte der Messungen innerhalb von $\pm 1 \text{ mV}$, die Messgenauigkeit des Target Systems kann als hinreichend erachtet werden.

2.2.2 Theoretische Modellbildung der Wägezelle

Auf die detaillierte Herleitung des mathematischen Modells der Wägezelle wird in [Bal99] eingegangen. Ausgehend von einem starren Körper für den Hebelarm wird das mechanische Modell der Waage an

der Ruhelage linearisiert. Die Dynamik des elektromagnetischen Teils des Voice-Coil-Aktors wird vernachlässigt. Eine alternative Vorgehensweise ist es, das Blockschaltbild der Voice-Coil-Aktoren aus Abbildung 2.6 um die, aufgrund von physikalischen Überlegungen erforderlichen Modellparameter zu erweitern (Feder und Dämpfer). Es resultiert ein Modell der Dynamik der Wägezelle entsprechend dem Blockschaltbild aus Abbildung 2.13. Der Faktor j_A/j_s beschreibt ein Übersetzungsverhältnis und berücksichtigt die Tatsache, dass der Ort der Krafteinbringung der Aktorik nicht dem Messort der Position entspricht.

In Anlehnung an die Nomenklatur von MTAG wird der Position die freie Variable z zugewiesen. Wird für $m = \tilde{m} j_A/j_s$ angesetzt, entspricht das erstellte Modell dem Modellansatz aus [Bal99].

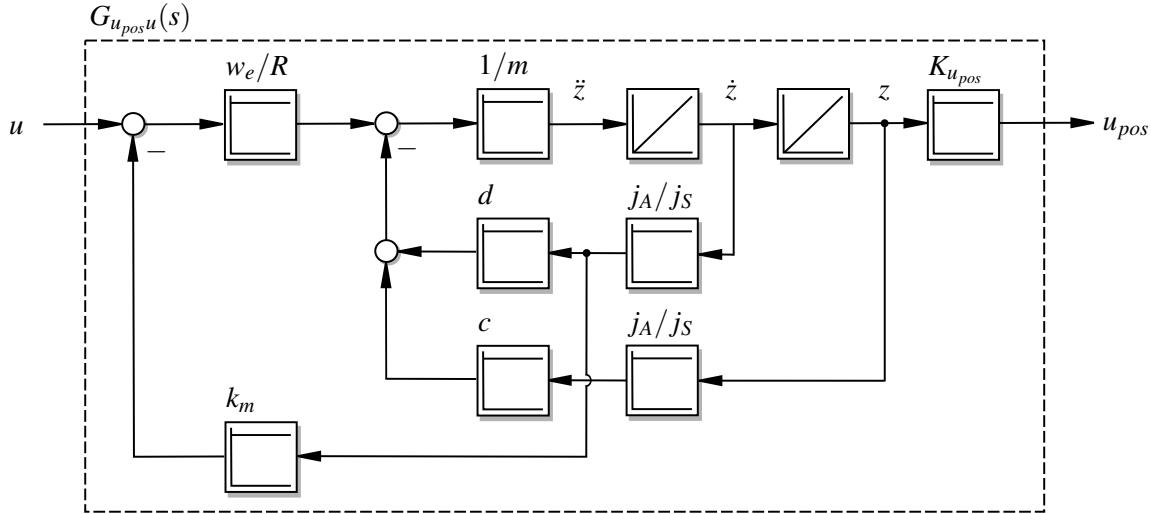


Abbildung 2.13: Blockschaltbild der Wägezelle

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$G_{u_{pos}u}(s) = \frac{\frac{K_{u_{pos}} w_e}{R m}}{s^2 + \frac{j_A}{j_s m} \left(\frac{w_e k_m}{R} + d \right) s + \frac{j_A}{j_s m} c} \quad (2.34)$$

mit den Polstellen

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{j_A}{j_s m} \left(\frac{w_e k_m}{R} + d \right) \pm \sqrt{\left[\frac{j_A}{j_s m} \left(\frac{w_e k_m}{R} + d \right) \right]^2 - 4c \frac{j_A}{j_s m}} \right] \quad (2.35)$$

Es wird davon ausgegangen, dass der Einfluss der induzierten Gegenspannung k_m die Dämpfung des Systems dominiert, die Strukturdämpfung d wird vernachlässigt.

2.2.3 Experimentelle Ermittlung der unbekannten Modellparameter

Die Modellparameter des mathematischen Modells der Wägezelle sind:

- *Bekannte Modellparameter:* j_A, j_s
- *Unbekannte Modellparameter:* $R, K_{u_{pos}}, w_e, c, k_m, m$

$j_A = 328.96$ entspricht der Hebelübersetzung zum Spulenzentrum (Ort der Krafteinbringung) und $j_S = 342.12$ der Hebelübersetzung zum Messort.

Der Ersatzwiderstand der Wicklung $R = 305.54 \Omega$ wird über ein Widerstandsmessgerät ermittelt. Die Positions-Spannungskonstante $K_{u_{pos}}$, die Federsteifigkeit c und die Strom-Kraftkonstante w_e werden über eine Ausgleichsrechnung bestimmt. Der Vergleich zwischen der jeweiligen Messung und der linearen Approximation ist in Abbildung 2.14 dargestellt. Die Position der Wägezelle unterliegt für die experimentelle Ermittlung der Modellparameter einer GPC-Positionsregelung. Die Positionsregelung der Wägezelle ist nicht Bestandteil dieser Arbeit, siehe bspw. [Pet12a].

Positions-Spannungskonstante

Die Positions-Spannungskonstante wird mit Hilfe eines Messfühlers über eine Ausgleichsrechnung ermittelt², vergl. Abbildung 2.10(a). Der lineare, statische Modellansatz lautet

$$z_{mess} = \hat{\theta}_1 u_{pos} + \hat{\theta}_2 = 6.026 \cdot 10^{-5} u_{pos} + 4.4767 \cdot 10^{-4} \quad (2.36)$$

dabei ist

$$\hat{\theta}_1 = \frac{j_A}{j_S K_{u_{pos}}} \quad (2.37)$$

und somit $K_{u_{pos}} = 1.5956 \cdot 10^4 \text{ V/m}$.

Strom-Kraftkonstante

Für die Ermittlung der Strom-Kraftkonstante wird die Wägezelle, wie in Abbildung 2.10(b) gezeigt mit unterschiedlichen Gewichten beaufschlagt. Über die Gravitationskonstante $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ wird die Gravitationskraft ermittelt. Der lineare, statische Modellansatz lautet

$$m_w g = \hat{\theta}_1 \frac{u_{pos}}{R} + \hat{\theta}_2 = 18.5183 \frac{u_{pos}}{R} - 0.1401 \quad (2.38)$$

und es ist $w_e = \hat{\theta}_1 = 18.5183 \text{ N/A}$.

Federsteifigkeit

Für die Ermittlung der Federsteifigkeit wird die Wägezelle im Regelbetrieb mit konstanter, sehr kleinen Geschwindigkeit durch den AR gefahren. Wird der Einfluss der induzierten Gegenspannung vernachlässigt, gilt die Beziehung

$$u \frac{w_e}{R} = u_{pos} \frac{c j_A}{K_{u_{pos}} j_S}, \quad (2.39)$$

vergl. das Blockschaltbild in Abbildung 2.13. Der lineare Modellansatz und die identifizierten Modellparameter sind

$$u \frac{w_e}{R} = \hat{\theta}_1 \frac{u_{pos} j_A}{K_{u_{pos}} j_S} + \hat{\theta}_2 = 10.1514 \frac{u_{pos} j_A}{K_{u_{pos}} j_S} + 0.1306 \quad (2.40)$$

und es ist $c = \hat{\theta}_1 = 10.1514 \text{ N/m}$.

²MATLAB: `robustfit.m`

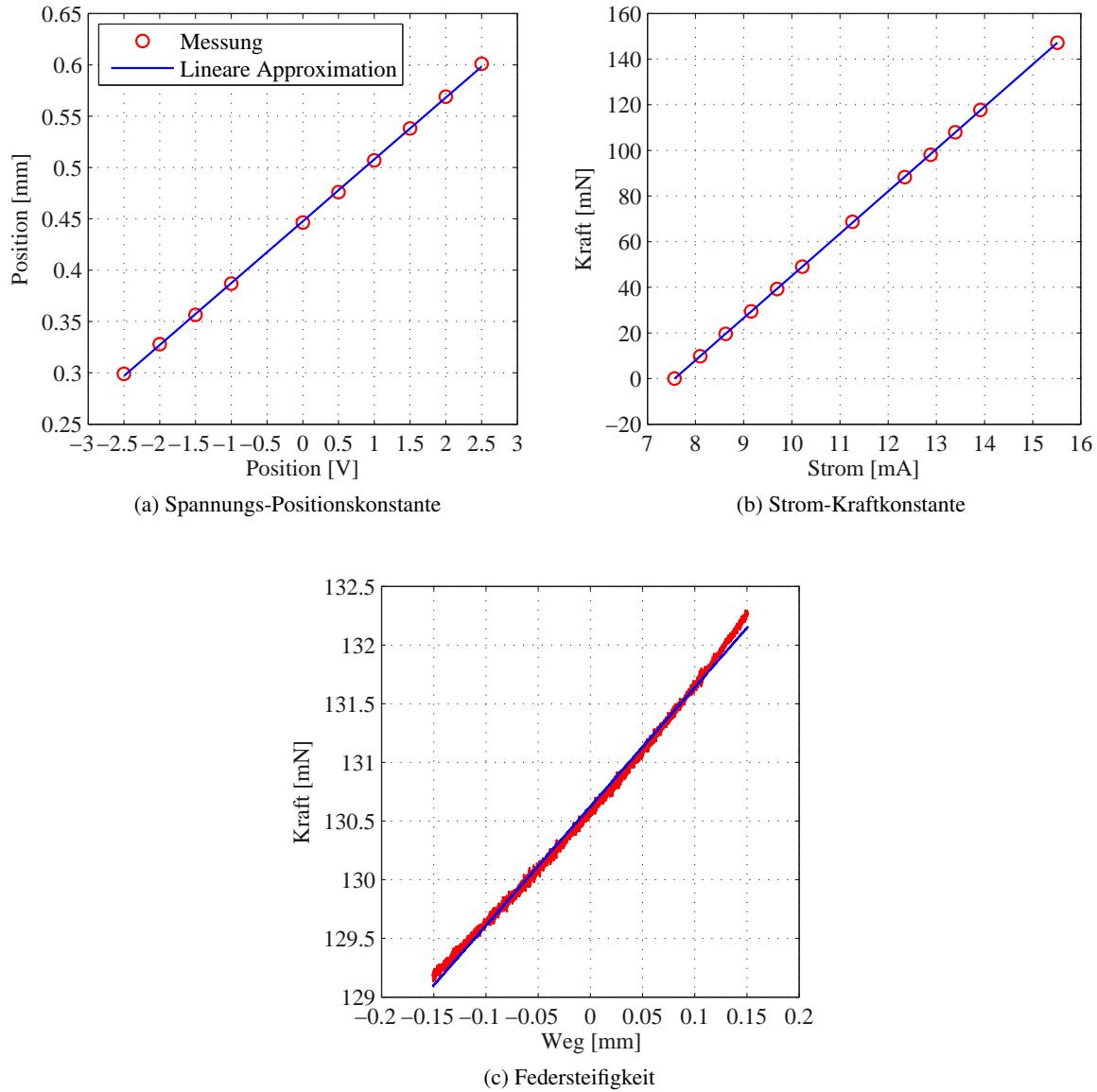


Abbildung 2.14: Lineare Approximation

Geschwindigkeits-Spannungskonstante k_m und Masse m

Die verbleibenden unbekannten Modellparameter Geschwindigkeits-Spannungskonstante k_m und die Masse m werden anhand der Lage der Polstellen ermittelt. Umformen der Gleichungen (2.35) nach den gesuchten Modellparametern führt auf

$$k_m = -\frac{Rc(p_1 + p_2)}{w_e p_1 p_2} \quad (2.41a)$$

$$m = \frac{j_A c}{j_S p_1 p_2} \quad (2.41b)$$

Um die Lage der Polstellen experimentell zu ermitteln wird wie in Abschnitt 2.1.2 ein zeitdiskretes Black-Box-Modell der Wägezelle identifiziert und anschliessend mit Hilfe der inversen ZOH-Transformation

vom \mathcal{Z} - in den \mathcal{L} -Bereich transformiert.

$$G(z^{-1}) = \frac{9.215 \cdot 10^{-2} z^{-1}}{1 - 2.551 z^{-1} + 2.142 z^{-2} - 0.5902 z^{-3}} \quad (2.42a)$$

$$\xrightarrow{z \rightarrow s} G(s) = \frac{6.953 s^2 + 4.554 \cdot 10^4 s + 9.525 \cdot 10^7}{s^3 + 1054 s^2 + 2.008 \cdot 10^5 s + 9.408 \cdot 10^5} \quad (2.42b)$$

Der verwendete Identifikationsalgorithmus stammt aus [Pet12b]. Die zeitkontinuierliche Übertragungsfunktion weist drei Polstellen bei

$$p_1 = -4.8057 \quad p_2 = -242.5542 \quad p_3 = -807.0823 \quad (2.43)$$

auf. Die Nullstellen sind auf den diskreten Modellansatz und die inverse ZOH-Transformation zurückzuführen. Einsetzen der bereits bekannten Modellparameter und den Polstellen p_1 und p_2 in die Gleichungen (2.41a) und (2.41b) führt auf die gesuchten Modellparameter

$$k_m = 35.5432 \text{ Ns/m}, \quad m = 8.3737 \text{ g} \quad (2.44)$$

Das für die Identifikation verwendete Eingangssignal (PRBS) ist in Abbildung 2.15(a) und die Gegenüberstellung von Messung und Modell in Abbildung 2.15(b) aufgeführt. Das identifizierte Modell weist im Zeitbereich eine hohe Modellgüte auf.

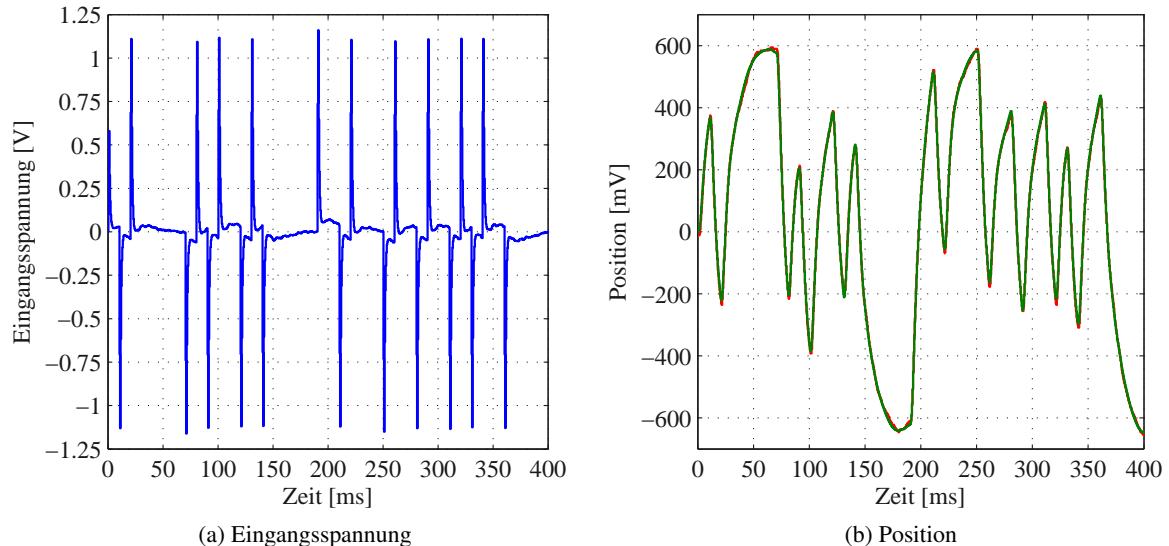


Abbildung 2.15: Gegenüberstellung von Messung und identifiziertem Modell im Zeitbereich

Die Gegenüberstellung von gemessenem Frequenzgang, theoretischem Modell und identifiziertem Modell im Frequenzbereich ist in nachfolgender Abbildung 2.16 dargestellt. Bis ca. 10 Hz ist das theoretische Modell mit der Messung deckungsgleich, das identifizierte Modell hingegen stimmt bis ca. 100 Hz mit der Messung überein, was auf den zusätzlichen Freiheitsgrad (Polstelle) beim identifizierten Modell zurückzuführen ist. Ab 100 Hz wird das Schwingverhalten bereits durch die Strukturdynamik beeinflusst, im Bereich von 160 Hz treten erste Resonanzerscheinungen auf.

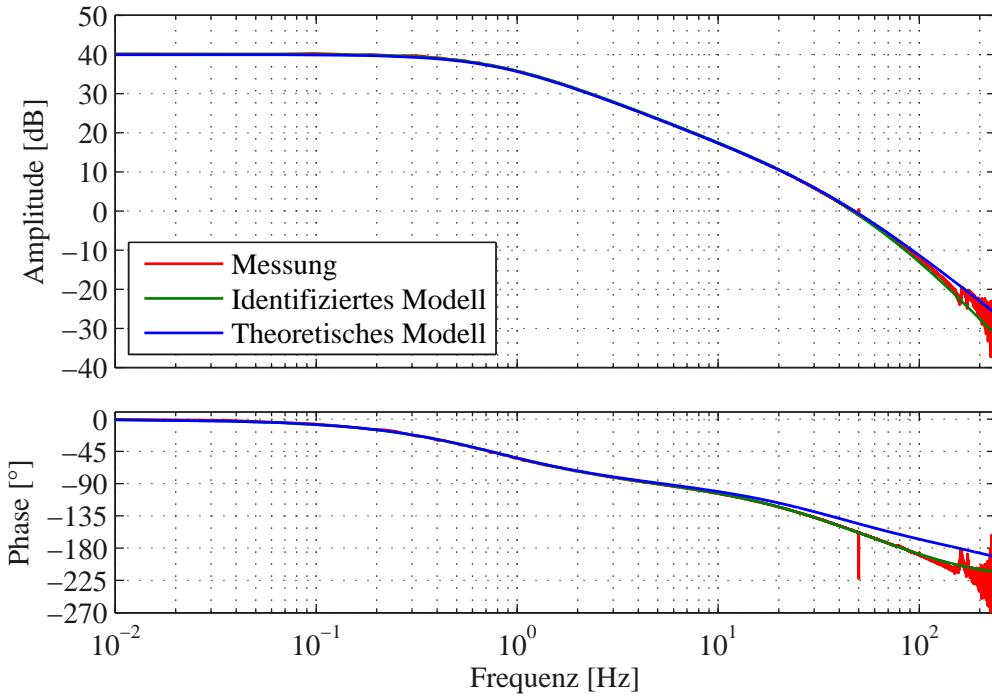


Abbildung 2.16: Gegenüberstellung von Messung, identifiziertem Modell und theoretischem Modell im Frequenzbereich

Modellparameter

Die Modellparameter der Wägezelle sind in den beiden nachfolgenden Tabellen 2.3 und 2.4 zusammengefasst. Mit den Zahlenwerten aus Tabelle 2.2 folgt für die Wandlerkonstante w_{e2} entsprechend Gleichung (2.21) der Zahlenwert $w_{e2} = 10.2 \text{ mN/A}$.

Tabelle 2.3: Bekannte Modellparameter der Wägezelle

$R [\Omega]$	$j_A [\text{mm}]$	$j_S [\text{mm}]$
305.54	328.96	342.12

Tabelle 2.4: Experimentell ermittelte Modellparameter der Wägezelle

$w_e [\text{N/A}]$	$k_m [\text{Vs/m}]$	$m [\text{g}]$	$c [\text{N/m}]$	$d [\text{Ns/m}]$	$K_{u_{pos}} [\text{V/m}]$
18.5183	35.5432	8.3737	10.1514	0	15956

2.3 VC6

Aufbauend auf die Erkenntnisse der theoretischen Modellbildung des Voice-Coil-Aktors aus Abschnitt 2.1 und der Wägezelle aus Abschnitt 2.2 wird mit den experimentell ermittelten Modellparametern ein theoretisches Modell des VC6 erstellt. Bei der theoretischen Modellbildung werden nachfolgende Modellannahmen gemacht.

Modellannahmen

- (i) Die Eigendynamik der Spule und des Kurzschlussrings wird vernachlässigt.
- (ii) Die Stellglieder werden wie bei der Wägezelle als lineare Spannungsquellen abgebildet.
- (iii) Die Wägeplattform des VC6 wird als Starrkörper modelliert.

Die Aktordynamik wird nach dem Blockschaltbild in Abbildung 2.6 modelliert. Es wird sich zeigen, dass das resultierende mathematische Modell des VC6 als direkte Verallgemeinerung des Eingrößenmodells der Wägezelle aus dem Blockschaltbild 2.13 auf ein Mehrgrößenmodell des VC6 aufgefasst werden kann. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass es sich bei der Wägeplattform um einen frei schwebenden Körper handelt und somit keine Federsteifigkeit c auftritt. Der Formalismus für die Beschreibung der linearen Bewegungsgleichung des VC6 wird aus [Alt06] übernommen. Die physikalischen Grundlagen der technischen Dynamik stammen aus [Sch12, Kug12, GHSW12]. Des Weiteren dienten die Werke [Rös11, Pet06] als Vorlage für die mathematische Modellbildung des VC6.

In einem ersten Schritt wird ein lineares Modell (Linearisierung an einem AP) des VC6 erstellt. Hinsichtlich der Optimierung der kinematischen Konfiguration können aus dem linearisierten Modell bzw. aus dessen Strukturgrößen geeignete Gütemasse abgeleitet werden. Des Weiteren dient das lineare Modell dem Entwurf der Positionsregelung des VC6. In einem zweiten Schritt wird dargelegt wie die Kinematik für die nichtlineare Simulation in MATLAB/SIMULINK/SIMMECHANICS aufgebaut werden kann und welche Annahmen für die Simulation getroffen werden. Das nichtlineare Simulationsmodell dient einerseits der Visualisierung des nichtlinearen Systemverhaltens und andererseits der Erprobung der Regelung.

2.3.1 Starrkörperdynamik

Der VC6 wird als Starrkörper modelliert. Der starre Körper ist ein einfaches Modell der Kontinuums Mechanik. Er besteht aus einer zusammenhängenden kompakten Menge materieller Punkte. Das wesentliche Merkmal des Starrkörpers ist, dass die Abstände zwischen diesen Punkten konstant sind [Sch12].

Die Bewegung eines starren Körpers bezüglich eines Inertialsystems lässt sich als gleichmässige Translation aller Punkte und der Rotation aller Punkte um eine Körperachse darstellen. Die Freiheitsgrade eines Starrkörpers bilden einen Konfigurationsraum. Der Konfigurationsraum des VC6 besteht aus drei Freiheitsgraden für die Beschreibung der Position und drei Freiheitsgraden für die Beschreibung der Rotation.

Generalisierte Koordinaten

Für die mathematische Beschreibung der Bewegungsgleichung des VC6 in Aktor- und Sensorkoordinaten werden die generalisierten Koordinaten \underline{q}_i mit $i = A, S$ der Aktoren und der Sensoren eingeführt. Es wird berücksichtigt, dass der Ort der Krafteinbringung der Voice-Coil-Aktoren nicht dem Messort der Position entspricht. Dabei bezeichnen

$$\begin{aligned} \underline{x}^T &= [x \ y \ z \ \varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z], \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^{(6 \times 1)} && \text{(globale Koordinaten)} \\ \underline{q}_i^T &= [q_{i1} \ q_{i2} \ \dots \ q_{i6}], \quad \underline{q}_i \in \mathbb{R}^{(6 \times 1)} && \text{(Aktor- und Sensorkoordinaten)} \end{aligned} \quad (2.45)$$

die globalen und generalisierten Koordinaten. Die globalen Koordinaten bilden den Konfigurationsraum bestehend aus kartesischen Koordinaten (x, y, z) und deren Rotationen $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$. Der Ursprung sei im

Schwerpunkt des Starrkörpers definiert.

Trägheitstensor

Die Massengeometrie eines starren Körpers wird durch den Trägheitstensor beschrieben. Der Trägheitstensor ist in einem körperfesten Koordinatensystem eine zeitinvariante Grösse. Bei der Annahme von Punktmassen m_i an den Punkten \underline{r}_i kann der Trägheitstensor anhand von

$$\underline{\Theta}_P = \sum_i m_i \begin{bmatrix} r_{yi}^2 + r_{zi}^2 & -r_{xi}r_{yi} & -r_{xi}r_{zi} \\ -r_{xi}r_{yi} & r_{xi}^2 + r_{zi}^2 & -r_{yi}r_{zi} \\ -r_{xi}r_{zi} & -r_{yi}r_{zi} & r_{xi}^2 + r_{yi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

bestimmt werden. Ist der Trägheitstensor $\underline{\Theta}_P$ bezüglich eines beliebigen Punktes \underline{r} bekannt, kann er mit Hilfe von

$$\underline{\Theta}_S = \underline{\Theta}_P - m\underline{R}^T \underline{R} \quad (2.47)$$

mit

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

in den Schwerpunkt verschoben werden.

Schwerpunkt

Wird der Starrkörper über Punktmassen modelliert, so kann über

$$\underline{r}_S = \frac{1}{m} \sum_i m_i \underline{r}_i \quad (2.49)$$

der Vektor \underline{r}_S zum Schwerpunkt errechnet werden.

Massenmatrix

Die Massenmatrix des Starrkörpers bezüglich der in Gleichung 2.45 angegebenen globalen Koordinaten kann durch

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\Theta}_S \end{bmatrix}, \quad \underline{M} \in \mathbb{R}^{(6 \times 6)} \quad (2.50)$$

geschrieben werden.

2.3.2 Die Jacobi-Matrix der Sensoren und der Aktoren

Die verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q}_i(t)$ der Aktoren und der Sensoren sind nichtlineare Funktionen von den globalen Koordinaten $\underline{x}(t)$. Es ist also

$$\underline{q}_i(t) = \underline{q}_i(\underline{x}(t)) = \underline{q}_i(\underline{x}) \quad (2.51)$$

eine nichtlineare Beziehung der Geometrie des VC6, und der aktuellen Lage $\underline{x}(t)$. Die Linearisierung an einem AP \underline{x}_0 in Form einer Tangentialebene an die Vektorwertige Funktion \underline{q}_i liefert die Näherung

$$\Delta \underline{q}_i \approx \left. \frac{\partial \underline{q}_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}_0} \Delta \underline{x} \quad (2.52)$$

dabei ist

$$\left. \frac{\partial q_i(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}_0} = J_i(\underline{x}_0) := \begin{bmatrix} \frac{\partial q_{i1}(\underline{x}_0)}{\partial x} & \frac{\partial q_{i1}(\underline{y}_0)}{\partial y} & \dots & \frac{\partial q_{i1}(\varphi_{z0})}{\partial \varphi_z} \\ \frac{\partial q_{i2}(\underline{x}_0)}{\partial x} & \frac{\partial q_{i2}(\underline{y}_0)}{\partial y} & \dots & \frac{\partial q_{i2}(\varphi_{z0})}{\partial \varphi_z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_{i6}(\underline{x}_0)}{\partial x} & \frac{\partial q_{i6}(\underline{y}_0)}{\partial y} & \dots & \frac{\partial q_{i6}(\varphi_{z0})}{\partial \varphi_z} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

die Jacobi-Matrix der Transformation von den globalen Koordinaten \underline{x} in die Aktor- bzw. Sensorkoordinaten \underline{q}_i am AP \underline{x}_0 .

Geschwindigkeitsübertragung

Interessiert die Geschwindigkeit der generalisierten Koordinaten so beschreibt

$$\frac{d}{dt} \underline{q}_i(\underline{x}) = J_i(\underline{x}_0) \frac{d}{dt} \underline{x} \quad (2.54)$$

die exakte Beziehung der Geschwindigkeitsübertragung von den globalen Koordinaten in die verallgemeinerten Koordinaten im AP \underline{x}_0 . Da es sich zukünftigen immer um eine Betrachtung an einem AP handelt gilt die Notation

$$\dot{\underline{q}}_i = J_i \dot{\underline{x}} \quad (\text{Geschwindigkeitsübertragung}) \quad (2.55)$$

Im AP \underline{x}_0 beschreibt diese Gleichung einen linearen Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten der globalen und den generalisierten Koordinaten.

Beschleunigungsübertragung

Interessiert die Beschleunigung der generalisierten Koordinaten so beschreibt

$$\ddot{\underline{q}}_i = J_i \ddot{\underline{x}} + \frac{\partial J_i}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}}^2 \quad (\text{Beschleunigungsübertragung}) \quad (2.56)$$

die Beschleunigungsübertragung. Offensichtlich ist die Beschleunigung in den generalisierten Koordinaten im AP \underline{x}_0 linear von der Beschleunigung der globalen Koordinaten und quadratisch von deren Geschwindigkeit abhängig.

Kraftübertragung

Die Herleitung der Kraftübersetzung stammt aus [Rös11] und bezieht sich auf die virtuelle Arbeit δW . Dabei werden die virtuellen Verschiebungen der globalen Koordinaten $\delta \underline{x}^T = [\delta x \ \delta y \ \delta z \ \delta \varphi_x \ \delta \varphi_y \ \delta \varphi_z]$ und die virtuellen Verschiebungen der generalisierten Koordinaten $\delta \underline{q}_i^T = [\delta q_1 \ \delta q_2 \ \dots \ \delta q_6]$ betrachtet. Weiter wird die Notation

$$\begin{aligned} \underline{f}^T &= [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z], \quad \underline{f} \in \mathbb{R}^{(6 \times 1)} && (\text{globale Kräfte und Momente}) \\ \underline{f}_{q_i}^T &= [F_{q_{i1}} \ F_{q_{i2}} \ \dots \ F_{q_{i6}}], \quad \underline{f}_{q_i} \in \mathbb{R}^{(6 \times 1)} && (\text{generalisierte Kräfte}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

für globale Kräfte und Momente und generalisierte Kräfte in Aktor- und Sensorkoordinaten eingeführt. Die virtuelle Arbeit der globalen Koordinaten δW muss gleich der virtuellen Arbeit der generalisierten Koordinaten δW_{q_i} sein.

$$\delta W = \delta W_{q_i} \iff \underline{f}^T \delta \underline{x} = \underline{f}_{q_i}^T \delta \underline{q}_i \quad (2.58)$$

Mit Gleichung (2.55) in der Form

$$\delta \underline{q}_i = \underline{J}_i \delta \underline{x} \quad (2.59)$$

folgt

$$\underline{f}^T \delta \underline{x} = \underline{f}_{\underline{q}_i}^T \underline{J}_i \delta \underline{x} \quad (2.60)$$

Diese Beziehung muss für ein beliebiges $\delta \underline{x}$ gelten. Somit beschreibt

$$\underline{f} = \underline{J}_i^T \underline{f}_{\underline{q}_i} \quad (\text{Kraftübertragung}) \quad (2.61)$$

den linearen Zusammenhang zwischen den globalen Kräften und Momenten und den generalisierten Kräften. Soll Gleichung (2.61) für beschleunigte Kräfte gelten, muss die Jacobi-Matrix um den Schwerpunkt entwickelt werden.

Transformation zwischen den Aktor- und Sensorkoordinaten

Aus Gleichung (2.55) ist bekannt das

$$d \underline{q}_i = \underline{J}_i d \underline{x} \quad (2.62)$$

und folglich

$$d \underline{x} = \underline{J}_i^{-1} d \underline{q}_i \quad (2.63)$$

Somit beschreiben

$$d \underline{q}_S = \underline{J}_S \underline{J}_A^{-1} d \underline{q}_A \quad (2.64a)$$

$$d \underline{q}_A = \underline{J}_A \underline{J}_S^{-1} d \underline{q}_S \quad (2.64b)$$

die Transformationen zwischen den verallgemeinerten Koordinaten.

Bestimmung der Jacobi-Matrix

Für die analytische Bestimmung der Jacobi-Matrix anhand von Gleichung (2.53) muss die Funktion $q(\underline{x})$ explizit bekannt sein. Ein alternativer Weg, bei dem lediglich die Richtungsvektoren \underline{r}_i und die Normalvektoren \underline{n}_i der Aktoren und Sensoren bekannt sein müssen, führt über die Gleichung (2.61) der Kraftübertragung [Spe08]. Aufgrund des Kräfte und Momente Gleichgewichts muss

$$\underline{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{n}_{i1} & \underline{n}_{i2} & \underline{n}_{i3} & \underline{n}_{i4} & \underline{n}_{i5} & \underline{n}_{i6} \\ \underline{r}_{i1} \times \underline{n}_{i1} & \underline{r}_{i2} \times \underline{n}_{i2} & \underline{r}_{i3} \times \underline{n}_{i3} & \underline{r}_{i4} \times \underline{n}_{i4} & \underline{r}_{i5} \times \underline{n}_{i5} & \underline{r}_{i6} \times \underline{n}_{i6} \end{bmatrix}}_{\underline{J}_i^T} \underline{f}_{\underline{q}_i} \quad (2.65)$$

gelten. In dieser Form ist ersichtlich, dass die Jacobi-Matrix direkt durch die geometrische Anordnung der Aktoren und Sensoren aufgebaut werden kann.

Eine Konfiguration bei welcher die Determinante der Jacobi-Matrix $\det(\underline{J}_i) = 0$ verschwindet, wird als singulär bezeichnet.

2.3.3 Theoretische Modellbildung des VC6

Bewegungsgleichung der Wägeplattform

Die Herleitung der Bewegungsgleichung der Wägeplattform stammt aus [Alt06] und beruht auf den Lagrange'schen Gleichungen 2ter Art. Aufbauend auf die Lagrange-Funktion

$$L = T - U \quad T : \text{kinetische Energie}, L : \text{potentielle Energie} \quad (2.66)$$

kann über den Lagrange-Formalismus

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.67)$$

die Bewegungsgleichung bezüglich einer verallgemeinerten Koordinate q_j hergeleitet werden. Der Term auf der linken Seite beschreibt konservative Kräfte und der Term Q_j^* nicht konservative Kräfte [Sch12, GHSW12]. Über den Lagrange-Formalismus entstehen in der Mechanik im Allgemeinen n -nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Für ein lineares Modell (Linearisierung in einem AP) kann dieses in ein System von $2n$ -nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung transformiert, linearisiert und an einer statischen Gleichgewichtslage ausgewertet werden.

In Anlehnung an das Vorgehen in [Alt06] wird die Linearisierung direkt vorgenommen, dabei gilt die Annahme, dass die Bewegung der Wägeplattform aus einer Ruhelage startet. Wird die Lagrange-Funktion bezüglich der globalen Koordinaten aufgestellt (der Schwerpunkt liegt im Ursprung) gilt

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x}}_T - \underbrace{U}_U \quad (2.68)$$

und es ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \underbrace{\dot{M} \dot{x}}_0 + \underbrace{M \ddot{x}}_U = \underline{f} \quad (2.69)$$

also

$$\underline{M} \ddot{x} = \underline{f} \quad (2.70)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (2.56) und (2.61) für die Sensor- und Aktorkoordinaten folgt

$$\underline{M} J_S^{-1} (\ddot{q}_S - \underbrace{\frac{\partial J_S}{\partial x} \dot{x}^2}_0) = \underline{J}_A^T f_{q_A} \quad (2.71)$$

und damit

$$\underline{J}_A^{-T} \underline{M} J_S^{-1} \ddot{q}_S = f_{q_A} \quad (2.72)$$

Erweiterung um das Modell der Voice-Coil-Aktoren

Die Modellierung der Voice-Coil-Aktoren geschieht anhand von Gleichung (2.20) in der Form

$$m \ddot{x} = \frac{w_e}{R} u_e - \frac{w_e k_m}{R} \dot{x} \quad (2.73)$$

für das Eingrössensystem. Mit den Matrizen

$$\begin{aligned}\underline{D}_u &= \text{diag}([w_{e1}/R_1 \quad w_{e2}/R_2 \quad \dots \quad w_{e6}/R_6]) \\ \underline{D}_v &= \text{diag}([k_{m1}w_{e1}/R_1 \quad k_{m2}w_{e2}/R_2 \quad \dots \quad k_{m6}w_{e6}/R_6])\end{aligned}\quad (2.74)$$

folgt für das Mehrgrössensystem aus Gleichung (2.71) direkt

$$\underline{J}_A^{-T} \underline{M} \underline{J}_S^{-1} \ddot{\underline{q}}_S = \underline{D}_u \underline{u} - \underline{D}_v \dot{\underline{q}}_A \quad (2.75)$$

Einsetzen von Gleichung (2.64b) und Umstellen führt auf

$$\tilde{\underline{M}} \ddot{\underline{q}}_S + \tilde{\underline{D}} \dot{\underline{q}}_S = \underline{D}_u \underline{u} \quad \text{mit} \quad \tilde{\underline{M}} = \underline{J}_A^{-T} \underline{M} \underline{J}_S^{-1}, \quad \tilde{\underline{D}} = \underline{D}_v \underline{J}_A \underline{J}_S^{-1} \quad (2.76)$$

die lineare Bewegungsgleichung des VC6. Wird weiter angenommen, dass bei allen Aktoren

$$w_{ej} = w_e, \quad k_{mj} = k_m, \quad R_j = R \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, 6 \quad (2.77)$$

und somit

$$\underline{D}_u = \frac{w_e}{R}, \quad \underline{D}_v = \frac{k_m w_e}{R} \quad (2.78)$$

skalare Grössen sind resultiert das Blockschaltbild (2.17).

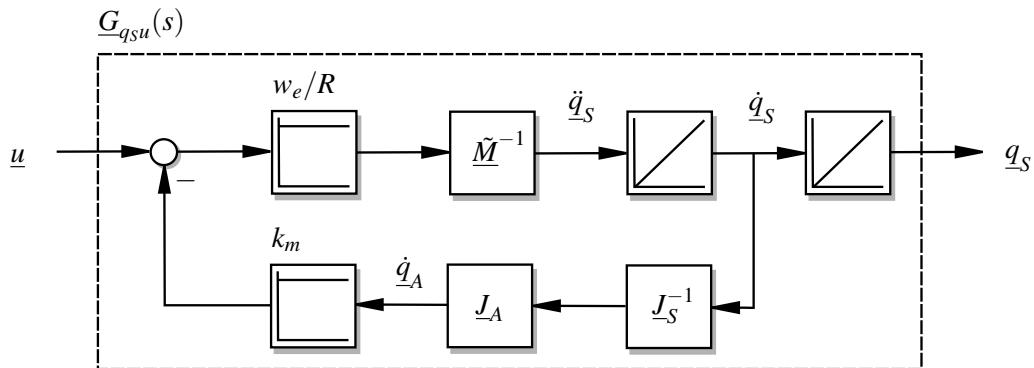


Abbildung 2.17: Blockschaltbild des VC6

Entspräche der Messort der Position dem Kraftangriffspunkt der Aktoren, also $\underline{q}_A = \underline{q}_S = \underline{q}_{AS}$, dann wäre das System nur über die Massenmatrix $\tilde{\underline{M}} = \underline{J}_{AS}^{-T} \underline{M} \underline{J}_{AS}^{-1}$ verkoppelt. Falls die Positions-Spannungskonstante $K_{u_{pos}}$ in der Modellbildung berücksichtigt werden soll, muss diese in Serie zum Blockschaltbild aus Abbildung 2.17 geschaltet werden.

Trägheitstensor und Massenmatrix

In einer vereinfachten Betrachtung wird die Massenverteilung über Punktmassen abgebildet. Für die Aktoren werden sechs Punktmassen m_A an der Stelle \underline{r}_A eingefügt. Die Masse der Wägeplattform m_p wird als zusätzliche Masse im Schwerpunkt angebracht. Der Trägheitstensor wird nach Gleichung (2.46) in Bezug auf den Schwerpunkt bestimmt.

Soll der Starrkörper eine kontinuierliche Massenverteilung aufweisen, muss die Masse und der entsprechende Trägheitstensor bekannt sein.

Statische Gleichgewichtslage

In einer statischen Gleichgewichtslage \underline{q}_{S0} muss die Summe der durch das Gravitationsfeld auftretenden Kraft $\underline{f}_g^T = [\underline{F}_g^T \ \underline{M}_g^T]$ und die globale Kraft \underline{f} hervorgerufen durch die Aktoren

$$\underline{f}_g + \underline{f} = \underline{f}_g + J_A^T \underline{f}_{qA} = \underline{0} \quad (2.79)$$

sein, weshalb sich für die Eingangsspannung

$$\underline{u}_0 = -\frac{R}{w_e} J_A^{-T} \underline{f}_g \quad (2.80)$$

ergibt. Für die Gravitationskraft \underline{f}_g gilt es zu unterscheiden ob der VC6 nur die Eigenmasse m , oder ein zusätzliches Wägegut (Punktmasse) m_w am Ort \underline{r}_w trägt.

Gravitationskraft ohne Wägegut:

$$\underline{F}_g = m \underline{g}, \quad \underline{M}_g = \underline{0} \quad (2.81)$$

Gravitationskraft mit Wägegut:

$$\underline{F}_g = (m + m_w) \underline{g}, \quad \underline{M}_g = \underline{r}_w \times m_w \underline{g} \quad (2.82)$$

Wird das Wägegut m_w als Punktmasse abgebildet, kann die Veränderung des Trägheitstensors und somit der Massenmatrix \underline{M} anhand von Gleichung (2.46) bestimmt werden.

2.3.4 Zustandsraumdarstellung

Im Zustandsraum lässt sich die Dynamik des VC6 mit $\underline{x}^T = [\underline{q}_s^T \ \dot{\underline{q}}_s^T]$ als Zustandsraummodell der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{x} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C} \underline{x} \end{aligned} \quad \text{mit } \underline{A} \in \mathbb{R}^{(12 \times 12)}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{(12 \times 6)}, \underline{C} \in \mathbb{R}^{(6 \times 12)} \quad (2.83)$$

darstellen. Dabei sind

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ \underline{0} & \underbrace{-\tilde{\underline{M}}^{-1} \tilde{\underline{D}}}_{\underline{\tilde{A}}} \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underbrace{-\tilde{\underline{M}}^{-1} \underline{D}_u}_{\underline{\tilde{B}}} \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

die System-, die Eingangs- und die Ausgangsmatrix. Es handelt sich um ein verkoppeltes Mehrgrößensystem sechster Ordnung, gefolgt von sechs Integratoren mit sechs Ein- und Ausgängen, vergl. Abbildung 2.17.

2.3.5 Aufbau der nichtlinearen Simulation

Aufbau der Kinematik

Nachfolgend soll aufgezeigt werden, wie die kinematische Struktur für die Simulation des VC6 in MATLAB/SIMULINK/SIMMECHANICS aufgebaut werden kann, dabei soll Abbildung 2.18 betrachtet

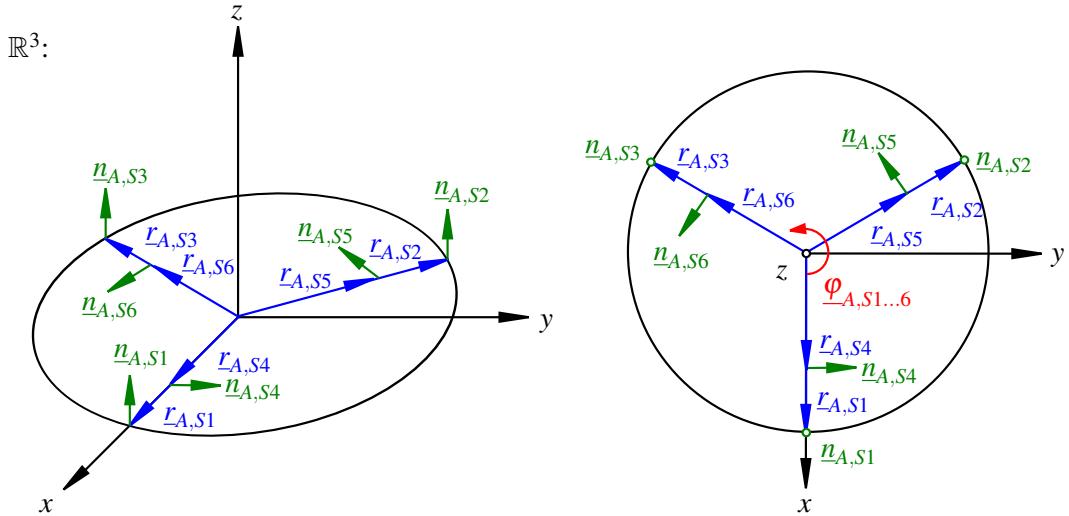


Abbildung 2.18: Vektor-Nomenklatur

werden. Der Einfachheit halber stimmen die Kraftangriffspunkte der Aktoren und der Messort der Positionen überein.

Die Richtungs- und Normalvektoren der sechs Sensoren und der sechs Aktoren werden als Matrizen der Dimension (3×6) aufgebaut. In Anlehnung an den Aufbau in Abbildung 2.18 wird davon ausgegangen, dass alle Aktoren und Sensoren in der (x,y) -Ebene liegen.

Richtungsvektoren der Aktoren

$$\underline{R}_A = [\underline{r}_{A1} \underline{r}_{A2} \dots \underline{r}_{A6}] = \begin{bmatrix} l_{A1} \cos \varphi_{A1} & l_{A2} \cos \varphi_{A2} & \dots & l_{A6} \cos \varphi_{A6} \\ l_{A1} \sin \varphi_{A1} & l_{A2} \sin \varphi_{A2} & \dots & l_{A6} \sin \varphi_{A6} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{R}_A \in \mathbb{R}^{(3 \times 6)} \quad (2.85)$$

Richtungsvektoren der Sensoren

$$\underline{R}_S = [\underline{r}_{S1} \underline{r}_{S2} \dots \underline{r}_{S6}] = \begin{bmatrix} l_{S1} \cos \varphi_{S1} & l_{S2} \cos \varphi_{S2} & \dots & l_{S6} \cos \varphi_{S6} \\ l_{S1} \sin \varphi_{S1} & l_{S2} \sin \varphi_{S2} & \dots & l_{S6} \sin \varphi_{S6} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{R}_S \in \mathbb{R}^{(3 \times 6)} \quad (2.86)$$

Dabei bezeichnen l_{ij} mit $i = A, S$ und $j = 1, \dots, 6$ die Länge der Richtungsvektoren und φ_{ij} den Winkel um die z - relativ zur x -Achse.

Normalvektoren der Aktoren

$$\underline{N}_A = [\underline{n}_{A1} \underline{n}_{A2} \dots \underline{n}_{A6}] = \begin{bmatrix} \underline{e}_z & \underline{e}_z & \underline{e}_z & \underline{R}_z(\varphi_{A4})\underline{e}_y & \underline{R}_z(\varphi_{A5})\underline{e}_y & \underline{R}_z(\varphi_{A6})\underline{e}_y \end{bmatrix}, \quad \underline{N}_A \in \mathbb{R}^{(3 \times 6)} \quad (2.87)$$

Normalvektoren der Sensoren

$$\underline{N}_S = [\underline{n}_{S1} \underline{n}_{S2} \dots \underline{n}_{S6}] = \begin{bmatrix} \underline{e}_z & \underline{e}_z & \underline{e}_z & \underline{R}_z(\varphi_{S4})\underline{e}_y & \underline{R}_z(\varphi_{S5})\underline{e}_y & \underline{R}_z(\varphi_{S6})\underline{e}_y \end{bmatrix}, \quad \underline{N}_S \in \mathbb{R}^{(3 \times 6)} \quad (2.88)$$

Die Matrix \underline{R}_z beschreibt die Rotationsmatrix

$$\underline{R}_z(\varphi_z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

um die z -Achse.

Verschiebung der Kinematik in den Schwerpunkt

Es wird angenommen, dass jeder Aktor eine Punktmasse m_A bei \underline{r}_A besitzt. Mit Hilfe von Gleichung (2.49) wird der Vektor \underline{r}_S zum Schwerpunkt bestimmt. Anschliessend werden die Richtungsvektoren der Aktoren und Sensoren anhand von

$$\tilde{\underline{r}}_{ij} = \underline{r}_{ij} - \underline{r}_S \quad \text{mit } i = A, S \quad \text{und } j = 1, \dots, 6 \quad (2.90)$$

in den Schwerpunkt verschoben.

Trägheitstensor und Massenmatrix

Wie beim linearen Modell wird Massenverteilung über Punktmassen abgebildet. Für die Aktoren werden sechs Punktmassen m_A an der Stelle \underline{r}_A eingefügt. Die Masse der Wägeplattform m_p wird als zusätzliche Masse im Schwerpunkt angebracht. Der Trägheitstensor wird nach Gleichung (2.46) in Bezug auf den Schwerpunkt bestimmt.

Modellannahmen für die Simulation der kinematischen Struktur

- (i) Die Normalvektoren der Aktoren \underline{N}_A für die Krafteinbringung \underline{f}_A sind körperfest zum Bezugssystem der Wägeplattform (Body CS).
- (ii) Die für die induzierte Gegenspannung erforderliche Geschwindigkeit $\dot{\underline{q}}_A$ ist körperfest (Body CS).
- (iii) Die Positionsmessung der Sensoren \underline{q}_S wird relativ zum globalen Koordinatensystem gemessen (World).

Erweiterung um das lineare Modell der Voice-Coil-Aktoren

Entsprechend dem linearisierten Modell wird das nichtlineare Modell der Starrkörperdynamik um das statische Modell der Voice-Coil-Aktoren erweitert.

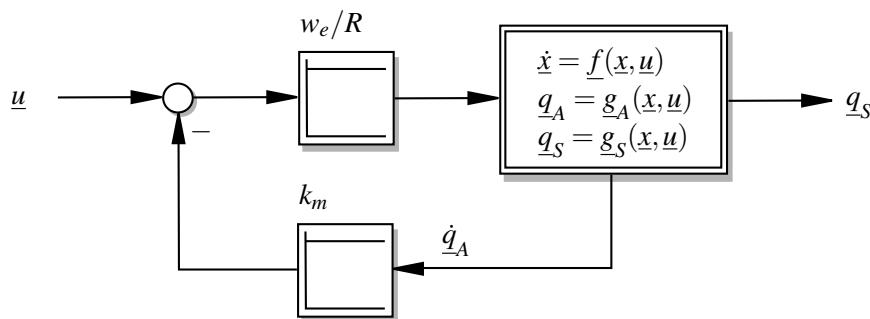


Abbildung 2.19: Blockschaltbild der nichtlinearen Simulation des VC6

3 Optimierung der kinematischen Konfiguration

Nachfolgendes Kapitel widmet sich der Fragestellung, wie die Aktoren und Sensoren geometrisch angebracht werden müssen um ein möglichst gutes Ein-Ausgangsverhalten des VC6 zu erzeugen. In Abschnitt 2.3 wurde aufgezeigt, dass neben den verwendeten Voice-Coil-Aktoren, die geometrische Anordnung der Aktoren und der Sensoren das statische und dynamische Übertragungsverhalten des VC6 über die Jacobi-Matrizen festlegen. Mit Hilfe der Jacobi-Matrix der Aktoren wird ein Gütekriterium abgeleitet, welches dem Optimierungsproblem zugrunde gelegt werden kann.

Aufbauend auf die Optimierung der geometrischen Anordnung der Aktoren und Sensoren, wird ein lineares Modell des VC6 mit der von MTAG umgesetzten Mechanik erstellt und analysiert. Hinsichtlich der zu erwartenden Messgenauigkeit wird der Einfluss verschiedener Faktoren, wie die Schieflage der Waage und die Temperaturempfindlichkeit des Wägesignals untersucht.

3.1 Grundsätzliches zum Optimierungsproblem

Die wesentlichen Randbedingungen an die geometrische Anordnung der Aktoren und Sensoren sind durch das Konzept von D. Reber von MTAG vorgegeben:

- Drei Voice-Coil-Aktoren wirken in z -Richtung.
- Drei Voice-Coil-Aktoren wirken in der (x, y) -Ebene.

Die sechs Aktoren sind notwendig um die sechs DOF der Waage anzubinden. Das System unterliegt einer Positionsregelung. Die Wechselwirkung des Prüfkörpers mit dem Gravitationsfeld führt zu einer Gewichtskraft. Diese wird durch die Regelung über die stromproportionale Kraft der vertikalen Aktoren kompensiert. Über den relativen Summenstrom der drei vertikalen Aktoren wird die Masse des Wägeguts bestimmt.

$$m_w g_z = (\Delta i_1 + \Delta i_2 + \Delta i_3) w_e, \quad \text{wobei} \quad \Delta i_i = i_i - i_{i0} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

i_{i0} bezeichnet den Strom des Aktors i bei Leerlast, also denjenigen Strom, welcher für die Kompensation der Gewichtskraft des Eigengewichts m des schwebenden Teils der Waage eingebracht werden muss.

3.1.1 Randbedingungen an das Optimierungsproblem

Um die Dimension des Optimierungsproblems möglichst gering zu halten, werden die Randbedingungen erweitert.

1. Drei Aktoren wirken in z -Richtung (Aktoren 1...3) und kompensieren in der Nominallage die Gravitationskraft des Wägegutes vollständig. Über diese drei vertikalen Aktoren werden in der Nominallage die drei Freiheitsgrade (z, φ_x, φ_y) der globalen Koordinaten angebunden.

2. Drei Aktoren wirken parallel zur (x,y) -Ebene (Aktoren 4...6). Über diese horizontalen Aktoren werden in der Nominallage die Freiheitsgrade (x, y, φ_z) angebunden.
3. Ein wesentliches Kriterium an die Mechanik ist die Herstellbarkeit. Es wird deshalb gefordert, dass jeweils ein horizontaler und ein vertikaler Aktor an einem Träger angebracht sind. Der Normalvektor des horizontalen Aktors ist dabei orthogonal zum Normalvektor des vertikalen Aktors und zum Träger.
4. Aus Symmetriegründen wird weiter gefordert, dass die Richtungsvektoren der Aktorenpaare (r_{A2}, r_{A3}) und (r_{A5}, r_{A6}) spiegelsymmetrisch zur (x,z) -Ebene sind, vergl. Abbildung 2.18.
5. Der Schwerpunkt des schwebenden Teils der Waage, also Wägeplattform und Spulenkörper, liegt in der Ebene der horizontalen Aktoren.

Werden die Randbedingungen erfüllt, setzt sich das lineare Modell des VC6 aus Gleichung (2.76) aus zwei entkoppelten Teilsystemen für die vertikale und die horizontale Dynamik zusammen.

3.1.2 Geometrische Abhängigkeit der Jacobi-Matrizen

Aufgrund des Messprinzips der Position unterliegen die Jacobi-Matrizen der Aktoren J_A und der Sensoren J_S einer geometrischen Abhängigkeit. In Abbildung 3.1 ist die Spule eines Voice-Coil-Aktors skizziert. Kurz umschrieben lautet das Messprinzip wie folgt:

Über Leuchtdioden wird die Fahne von einer Seite beleuchtet. Über den Differenzstrom zweier Photodioden auf der gegenüberliegenden Seite der Fahne wird die Position ermittelt. Die Elektronik beinhaltet die Helligkeitsregelung der Photodioden sowie die Aufbereitung des Positionssignals.

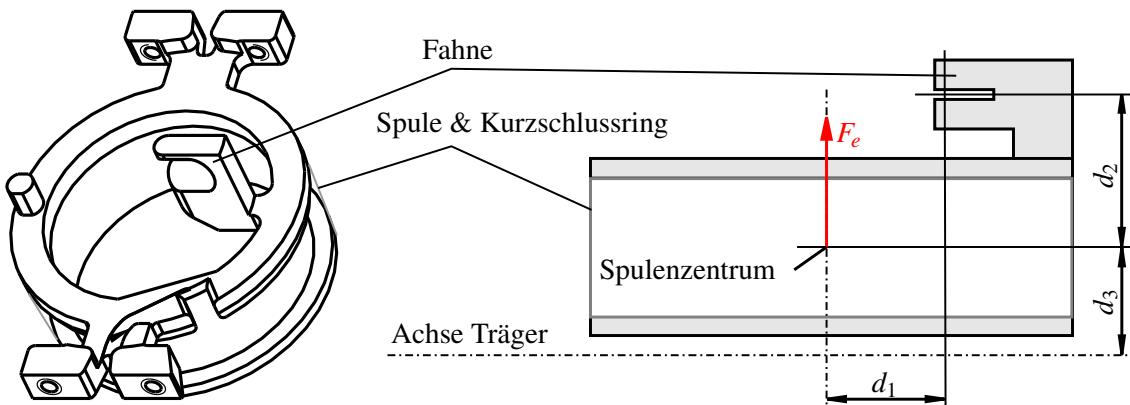


Abbildung 3.1: Skizze der Spule inkl. Fahne eines Voice-Coil-Aktors

(Quelle der CAD-3D-Ansicht: MTAG Zeichnung Nr.: ME-42900507)

Es wird davon ausgegangen, dass die stromproportionale Kraft F_e des Aktors im Zentrum der Spule angreift. Die Abstände $d_1 = 4.5$ mm und $d_2 = 10.8$ mm sind über die Geometrie definiert. Der Abstand d_3 beschreibt den Abstand des Spulenzentrums zur Achse des Trägers und wurde als optionaler Freiheitsgrad für die Konstruktion vorgesehen.

3.1.3 Definition eines Gütemasses für die Kinematik

In der Nominallage $\underline{q}_{S0} = \underline{0}$ gilt für die Geschwindigkeits- und Kraftübertragung der generalisierten Koordinaten der Aktoren und Sensoren \underline{q}_i , mit $i = A, S$ auf die globalen Koordinaten \underline{x}

$$\dot{\underline{q}}_S = \underline{J}_S \dot{\underline{x}} \quad (3.2a)$$

$$\underline{f} = \underline{J}_A^T \underline{f}_{q_A} \quad (3.2b)$$

Die Jacobi-Matrix der Sensoren \underline{J}_S beschreibt wie globale Geschwindigkeiten $\dot{\underline{x}}$ auf die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\underline{q}}_S$ übertragen werden. Die Jacobi-Matrix der Aktoren \underline{J}_A beschreibt wie die generalisierten Kräfte der Aktoren \underline{f}_{q_A} in die globale Kräfte und Momente \underline{f} übersetzt werden. Die Jacobi-Matrizen \underline{J}_S und \underline{J}_A werden über die Anordnung der Aktoren und Sensoren festgelegt und sind folglich rein geometrische Größen, siehe Gleichung (2.65). Ein Mass für die Geschwindigkeits- und Kraftübertragungsgüte einer solchen Anordnung ist die Konditionszahl

$$\text{cond}_2(\underline{J}_i) = \frac{\sigma_{\max}(\underline{J}_i)}{\sigma_{\min}(\underline{J}_i)}, \quad \text{mit } i = A, S \quad (3.3)$$

der Jacobi-Matrix \underline{J}_i . $\sigma_{\max}(\underline{J}_i)$ beschreibt den maximalen und $\sigma_{\min}(\underline{J}_i)$ den minimalen Singulärwert von \underline{J}_i . Die Konditionszahl ist $\text{cond}_2(\underline{J}_i) \geq 1$. Wie erwähnt, ist die Jacobi-Matrix der Sensoren geometrisch von der Jacobi-Matrix der Aktoren abhängig. Beim VC6 handelt es sich um eine statische Waage, weshalb die Kondition der Jacobi-Matrix der Aktoren \underline{J}_A als massgebendes Gütekriterium verwendet wird.

Geometriemass

Ein Gütemass für die Kraftübertragung, welches Werte zwischen Null und Eins annimmt kann anhand von

$$V_u := \frac{1}{\text{cond}_2(\underline{J}_A \underline{W}_A)} \quad (3.4)$$

definiert werden [Neu06]. V_u ist ≤ 1 , je grösser V_u ist, desto besser ist die Kraftübertragungsgüte. Eine kinematisch isotrope Konfiguration wird erreicht, wenn $V_u = 1$. \underline{W}_A bezeichnet eine Wichtungsmatrix. Für kleine Verschiebungen ist

$$\Delta \underline{q}_A \approx \underline{J}_A \Delta \underline{x} \quad (3.5)$$

im skalaren Fall werden Rotationen um $\Delta\phi$ näherungsweise über

$$\Delta q_A \approx l_n \Delta\phi \quad (3.6)$$

in die generalisierte Koordinate Δq_A übertragen. Damit Rotationen in $\Delta \underline{x}$ von der Größenordnung und Längenskala entsprechend einer Translation über \underline{J}_A in Δq_A einfließen, werden die zugehörigen Einträge in \underline{J}_A mit

$$\underline{W}_A = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1/l_n \ 1/l_n \ 1/l_n]) \quad (3.7)$$

gewichtet. Als Normierungsfaktor wird die mittlere Länge der Richtungsvektoren der Aktoren

$$l_n = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \|\underline{r}_{Ai}\|_2 \quad (3.8)$$

verwendet.

3.1.4 Steuerbarkeitsmass nach Benninger

Hinsichtlich des dynamischen Verhaltens des VC6 werden Gütemasse für die Qualifikation der Steuerbarkeit von LTI-Systemen eingeführt. Die nachfolgenden Ausführungen stammen aus [MD11, Rie98]. Im Fokus stehen dabei Masszahlen, welche konsistent mit dem Begriff der Steuerbarkeit sind.

Steuerbarkeitsmass 1

Es wird die minimale Steuerenergie

$$W_S = \int_0^{t_1} \underline{u}^T(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau = \underline{x}_0^T \underline{Q}_S^{-1}(t_1) \underline{x}_0 \quad (3.9)$$

betrachtet, welche aufgebracht werden muss, um ein System von einem beliebigen Zustand \underline{x}_0 in der Zeit t_1 in den Ursprung zu steuern [FöI88]. \underline{u} bezeichnet die optimale Steuerungssequenz und \underline{Q}_S die Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{Q}_S(t_1) := \int_0^{t_1} \exp(-\underline{A}^T \tau) \underline{B} \underline{B}^T \exp(-\underline{A}^T \tau) d\tau \quad (3.10)$$

Ein konsistentes Steuerbarkeitsmass für den Zustand x_k eines steuerbaren Systems ergibt sich als Wurzel von

$$v_{sk} = 1 / \sqrt{\underline{Q}_{Skk}^{-1}} \quad (3.11)$$

[Rie98]. \underline{Q}_{Skk}^{-1} bezeichnet den Eintrag der Diagonalen der inversen Gram'schen Steuerbarkeitsmatrix an der Stelle (k, k) . Je grösser dieser Wert ist, desto besser ist der zugehörige Zustand steuerbar. Es wird also der einzelne Zustand in Bezug auf dessen Steuerbarkeit bewertet.

Steuerbarkeitsmass 2

Ein weiteres Mass für Steuerbarkeit kann über die Spur der inversen Gram'schen Steuerbarkeitsmatrix gebildet werden. Nach [MD11] entspricht

$$s_S = \text{spur}(\underline{Q}_S^{-1}) \quad (3.12)$$

dem Mittelwert der minimal notwendigen Steuerenergie, um Anfangswerte bei denen $\|\underline{x}_0\|_2 = 1$ in den Ursprung zu steuern. Hier gilt, je kleiner dieser Wert ist, desto weniger Steuerenergie muss aufgewendet werden um Anfangswerte bei denen $\|\underline{x}_0\|_2 = 1$ ist, in den Ursprung zu steuern. s_S bewertet die Steuerbarkeit des Gesamtsystems.

3.2 Die Singulärwertzerlegung und die Konditionszahl

Nachfolgend wird versucht die abstrakten Begriffe Norm und Konditionszahl mit der technischen Welt des Ingenieurs in Verbindung zu setzen.

3.2.1 Verallgemeinerte Betrachtung einer Hebelübersetzung im mehrdimensionalen über die Singulärwertzerlegung

Die nachfolgende Betrachtung ist durch [Rös11] motiviert. Sie soll aufzeigen, wie die Hebelübersetzung herkömmlicher Waagen auf das mehrdimensionale Problem des VC6 verallgemeinert werden kann.

Die Singulärwertzerlegung

Gegeben sei eine reellwertige, quadratische Matrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{(m \times m)}$ mit dem Rang $r \leq m$, dann bezeichnen die Singulärwerte σ_i , $i = 1, \dots, r$ die positiven Wurzeln aus den r -Eigenwerten der Matrix $\underline{A}^T \underline{A}$. Die Singulärwertzerlegung ist über

$$\underline{A} := \underline{U} \underline{S} \underline{V}^T, \quad \text{wobei } \underline{U}, \underline{S}, \underline{V} \in \mathbb{R}^{(m \times m)} \quad (3.13)$$

definiert¹. \underline{U} und \underline{V} sind orthonormale Matrizen, dabei enthält \underline{U} spaltenweise die Eigenvektoren von $\underline{A} \underline{A}^T$ und \underline{V} zeilenweise die Eigenvektoren von $\underline{A}^T \underline{A}$. Die Matrix \underline{S} ist eine Diagonalmatrix und enthält die Singulärwerte σ_i . Üblicherweise werden die Matrizen \underline{U} , \underline{S} und \underline{V} so angeordnet, dass die Singulärwerte in \underline{S} von absteigender Wertigkeit sind. Die Anwendung orthonormaler Matrizen auf Vektoren entspricht stets einer Drehung und/oder einer Spiegelung, Längen werden nicht verändert.

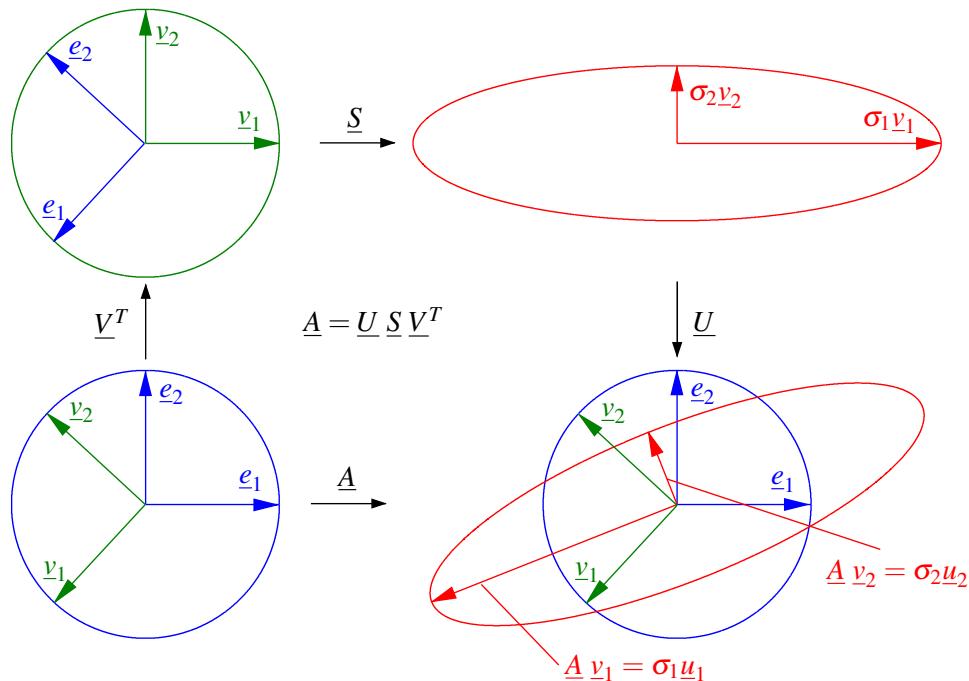


Abbildung 3.2: Anwendung der Singulärwertzerlegung der linearen Abbildung auf den Einheitskreis

Es wird beispielhaft der Einfluss der linearen Abbildung

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1.4 & 1.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.93 & -0.37 \\ -0.37 & 0.93 \end{bmatrix}}_{\underline{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1.97 & 0 \\ 0 & 0.58 \end{bmatrix}}_{\underline{S}} \underbrace{\begin{bmatrix} -0.68 & -0.73 \\ -0.73 & 0.68 \end{bmatrix}}_{\underline{V}^T} \quad (3.14)$$

auf den Einheitskreis in der Basis (e_1, e_2) betrachtet, siehe Abbildung 3.2. Die Anwendung von \underline{V}^T auf den Einheitskreis entspricht einer orthonormalen Basistransformation, also einer Drehung und Spiegelung. In der gedrehten Basis (v_1, v_2) ist die Anwendung von \underline{S} lediglich eine Skalierung in Richtung der Hauptachsen. Die Abbildung \underline{U} entspricht wiederum einer Drehung und Spiegelung und es resultiert die Abbildung $\underline{A} = \underline{U} \underline{S} \underline{V}^T$.

Im Fall einer einfachen Hebelübersetzung wird die angreifende Kraft F_1 entsprechend der Krafrichtung und der Hebelübersetzung auf $F_2 = F_1 \cos \theta \frac{l_1}{l_2}$ übertragen, siehe hierzu Abbildung 3.3.

¹Die Singulärwertzerlegung ist ferner auch für komplexe, nichtquadratische Matrizen definiert.

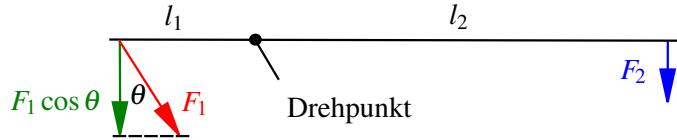


Abbildung 3.3: Einfache Hebelübersetzung

Über die Singularwertzerlegung lassen sich die Begriffe Kraftrichtung und Hebelübersetzung auf die Kinematik des VC6 verallgemeinern:

Die Übersetzung der Kraftübertragung aus Gleichung (3.2b) von den Aktorkräften \underline{f}_{qA} in die globalen Kräfte und Momente \underline{f} ist abhängig von der Richtung der Aktorkräfte \underline{f}_{qA} . Ist die generalisierte Kraft gerade $\underline{f}_{qA} = \underline{v}_i$, so entspricht die Kraftübersetzung von \underline{f}_{qA} auf \underline{f} einer Streckung von \underline{u}_i mit dem zugehörigen Singulärwert σ_i .

$$J_A^T \underline{f}_{qA} = \underline{f} \iff J_A^T \underline{v}_i = \sigma_i \underline{u}_i = \underline{f} \quad (3.15)$$

\underline{v}_i beschreibt dabei die Eingangsrichtung, σ_i die Übersetzung und \underline{u}_i die Ausgangsrichtung.

Maximale Übersetzung und deren Richtung

Die im Sinne der euklidischen Norm maximale Übersetzung ist gegeben durch den maximalen Singulärwert $\sigma_{\max}(J_A^T)$. Die Übersetzung wird maximal, falls \underline{f}_{qA} in die Eingangsrichtung \underline{v}_{\max} zeigt. Die zugehörige Ausgangsrichtung ist \underline{u}_{\max} und es gilt ([SP05, Lev11b])

$$\|\underline{f}\|_2 = \sigma_{\max}(J_A^T) \left\| \underline{f}_{qA} \right\|_2 \iff \sigma_{\max}(J_A^T) = \max_{\left\| \underline{f}_{qA} \right\|_2 \neq 0} \frac{\left\| J_A^T \underline{f}_{qA} \right\|_2}{\left\| \underline{f}_{qA} \right\|_2} \quad (3.16)$$

Minimale Übersetzung und deren Richtung

Die im Sinne der euklidischen Norm minimale Übersetzung ist gegeben durch den minimalen Singulärwert $\sigma_{\min}(J_A^T)$. Die Übersetzung wird minimal, falls \underline{f}_{qA} in die Eingangsrichtung \underline{v}_{\min} zeigt. Die zugehörige Ausgangsrichtung ist \underline{u}_{\min} und es gilt

$$\|\underline{f}\|_2 = \sigma_{\min}(J_A^T) \left\| \underline{f}_{qA} \right\|_2 \iff \sigma_{\min}(J_A^T) = \min_{\left\| \underline{f}_{qA} \right\|_2 \neq 0} \frac{\left\| J_A^T \underline{f}_{qA} \right\|_2}{\left\| \underline{f}_{qA} \right\|_2} \quad (3.17)$$

Richtungsunabhängige Grenzen

Die Übersetzung einer generalisierten Kraft \underline{f}_{qA} mit beliebiger Richtung und der euklidischen Norm $\left\| \underline{f}_{qA} \right\|_2$ liegt folglich innerhalb der Grenzen

$$\sigma_{\min}(J_A^T) \left\| \underline{f}_{qA} \right\|_2 \leq \|\underline{f}\|_2 \leq \sigma_{\max}(J_A^T) \left\| \underline{f}_{qA} \right\|_2 \quad (3.18)$$

Schlussfolgerung und Anmerkungen

Die Interpretation der Hebelübersetzung einfacher Wägezellen kann über die Singularwertzerlegung auf die kinematische Konfiguration des VC6 verallgemeinert werden. Die obere und untere Grenze der Übersetzung im mehrdimensionalen ist über den maximalen bzw. minimalen Singulärwert gegeben. Innerhalb dieser Grenzen ist die Übersetzung abhängig von der Eingangsrichtung.

- Eine richtungsunabhängige (isotrope) Kraftübertragung ist gegeben, falls $\text{cond}_2(\underline{J}_A^T) = 1$ ist. \underline{J}_A^T ist in diesem Fall orthogonal.
- Eine direkte und richtungsunabhängige Kraftübertragung ist gegeben, falls $\sigma_i(\underline{J}_A^T) = 1$ für $\forall i$. \underline{J}_A^T ist in diesem Fall orthonormal.

3.2.2 Abschätzung des Einflusses von Störungen in der Jacobi-Matrix und im Gravitationsfeld

Eine alternative Interpretation der Konditionszahl führt über die Abschätzung des relativen Fehlers eines gestörten GLS. Die Theorie stammt aus [SK09]. Es wird das GLS der stationären Kraftübertragung in der Form

$$\underline{J}_A^T \underline{f}_{q_A} = \underline{f} \quad (3.19)$$

betrachtet. Statisch gilt $\underline{f} = -\underline{f}_g$. Es werden die Abweichungen

$$(\underline{J}_A^T + \Delta \underline{J}_A^T)(\underline{f}_{q_A} + \Delta \underline{f}_{q_A}) = -(\underline{f}_g + \Delta \underline{f}_g) \quad (3.20)$$

betrachtet. Es wird vorausgesetzt, dass die Matrizen \underline{J}_A^T und $\Delta \underline{J}_A^T$ regulär sind und \underline{f}_{q_A} die exakte Lösung von Gleichung (3.19) ist. Störungen im Gravitationsfeld können so interpretiert werden, dass die Waage nicht exakt ausnivelliert ist. Störungen in der Jacobi-Matrix entstehen, wenn Fehler bei der Mechanik und der Aktorik auftreten. Eine obere Grenze des relativen Fehler $\|\Delta \underline{f}_{q_A}\|_2 / \|\underline{f}_{q_A}\|_2$ kann über die Ungleichung

$$\frac{\|\Delta \underline{f}_{q_A}\|_2}{\|\underline{f}_{q_A}\|_2} \leq \frac{\text{cond}_2(\underline{J}_A^T)}{1 - \text{cond}_2(\underline{J}_A^T)} \left(\frac{\|\Delta \underline{f}_g\|_2}{\|\underline{f}_g\|_2} + \frac{\|\Delta \underline{J}_A^T\|_2}{\|\underline{J}_A^T\|_2} \right) \quad (3.21)$$

abgeschätzt werden. Es wird vorausgesetzt, dass

$$\text{cond}_2(\underline{J}_A^T) \frac{\|\Delta \underline{J}_A^T\|_2}{\|\underline{J}_A^T\|_2} < 1 \iff \sigma_{\max}(\Delta \underline{J}_A^T) < \sigma_{\min}(\underline{J}_A^T) \quad (3.22)$$

gilt. Ohne eine Annahme über $\|\Delta \underline{J}_A^T\|_2 = \sigma_{\max}(\Delta \underline{J}_A^T)$ kann diese Abschätzung nicht durchgeführt werden. Die wesentliche Eigenschaft ist jedoch: Je kleiner die Konditionszahl ist, desto weniger empfindlich ist die Lösung gegenüber Störungen.

Schlussfolgerung

In Gleichungen (3.21) ist die Konditionszahl die entscheidende Größe, welche die Empfindlichkeit der Lösung \underline{f}_{q_A} bezüglich der gleichzeitigen Störung der Jacobi-Matrix und des Gravitationsfeldes beschreibt. Wird dieses Resultat auf die Einwirkungen von Schieflage und Fehler in der Mechanik und in der Aktorik übertragen, so sind die Aktorkräfte und der Strom w_e $i = \underline{f}_{q_A}$ umso weniger empfindlich auf Störungen, je kleiner die Konditionszahl ist.

3.3 Optimierung der kinematischen Konfiguration

Im vorangegangenen Abschnitt 3.2 wurde aufgezeigt, dass die Singulärwerte und die über die Singulärwerte definierte Konditionszahl ein Mass für die Kraftübersetzung bzw. ein Mass für die Kraftübertragungsgüte ist. Das über die Konditionszahl definierte Gütemass aus Gleichung (3.4) wird der

Optimierung der geometrischen Anordnung der Aktoren des VC6 zugrunde gelegt. Es werden fünf geometrische Parameter eingeführt, vergleiche Abbildung 3.4 und Abbildung 3.5. d_1, d_2 und d_3 bezeichnen die Abstände des Messorts zum Kraftangriffspunkt der Voice-Coil-Aktoren, vergl. Abschnitt 3.1.2.

Geometrische Parameter

1. Abstand des Aktor 1 zum Ursprung: l_1
2. Abstand der Aktoren 2 und 3 zum Ursprung: l_2
3. Abstand des Aktor 4 zum Ursprung: l_3
4. Abstand der Aktoren 5 und 6 zum Ursprung: l_4
5. Winkel zu den Trägern 2 und 3: φ

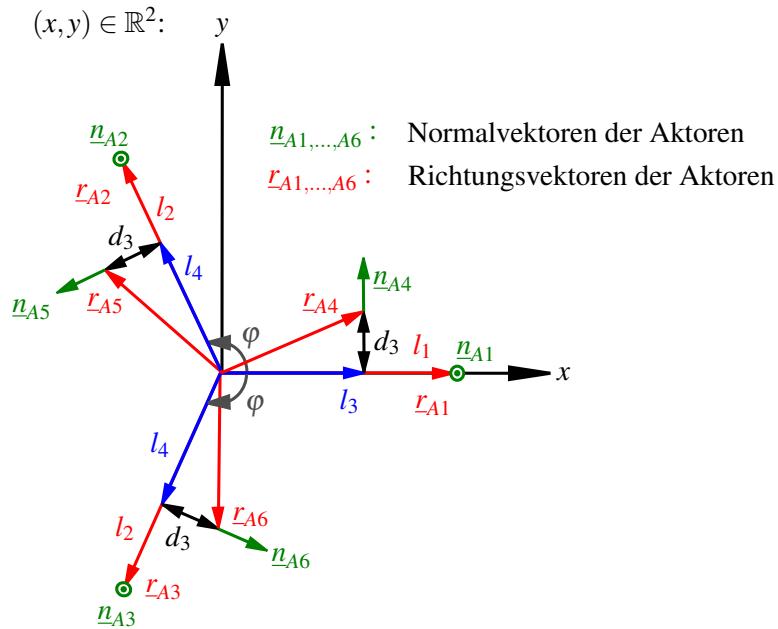


Abbildung 3.4: Skizze der Richtungs- und Normalvektoren der Aktoren, Ansicht von oben

Der Abstand des Aktors 1 zum Ursprung wird auf $l_1 = 80 \text{ mm}$ und $d_3 = 0 \text{ mm}$ festgelegt. Die verbleibenden Parameter $\underline{\theta}^T = [l_2 \ l_3 \ l_4 \ \varphi]$ werden einem Optimierungsproblem zugrunde gelegt. Für die Lösung des Optimierungsproblems wird eine Heuristik eingesetzt². Der verwendete Algorithmus ist eine Art Abstiegsverfahren³ und kann deshalb lokale Minima nur unzureichend überwinden, zudem hängt die gefundene Lösung stark von den Anfangsbedingungen $\underline{\theta}_0$ ab. Um möglichst den ganzen Parameterraum abzusuchen werden 1000 gleichverteilte Startwerte generiert und das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \underline{\theta}^* &= \arg \max_{\underline{\theta}} \left\{ V_u = \frac{1}{\text{cond}_2(\underline{J}_A \ \underline{W})} \right\} \\ \underline{W} &= \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1/l_n \ 1/l_n \ 1/l_n]), \quad l_n = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \|r_{Ai}\|_2 \\ l_{20}, l_{30}, l_{40} &\in (0, 30) \text{ cm}, \quad \varphi_0 \in (0, 180)^\circ \end{aligned} \tag{3.23}$$

²Nelder-Mead Simplex, MATLAB: `fminsearch.m`

³Unter der Annahme eines konvexen Optimierungsproblems entspricht die Maximierung von V_u einer Minimierung von $-V_u$.

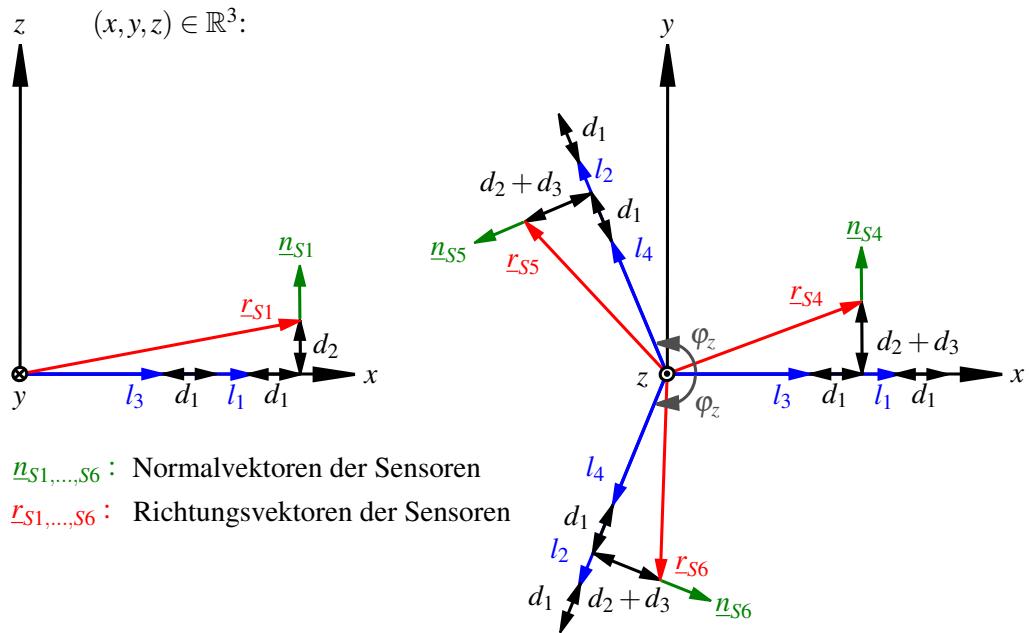


Abbildung 3.5: Skizze der Richtungs- und Normalvektoren der Sensoren, links: Skizze des Aufbaus der vertikalen Sensoren (Ansicht von der Seite, lediglich Sensor 1 eingezeichnet), rechts: Aufbau der horizontalen Sensoren (Ansicht von oben)

gelöst. Unter den 1000 gefundenen Lösungen wird diejenige verwendet, welche das Gütekriterium maximiert.

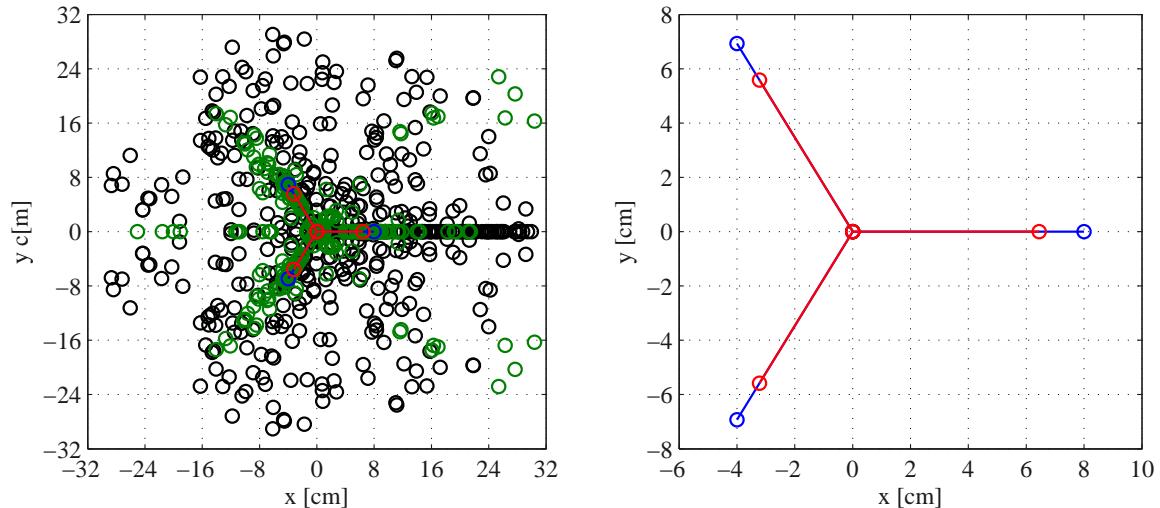


Abbildung 3.6: Optimierung der kinematischen Konfiguration

In Abbildung 3.6(a) sind die Richtungsvektoren \underline{r}_A der Anfangsbedingungen $\underline{\theta}_0$ und der gefundenen Lösungen θ der ersten 100 Rechenläufe eingezeichnet. In Abbildung 3.6(b) sind die Richtungsvektoren \underline{r}_A der optimalen Lösung $\underline{\theta}^*$ eingezeichnet. Die optimalen Parameter lauten

$$[l_2 \ l_3 \ l_4 \ \varphi]^* = [80 \text{ mm} \ 64.5 \text{ mm} \ 64.5 \text{ mm} \ 120^\circ], \quad \text{wobei} \quad V_u^* = 0.7071 \quad (3.24)$$

ist. Die kinematische Konfiguration der Aktoren mit dem optimalen Parametersatz $\underline{\theta}^*$ hat eine 3-zählige Rotationssymmetrie. Mehrere Rechendurchläufe haben gezeigt, dass unterschiedliche Optima mit dem Gütemass V_u^* existieren. Die Parameter $l_2 = 80 \text{ mm}$ und $\varphi = 120^\circ$ sind dabei stets gleich, die Parameter $l_3 = l_4$ variieren jedoch. Dieser Sachverhalt wird nachfolgend näher untersucht.

3.3.1 Grafische Auswertung der Gütemasse

Geometriemas

Die optimale Anordnung der vertikalen Aktoren wurde bereits bestimmt, die Anordnung der horizontalen Aktoren wurde jedoch nicht eindeutig festgelegt. Ein anschauliches Vorgehen für die Lösungsfindung eines Optimierungsproblems mit ein oder zwei Parametern ist es, die Parameter zu variieren und das betrachtete Gütemass als Graf, resp. Fläche über die Parameter aufzuzeichnen.

Die Parameter φ und $l_3 = l_4$ werden im Wertebereich

$$\varphi \in (100, 170)^\circ, \quad l_3 = l_4 \in (20, 160) \text{ mm} \quad (3.25)$$

variiert und die Gütemasse

$$\begin{aligned} V_u(\underline{J}_A \underline{W}_A) &= \frac{1}{\text{cond}_2(\underline{J}_A \underline{W}_A)} && \text{Kraftübertragungsgüte} \\ V_u(\underline{J}_S \underline{W}_S) &= \frac{1}{\text{cond}_2(\underline{J}_S \underline{W}_S)} && \text{Geschwindigkeitsübertragungsgüte} \end{aligned} \quad (3.26)$$

als Fläche aufgezeichnet und analysiert.

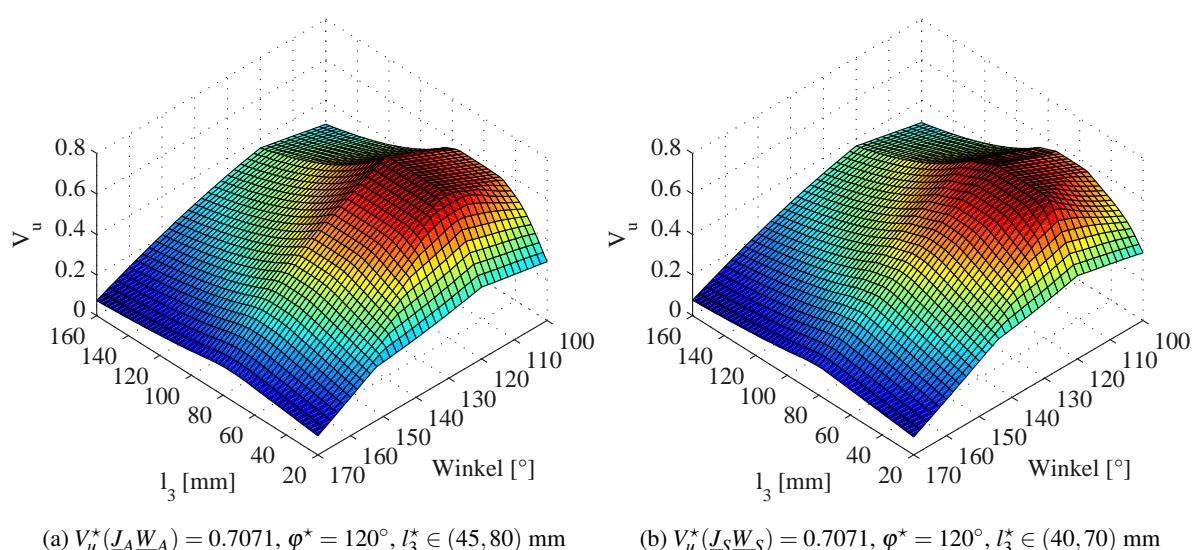


Abbildung 3.7: 2-D-Optimierung der geometrischen Gütemasse

Diskussion der Ergebnisse

In Abbildung 3.7 sind die Gütefunktionale V_u über die Parameter φ und $l_3 = l_4$ aufgeführt. Bei beiden Optima ist $\varphi = 120^\circ$. Der Verlauf des Gütemasses der gewichteten Jacobi-Matrix der Aktoren und der Sensoren zeigt, dass das Maximum entlang einer Kante verläuft und optimal für Anordnungen ist, bei denen die horizontalen Aktoren näher beim Ursprung liegen. Diese Tatsache erklärt auch die Variation von $l_3 = l_4$ bei der heuristischen Optimierung aus Gleichung (3.23).

Steuerbarkeitsmass

Des Weiteren werden die Gütemasse v_{sk} und s_S aus Abschnitt 3.1.4 für die Steuerbarkeit aus den Gleichungen (3.11) und (3.12) ausgewertet. Der Parameter φ wird auf 120° festgelegt und $l_3 = l_4$ im Wertebereich $l_3 = l_4 \in (20, 160)$ mm variiert. Dabei wird das lineare Modell aus Gleichung (2.84) angesetzt. Die Massenverteilung wird über Punktmasse abgebildet. Für die Spulen wird die Masse $m_A = 6.1$ g angenommen. Die Masse der Wägeplattform wird über eine zusätzliche Masse $m_p = 30$ g im Schwerpunkt abgebildet. Die verbleibenden Modellparameter sind aus der theoretischen Modellbildung bekannt. Für die Berechnung der Gram'schen Steuerbarkeitsmatrix wird das dynamische System vom Eingang Spannung zum Ausgang Geschwindigkeit betrachtet. Als obere Integrationsgrenze der Gleichung (3.9) wird

$$W_S = \int_0^{\infty} \underline{u}^T(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau = \underline{x}_0^T \underline{Q}_S^{-1} \underline{x}_0 \quad (3.27)$$

festgelegt⁴. An dieser Stelle soll noch einmal darauf hingewiesen werden, dass bei den geforderten Randbedingungen zwei vollständig entkoppelte Teilsysteme für die vertikale und die horizontale Dynamik entstehen. Durch einführen von $\underline{x}_v^T = [\dot{q}_{S1}, \dot{q}_{S2}, \dot{q}_{S3}]$ für die vertikale Dynamik und $\underline{x}_h^T = [\dot{q}_{S4}, \dot{q}_{S5}, \dot{q}_{S6}]$ für die horizontale Dynamik lässt sich das Modell aus Gleichung (2.84) durch

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x}_v \\ \underline{x}_h \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{A}_v & 0 \\ 0 & \tilde{A}_h \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} \underline{x}_v \\ \underline{x}_h \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{B}_v & 0 \\ 0 & \tilde{B}_h \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \begin{bmatrix} \underline{u}_v \\ \underline{u}_h \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_v, \tilde{A}_h, \tilde{B}_v, \tilde{B}_h \in \mathbb{R}^{(3 \times 3)} \quad (3.28)$$

schreiben. Aufgrund der Besetzung von \tilde{A} und \tilde{B} ist auch \underline{Q}_S eine Blockmatrix und folglich auch

$$\underline{Q}_S^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{Sv}^{-1} & 0 \\ 0 & \underline{Q}_{Sh}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

eine Blockmatrix dieser Gestalt. Die Masszahl $s_S = \text{spur}(\underline{Q}_S^{-1})$ entspricht der Summe der Masszahlen der Teilsysteme für die vertikale und die horizontale Dynamik nach

$$s_S = \text{spur}(\underline{Q}_S^{-1}) = \text{spur}(\underline{Q}_{Sv}^{-1}) + \text{spur}(\underline{Q}_{Sh}^{-1}) \quad (3.30)$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der kinematischen Konfiguration ist das Mass für Steuerbarkeit für die vertikale Dynamik $v_{si} = v_{sv}$ für $i = 1, \dots, 3$ sowie für die horizontale Dynamik $v_{si} = v_{sh}$ für $i = 4, \dots, 6$ jeweils gleich.

⁴MATLAB: `gram.m`

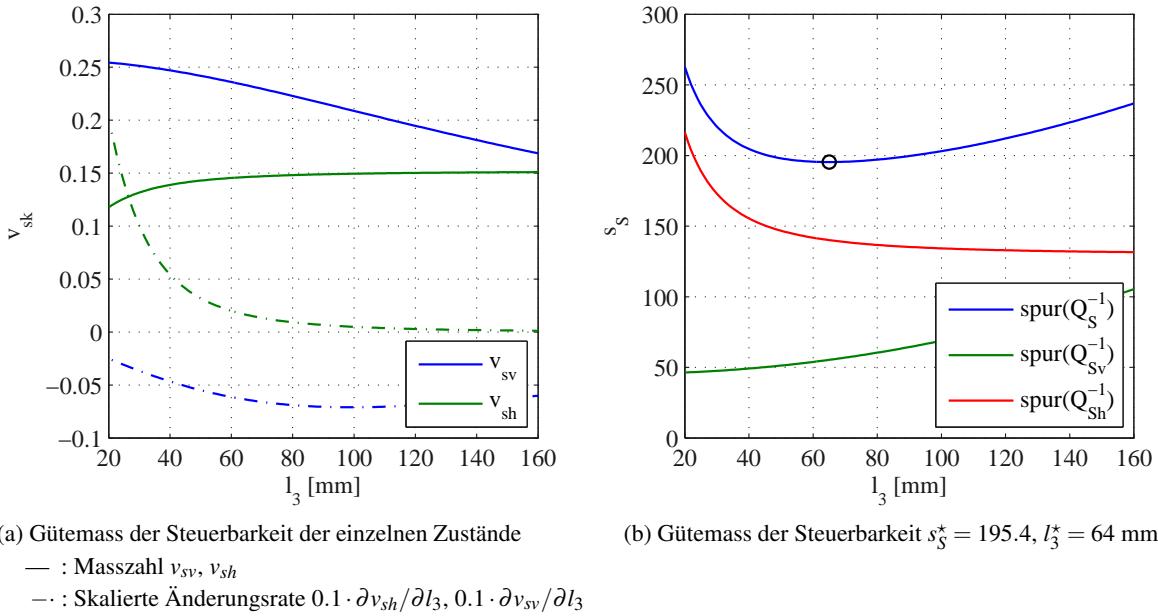


Abbildung 3.8: 1-D-Optimierung der Masszahlen für Steuer- und Beobachtbarkeit

In Abbildung 3.8(a) sind die Masszahlen der einzelnen Zustände für Steuerbarkeit v_{sv} und v_{sh} sowie deren Änderungsrate in Abhängigkeit von l_3 eingezeichnet. In Abbildung 3.8(b) ist die Masszahl des Gesamtsystems für Steuerbarkeit s_S eingezeichnet.

Diskussion der Ergebnisse

In Bezug auf die Steuerbarkeit ist ersichtlich, dass die Änderungsrate der horizontalen Aktoren $\partial v_{sh}/\partial l_3$ im Bereich $l_3 = 60 \dots 80$ mm verschwindet. Eine weitere Erhöhung von l_3 verbessert die Steuerbarkeit der horizontalen Dynamik praktisch nicht. Die Steuerbarkeit der vertikalen Dynamik wird jedoch nahezu linear verschlechtert. Es ist daher sinnvoll eine Konfiguration zu wählen bei der $l_3 = 60 \dots 80$ mm ist. Das Optimum von s_S liegt bei $l_3^* = 64$ mm.

3.3.2 Zusammenfassung

Die Optimierung der kinematischen Konfiguration des VC6 liefert zusammenfassend nachfolgende Ergebnisse:

- Die horizontalen Aktoren liegen näher beim Zentrum als die vertikalen Aktoren. Die horizontalen Aktoren sind so nah als konstruktiv möglich an die vertikalen Aktoren anzubringen.
- Die Mechanik hat eine 3-zählige Rotationssymmetrie. Zwischen den drei Trägern liegt jeweils 120° .

3.4 Konstruktive Umsetzung

Aufbauend auf die Ergebnisse der Optimierung wurde von MTAG die Mechanik konstruktiv umgesetzt und gefertigt. In Abbildung 3.9 ist die CAD-Zusammenstellung des mechanischen Gesamtaufbaus des

FUMU1 dargestellt. Der einzige Aspekt, der bei der konstruktiven Ausgestaltung bemängelt werden muss, ist die Tatsache, dass die horizontalen Aktoren zu nah am Zentrum der Wägeplattform platziert wurden. Der Abstand zwischen den inneren Magnettöpfen und den äusseren Magnettöpfen beträgt jeweils 21.5 mm. Die inneren Aktoren könnten deutlich näher an die äusseren Aktoren angebracht werden (12...15 mm).

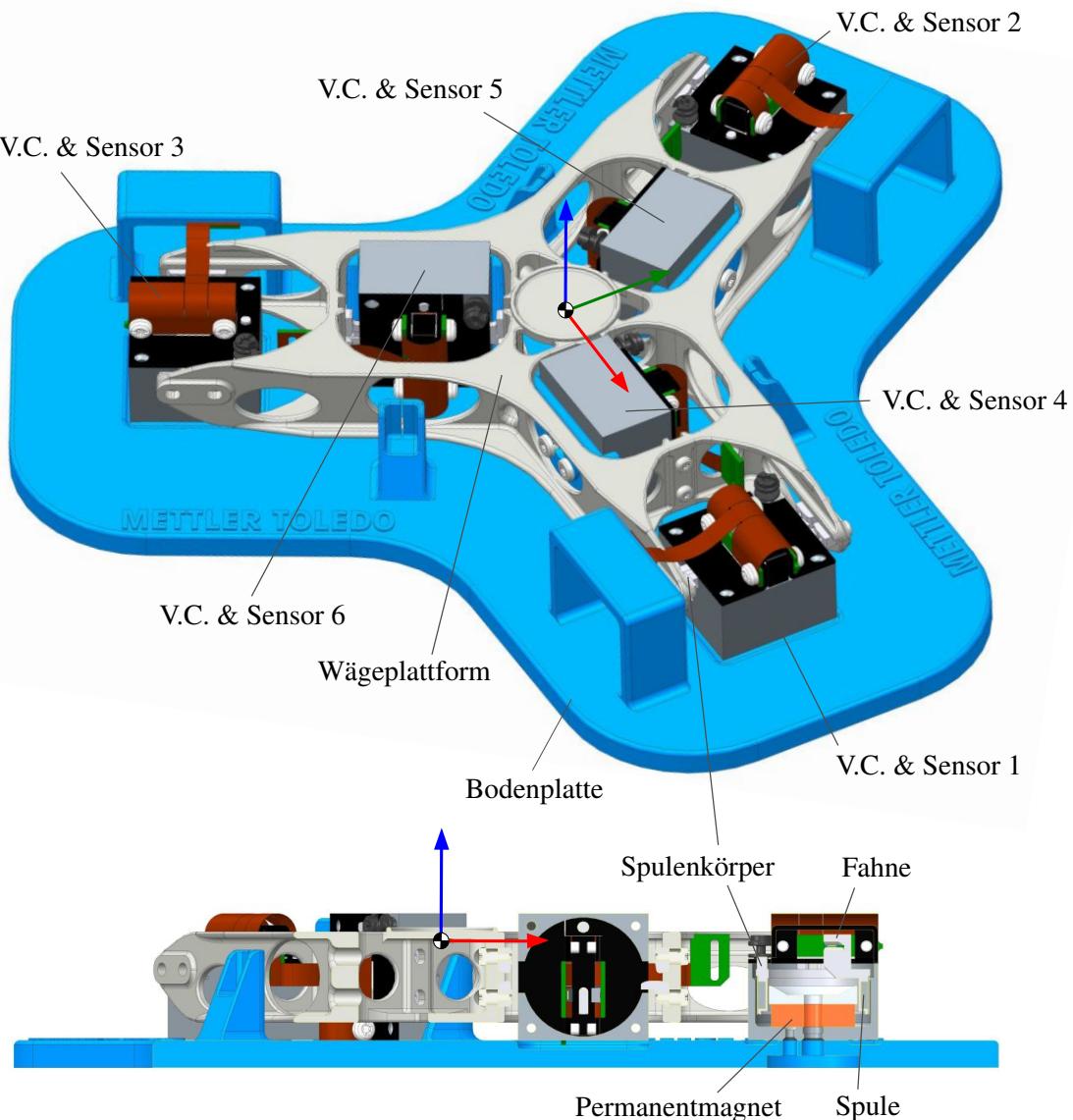


Abbildung 3.9: FUMU1 CAD-Zusammenstellung

Die Wägeplattform und die Bodenplatte wurden mit einem 3-D-Drucker aus Kunststoff gefertigt. Bei der Trocknung des Kunststoffs wurde die Bodenplatte verzogen. Um die geometrischen Abmasse trotzdem möglichst gut einzuhalten, wurde diese von MTAG auf eine Aluminiumplatte geklebt. Bei den Voice-Coil-Aktoren inkl. Sensorik handelt es sich um Serienbauteile, welche MTAG unter anderem bei der Piranha 8001 einsetzt.

3.4.1 Vergleich der Gütemasse der Optimierung und der umgesetzten Mechanik

In den Tabellen 3.1 und 3.2 werden die Gütemasse der Optimierung und der umgesetzten Mechanik verglichen. Die Gütemasse, die durch den Abstand der horizontalen Aktoren zum Ursprung beeinflusst werden, sind bei der umgesetzten Mechanik deutlich schlechter als bei der vorgeschlagenen Konfiguration.

In Abbildung 3.10 sind die Gütemasse $V_u(\underline{J}_A \underline{W}_A)$ und $V_u(\underline{J}_S \underline{W}_S)$ der Optimierung über den Parameter l_3 aufgetragen. Der von MTAG umgesetzte Abstand ist ca. $l_3 = 30$ mm, siehe Gleichung (3.32). Die zugehörigen Masszahlen $V_u(\underline{J}_A \underline{W}_A)$ und $V_u(\underline{J}_S \underline{W}_S)$ korrespondieren zu den Gütemassen des FUMU1 aus Tabelle 3.1. Bei beiden Grafiken fällt das Gütemass im Bereich von $l_3 = 40$ mm stark ab.

Fazit

Werden die inneren drei Aktoren 12 ... 15 mm näher an die äusseren Aktoren angebracht ($\rightarrow l_3 = 42 \dots 45$ mm), so sind die geometrischen Gütemasse nahezu optimal.

Tabelle 3.1: Vergleich der Gütemasse V_u , ($V_u \leq 1$, $V_u^* = 1$)

	$V_u(\underline{J}_A \underline{W}_A)$	$V_u(\underline{J}_S \underline{W}_S)$
Optimierung	0.71	0.71
FUMU1	0.54	0.51

Tabelle 3.2: Vergleich der Gütemasse für Steuerbarkeit, v_{sv}, v_{sh} gilt es zu maximieren, s_S gilt es zu minimieren

	v_{sv}	v_{sh}	s_S
Optimierung	0.23	0.15	195.39
FUMU1	0.23	0.12	283.45

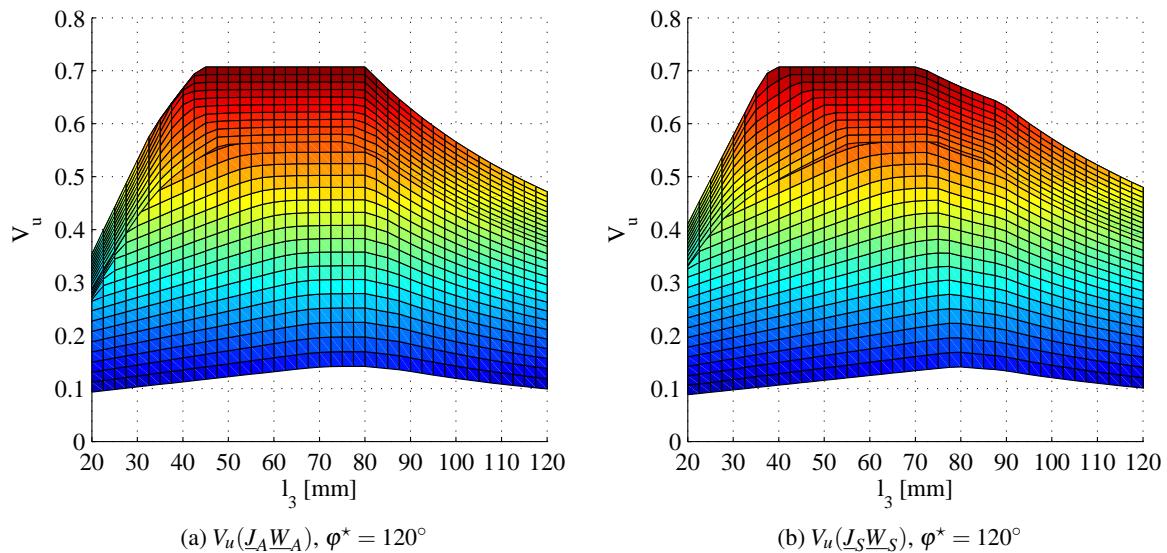


Abbildung 3.10: Das Gütemass V_u der gewichteten Jacobi-Matrix der Aktoren und der Sensoren

3.4.2 Theoretisches Modell des FUMU1

Die aus dem CAD-Programm exportierte Masse sowie der Trägheitstensor lauten

$$m = 64.51 \text{ g} \quad \text{Masse des schwebenden Teils}$$

$$\underline{\Theta}_S = \text{diag}([0.118 \quad 0.1112 \quad 0.2185]) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \text{Trägheitstensor bezüglich dem Schwerpunkt}$$
(3.31)

Der Schwerpunkt liegt 1 mm unterhalb der Waagschale. Die Richtungsvektoren \underline{r}_i mit $i = A, S$ des Aktors 1 und 4 relativ zum Schwerpunkt sind

$$\begin{aligned} \underline{r}_{A1}^T &= [80.0 \quad 0.00 \quad -3.69] \text{ mm} & \|\underline{r}_{A1}\|_2 &= 80.1 \text{ mm} \\ \underline{r}_{S1}^T &= [84.5 \quad 0.00 \quad 7.11] \text{ mm} & \|\underline{r}_{S1}\|_2 &= 84.8 \text{ mm} \\ \underline{r}_{A4}^T &= [30.5 \quad -5.75 \quad 0.36] \text{ mm} & \|\underline{r}_{A4}\|_2 &= 31.0 \text{ mm} \\ \underline{r}_{S4}^T &= [30.5 \quad 5.05 \quad -4.14] \text{ mm} & \|\underline{r}_{S4}\|_2 &= 31.2 \text{ mm} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Die Richtungsvektoren der verbleibenden Aktoren können einfach durch Drehung um $\varphi_z = 120^\circ$ bzw. $\varphi_z = 240^\circ$ um die z -Achse erzeugt werden. Die Wandlerkonstante w_e und die Geschwindigkeits-Spannungskonstante k_m werden aus Tabelle 2.4 übernommen. Beim Widerstand

$$R = R_l + R_s = 310 \Omega + 47 \Omega = 357 \Omega \quad (3.33)$$

muss beachtet werden, dass für die Strommessung ein Shunt R_S in Serie zum Widerstand der Spule R_L geschaltet wird. Somit sind alle erforderlichen Modellparameter zur Erzeugung des linearen sowie des nichtlinearen dynamischen Modells entsprechend Gleichung (2.84) und Abschnitt 2.3.5 bekannt. Mit dem Zustandsvektor $\underline{x}^T = [q_{S1} \ q_{S2} \ \dots \ q_{S6}]$ lauten die Untermatrizen $\underline{\tilde{A}}$ und $\underline{\tilde{B}}$

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{A}} &= \begin{bmatrix} -134.7380 & 24.4990 & 24.4990 & 0 & -0.4369 & 0.4369 \\ 24.4990 & -134.2965 & 24.0574 & 0.4344 & 0.0012 & -0.4357 \\ 24.4990 & 24.0574 & -134.2965 & -0.4344 & 0.4357 & -0.0012 \\ 0 & -3.1612 & 3.1612 & -36.4049 & 6.4283 & 6.4283 \\ 3.1862 & -0.0125 & -3.1737 & 6.4283 & -36.4048 & 6.4282 \\ -3.1862 & 3.1737 & 0.0125 & 6.4283 & 6.4282 & -36.4048 \end{bmatrix} \\ \underline{\tilde{B}} &= \begin{bmatrix} 3.9580 & -0.7729 & -0.7729 & 0 & 0.0123 & -0.0123 \\ -0.7729 & 3.9449 & -0.7598 & -0.0122 & 0 & 0.0123 \\ -0.7729 & -0.7598 & 3.9449 & 0.0122 & -0.0123 & 0 \\ 0 & 0.1331 & -0.1331 & 1.0242 & -0.1809 & -0.1809 \\ -0.1338 & 0.0004 & 0.1335 & -0.1809 & 1.0242 & -0.1809 \\ 0.1338 & -0.1335 & -0.0004 & -0.1809 & -0.1809 & 1.0242 \end{bmatrix} \\ \underline{\lambda}(\underline{\tilde{A}})^T &= \begin{bmatrix} -159.2011 & -158.3182 & -85.7400 & -42.8688 & -42.8688 & -23.5483 \end{bmatrix} \quad (3.34) \end{aligned}$$

$\underline{\lambda}(\underline{\tilde{A}})$ bezeichnet die Eigenwerte der Matrix $\underline{\tilde{A}}$. Der Verstärkungsfaktor $K_{u_{pos}}$ ist nicht berücksichtigt.

3.4.3 Singulärwertzerlegung der Jacobi-Matrix der Aktoren

Nachfolgend soll die Singulärwertzerlegung der gewichteten Jacobi-Matrix der Aktoren dargestellt und diskutiert werden.

$$\underline{W}_A^T \underline{J}_A^T = \underline{J}_A^T = \underline{S} \underline{U} \underline{V}^T \quad (3.35)$$

Dabei ist

$$\underline{W}_A^T = \text{diag}([1 \ 1 \ 1/l_n \ 1/l_n \ 1/l_n]) \quad \text{mit} \quad l_n = 55.6 \text{ mm} \quad (3.36)$$

l_n entspricht der mittleren Lage der Richtungsvektoren der Aktoren. Durch die Gewichtung wird die Jacobi-Matrix einheitslos, vergl. Abschnitt 3.1.3. l_n kann als Abstand eines Kräftepaars (Moment) interpretiert werden. Die Momente M_x, M_y und M_z in \underline{f} gehen durch die Gewichtung $\tilde{\underline{f}} = \underline{W}_A^T \underline{f}$ in ein Kräftepaar \tilde{F}_i über, welches über den Abstand l_n das Moment M_i erzeugt [Spe08].

$$\tilde{\underline{f}}^T = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x/l_n \ M_y/l_n \ M_z/l_n] = [F_x \ F_y \ F_z \ \tilde{F}_x \ \tilde{F}_y \ \tilde{F}_z] \quad (3.37)$$

In Anlehnung an Abschnitt 3.2 gilt

$$\underline{J}_A^T \underline{f}_{q_A} = \tilde{\underline{f}} \iff \underline{J}_A^T \underline{V} = \underline{S} \underline{U} = \tilde{\underline{f}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{J}_A^T \underline{v}_i = \sigma_i \underline{u}_i = \tilde{\underline{f}} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, 6 \quad (3.38)$$

Die Matrizen lauten

$$\begin{aligned} \underline{J}_A^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8660 & 0.8660 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5000 & -0.5000 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2461 & -1.2461 & -0.0065 & 0.0032 & 0.0032 \\ -1.4388 & 0.7194 & 0.7194 & 0 & -0.0056 & 0.0056 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5486 & 0.5486 & 0.5486 \end{bmatrix} \\ \underline{V} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.8165 & -0.5774 & -0.0071 & 0 & 0 \\ 0.7071 & -0.4082 & -0.5774 & 0.0036 & 0.0062 & 0 \\ -0.7071 & -0.4082 & -0.5774 & 0.0036 & -0.0062 & 0 \\ -0.0071 & 0 & 0 & 0 & 0.8165 & -0.5774 \\ 0.0036 & 0.0062 & 0 & 0.7071 & -0.4082 & -0.5774 \\ 0.0036 & -0.0062 & 0 & -0.7071 & -0.4082 & -0.5774 \end{bmatrix} \\ \underline{S} &= \text{diag}([1.7623 \ 1.7623 \ 1.7321 \ 1.2247 \ 1.2247 \ 0.9501]) \\ \underline{U} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0060 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.0060 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.0060 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.0060 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

In dieser Darstellung lässt sich ablesen, wie die generalisierten Kräfte \underline{f}_{q_A} in der Eingangsrichtung \underline{V} , über die Singulärwerte \underline{S} auf die Ausgangsrichtung \underline{U} , in die globalen Kräfte und Kräftepaare $\tilde{\underline{f}}$ übersetzt werden. An der Besetzung von \underline{J}_A^T lässt sich weiter ablesen, dass die Kräfte F_x, F_y und das Kräftepaar \tilde{F}_z nur von den Aktorkräften 4...6 beeinflusst werden. Die Kräftepaare \tilde{F}_x und \tilde{F}_y sind über alle Aktoren verkoppelt. Die Summe der Aktorkräfte 1...3 entspricht der Kraft F_z . Es gilt

$$\sigma_{\max}(\underline{J}_A^T) = \max_{\|\underline{f}_{q_A}\|_2=1} \left\| \underline{J}_A^T \underline{f}_{q_A} \right\|_2 = 1.7623 \quad (3.40a)$$

$$\sigma_{\min}(\underline{J}_A^T) = \min_{\|\underline{f}_{q_A}\|_2=1} \left\| \underline{J}_A^T \underline{f}_{q_A} \right\|_2 = 0.9501 \quad (3.40b)$$

als obere und untere Grenze der Kraftübersetzung für generalisierte Kräfte bei denen $\|\underline{f}_{q_A}\|_2 = 1$ ist.

3.4.4 Zustandsraummodell in V-kanonischer Normalform

Über die Ähnlichkeitstransformation

$$\underline{x}_m = \underline{W} \dot{\underline{q}}_S \quad (3.41)$$

kann das Zustandsraummodell aus Gleichung (3.34) vom Eingang Spannung, zum Ausgang Geschwindigkeit in die Modalkoordinaten \underline{x}_m transformiert werden. Unter der Annahme das \underline{V} regulär ist, gilt $\underline{W}^{-1} = \underline{V} = [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n]$. \underline{V} enthält dabei spaltenweise die Eigenvektoren zum Eigenwertproblem

$$\frac{d}{dt} \underline{v}_i = \underline{\tilde{A}} \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (3.42)$$

Die Transformationsvorschrift lautet

$$(\underline{\tilde{A}}, \underline{\tilde{B}}, \underline{I}) \longrightarrow (\underbrace{\underline{W} \underline{\tilde{A}} \underline{V}}_{\text{diag } \underline{\Delta}}, \underbrace{\underline{W} \underline{\tilde{B}}}_{\underline{\tilde{B}}}, \underbrace{\underline{V}}_{\underline{\tilde{C}}}) \quad (3.43)$$

Die Matrix $\text{diag } \underline{\Delta}$ enthält auf der Diagonalen die Eigenwerte λ_i , das transformierte Zustandsraummodell beschreibt folglich n entkoppelte lineare DGLen. Die Dynamik der Mode x_{mi} kann deshalb über die Linearkombination

$$\frac{d}{dt} x_{mi} = \lambda_i x_{mi} + \underline{\tilde{b}}_i^T \underline{u} \quad (3.44)$$

und der Ausgang $\dot{\underline{q}}_S$ über die Linearkombination

$$\dot{\underline{q}}_S = \sum_{j=1}^n \underline{\tilde{c}}_j x_{mj} \quad (3.45)$$

beschrieben werden. $\underline{\tilde{b}}_i^T$ beschreibt die Zeile i von $\underline{\tilde{B}}$ und $\underline{\tilde{c}}_j$ die Spalte j von $\underline{\tilde{C}}$. Die Matrizen aus der Transformationsvorschrift (3.43) lauten

$$\begin{aligned} \text{diag } \underline{\Delta} &= \begin{bmatrix} -23.5483 & -42.8688 & -42.8688 & -85.7400 & -158.3182 & -159.2011 \end{bmatrix} \\ \underline{\tilde{B}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.3825 & 0.3825 & 0.3825 \\ 0 & -0.0053 & 0.0053 & -0.9851 & 0.4926 & 0.4926 \\ 0.0061 & -0.0030 & -0.0030 & 0 & -0.8531 & 0.8531 \\ -1.3927 & -1.3927 & -1.3927 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.3304 & -3.3304 & -0.0237 & 0.0119 & 0.0119 \\ -3.8671 & 1.9335 & 1.9335 & 0 & -0.0206 & 0.0206 \end{bmatrix} \\ \underline{\tilde{C}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0053 & -0.5774 & 0 & -0.8156 \\ 0 & -0.0046 & -0.0027 & -0.5774 & 0.7063 & 0.4078 \\ 0 & 0.0046 & -0.0027 & -0.5774 & -0.7063 & 0.4078 \\ 0.5774 & -0.8165 & 0 & 0 & 0.0387 & 0 \\ 0.5774 & 0.4082 & -0.7071 & 0 & -0.0193 & 0.0335 \\ 0.5774 & 0.4082 & 0.7071 & 0 & -0.0193 & -0.0335 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Mit der Beziehung aus Gleichung (2.55) für die Geschwindigkeitsübertragung von den globalen in die generalisierten Koordinaten gilt

$$\dot{\underline{x}} = \underline{J}_S^{-1} \underline{V} \dot{\underline{x}}_m \quad (3.47)$$

und es ist

$$\underline{V}_g = \underline{J}_S^{-1} \underline{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8165 & 0 & 0 & -0.0423 \\ 0 & -0.8165 & 0 & 0 & 0.0423 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5774 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0665 & 0 & 0 & 10.1948 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0664 & 0 & 0 & 10.1947 \\ 18.9295 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Die Interpretation von Gleichung (3.42) in Bezug auf das lineare Modell des VC6 kann bei Betrachtung von $\underline{V} = \underline{\bar{C}}$ und $\underline{V}_g = \underline{J}_S^{-1} \underline{V}$ wie folgt gemacht werden:

- Die Dynamik von \dot{q}_S in Richtung v_1 entspricht der Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\phi}_z$ der Wägeplattform um die z -Achse und weist mit dem zugehörigen Eigenwert $\lambda_1 = -23.55$ die geringste Dynamik auf. Anhand von $\underline{\bar{b}}_1^T$ ist ersichtlich, dass die Dynamik um $\dot{\phi}_z$ nur von den Stellgrößen $u_{4...6}$ beeinflusst wird.
- Die Dynamik von \dot{q}_S in v_2 und v_3 Richtung wird eingangsseitig im Wesentlichen über die Stellgrößen $u_{4,5,6}$ beeinflusst. Anhand der relativen Grösse der Einträge in v_{g2} und v_{g3} kann gefolgert werden, dass die zugehörigen Eigenwerte λ_2 und λ_3 die Dynamik der translatorischen Geschwindigkeiten des VC6 in x - und y -Richtung beschreiben.
- Die Dynamik von \dot{q}_S in Richtung v_4 entspricht der translatorischen Geschwindigkeit \dot{z} . Der zugehörige Eigenwert $\lambda_4 = -85.74$ wird nur von den Stellgrößen $u_{1...3}$ beeinflusst.
- Die Dynamik von \dot{q}_S in v_5 und v_6 Richtung wird eingangsseitig im Wesentlichen über die Stellgrößen $u_{1,2,3}$ beeinflusst. Anhand der relativen Grösse der Einträge in v_{g5} und v_{g6} kann gefolgert werden, dass die zugehörigen Eigenwerte λ_5 und λ_6 die Dynamik der rotatorischen Geschwindigkeiten des VC6 in φ_x - und φ_y -Richtung beschreiben.

3.4.5 Abschätzung des Fehlers über die Maximumnorm

Für die Abschätzung der unteren Grenze des maximalen Fehlers $\|\Delta f_{\underline{q}_A}\|_\infty \leq \|\Delta f_{\underline{q}_A}\|_2$ wird die Gleichung der Kraftübertragung am AP $x_0 = \underline{0}$ in der Form

$$\Delta \underline{f} = \underline{J}_A^T \Delta \underline{f}_{\underline{q}_A} \quad (3.49)$$

herangezogen. Die zur Maximumnorm

$$\|\Delta f_{\underline{q}_A}\|_\infty := \max_i |\Delta f_{q_A i}| \quad (3.50)$$

zugeordnete Matrixnorm ist gegeben durch die Zeilensummennorm

$$\|\underline{J}_A^T\|_\infty := \max_{\|\Delta f_{\underline{q}_A}\|_\infty \neq 0} \frac{\|\underline{J}_A^T \Delta f_{\underline{q}_A}\|_\infty}{\|\Delta f_{\underline{q}_A}\|_\infty} \quad (3.51)$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|\Delta \underline{f}\|_\infty \leq \|\underline{J}_A^T\|_\infty \|\Delta f_{\underline{q}_A}\|_\infty \quad (3.52)$$

Die Maximumnorm ist ein Mass dafür, wie der Fehler $\|\underline{\Delta f}_{qA}\|_\infty$ über $\|\underline{J}_A^T\|_\infty$ maximal verstärkt wird. Für die kinematische Konfiguration des VC6 ist

$$\|\underline{J}_A^T\|_\infty = 3 \quad (3.53)$$

und entspricht gerade der Summe derjenigen Zeile von \underline{J}_A^T , welche die generalisierten Kräfte \underline{f}_{qA} auf F_z abbildet.

3.5 Sensitivitätsanalyse

Für die Sensitivitätsanalyse wird nachfolgend aufgezeigt, dass das statische Wägeprinzip des VC6 unter gewissen Annahmen auf eine äquivalente Betrachtung einer Waage mit nur einem Aktor reduziert werden kann. Die Untersuchung der Sensitivität des VC6 auf die äusseren Einflüsse wie Schieflage, Auftrieb und Temperatur lassen sich dadurch vereinfachen. Die gleichzeitige Betrachtung aller Einwirkungen ist verhältnismässig aufwendig, weshalb die Einflüsse gesondert untersucht werden.

In einer statischen Gleichgewichtslage gilt nach Gleichung (2.79) allgemein

$$\underline{f}_g = -\underline{J}_A^T \underline{f}_{qA} = -\underline{J}_A^T \underline{W}_e \underline{i} \quad \text{mit} \quad \underline{W}_e = \text{diag}([w_{e1} \ w_{e2} \ \dots \ w_{e6}]) \quad (3.54)$$

Es wirke ein homogenes Gravitationsfeld $\underline{g}^T = [g_x \ g_y \ -g_z]$ mit $\|\underline{g}\|_2 = g$ in kartesischen Koordinaten. Für die z -Komponente der Gravitationskraft \underline{f}_g genügt es die dritte Zeile des GLS (3.54) entsprechend

$$F_{gz} = (m + m_w) g_z = \sum_{j=1}^6 n_{Azj} w_{ej} i_j \quad (3.55)$$

zu betrachten, siehe auch Gleichung (2.81). Dabei bezeichnet n_{Azj} den Normalvektor, w_{ej} die Wandlerkonstante und i_j den Strom des Aktors j . Wird weiter angenommen, dass $w_{ei} = w_e$ für $i = 1, \dots, 6$, $n_{Azj} = 1$ für $i = 1, \dots, 3$ und $n_{Azj} = 0$ für $i = 4, \dots, 6$ ist, folgt die einfache Beziehung

$$(m + m_w) g_z = w_e \underbrace{(i_1 + i_2 + i_3)}_{i_t} \quad (3.56)$$

Bei der Bestimmung der Masse des Wägeguts wird angenommen, dass das Wägegut m_w relativ zur Null-Last gemessen wird. Als Bezugspunkt für den Strom wird $\Delta i_t = i_t - i_{t0}$ verwendet. i_{t0} entspricht demjenigen Strom, welcher für die Kompensation der Eigenmasse m aufgebracht werden muss. Das Wägegut ergibt sich über die einfache Beziehung

$$m_w = \frac{w_e \Delta i_t}{g_z} \quad (3.57)$$

An dieser Stelle soll angemerkt werden, dass bei einem idealen System, der Ort wo das Wägegut auf die Waage gelegt wird, keinen Einfluss auf das Wägeresultat hat.

3.5.1 Sensitivität der Messgenauigkeit auf die Schieflage der Waage

Für die Abschätzung der Sensitivität der Messgenauigkeit auf die Schieflage der Waage wird $g_z = g \cos \theta$ angesetzt. Einsetzen in die Gleichung (3.57) führt auf

$$m_w = \frac{w_e}{g \cos(\theta)} \Delta i_t \quad (3.58)$$

Es wird angenommen, dass die Schieflage der Waage bei der Messung nicht kompensiert und folglich

$$\tilde{m}_w = \frac{w_e}{g} \Delta i_t \quad (3.59)$$

als Masse für das Wägegut bestimmt wird. Der absolute Fehler berechnet sich gemäss $\Delta m_w = m_w - \tilde{m}_w$. Algebraisches Umformen und Einsetzen von Gleichung 3.57 führt auf

$$\Delta m_w = (1 - \cos \theta) m_w \quad (3.60)$$

und für den relativen Messfehler $\Delta m_w/m_w$ folgt

$$\Delta m_w = 1 - \cos \theta \quad (3.61)$$

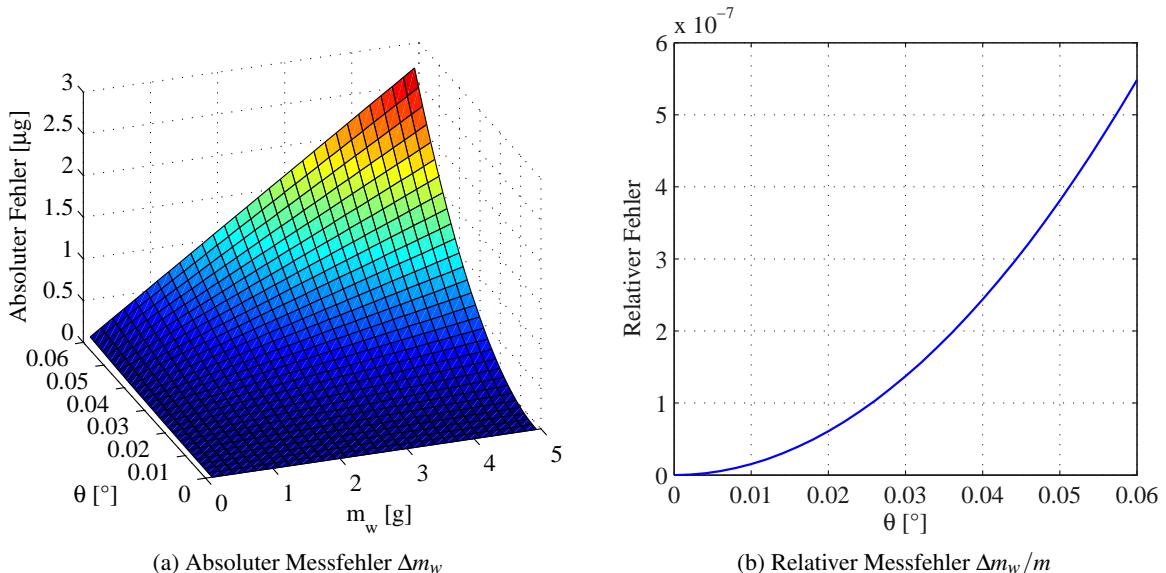


Abbildung 3.11: Empfindlichkeit des Wägegutes auf die Variation des Gravitationsfeldes

In den Abbildungen 3.11(a) und 3.11(b) ist der absolute Fehler Δm_w und der relative Fehler $\Delta m_w/m_w$ für das Intervall $(m_w, \theta) \in (0, 5) \text{ g} \times (0, 0.06)^\circ$ dargestellt. Nach Angaben von MTAG ist eine übliche Toleranz für die Schieflage 1:1000 was einem Winkel von ca. $\theta = 0.06^\circ$ entspricht. Im betrachteten Intervall beträgt der maximale, absolute Fehler $\Delta m_{w,\max} = 2.7 \mu\text{g}$.

3.5.2 Sensitivität der Null-Last auf den statischen Auftrieb

Nach dem Archimedischen Prinzip entspricht der statische Auftrieb eines Körpers der Gewichtskraft des verdrängten Fluides. Der Auftrieb bezeichnet eine der Schwerkraft entgegengesetzte Kraft und ist gegeben durch

$$F_A = \rho V g \iff m_A = \frac{F_A}{g} = \rho V \quad (3.62)$$

ρ bezeichnet die Dichte des verdrängten Fluids, V das Volumen des Körpers und g die Gravitationskonstante. Unter Hinzunahme der barometrischen Höhenformel wird nachfolgend untersucht, welchen

Einfluss die Höhe bzw. der am Messort herrschende Luftdruck auf die Null-Last hat. Der Ausdruck Null-Last bezeichnet das Eigengewicht des schwebenden Teils des VC6. Die barometrische Höhenformel für eine konstante Temperatur relativ zu einem Bezugspunkt für die Dichte $\rho(h_0)$ bzw. den Druck $p(h_0)$ lautet

$$\rho(h_1) = \rho(h_0) \exp\left(-\frac{g}{R_s T} \Delta h\right) \quad \text{Dichte relativ zum Bezugspunkt } \rho(h_0) \quad (3.63a)$$

$$p(h_1) = p(h_0) \exp\left(-\frac{g}{R_s T} \Delta h\right) \quad \text{Druck relativ zum Bezugspunkt } p(h_0) \quad (3.63b)$$

Für die relative Änderung der Null-Last gilt folglich

$$\Delta m_A = m_A(h_1) - m_A(h_0) = \rho(h_0) \left[\exp\left(-\frac{g}{R_s T} \Delta h\right) - 1 \right] V \quad (3.64)$$

und dementsprechend für den Druckunterschied

$$\Delta p = p(h_1) - p(h_0) = p(h_0) \left[\exp\left(-\frac{g}{R_s T} \Delta h\right) - 1 \right] \quad (3.65)$$

Der verwendete Normzustand für Luft bezieht sich auf die physikalische Definition nach DIN 1343

$$T_N = 273.15 \text{ K}, p_N = 101325 \text{ Pa}, R_s = 287.06 \text{ J/kg/K} \quad (3.66)$$

Davon ausgehend, dass bei Laborbedingungen 20 °C herrschen und somit $T_{20} = 293.15 \text{ K}$ ist, folgt für die Dichte

$$\rho_{T_{20}} = \frac{p_N}{R_s T_{20}} = 1.2041 \text{ kg/m}^3 \quad (3.67)$$

Das Gesamtvolumina des schwebenden Teils des VC6 beträgt nach CAD-Export $V = 3.9401 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$. Für kleine Änderungen der Höhe Δh können die Beziehungen $\Delta m_A(\Delta h)/\Delta h$ und $\Delta p(\Delta h)/\Delta h$ über

$$\frac{\Delta m_A}{\Delta h} = -\frac{\rho_{T_{20}} V g}{R_s T_{20}} = -5.53 \mu\text{g}/\text{m} \quad (3.68a)$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -\frac{p_N V g}{R_s T_{20}} = -0.12 \text{ mbar/m} \quad (3.68b)$$

angenähert werden. Für $\Delta m_A(\Delta p)$ ergibt sich

$$\frac{\Delta m_A}{\Delta p} = \frac{\rho_{T_{20}} V}{p_N} = 46.82 \mu\text{g}/\text{mbar} \quad (3.69)$$

Die Null-Last ist bei der Betrachtung der Auftriebsmasse mit $46.82 \mu\text{g}/\text{mbar}$ sehr empfindlich gegenüber einer Änderung des Luftdruckes. Die Steigung $\Delta m_A/\Delta p$ ist proportional zum Körpervolumen V . Wird das Volumen durch die Masse und die Ersatzdichte des schwebenden Teils der Waage substituiert folgt

$$\frac{\Delta m_A}{\Delta p} = \frac{\rho_{T_{20}}}{p_N} \frac{m}{\rho_{VC6}} \quad (3.70)$$

Die aus den CAD-Daten ermittelte Ersatzdichte beträgt $\rho_{VC6} = 1.64 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ und ist auf die geringe Dichte des Kunststoffes zurückzuführen. Durch eine geeignete Wahl des Materials der Wägeplattform könnte der Einfluss des Auftriebs deutlich vermindert werden.

3.5.3 Temperaturempfindlichkeit der Strommessung

Der Temperaturkoeffizient

Eine in der Technik gebräuchliche Angabe für die Temperaturempfindlichkeit ist der TK und entspricht einer linearisierten Betrachtung am AP $T_0 = 20^\circ$. Gegeben sei eine temperaturabhängige Funktion $f(T)$, dann kann für die Linearisierung geschrieben werden

$$f(T) = f(T_0 + \Delta T) \approx f_0 + \frac{\partial f(T)}{\partial T} \Big|_{T_0} \Delta T = f_0 (1 + \alpha_f \Delta T), \quad \text{wobei} \quad \alpha_f = \frac{1}{f_0} \frac{\partial f(T)}{\partial T} \Big|_{T_0} \quad (3.71)$$

den relativen TK, bezogen auf $f_0 = f(T_0)$ bezeichnet.

Temperaturempfindlichkeit der Strommessung

Unter der Annahme, dass der VC6 sich in der Nominallage befindet, wird die Temperaturempfindlichkeit der Strommessung untersucht. Es wird von der idealisierten Betrachtung eines Aktors entsprechend Gleichung (3.56) ausgegangen. Des Weiteren wird angenommen, dass sich alle relevanten Komponenten am AP $T_0 = 20^\circ\text{C}$ befinden und auf alle die gleiche Temperaturänderung wirkt. Es gilt die Beziehung

$$F_{gz} = (m + m_w)g_z = \underbrace{\frac{u_s}{R_s(T)}}_{i_t(T)} w_e(T) \quad (3.72)$$

u_s bezeichnet die Spannung über dem Shunt R_s . Die Linearisierung von $u_s(T)$ im AP T_0 führt auf

$$u_s(T) \approx \underbrace{(m + m_w)g_z}_{u_{s0}} \frac{R_{s0}}{w_{e0}} \left(1 + \underbrace{\left[\frac{1}{R_{s0}} \frac{\partial R_s}{\partial T} \Big|_{T_0} - \frac{1}{w_{e0}} \frac{\partial w_e}{\partial T} \Big|_{T_0} \right]}_{\alpha_{u_s}} \Delta T \right) \quad (3.73)$$

Mit den Werten aus Tabelle (3.3) folgt für den resultierenden TK

$$\alpha_{u_s} = \alpha_{R_s} - \alpha_{w_e} \in (250, 450) \text{ ppm/K} \quad (3.74)$$

Es wird angenommen das $m_w = 0$, $m = 64.5 \text{ g}$, $g_z = 9.81 \text{ m/s}^2$ und jeder der vertikalen Aktoren 1/3 des Gewichtes aufnimmt. Es ergeben sich die Werte

$$u_{s0} = 0.57 \text{ V}, \quad \frac{\partial u_s(T)}{\partial T} \Big|_{T_0} = \alpha_u u_0 \in (0.13, 0.24) \text{ mV/K} \quad (3.75)$$

Der TK der Strommessung u_s beträgt im schlimmsten Fall 450 ppm/K und ist empfindlich gegenüber Temperaturschwankungen. Nach Angaben von MTAG wird die Temperaturabhängigkeit des Shunts bei herkömmlichen Wägezellen kompensiert. Die Reduktion des Einflusses der Strom-Kraftkonstanten w_e ohne Kompensation und Temperaturmessung ist Gegenstand aktueller Forschungen und Entwicklungen von MTAG.

Tabelle 3.3: Temperaturkoeffizienten und Nominalwerte (Angaben von MTAG)

AP $T_0 = 20^\circ\text{C}$	w_e	R_s
TK α	-350 [ppm/K]	± 100 [ppm/K]
Nominalwert	18.5 [N/A]	47 [Ω]

3.5.4 Sensitivität des Messprinzips auf Fehler in den Normalvektoren der Aktoren

Von MTAG wurde vermehrt das Interesse an einer quantitativen Beschreibung des Einflusses von Fehlern der Normalvektoren der Aktoren auf die Wägung bekundet. Die Fehler können bspw. durch die Fertigung oder die Montage auftreten. Eine quantitative Masszahl für den Wägefehler nach dem vorgeschlagenen Messprinzip von D. Reber, bei dem nur die Strommessung der vertikalen Aktoren für die Bestimmung des Wägeguts verwendet werden, konnte nicht gefunden werden. Anstelle dessen werden qualitative Ergebnisse abgeleitet. Nach Gleichung (3.55) gilt allgemein

$$m = \frac{1}{g_z} \left[\sum_{j=1}^6 n_{Azj} w_{ej} i_j \right] - m_w \quad (3.76)$$

Werden nur die Strommessungen der vertikalen Aktoren verwendet, entspricht dies

$$\tilde{m} = \frac{1}{g_z} \left[\sum_{j=1}^3 n_{Azj} w_{ej} i_j \right] - m_w \quad (3.77)$$

und für den Fehler folgt

$$\Delta m_w = m_w - \tilde{m}_w = -\frac{1}{g_z} \left[\sum_{j=4}^6 n_{Azj} w_{ej} i_j \right] \quad (3.78)$$

Es wird angenommen, dass die Parameter w_{ej} , n_{Azj} und g_z exakt bekannt sind. Eine Übertragung auf die kinematische Konfiguration des VC6 kann wie folgt gemacht werden.

Fehler in den Normalvektoren der vertikalen Aktoren

Im Nominalfall sind die Normalvektoren der vertikalen Aktoren $\underline{n}_{A1\dots 3}^T = [0 \ 0 \ 1]$. Mit Hilfe der Abweichungen der Δn_{Axj} für die x -Komponente und Δn_{Ayj} für die y -Komponente kann geschrieben werden

$$n_{Azj} = \sqrt{1 - \Delta n_{Axj}^2 - \Delta n_{Ayj}^2} \quad (3.79)$$

Anschaulich gesprochen, liegt der Normalvektor \underline{n}_{Aj} auf der positiven Einheitshalbkugel mit dem Zentrum am Ort \underline{r}_{Aj} . In der Nominallage $\underline{n}_{A1\dots 3}^T = [0 \ 0 \ 1]$ verschwindet der Gradient, weshalb $n_{Az1\dots 3}$ wenig empfindlich gegenüber Störungen ist. Gleichung (3.77) gilt weiterhin und folglich ändert auch der Fehler aus Gleichung (3.78) nicht. Durch das Zusammenfassen der Parameter

$$\tilde{w}_{ej} = w_{ej} \sqrt{1 - \Delta n_{Axj}^2 - \Delta n_{Ayj}^2}, \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad (3.80)$$

kann dies statisch gesehen auch als Feldschwächung der vertikalen Aktoren interpretiert werden.

Fehler in den Normalvektoren der horizontalen Aktoren

Die Normalvektoren der horizontalen Aktoren $\underline{n}_{A4\dots 6}^T$ liegen in der Nominallage in der (x, y) -Ebene. Abweichungen Δn_{Azj} der z -Komponente wirken entsprechend Gleichung (3.78) nach

$$\Delta m_w = -\frac{1}{g_z} \left[\sum_{j=4}^6 \Delta n_{Azj} w_{ej} i_j \right] \quad (3.81)$$

auf den Messfehler wobei der Strom gemäss

$$\underline{i} = -\underline{W}_e \underline{J}_A^{-T} \underline{f}_g \quad (3.82)$$

berechnet werden muss.

Bestimmung des Wägeguts über die Jacobi-Matrix der Aktoren

Eine alternative Vorgehensweise für die Bestimmung der Masse des Wägeguts ist es, die Jacobi-Matrix der Aktoren und alle Strommessungen zu verwenden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (m+m_w) \underline{g} \\ \underline{r}_w \times m_w \underline{g} \end{bmatrix}}_{\underline{f}_g} = - \underbrace{\begin{bmatrix} w_{e1} \underline{n}_{A1} & \dots & w_{e6} \underline{n}_{A6} \\ w_{e1} (\underline{r}_{A1} \times \underline{n}_{A1}) & \dots & w_{e6} (\underline{r}_{i6} \times \underline{n}_{A6}) \end{bmatrix}}_{\underline{J}_A^T \underline{W}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}}_{\underline{i}} \quad (3.83)$$

Sind die Größen m , \underline{J}_A^T , $\|\underline{g}\|_2$ und \underline{W}_e bekannt, kann mit Hilfe von Gleichung (3.83) das Wägegut m_w , der Richtungsvektor relativ zum Schwerpunkt \underline{r}_w , die Richtung des Gravitationsfeldes \underline{g} und somit die relative Verkippung des VC6 gegenüber dem Gravitationsfeld bestimmt werden.

An dieser Stelle drängt sich die Frage auf, wie die Matrix $\underline{J}_A^T \underline{W}_e$ einfach und genau bestimmt werden kann. Diese Fragestellung könnte bspw. in einer weiterführenden Arbeit thematisiert werden, soll aber nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein.

4 Positionsregelung

In nachfolgenden Kapitel werden die Systemanalyse und die Positionsregelung des FUMU1 thematisiert. In Bezug auf den Mehrgrößencharakter der Regelstrecke werden die Systemeigenschaften Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, statische Verstärkung, Null- und Polstellen diskutiert. Es wird dargestellt, wie der Amplitudengang von SISO-Systemen auf MIMO-Systeme verallgemeinert werden kann. Ein weiteres Augenmerk gilt der Kopplungsanalyse.

Das Wägeprinzip des VC6 basiert auf der statischen Kompensation der Gewichtskraft über die stromproportionalen Kräfte der Aktoren. Die sechs DOF der Wägeplattform werden über die positionsgeregelten Voice-Coil-Aktoren gebunden. Die Stellgrößen der Regelstrecke sind die über den Spulenwicklungen anliegende Spannung, die Regelgrößen sind die über die jeweiligen Fahnen gemessene Position der Spulen. Bei der Anwendung des Systems als Waage handelt es sich um eine Festwertregelung. Im Fokus steht deshalb das statische und dynamische Störverhalten. Die Aufgabe der Regelung besteht darin, während des Be- und Entladevorgangs der Waage mit dem Wägegut, die durch den Benutzer und die Gravitationskraft des Wägeguts verursachten Störungen dynamisch auszuregeln und während des Wägevorgangs die Gravitationskraft, verursacht durch das Wägegut, zu kompensieren.

In Kapitel 2 wurde ein lineares Modell der verkoppelten Dynamik von der Wägeplattform und den Aktoren erstellt, welches dem modellbasierten Entwurf einer dezentralen PID-T₁-Regelung für die Inbetriebnahme des FUMU1 zugrunde gelegt wird. Die weiteren Arbeitsschritte, also die experimentelle Modellbildung, der endgültige Reglerentwurf und die experimentelle Systemanalyse wurden in mehreren Iterationen durchgeführt. Das Vorgehen ist sinnbildlich in Abbildung 4.1 skizziert. Ein zentraler Punkt bei der experimentellen Systemanalyse und Modellbildung des FUMU1 ist, dass Messungen nur im Regelbetrieb durchgeführt werden können. Es ist zu berücksichtigen, dass nach der Inbetriebnahme des FUMU1 die Iteration über die erwähnten Arbeitsschritte ausgehend von einer stabilen Positionsregelung, über die experimentelle Modellbildung durchgeführt wurde. Das theoretische Modell wurde für das Systemverständnis herangezogen, jedoch nach der Inbetriebnahme nicht weiter für den Reglerentwurf verwendet. Das verwendete Prozessmodell stammt aus der experimentellen Modellbildung aus Kapitel 5. Für die experimentelle Modellbildung muss das System geeignet angeregt werden können, weshalb an dieser Stelle das Führungsverhalten in den Vordergrund tritt.

Für die Positionsregelung des VC6 werden zwei unterschiedliche Regelalgorithmen implementiert und experimentell auf deren Tauglichkeit untersucht, die Darstellung der Ergebnisse folgt in Kapitel 6.

- **Dezentrale PID-Regelung:** Die Tatsache, dass es sich bei der Strecke um ein Mehrgrößensystem handelt, muss nicht zwangsläufig auf eine Mehrgrößenregelung führen. Sind die Querkoppelnungen verhältnismäßig schwach, können bei n Stell- und Regelgrößen n Eingrößenregler eingesetzt werden. Das Problem des Entwurfs einer Mehrgrößenregelung reduziert sich auf den Entwurf von n Eingrößenreglern. Hinsichtlich der Stabilität müssen die Querkoppelnungen beim Entwurf der Regelung jedoch beachtet werden. Die erforderlichen Analyse- und Entwurfsverfahren stammen aus [Lun08b, Rai94, SP05, Mac89]. Die dezentrale Regelung kann nach [Rai94] als Urahn der

Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich angesehen werden. Dem Entwurf der Regelung wird das zeitkontinuierliche Modell aus Gleichung (A.3) zugrundegelegt.

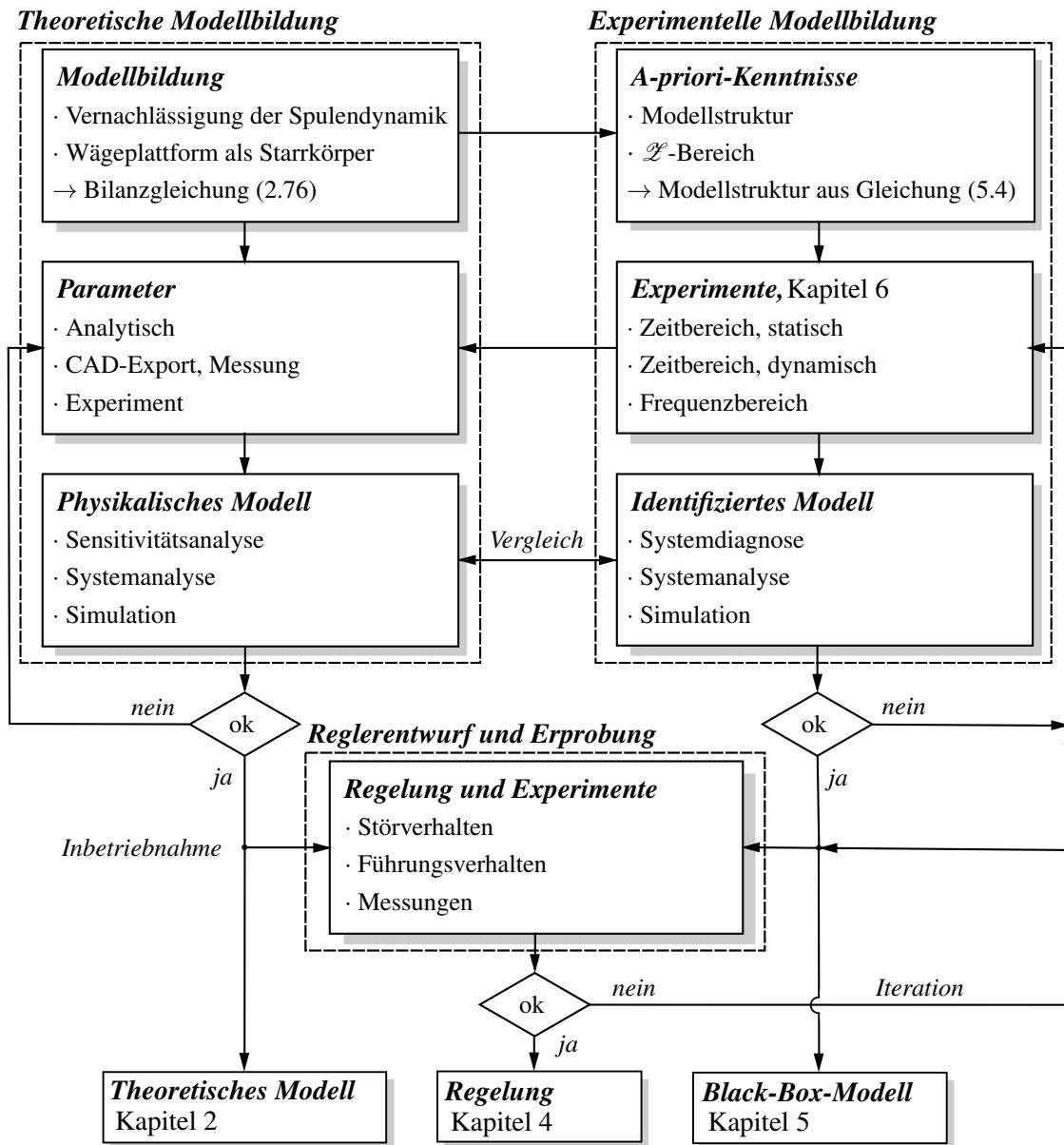


Abbildung 4.1: Skizze des prinzipiellen Vorgehens

- **MPC-Regelung:** Die MPC-Regelung zählt zu einer zukunftsweisenden Klasse der modellbasierten Regelungstechnik. Anders als bei herkömmlichen PID-Regelungen besteht das Grundkonzept einer prädiktiven Regelung darin, die Stellgröße aufgrund der in der Zukunft liegenden Systemausgänge zu bestimmen. Anhand der aktuellen Stellgröße und der aktuellen Systemzustände werden die in der Zukunft liegenden Systemausgänge über ein zeitdiskretes Modell der Regelstrecke präzidiert. Diese werden einem Optimierungsproblem zugrunde gelegt. Anhand dessen wird, die im Sinne des Gütfunktional optimale Stellgröße berechnet. Es wird mit einem zeitdiskreten Streckenmodell in Zustandsraumdarstellung gearbeitet, da sich dadurch die Prädiktion besonders einfach gestaltet. Des Weiteren können direkte Analogien zur optima-

len Zustandsregelung (LQR) gezogen werden. Grundkonzepte wie Rückführung, integrierende Regelung und Beobachtung bzw. Schätzung der nichtmessbaren Zustände sind Bestandteil der MPC-Regelung. Bei der MPC-Regelung handelt es sich um eine Zusammenstellung aus den Werken [Din10, Ros03, Wan09, Mac02, DP04, LM11, BBM10] und es wird mit dem identifizierten Modell aus Gleichung (A.4) gearbeitet.

4.1 Systemtheorie für die Regelung von Mehrgrössensystemen

Die Systemtheorie für die Regelung von Mehrgrössensystemen stammt im Wesentlichen aus den Werken [Lun08b, Rai94, SP05, Gee04].

4.1.1 Beschreibungsformen für dynamische Mehrgrössensysteme

Zustandsraumdarstellung

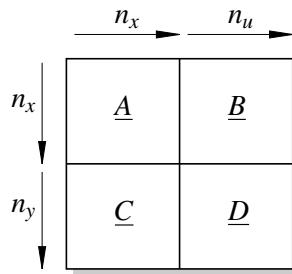


Abbildung 4.2: Dimensionen eines Zustandsraummodells

Ein LTI-System lässt sich im Zustandsraum durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{x} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} & \underline{A} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_u)} \\ \underline{y} &= \underline{C} \underline{x} + \underline{D} \underline{u} & \underline{C} \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_x)}, \underline{D} \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_u)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

bzw. durch das zeitdiskrete Äquivalent

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \underline{A}_d \underline{x}(k) + \underline{B}_d \underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) &= \underline{C}_d \underline{x}(k) + \underline{D}_d \underline{u}(k) \end{aligned} \quad (4.2)$$

beschreiben.

Übertragungsmatrix

Die Übertragungsmatrix, welche das Ein-Ausgangsverhalten des Zustandsraummodells aus Gleichungen (4.1) beschreibt lässt sich nach

$$\underline{G}(s) = \underline{C} (s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \quad (4.3)$$

bestimmen. Die zugehörige statische Verstärkung für $s = 0$ lässt sich durch

$$\underline{K}_s = \underline{G}(s)|_{s=0} = \underline{C} \underline{A}^{-1} \underline{B} + \underline{D} \quad (4.4)$$

schreiben. Im zeitdiskreten Fall lautet die diskrete Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(z) = \underline{C}_d (z \underline{I} - \underline{A}_d)^{-1} \underline{B}_d + \underline{D}_d \quad (4.5)$$

Für die statische Verstärkung bei $z = 1$ folgt

$$\underline{K}_d = \underline{G}(z) \Big|_{z=1} = \underline{C}_d (\underline{I} - \underline{A}_d)^{-1} \underline{B}_d + \underline{D}_d \quad (4.6)$$

4.1.2 Richtungsabhängige Verstärkung

Für SISO-Systeme beschreibt der Amplitudengang $|G(j\omega)|$ die frequenzabhängige Verstärkung des Systemeingangs $|u|$ auf den Systemausgang $|y|$ und es gilt die Beziehung

$$|G(j\omega)| = \frac{|y|}{|u|} \quad (4.7)$$

In den folgenden Ausführungen wird dargestellt, wie der Amplitudengang auf MIMO-Systeme verallgemeinert werden kann. Wie in Abschnitt 3.2.1 bereits angesprochen ist die Singulärwertzerlegung auch für komplexe Matrizen definiert. Die Frequenzgangmatrix $\underline{G}(j\omega)$ kann bei $n = n_u = n_y$ Ein- und Ausgängen in die Form

$$\underline{G}(j\omega) = \underline{U} \underline{S} \underline{V}^T, \quad \text{wobei } \underline{U}, \underline{V} \in \mathbb{C}^{(n \times n)}, \underline{S} \in \mathbb{R}^{(n \times n)} \quad (4.8)$$

zerlegt werden. Die Überlegungen zur richtungsabhängigen Verstärkung aus Abschnitt 3.2.1 gelten für

$$\underline{G}(j\omega) \underline{V} = \underline{U} \underline{S}^T \iff \underline{G}(j\omega) v_i = \sigma_i u_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.9)$$

in gleicher Art und Weise. Für die Verallgemeinerung des Amplitudengangs auf MIMO Systeme drängt sich die Frage auf, wie der Eingang $\|\underline{u}\|_2$ maximal bzw. minimal auf den Ausgang $\|\underline{y}\|_2$ in Abhängigkeit der Frequenz verstärkt wird. Man kann zeigen, dass

$$\sigma_{\max}(\underline{G}(j\omega)) = \max_{\|\underline{u}\|_2 \neq 0} \frac{\|\underline{G}(j\omega) \underline{u}\|_2}{\|\underline{u}\|_2} \quad (4.10a)$$

$$\sigma_{\min}(\underline{G}(j\omega)) = \min_{\|\underline{u}\|_2 \neq 0} \frac{\|\underline{G}(j\omega) \underline{u}\|_2}{\|\underline{u}\|_2}, \quad \text{wobei } \|\underline{G}(j\omega) \underline{u}\|_2 = \|\underline{y}\|_2 \quad (4.10b)$$

gilt [Rai94]. Der maximale und minimale Singularwert beschreibt in Abhängigkeit der Frequenz die obere und untere Grenze der richtungsabhängigen Verstärkung gemäss

$$\sigma_{\min}(\underline{G}(j\omega)) \leq \frac{\|\underline{y}\|_2}{\|\underline{u}\|_2} \leq \sigma_{\max}(\underline{G}(j\omega)) \quad (4.11)$$

Die frequenzabhängige Konditionszahl

$$\gamma = \frac{\sigma_{\max}(\underline{G}(j\omega))}{\sigma_{\min}(\underline{G}(j\omega))} \quad (4.12)$$

ist ein Mass für die Ein-Ausgangssteuerbarkeit [SP05]. Für nichtsinguläre Matrizen gilt ferner $\gamma = \sigma_{\max}(\underline{G}(j\omega)) \sigma_{\max}(\underline{G}^{-1}(j\omega))$. Die Konditionszahl γ ist stark von der Ein- und Ausgangsskalierung des Systems abhängig, vergl. dazu nachfolgenden Abschnitt 4.1.3.

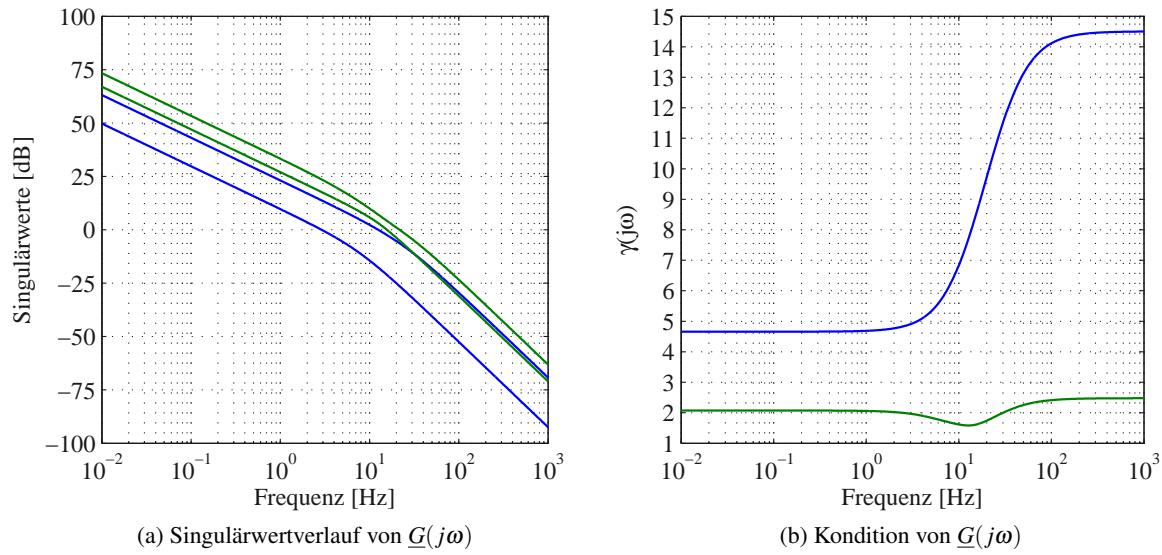


Abbildung 4.3: Singulärwertverlauf und Kondition des identifizierten, zeitkontinuierlichen Modells der Regelstrecke in Abhängigkeit der Frequenz, blau: unskaliertes System, grün: skaliertes System aus Anhang [A.2]

4.1.3 Skalierung von Mehrgrössensystemen

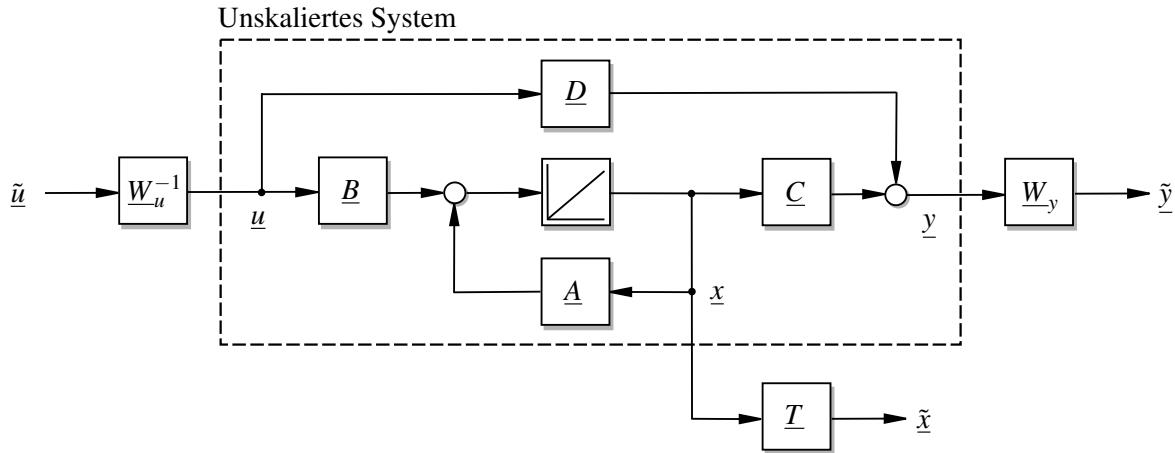


Abbildung 4.4: Erweitertes Blockschaltbild

Zustandsraumdarstellung

Durch die theoretische Modellbildung sind Zustandsraummodelle oftmals physikalischer Natur und die Eingangs-, Zustands- und Ausgangsvariablen sind durch Einheiten behaftet. In Bezug auf die Mehrgrössenregelung wird in den Werken [Gee04, All09b, SP05] empfohlen das Zustandsraummodell zu skalieren.

$$\tilde{x} = \underline{T}_x \underline{x}, \quad \tilde{u} = \underline{W}_u u, \quad \tilde{y} = \underline{W}_y y \quad (4.13)$$

Die Wichtungsmatrizen werden so gewählt, dass die transformierten Eingang-, Zustands- und Ausgangsvariablen dimensionslos und im Bereich ± 1 ausfallen.

$$\begin{aligned}\underline{T}_x &= \text{diag}([1/x_{\max,1} \ 1/x_{\max,2} \dots 1/x_{\max,n_x}]), & \underline{T}_x &\in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)} \\ \underline{W}_u &= \text{diag}([1/u_{\max,1} \ 1/u_{\max,2} \dots 1/u_{\max,n_u}]), & \underline{W}_u &\in \mathbb{R}^{(n_u \times n_u)} \\ \underline{W}_y &= \text{diag}([1/y_{\max,1} \ 1/y_{\max,2} \dots 1/y_{\max,n_y}]), & \underline{W}_y &\in \mathbb{R}^{(n_y \times n_y)}\end{aligned}\quad (4.14)$$

Einsetzen der Gleichungen (4.13) in die Gleichungen (4.1) führt auf

$$\frac{d}{dt} \tilde{x} = \underbrace{\underline{T}_x \underline{A} \underline{T}_x^{-1}}_{\tilde{A}} \tilde{x} + \underbrace{\underline{T}_x \underline{B} \underline{W}_u^{-1}}_{\tilde{B}} \tilde{u} \quad (4.15)$$

$$\tilde{y} = \underbrace{\underline{W}_y \underline{C} \underline{T}_x^{-1}}_{\tilde{C}} \tilde{x} + \underbrace{\underline{W}_y \underline{D} \underline{W}_u^{-1}}_{\tilde{D}} \tilde{u} \quad (4.16)$$

Das Quadrupel $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D})$ wird über die Transformationsvorschrift

$$(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}) \longrightarrow (\underline{T}_x \underline{A} \underline{T}_x^{-1}, \underline{T}_x \underline{B} \underline{W}_u^{-1}, \underline{W}_y \underline{C} \underline{T}_x^{-1}, \underline{W}_y \underline{D} \underline{W}_u^{-1}) \quad (4.17)$$

von den ursprünglichen Größen $(\underline{x}, \underline{u}, \underline{y})$ in die dimensionslosen Größen $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{y})$ transformiert. Die Transformation gilt in gleicher Weise für die zeitdiskrete Formulierung aus Gleichung (4.2).

Übertragungsmatrix

Das Ein-Ausgangsverhalten wird durch die Zustandstransformation nicht verändert. Dies lässt sich einfach durch Einsetzen der Gleichungen (4.3) und (4.5) in die Gleichungen (4.17) überprüfen. Die skalierten zeitkontinuierlichen bzw. zeitdiskreten Übertragungsmatrizen lassen sich durch

$$\tilde{G} = \underline{W}_y \underline{G} \underline{W}_u^{-1} \quad (4.18)$$

bestimmen.

4.1.4 Steuer- und Beobachtbarkeit

Steuerbarkeitskriterium nach Hautus

Das System $(\underline{A}, \underline{B})$ ist genau dann vollständig steuerbar, wenn

$$\text{Rang} \left(\lambda_i \underline{I} - \underline{A} \quad \underline{B} \right) = n_x, \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (4.19)$$

für alle Eigenwerte λ_i der Matrix \underline{A} erfüllt ist. Der Vorteil des Hautus-Kriteriums für die Steuerbarkeit liegt darin, dass falls Gleichung (4.19) für einen Eigenwert λ_i nicht erfüllt ist, dieser Eigenwert nicht steuerbar ist. Es handelt sich um eine sogenannte Eingangsentkopplungsnullstelle. Die Eingangsentkopplungsnullstellen sind diejenigen Frequenzen λ_i , deren zugehörige Eigenvorgänge nicht durch die Stellgrösse \underline{u} beeinflusst werden können. Die nicht steuerbaren Eigenwerte λ_i kommen deshalb nicht als Pole in der Übertragungsmatrix \underline{G} vor.

Das Steuerbarkeitskriterium ist für das lineare Modell des VC6 sowie für das identifizierte Modell aus den Gleichungen (A.4) und (A.3) erfüllt.

Beobachtbarkeitskriterium nach Hautus

Das System $(\underline{A}, \underline{C})$ ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda_i \underline{I} - \underline{A} \\ \underline{C} \end{pmatrix} = n_x, \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (4.20)$$

für alle Eigenwerte λ_i der Matrix \underline{A} erfüllt ist. Wiederum gilt, dass falls Gleichung (4.20) für einen Eigenwert λ_i nicht erfüllt ist, dieser Eigenwert nicht beobachtbar ist. Es handelt sich somit um eine Ausgangsentkopplungsnullstelle. Die Ausgangsentkopplungsnullstellen sind diejenigen Frequenzen λ_i , deren zugehörige Eigenvorgänge nicht durch die Regelgröße y beobachtet werden können. Die nicht beobachtbaren Eigenwerte λ_i kommen nicht als Pole in der Übertragungsmatrix \underline{G} vor.

Das Beobachtbarkeitskriterium ist für das lineare Modell des VC6 sowie für das identifizierte Modell aus den Gleichungen (A.4) und (A.3) erfüllt.

Minimale Realisierung

Bei den betrachteten Modellen handelt es sich um eine nicht sprungfähige Minimalrealisierung. Nach Definition ist ein nicht sprungfähiges LTI-System $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D} = 0)$ genau dann minimal, also eine minimale Realisierung von \underline{G} , wenn das Tupel $(\underline{A}, \underline{B})$ steuerbar und das Tupel $(\underline{A}, \underline{C})$ beobachtbar, sowie die Gleichung (4.3) bzw. (4.5) erfüllt ist.

4.1.5 Pol- und Nullstellen

Die Klassifizierung von MIMO-Systemen geschieht analog zu SISO-Systemen über die statische Verstärkung, Null- und Polstellen.

Nullstellen

Die Nullstellen von MIMO-Systemen werden in drei Hauptklassen unterteilt.

1. Übertragungsnnullstellen, 2. Entkoppelungsnnullstellen, 3. Invariante Nullstellen

Und es gilt: *Invariante Nullstellen* = *Übertragungsnnullstellen* \cup *Entkoppelungsnnullstellen*

Wie bereits erwähnt, ist das theoretische Modell des VC6 sowie das identifizierte Modell des FU-MU1 vollständig steuer- und beobachtbar. Die Modelle weisen keine Entkoppelungsnnullstellen auf. Die Anzahl der Übertragungsnnullstellen stimmt folglich mit der Anzahl der invarianten Nullstellen überein. Die Übertragungsnnullstellen des Systems sind diejenigen Frequenzen s bzw. z , für welche die Übertragungsmatrix die Bedingung

$$\det(\underline{G}(s)) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \det(\underline{G}(z)) = 0 \quad (4.21)$$

erfüllt. Das linearisierte Modell des VC6, vom Eingang Spannung zum Ausgang Position kann auch als Serieschaltung von der Übertragungsmatrix vom Eingang Spannung zum Ausgang Geschwindigkeit und einem Integrator gemäss

$$\underline{G}_{q_{su}}(s) = \frac{1}{s} \underline{G}_{\dot{q}_{su}}(s), \quad \underline{G}_{\dot{q}_{su}}(s) = \frac{w_e}{R} \left(s \underline{J}_A^{-T} \underline{M} \underline{J}_S^{-1} + \underline{J}_A \underline{J}_S^{-1} \frac{k_m w_e}{R} \right)^{-1} \quad (4.22)$$

geschrieben werden. Einsetzen in die Bedingung (4.21) führt auf

$$\det(\underline{G}_{q_{su}}(s)) = \left(\frac{w_e}{s R} \right)^6 \frac{1}{\det \left(s \underline{J}_A^{-T} \underline{M} \underline{J}_S^{-1} + \underline{J}_A \underline{J}_S^{-1} \frac{k_m w_e}{R} \right)} \quad \text{Theoretisches Modell} \quad (4.23)$$

In gleicher Weise kann man zeigen, dass für das zeitkontinuierliche, identifizierte Modell aus Gleichung (5.2)

$$\det(\underline{G}_{qsu}(s)) = \frac{1}{s^6} \frac{\det(\tilde{\underline{B}})}{\det(s\underline{I} - \tilde{\underline{A}})} \quad \text{Identifiziertes Modell} \quad (4.24)$$

gilt, [Lun08b]. Da in den Zählern eine Konstante steht, existiert kein s für welches Gleichung (4.23) oder (4.24) verschwindet. Daraus lässt sich schliessen, dass die Systeme keine Übertragungsnullstellen und somit auch keine invarianten Nullstellen aufweisen.

Zusammenfassend lässt sich folgern, dass das linearisierte Modell des VC6 sowie das identifizierte Modell keine Nullstellen aufweist und minimalphasig ist.

Polstellen

Die Obermenge der Polstellen wird in [Rai94] und [Sva11] als Systempole bezeichnet und ist in Zustandsraumdarstellung gegeben durch die Eigenwerte der Systemmatrix $\underline{\lambda}(\underline{A})$. Die Systempole sind die Vereinigungsmenge von: *Systempole* = *Polstellen* \cup *Entkoppelungsnullstellen*

Für ein vollständig steuer- und beobachtbares System stimmt die Menge der Polstellen mit den Eigenwerten der Systemmatrix \underline{A} überein.

4.1.6 Einzelübertragungsfunktionen

Davon ausgehend, dass das zeitkontinuierliche Modell (A.3) vom Eingang Spannung zum Ausgang Geschwindigkeit $\underline{G} \cong (\tilde{\underline{A}}, \tilde{\underline{B}}, \underline{I})$ aus Gleichung (A.1) diagonalisierbar ist, kann die Übertragungsmatrix zum Ausgang Position über

$$\underline{G}(s) = s^{-1} (s\underline{I} - \tilde{\underline{A}})^{-1} \tilde{\underline{B}} = s^{-1} \underline{\tilde{C}} (s\underline{I} - \text{diag } \underline{\Delta})^{-1} \tilde{\underline{B}} \quad (4.25)$$

und die Einzelübertragungsfunktion anhand von

$$G_{ij}(s) = \frac{1}{s} \frac{\underline{\tilde{c}}_i^T \text{adj}(s\underline{I} - \text{diag } \underline{\Delta}) \underline{\tilde{b}}_j}{\det(s\underline{I} - \text{diag } \underline{\Delta})} \quad (4.26)$$

berechnet werden, vergl. Abschnitt 3.4.4. In Diagonalform gestaltet sich die Berechnung der Determinante

$$\det(s\underline{I} - \text{diag } \underline{\Delta}) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) \quad (4.27)$$

und insbesondere die Berechnung der adjungierten Matrix

$$\text{adj}(s\underline{I} - \text{diag } \underline{\Delta}) = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \prod_{i=1, i \neq 1}^n (s - \lambda_i) & \prod_{i=1, i \neq 2}^n (s - \lambda_i) & \dots & \prod_{i=1, i \neq n}^n (s - \lambda_i) \end{bmatrix} \right) \quad (4.28)$$

besonders einfach. Über die V-kanonische Normalform

$$\dot{\underline{x}}_m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \underline{x}_m + \begin{bmatrix} \underline{\tilde{b}}_1 \dots \underline{\tilde{b}}_n \end{bmatrix} \underline{u} \quad (4.29a)$$

$$\dot{\underline{q}}_S = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{c}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{c}}_n^T \end{bmatrix} \underline{x}_m \quad (4.29b)$$

können interessante Rückschlüsse von den Eigenwerten λ_i auf die Polstellen der Einzelübertragungsfunktion $G_{ij}(s)$ gezogen werden. Der Spaltenvektor \underline{b}_j beschreibt wie der Eingang j auf die Moden x_m und der Zeilenvektor \underline{c}_i^T beschreibt wie die Moden x_m auf den Ausgang i wirken. Die Rückschlüsse lauten wie folgt:

- Ist ein Eintrag \bar{b}_{ij} des Eingangsspaltenvektors \underline{b}_j gleich Null, dann ist der zugehörige Eigenwert λ_i nicht über den Eingang j steuerbar und tritt somit nicht als Polstelle in den Übertragungsfunktionen $G_{ij}(s) \forall i$ auf.
- Ist ein Eintrag \bar{c}_{ij} des Ausgangsspaltenvektors \underline{c}_i^T gleich Null, dann ist der zugehörige Eigenwert λ_j nicht über den Ausgang i beobachtbar und tritt somit nicht als Polstelle in den Übertragungsfunktionen $G_{ij}(s) \forall j$ auf.

Da in der Gleichung (4.26) prinzipiell alle Eigenwerte als potentielle Polstellen der Übertragungsfunktion $G_{ij}(s)$ auftreten, impliziert dies, dass die nicht steuerbaren bzw. nicht beobachtbaren Eigenwerte λ_i gegen potentielle Nullstellen von $G_{ij}(s)$ gekürzt werden. Über diese Beziehungen können die Polstellen der Einzelübertragungsfunktionen des theoretischen Modells in V-kanonischer Darstellung in Gleichung (3.46) direkt abgelesen werden.

4.1.7 Stabilität

Eine hinreichende Bedingung für die Ein- Ausgangsstabilität von

$$\underline{G}(s) = \underline{C}(s \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \quad (4.30)$$

ist, wenn alle Eigenwerte der Matrix \underline{A} in der linken komplexen Halbebene liegen.

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i(\underline{A})\} < 0 \quad \forall i \quad (4.31)$$

Diese Bedingung schliesst ein, dass das System asymptotisch stabil ist. Für das zeitdiskrete Äquivalent

$$\underline{G}(z) = \underline{C}_d(z \underline{I} - \underline{A}_d)^{-1} \underline{B}_d + \underline{D}_d \quad (4.32)$$

lautet die Bedingung

$$|\lambda_i(\underline{A}_d)| < 1 \quad \forall i \quad (4.33)$$

Die Untermatrizen des theoretischen Modells aus Gleichung (3.34) sowie der identifizierten Modelle aus den Gleichungen (A.3) und (A.4) sind von Eingang \underline{u} zum Ausgang Geschwindigkeit \underline{q}_s asymptotisch stabil. Auf den Ausgang Position \underline{q}_s weisen die Gesamtsysteme sechs asymptotisch stabile Polstellen und sechs Polstellen bei $s = 0$ bzw. $z = 1$ (Integratorn) auf.

4.1.8 Kopplungsmasse

Kopplungsmatrix

Ein empirisches Kopplungsmass, welches das statische Verhalten der Regelstrecke wiedergibt, bezieht sich auf die statische Verstärkung \underline{K}_s aus Gleichung (4.4). Die Elemente der Matrix \underline{K}_s werden quadriert

und anschliessend mit dem grössten dabei entstehenden Element normiert, [Lun08b].

$$\underline{\tilde{K}}_S := \frac{1}{k_{Si,j,\max}^2} \begin{bmatrix} k_{S1,1}^2 & k_{S1,2}^2 & \dots & k_{S1,n_u}^2 \\ k_{S2,1}^2 & k_{S2,2}^2 & \dots & k_{S2,n_u}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{Sn_y,1}^2 & k_{Sn_y,2}^2 & \dots & k_{Sn_y,n_u}^2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Somit sind alle Elemente nichtnegativ und liegen im Wertebereich zwischen null und eins. Anhand der relativen Grösse des Eintrags \tilde{K}_{ii} zu \tilde{K}_{ij} mit $j \neq i$ lässt sich der statische Beitrag der Stellgrössen \underline{u}_j auf die Regelgrösse \underline{y}_i ablesen. Die Kopplungsmatrix vom Eingang \underline{u} zu der Geschwindigkeit \underline{q}_S entsprechend Gleichung (A.3) ist

$$\underline{\tilde{K}}_s = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0010 & 0.0036 & 0.0005 & 0.0000 & 0.0015 \\ 0.0310 & 0.8207 & 0.0051 & 0.0002 & 0.0062 & 0.0009 \\ 0.0002 & 0.0015 & 0.8505 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0011 & 0.0535 & 0.0015 & 0.0003 \\ 0.0014 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0026 & 0.0697 & 0.0007 \\ 0.0004 & 0.0004 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0008 & 0.0661 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Statisch besteht nahezu keine Koppelung.

Relative Verstärkungsmatrix

Ein weiteres empirisches Kopplungsmass stellt die Relative Verstärkungsmatrix $RGA(\underline{G})$ dar. Für quadratische, nichtsinguläre Übertragungsfunktionen \underline{G} ist diese definiert als

$$RGA(\underline{G}) := \underline{G} \times (\underline{G}^{-1})^T \quad (4.36)$$

wobei \times die elementweise Multiplikation beschreibt¹. Die Relative Verstärkungsmatrix hat nachfolgenden Eigenschaften:

- (i) Sie ist unabhängig von Ein- und Ausgangsskalierungen.
- (ii) Die Zeilen- und Spaltensumme ist gleich eins.

Je schwächer die Paare (u_j, y_i) mit $i \neq j$ verkoppelt sind, sprich je besser sich die Regelstrecke für einschleifige Regelkreise eignet, desto mehr ähnelt die Matrix $RGA(\underline{G})$ der Einheitsmatrix, weshalb diese auch dazu verwendet wird, zu entscheiden welche Stellgrösse mit welcher Regelgrösse gepaart werden soll. Werden einschleifige Regelstrukturen eingesetzt, entspricht ein Umstellen der Spalten von \underline{G} einer Neuzuordnung von Stell- zu Regelgrössen.

Als zweckmässige Richtwerte für die Beurteilung der Koppelungen können Frequenzen im Bereich $\omega = 0$ (statisch) und Werte in der Nähe der Streckenbandbreite betrachtet werden. Auch kann der Verlauf des Betrages des $RGA(\underline{G})$ in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt und beurteilt werden [Lun08b]. Bei $\omega = 2\pi f$ und $f = 10$ Hz beträgt die relative Verstärkungs-Matrix vom Eingang \underline{u} zu der Position q_S des

¹ Hadamar- oder Schur-Produkt

identifizierten, zeitkontinuierlichen Models aus Gleichung (A.3)

$$|\text{RGA}(\underline{G})| = \begin{bmatrix} 0.9917 & 0.0166 & 0.0075 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0051 \\ 0.0152 & 0.9790 & 0.0091 & 0.0008 & 0.0018 & 0.0023 \\ 0.0097 & 0.0075 & 0.9963 & 0.0003 & 0.0005 & 0.0002 \\ 0.0005 & 0.0004 & 0.0009 & 0.9777 & 0.0303 & 0.0087 \\ 0.0005 & 0.0031 & 0.0008 & 0.0323 & 0.9596 & 0.0136 \\ 0.0041 & 0.0032 & 0.0002 & 0.0127 & 0.0112 & 0.9996 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Wiederum zeigt sich die verhältnismässig schwache Verkoppelung. Zudem kann davon ausgegangen werden, dass die Stell- und Regelgrössen richtig zugeordnet sind.

Nach [SP05] ist die Maximumsnorm $\|\text{RGA}(\underline{G}(j\omega))\|_\infty$ sehr nahe an der Konditionszahl

$$\gamma^* = \text{cond}_2 (\underline{W}_y^* \underline{G}(j\omega) \underline{W}_u^{-1*}) = \arg \min_{\underline{W}_u, \underline{W}_y} \left\{ \frac{\sigma_{\max}(\tilde{\underline{G}}(j\omega))}{\sigma_{\min}(\tilde{\underline{G}}(j\omega))} \right\} \quad (4.38)$$

mit den optimalen Wichtungsmatrizen \underline{W}_u^{-1*} und \underline{W}_y^* .

In Abbildung 4.5 ist der Betrag sowie die Maximumsnorm der relativen Verstärkungsmatrix in Abhängigkeit der Frequenz abgebildet. Es zeigt sich einerseits, die schwache Koppelung über den interessierenden Frequenzbereich bis 1000 Hz und andererseits, dass die Gewichtung des skalierten Modells aus Gleichung (A.4) als geeignet eingestuft werden kann, vergl. Abbildung 4.3.

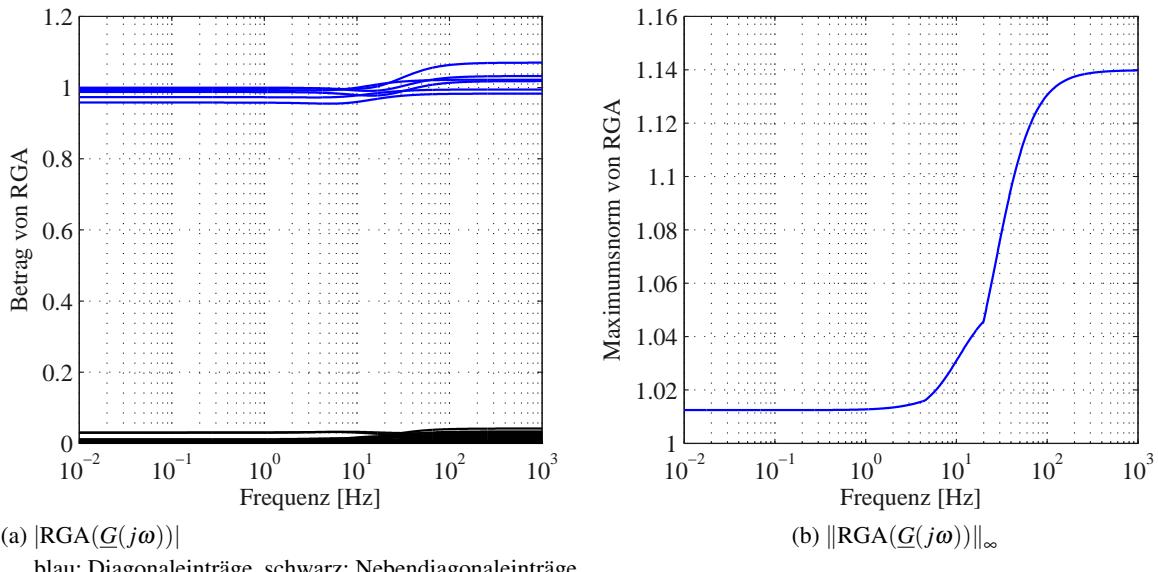


Abbildung 4.5: Betrag und Kondition der relativen Verstärkungs-Matrix in Abhängigkeit der Frequenz

Diagonaldominanz

Die quadratische Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ mit der Dimension $(n \times n)$ ist zeilendominant wenn

$$|G_{ii}(s)| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |G_{ij}(s)| \quad (4.39)$$

und spaltendominant, wenn

$$|G_{ii}(s)| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |G_{ji}(s)| \quad (4.40)$$

Die Matrix $\underline{G}(s)$ ist diagonaldominant, wenn sie zeilen- oder spaltendominant ist. Zur Prüfung der Zeilen- und Spaltendominanz können die summierten Amplitudengänge entsprechend den Gleichungen (4.39) und (4.40) mit den Amplitudengängen der Diagonaleinträge verglichen werden.

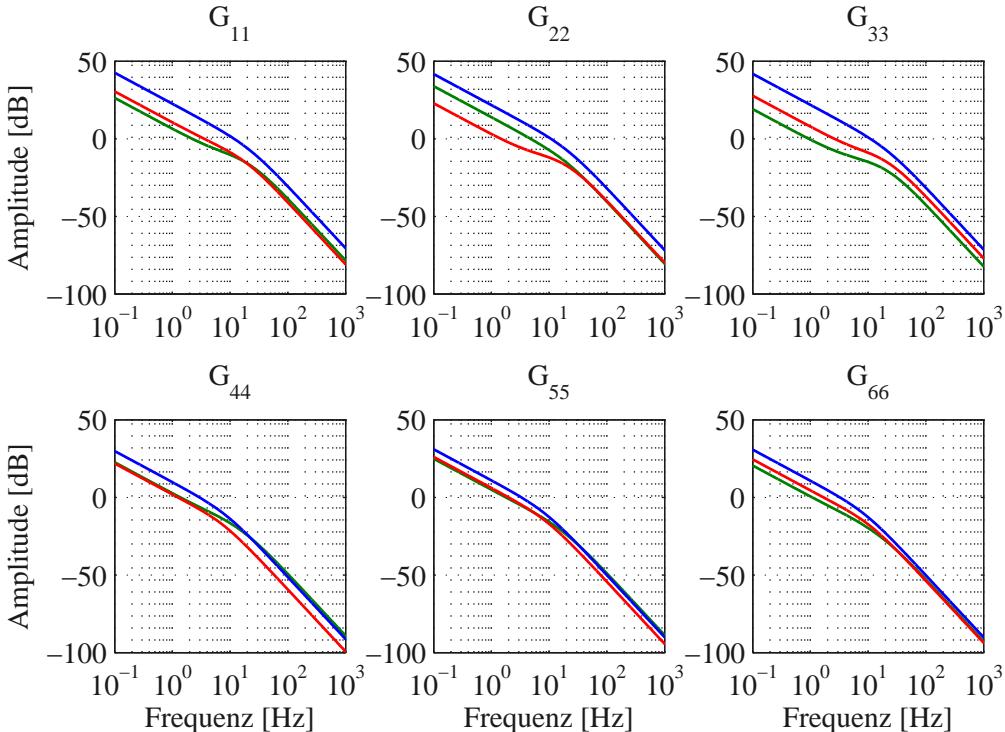


Abbildung 4.6: Überprüfung der Diagonaldominanz des identifizierten Modells

blau: $|G_{ii}(j\omega)|$, grün: $\sum_{j=1, j \neq i}^n |G_{ij}(j\omega)|$, rot: $\sum_{j=1, j \neq i}^n |G_{ji}(j\omega)|$

In Abbildung 4.6 sind die Amplitudengänge der Diagonaleinträge $|G_{ii}(j\omega)|$ zusammen mit der Summe für Zeilendominanz nach Gleichung (4.39) und der Summe für Spaltendominanz entsprechend Gleichung (4.40) des identifizierten, zeitkontinuierlichen Modells eingezeichnet. Die Regelstrecke ist folglich Diagonaldominant.

Die Diagonaldominanz sichert die schwache Verkoppelung der Regelstrecke über den gesamten Frequenzbereich und ist nach [Lun08b] eine Grundvoraussetzung für den Einsatz einer dezentralen Regelung.

4.1.9 Anforderungen an den Standartregelkreises im nominellen Fall

In Abbildung 4.7 ist der lineare Standartregelkreis für Mehrgrößensysteme abgebildet [All09a]. u bezeichnet die Stellgröße, y die Regelgröße, e den Regelfehler, z_1 Störungen am Streckeneingang, z_2 Störungen am Streckenausgang und η das Messrauschen.

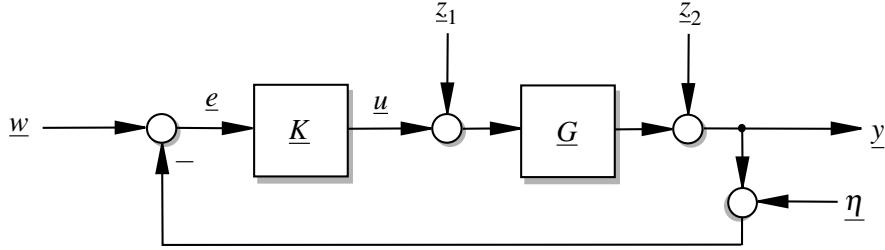


Abbildung 4.7: Standardregelkreis

Die Regelgröße \underline{y} wird über die Eingänge $\underline{w}, \underline{z}_1, \underline{z}_2$ und $\underline{\eta}$ beeinflusst.

$$\underline{y} = (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \underline{G} \underline{K} \underline{w} + (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \underline{G} \underline{z}_1 + (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \underline{z}_2 - (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \underline{G} \underline{K} \underline{\eta} \quad (4.41)$$

beschreibt die Dynamik des linearen Regelkreises vollständig. Mit den Abkürzungen

$$\underline{S} = (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \quad \text{Sensitivitätsmatrix} \quad (4.42a)$$

$$\underline{T} = (\underline{I} + \underline{G} \underline{K})^{-1} \underline{G} \underline{K} \quad \text{komplementäre Sensitivitätsmatrix} \quad (4.42b)$$

kann geschrieben werden

$$\underline{y} = \underline{T} \underline{w} + \underline{S} \underline{G} \underline{z}_1 + \underline{S} \underline{z}_2 - \underline{T} \underline{\eta} \quad (4.43a)$$

\underline{T} beschreibt die Führungsübertragungsfunktion der Führungsgröße \underline{w} sowie die Übertragungsfunktion vom Eingang des Messrauschens $\underline{\eta}$, $\underline{S} \underline{G}$ die Störübertragungsfunktion von Störeingang \underline{z}_1 und \underline{S} die Störübertragungsfunktion von Störeingang \underline{z}_2 auf die Regelgröße \underline{y} . Beim Standartregelkreis wird das Messrauschen, abgesehen vom Vorzeichen, in genau gleicher Weise auf die Regelgröße übertragen wie die Führungsgröße. Als Fundamentaldilemma der Regelungstechnik wird die Tatsache bezeichnet, dass

$$\underline{S} + \underline{T} = \underline{I} \quad (4.44)$$

Offensichtlich lässt sich das Führungs- und das Störverhalten nicht unabhängig voneinander einstellen. Durch Einsetzen von Gleichung (4.43a) in $\underline{e} = \underline{w} - \underline{y}$ folgt für den Regelfehler

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \underline{S} \underline{w} - \underline{S} \underline{G} \underline{z}_1 - \underline{S} \underline{z}_2 + \underline{T} \underline{\eta} \\ &= \underline{e}_w + \underline{e}_{z_1} + \underline{e}_{z_2} + \underline{e}_{\eta} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Führungs- und Störverhalten

Aufgrund der Richtungsabhängigkeit der Übertragungsmatrizen werden die Anforderungen an den Regelkreis für MIMO-Systeme über die Spektralnorm definiert [Rai94]. Der maximale Regelfehler $\|\underline{e}_w\|_2 = \|\underline{S}(j\omega) \underline{w}\|_2$ ist durch

$$\max_{\|\underline{w}\|_2 \neq 0} \frac{\|\underline{S}(j\omega) \underline{w}\|_2}{\|\underline{w}\|_2} = \sigma_{\max}(\underline{S}(j\omega)) \quad (4.46)$$

definiert und es gilt

$$\|\underline{e}_w\|_2 \leq \sigma_{\max}(\underline{S}(j\omega)) \|\underline{w}\|_2 \quad (4.47)$$

Bei einer Sollwertänderung soll der Regelfehler $\|\underline{e}_w\|_2$ für den Führungsbereich $\Omega = (0, \omega_f)$ klein sein. Die Anforderung für gutes Führungsverhalten kann deshalb über

$$\sigma_{\max}(\underline{S}(j\omega)) \ll 1 \quad \text{für } \omega \in \Omega \quad (4.48)$$

formuliert werden. In gleicher Weise können die Beziehungen

$$\|\underline{e}_{z1}\|_2 \leq \sigma_{\max}(\underline{S}(j\omega) \underline{G}(j\omega)) \|\underline{z}_1\|_2 \quad (4.49a)$$

$$\|\underline{e}_{z2}\|_2 \leq \sigma_{\max}(\underline{S}(j\omega)) \|\underline{z}_2\|_2 \quad (4.49b)$$

hergeleitet werden. Weshalb für Störungen am Streckeneingang weiter gefordert werden muss

$$\sigma_{\max}(\underline{S}(j\omega) \underline{G}(j\omega)) \ll 1 \quad \text{für } \omega \in \Omega \quad (4.50)$$

um gutes Führungsverhalten über den Bereich Ω zu erhalten. Die Bedingung für einen verschwindenden, statischen Regelfehler lautet bei Vernachlässigung des Messrauschen $\underline{\eta} = 0$

$$\sigma_{\max}(\underline{S}(0)) = \sigma_{\max}(\underline{S}(0) \underline{G}(0)) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.51)$$

Unterdrückung des Messrauschen

Über den maximalen Messfehler $\|\underline{e}_\eta\|_2 = \|\underline{T}(j\omega) \underline{\eta}\|_2$ kann analog eine obere Grenze für den frequenz-abhängigen Messfehler gemäss

$$\|\underline{e}_\eta\|_2 \leq \sigma_{\max}(\underline{T}(j\omega)) \|\underline{\eta}\|_2 \quad (4.52)$$

angegeben werden. Die Forderung an den Regelkreis in Bezug auf das Messrauschen ist folglich

$$\sigma_{\max}(\underline{T}(j\omega)) \ll 1 \quad \text{für } \omega \in \Omega_\eta \quad (4.53)$$

über den Frequenzbereich Ω_η . Nach Gleichung (4.44) gilt zwar

$$\underline{S}(j\omega) + \underline{T}(j\omega) = \underline{I} \quad (4.54)$$

im Allgemeinen liegt der Bereich des Messrauschen $\Omega_\eta = (\omega_\eta, \infty)$ mit $\omega_f \leq \omega_\eta$ jedoch in einem höherfrequenten Bereich als die Führungs- und Störgrößen.

Definition der Regelbandbreite

Davon ausgehend, dass das System keine statische Regelabweichung aufweist, wird die Regelbandbreite ω_r als diejenige Frequenz definiert, bei welcher der Singulärwertverlauf der komplementären Sensitivität

$$\sigma_{\max}(\underline{T}(j\omega_r)) = -3 \text{ dB} \quad (4.55)$$

beträgt.

4.2 Dezentrale Regelung

Die dezentrale Regelung reduziert das Problem des Entwurfs einer Mehrgrößenregelung auf den Entwurf von n Eingrößenreglern. Die Voraussetzungen dafür sind:

1. Die Regelstrecke $\underline{G}(s)$ ist näherungsweise diagonaldominant.
2. Die Regelstrecke $\underline{G}(s) \cong (\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D})$ ist nicht sprungfähig ($\underline{D} = 0$).

Beide genannten Voraussetzungen wurden im vorangegangenen Abschnitt 4.1 aufgezeigt. Ein wesentlicher Vorteil der dezentralen Regelung ist, dass der Regelfehler $e_i = w_i - y_i$ über die Regelung $K_i(s)$ nur die Stellgröße u_i beeinflusst. Die Inbetriebnahme des FUMU1 gestaltet sich dadurch besonders einfach, da unter gewissen Voraussetzungen die $n = 6$ Regelkreise stabil und unabhängig voneinander betrieben werden können². Die Bedingungen sind:

1. Die Einzelregelkreise sind stabil.
2. Die Rückführdifferenzmatrix $\underline{F}(s) = I(s) + \underline{G}(s) \underline{K}(s)$ ist verallgemeinert diagonaldominant.
3. Die Stellgröße der inaktiven Regelkreise ist $u_j = 0$.

Eine hinreichende Bedingung für die Stabilität des Regelkreises stellen die Punkte 1 und 2 dar.

Das verwendete Entwurfsverfahren ist eine Erweiterung des allgemeinen Nyquistverfahrens für Mehrgrößensysteme aus [Lun08b]. Die Analyse und der Entwurf der Regelung wird zeitkontinuierlich durchgeführt. Die daraus resultierende Regelung wird für die Implementierung diskretisiert.

4.2.1 Theorie zur dezentralen Regelung

Das wesentliche Merkmal der dezentralen Regelung ist, dass die Reglerübertragungsmatrix

$$\text{diag } \underline{K}(s) = \text{diag} ([K_1(s) \ K_2(s) \dots K_n(s)]) \quad (4.56)$$

eine Diagonalmatrix ist.

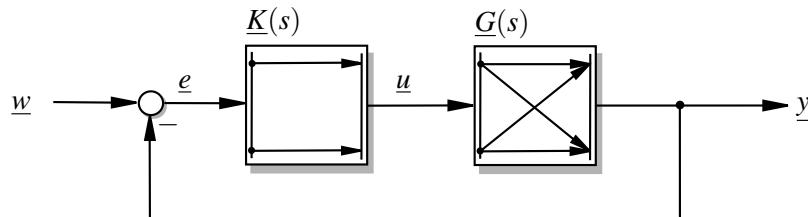


Abbildung 4.8: Blockschaltbild einer dezentralen Regelung mit zwei Stell-, Regel- und Führungsgrößen

Die Regelabweichung $e_i = w_i - y_i$ beeinflusst über den Regler $K_i(s)$ nur die Stellgröße u_i für $i = 1, 2, \dots, n$. Das Blockschaltbild für ein 2×2 -System ist in Abbildung 4.8 gezeichnet. Wie erwähnt lautet die Bedingung aus Punkt 1, dass die Einzelregelkreise

$$G_{wii}(s) = \frac{G_{ii}(s) \ K_i(s)}{1 + G_{ii}(s) \ K_i(s)} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.57)$$

stabil sind, dass also alle Pole der Führungsübertragungsfunktion $G_{wii}(s) \forall i$ in der linken komplexen Halbebene liegen.

²Rein formal lässt sich die in [Rai94] definierte Integritätseigenschaft nicht beweisen, da die offene Kette $\underline{Q}(s) = \underline{G}(s) \underline{K}(s)$ nicht asymptotisch stabil ist. Dies ist für die praktische Inbetriebnahme jedoch unwesentlich.

Die Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ lässt sich in einer Robustheitsbetrachtung als Summe von

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{11}(s) & \dots & G_{1n}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & G_{1n}(s) \end{bmatrix}}_{\text{diag } \underline{G}(s)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & G_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{11}(s) & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\delta \underline{G}(s)} \quad (4.58)$$

auffassen, vergl. Abbildung 4.9. Dabei bezeichnet $\text{diag } \underline{G}(s)$ die Übertragungsmatrix im nominellen Fall und $\delta \underline{G}(s)$ die Modellunsicherheiten.

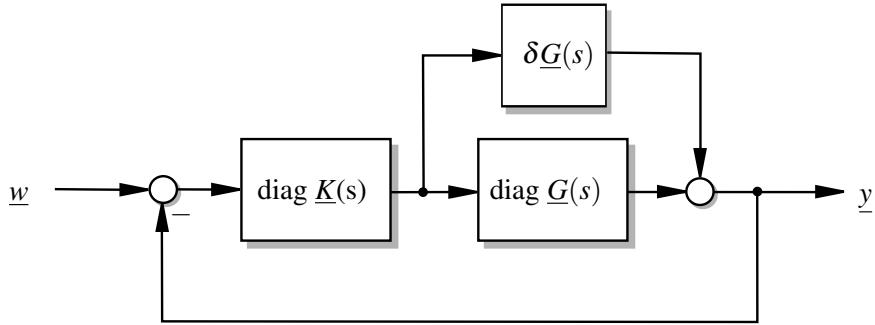


Abbildung 4.9: Blockschaltbild der dezentralen Regelung als Robustheitsbetrachtung

Aufbauend auf die Robustheitsbetrachtung wird in [Lun08b] eine hinreichende Stabilitätsbedingung abgeleitet:

Ist die Rückführdifferenzmatrix $\underline{F}(s)$ verallgemeinert diagonaldominant und sind die Einzelregelkreise stabil, dann ist der Gesamtregelkreis stabil. Die Stabilität des Gesamtregelkreises kann zwar auch über die Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix nachgewiesen werden, die verallgemeinerte Diagonaldominanz ist jedoch eine schwächere Forderung und erlaubt somit den Stabilitätsnachweis auch bei stärkeren Verkoppelungen von $\underline{F}(s)$.

Verallgemeinerte Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix

Die Rückführdifferenzmatrix $F(s) = I + \underline{G}(s) \text{ diag } \underline{K}(s)$ heisst verallgemeinert Diagonaldominant wenn

$$\lambda_P = \max_{\lambda_i} \lambda \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{|F_{12}(j\omega)|}{|F_{11}(j\omega)|} & \dots & \frac{|F_{1n}(j\omega)|}{|F_{11}(j\omega)|} \\ \frac{|F_{21}(j\omega)|}{|F_{22}(j\omega)|} & 0 & \dots & \frac{|F_{2n}(j\omega)|}{|F_{22}(j\omega)|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{|F_{n1}(j\omega)|}{|F_{nn}(j\omega)|} & \frac{|F_{n2}(j\omega)|}{|F_{nn}(j\omega)|} & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) < 1 \quad \forall \omega \quad (4.59)$$

gilt und ist unter Einhaltung von Punkt 1 eine hinreichende Bedingung für die Stabilität des Gesamtregelkreises.

4.2.2 Entwurf der Einzelregelkreise

Streckenmodell

Die Dynamik der Regelstrecken $G_{ii}(s)$ ist für $i = 1, 2, 3$ und $i = 4, 5, 6$ nahezu gleich, vergl. Abbildung (5.8)(c) und Abbildung (5.8)(d), weshalb lediglich zwei Einzelregler für die zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktionen

$$G_{11}(s) = 11821.9 \frac{(s+156.3)(s+110.6)(s+62.27)(s+58.52)(s+45.14)}{s(s+157.2)(s+156.5)(s+98.17)(s+62.3)(s+58.48)(s+45.15)} \quad (4.60a)$$

$$G_{44}(s) = 1072.3 \frac{(s+157.1)(s+156.2)(s+98.16)(s+62.22)(s+48.41)}{s(s+157.2)(s+156.5)(s+98.17)(s+62.3)(s+58.48)(s+45.15)} \quad (4.60b)$$

entworfen werden. Die Frequenzgänge der beiden Übertragungsfunktionen sind in Abbildung 4.10 dargestellt. Bei beiden Übertragungsfunktionen gibt es vier Pol-Nullstellenpaare die sich näherungsweise kürzen. Wird dem Verstärkungsfaktor Rechnung getragen, lassen sich die beiden Übertragungsfunktionen über

$$\tilde{G}_{11}(s) = 11805.7 \frac{(s+110.6)}{s(s+157.2)(s+98.17)} \quad (4.61a)$$

$$\tilde{G}_{44}(s) = 1067.9 \frac{(s+48.41)}{s(s+58.48)(s+45.15)} \quad (4.61b)$$

approximieren. Die Kürzung der Pol-Nullstellenpaare verändert das Ein-Ausgangsverhalten der Strecken unmerklich. In Anlehnung an die Erkenntnisse aus Abschnitt 4.1.6 lautet die Interpretation:

Die gekürzten Polstellen sind Eigenwerte des Gesamtsystems $\underline{G}(s) \cong (\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$, welche entweder von der Stellgrösse u_1 respektive u_4 schlecht steuerbar, oder aber über die Regelgrösse y_1 bzw. y_4 schlecht beobachtbar und somit über den Teilregler $K_i(s)$ nicht beeinflussbar sind.

PID-Regelung

Die Synthese der Einzelregelkreise wird mit Hilfe der WOK durchgeführt³. Die Kürzung der Pol-Nullstellenpaare haben auf die WOK nahezu keinen Einfluss. Die Theorie zum Reglerentwurf einschleifiger Regelkreise mit Hilfe der WOK kann bspw. in [Alt09a, Lun08a] nachgelesen werden.

Es wird eine PID-T₁-Regelung gemäss

$$u(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_n s} + \frac{T_v s}{T_p s + 1} \right] e(s) \quad (4.62)$$

parametriert⁴. Der I-Anteil ist für die Festwertregelung in Bezug auf das Störverhalten zwingend. Um eine bessere Dämpfung des geregelten Systems zu erreichen wird D-Anteil gefordert. Um den Einfluss des Rauschens im hochfrequenten Bereich geeignet zu unterdrücken, wird der D-Anteil über ein TP gefiltert. Die gefundenen Regelparameter lauten

$$K_{p1} = 1.6802, T_{n1} = 0.0239, T_{v1} = 0.0067, T_{p1} = 0.0017 \quad (4.63a)$$

$$K_{p4} = 7.3051, T_{n4} = 0.0407, T_{v4} = 0.0125, T_{p4} = 0.0017 \quad (4.63b)$$

³MATLAB: `sisotool.m`

⁴Die Umrechnung des von MATLAB: `sisotool.m` exportierten Formats der Regelung in die angegebenen Regelparameter ist in Anhang [A.5] dargestellt.

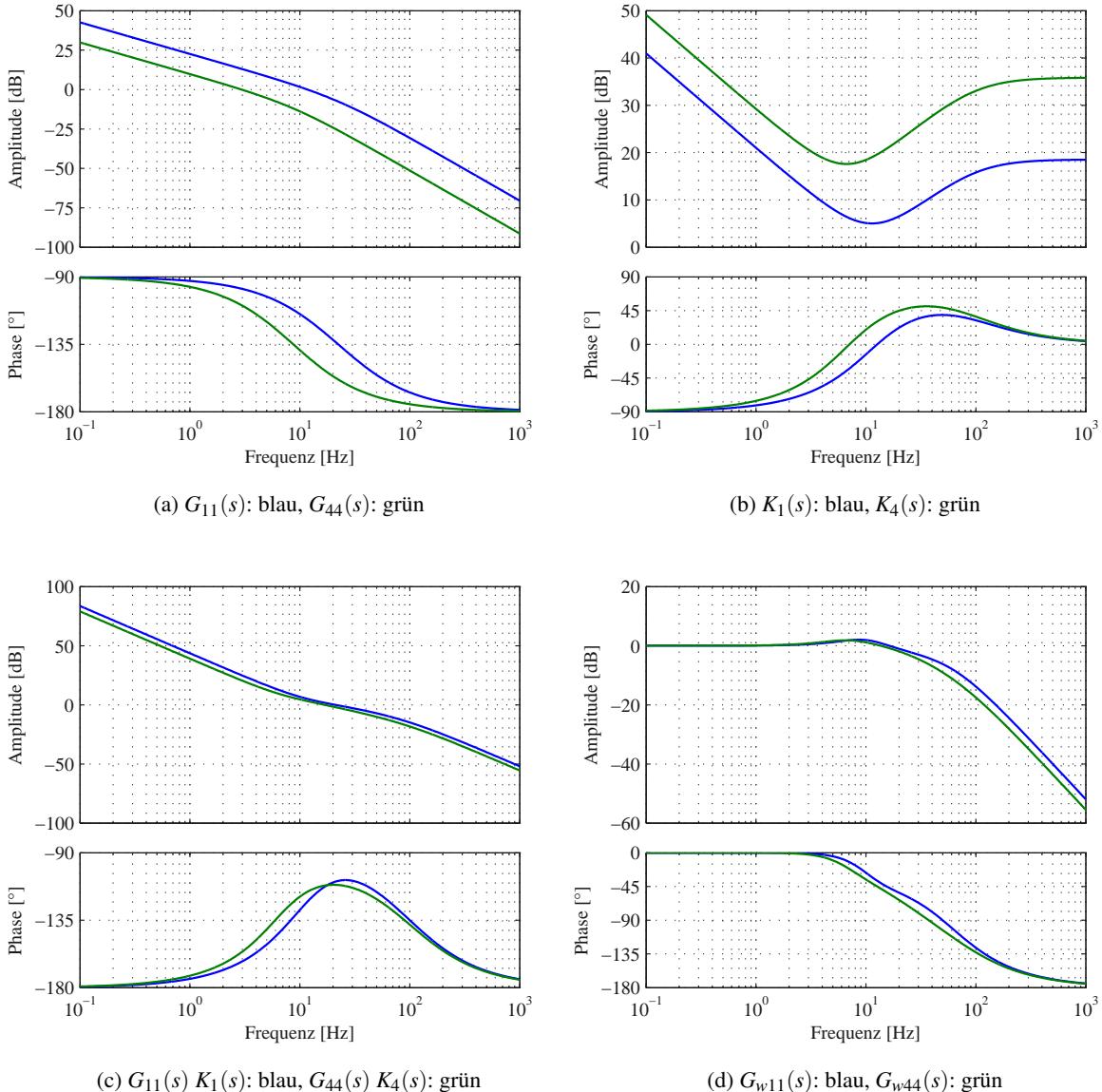


Abbildung 4.10: Frequenzgang der Strecke, der Regelung, der offenen Kette und der Führungsübertragungsfunktionen der beiden Einzelregelkreise

Die Frequenzgänge der Regler, der offenen Kette und der resultierenden Führungsübertragungsfunktionen sind in Abbildung (4.10) dargestellt. Die Reglerverstärkung der Regler $K_i(s)$ für $i = 2, 3$ und $i = 5, 6$ werden so angepasst, dass die offene Kette $G_{ii}(s) K_i(s)$ für $i = 2, 3$ die gleiche Verstärkung wie $G_{11}(s) K_1(s)$ aufweist und dass die offene Kette $G_{ii}(s) K_i(s)$ für $i = 4, 5$ die gleiche Verstärkung wie $G_{44}(s) K_4(s)$ aufweist.

Stabilitätsnachweis der Einzelregelkreise

Das Pol-Nullstellendiagramm der resultierenden Einzelregelkreise $\tilde{G}_{w11}(s)$ und $\tilde{G}_{w44}(s)$ ist in Abbildung (4.11) eingezeichnet. Sämtliche Polstellen liegen in der linken komplexen Halbebene. Die beiden Teilregelkreise sind stabil.

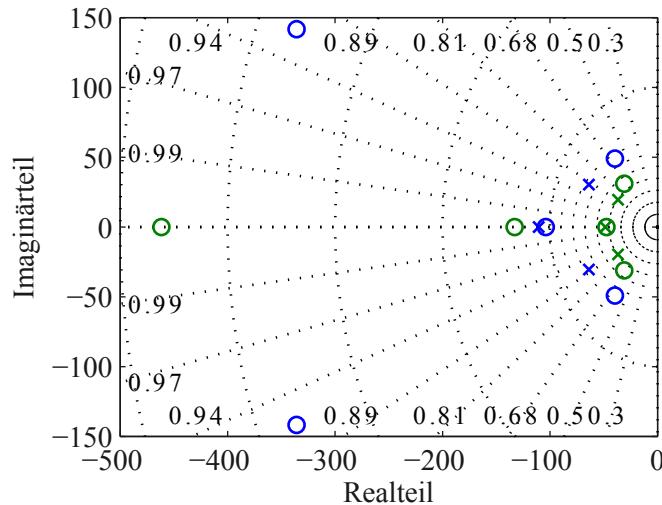


Abbildung 4.11: Pol-Nullstellendiagramm der Führungsübertragungsfunktionen mit den approximierten Regelstrecken, blau: $\tilde{G}_{w11}(s)$, grün: $\tilde{G}_{w44}(s)$

4.2.3 Stabilitätsnachweis der Gesamtregelstrecke

Davon ausgehend, dass alle Einzelregelkreise stabil sind, wird über die verallgemeinerte Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix $\underline{F}(s)$ aus Gleichung (4.59) die Stabilität der Gesamtregelstrecke $\underline{G}_w(s) = \underline{T}(s)$ nachgewiesen. Neben λ_P ist in Abbildung 4.12 die Bedingung für Spaltendominanz nach Gleichung (4.40) in der Form

$$\frac{\sum_{j=1, j \neq i}^6 |F_{ji}(j\omega)|}{|F_{ii}(j\omega)|} < 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (4.64)$$

dargestellt. Die Rückführdifferenzmatrix ist sowohl Spaltendominant, also Diagonaldominant, als auch verallgemeinert Diagonaldominant. Der Gesamtregelkreis ist stabil.

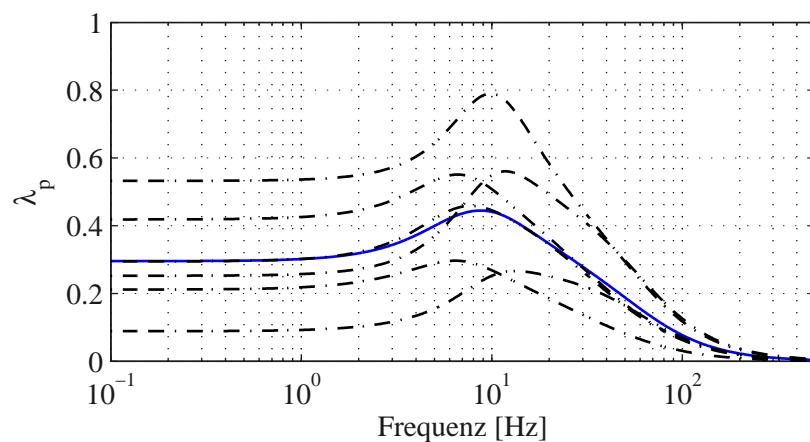


Abbildung 4.12: Nachweis der Diagonal- und der verallgemeinerten Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix, blau: λ_p , --: Gleichung (4.64)

4.2.4 Zeitdiskrete Umsetzung der PID-T₁-Regelung

In Abbildung 4.13 ist das Blockschaltbild der implementierten, zeitdiskreten PID-T₁-Regelung mit AWR dargestellt. Die zugehörigen Koeffizienten $k_{pid1\dots5}$ lassen sich gemäss

$$\begin{aligned} k_{pid1} &= T_s / (T_p + T_s) & k_{pid4} &= K_p \\ k_{pid2} &= T_p / (T_p + T_s) & k_{pid5} &= T_s / (2 T_n) \\ k_{pid3} &= K_p T_v / T_s \end{aligned} \quad (4.65)$$

aus den zeitkontinuierlichen Regelparametern bestimmen. Als Abtastzeit wird $T_s = 1$ ms gewählt.

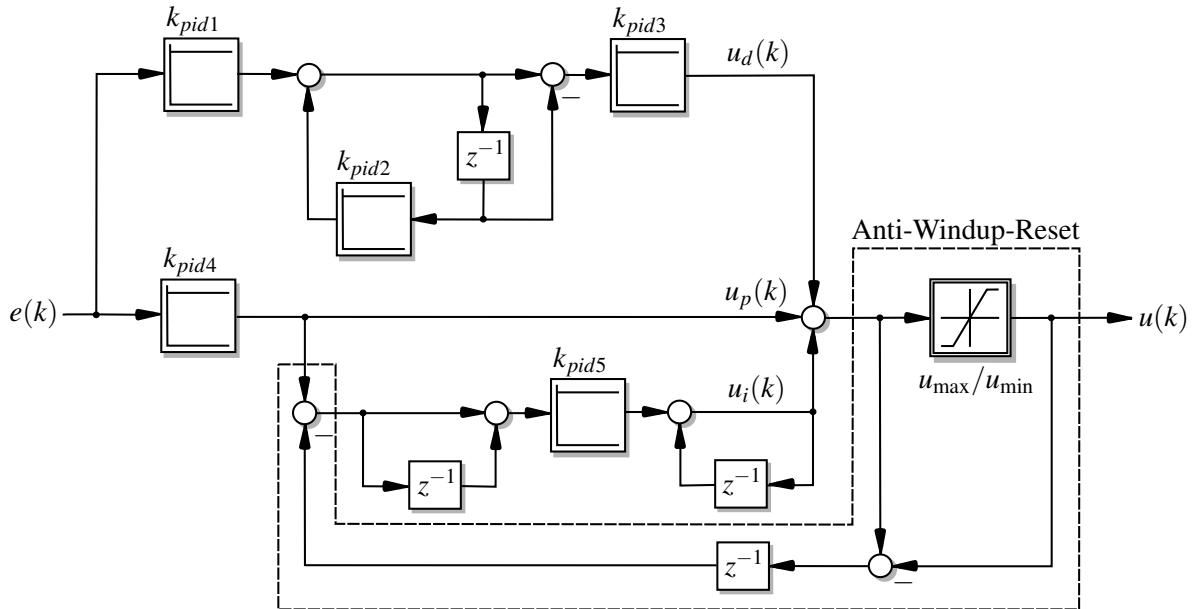


Abbildung 4.13: Blockschaltbild des zeitdiskreten PID-Reglers mit AWR

4.2.5 Singulärwertverlauf der dezentralen Regelung

Der resultierende Singulärwertverlauf der zeitdiskreten, dezentralen Regelung $\underline{K}(z)$ und des identifizierten Modells aus Gleichung (A.4) ist für die Übertragungsmatrizen

$$\begin{aligned} \underline{T}(z) &= \underline{G}_{yw}(z) = (\underline{I} + \underline{G}(z) \underline{K}(z))^{-1} \underline{G}(z) \underline{K}(z) \\ \underline{S}(z) &= \underline{G}_{yz_2}(z) = (\underline{I} + \underline{G}(z) \underline{K}(z))^{-1} \\ \underline{S}(z) \underline{G}(z) &= \underline{G}_{yz_1}(z) = (\underline{I} + \underline{G}(z) \underline{K}(z))^{-1} \underline{G}(z) \end{aligned} \quad (4.66)$$

in Abbildung 4.14 dargestellt.

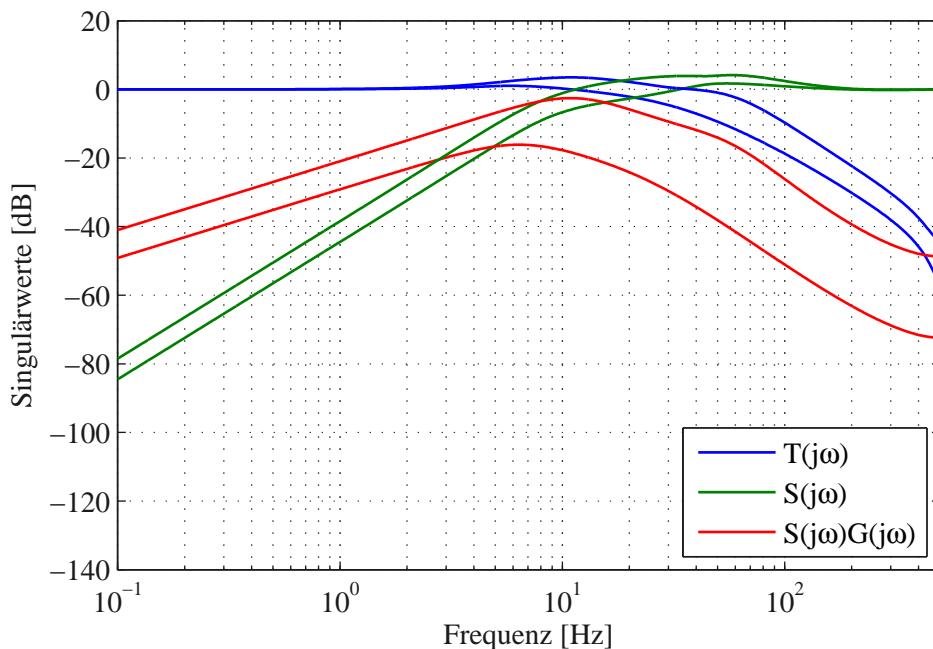


Abbildung 4.14: Singulärwertverlauf der PID-Regelsystems

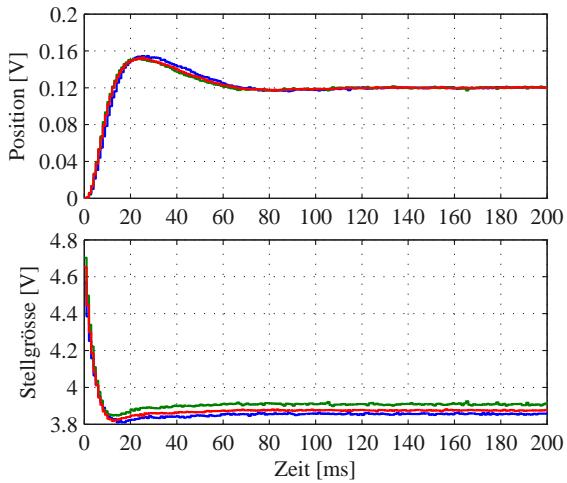
Anhand der Überhöhung des Führungssingulärwertverlaufs ist erkennbar, dass das Regelsystem relativ schwach gedämpft ist. Das geregelte System weist keine statische Regelabweichung auf. Die in Gleichung (4.55) definierte Reglerbandbreite beträgt 64 Hz. Eingangsstörungen werden im Bereich von 11 Hz am schlechtesten unterdrückt und minimal -2.5 dB abgeschwächt.

4.2.6 Vergleich zwischen den gemessenen Sprungantworten und der Simulation

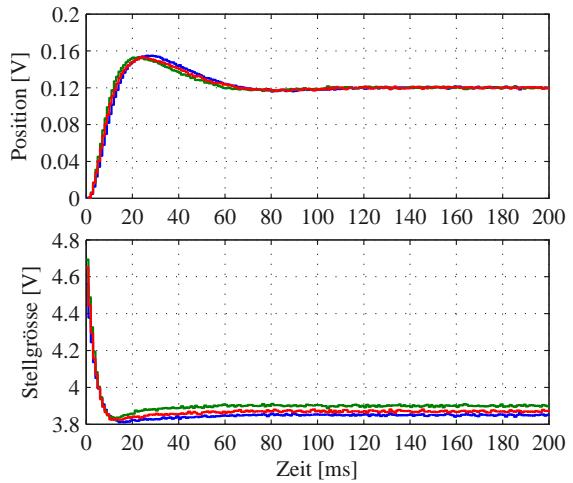
In Abbildung 4.15 ist der Vergleich zwischen den gemessenen Sprungantworten und der Simulation des PID-T₁-Regelsystems aufgeführt. Folgende Punkte sind bei der Simulation berücksichtigt:

- Als Streckenmodell wird der Simulation das zeitdiskrete, identifizierte Modell aus Gleichung (5.43) zugrunde gelegt.
- Dem Positionssignal wird ein weisses Rauschen mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0.56 \text{ mV}$ überlagert.
- Die Quantisierung der Positionsmeßung $6.6/2^{16} = 0.1 \text{ mV}$ wird berücksichtigt.
- Die Stellgrößen werden künstlich auf den Bezugswert $\underline{U}_{00}(k)$ der Messung angehoben.

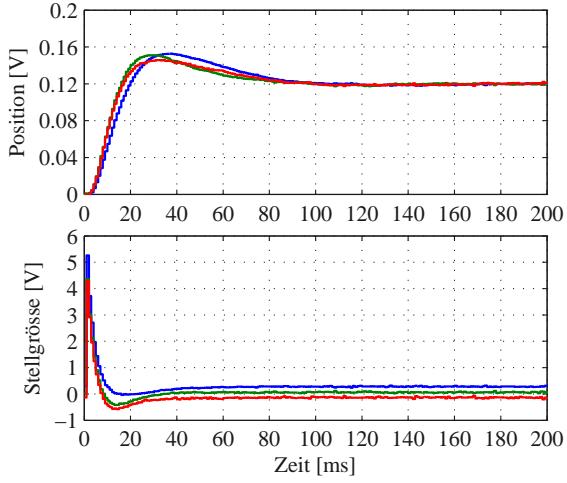
In Abbildung 4.15(a,b) wird ein Führungssprung $\underline{w}^T(k) = [0.12 \ 0.12 \ 0.12 \ 0 \ 0 \ 0] \text{ V}$ und in Abbildung 4.15(c,d) wird ein Führungssprung $\underline{w}^T(k) = [0 \ 0 \ 0 \ 0.12 \ 0.12 \ 0.12] \text{ V}$ betrachtet. Die vertikale Dynamik der PID-T₁-Regelung überschwingt maximal 28% und ist nach ca. 70 ms eingeschwungen. Die horizontale Dynamik der PID-T₁-Regelung überschwingt maximal 27% und ist nach ca. 90 ms eingeschwungen. Die Simulation bildet das Führungsverhalten im Zeitbereich gut ab.



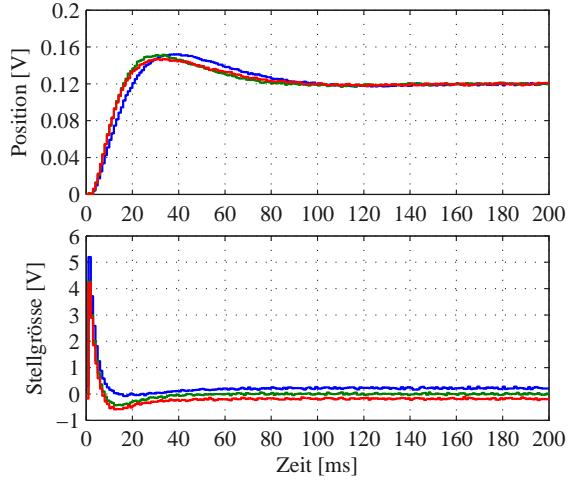
(a) Gemessene Sprungantwort vertikal
BGR: Positionen $q_{1,2,3}(k)$ und Stellgrößen $u_{1,2,3}(k)$



(b) Simulierte Sprungantwort vertikal
BGR: Positionen $q_{1,2,3}(k)$ und Stellgrößen $u_{1,2,3}(k)$



(c) Gemessene Sprungantwort horizontal
BGR: Positionen $q_{4,5,6}(k)$ und Stellgrößen $u_{4,5,6}(k)$



(d) Simulierte Sprungantwort horizontal
BGR: Positionen $q_{4,5,6}(k)$ und Stellgrößen $u_{4,5,6}(k)$

Abbildung 4.15: Gegenüberstellung von den gemessenen und den simulierten Sprungantworten des PID-Regelsystems

Fazit

- Die Abtastzeit $T_s = 1$ ms ist unter Anbetracht der Reglerdynamik und der Nyquistfrequenz $f_{nyq} = 500$ Hz an der oberen Grenze. Der Gründe für die Wahl der verhältnismässig grossen Abtastzeit liegen einerseits bei den langsamen IO-Karten des Target-Systems und andererseits beim angestrebten Nutz- zu Rauschsignalverhältnis der Messungen für die Identifikation.
- Die Reglerparameter für die PID-T₁-Regelung könnten optimiert werden. Da die dezentrale Regelung in erster Linie der Inbetriebnahme diente, wurde dies nicht weiter untersucht.
- Es wird vermutet, dass mit einer P-PI-Kaskadenregelung, also PI-Geschwindigkeitsregelung und überlagerter einfacher P-Positionsregelung eine bessere Regelgüte erzielt werden könnte.

4.3 MPC-Regelung

4.3.1 Grundidee einer modellprädiktiven Regelung

Die Grundidee einer modellprädiktiven Regelung ist es, aufgrund vergangener Systemzustände $\underline{x}(k-l)$ und/oder Systemausgänge $\underline{y}(k-l)$ und vergangener Stellgrößen $\underline{u}(k-l)$ den zukünftigen Verlauf des Regelfehlers $\underline{e}(k+1), \dots, \underline{e}(k+H_p)$ mit Hilfe eines Modells über den Prädiktionshorizont H_p vorherzusagen und aufgrund dessen den optimalen Stellgrößenverlauf $\underline{u}(k), \dots, \underline{u}(k+H_u)$ zu bestimmen.

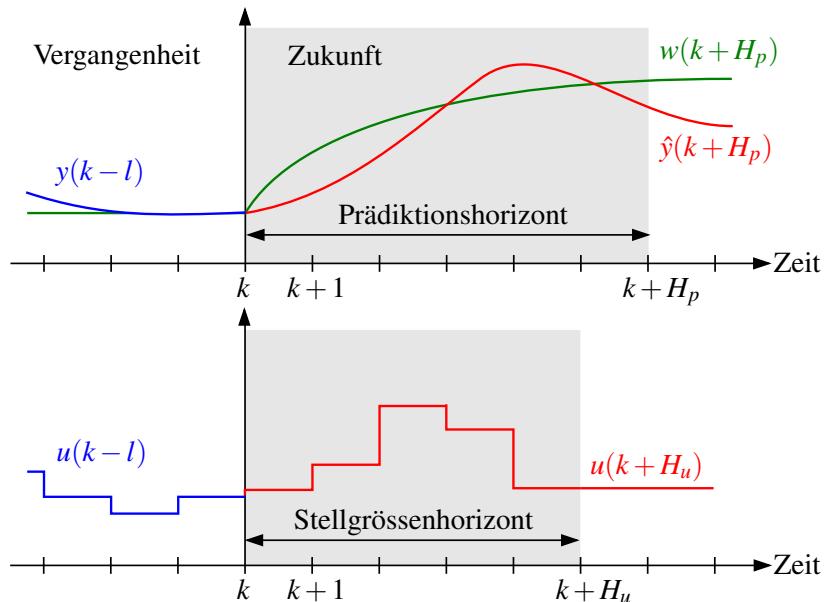


Abbildung 4.16: Prinzipskizze einer modellprädiktiven Regelung

Der zukünftige Verlauf des Regelfehlers wird einem Optimierungsproblem zugrunde gelegt, anhand dessen wird die im Sinne des gestellten Gütfunktional optimale Stellgröße $\underline{u}(k), \dots, \underline{u}(k+H_u)$ über den Stellgrößenhorizont H_u berechnet. Zum Zeitpunkt k wird die Regelstrecke mit der optimalen Stellgröße $\underline{u}^*(k)$ beaufschlagt. Im darauffolgenden Abtastschritt $k+1$ wird die Prozedur wiederholt, also Prädiktion, Optimierung und Ausgabe der optimalen Stellgröße $\underline{u}^*(k+1)$. Was den Übergang von einer optimalen Steuerung zu einer optimalen Regelung darstellt.

Die Forschungsgemeinschaft entwickelte in den vergangenen Jahren eine Vielzahl von unterschiedlichen Ansätzen für die prädiktive Regelung von LTI-Systemen. Diese unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Beschreibungsform der Regelstrecke und somit durch die Prädiktion, Erweiterungen der Reglerstruktur für integrierendes Verhalten, Nebenbedingungen, auf den Regelfehler angewandte Norm und Erweiterungen des Gütfunktional.

Für die Entscheidungsfindung welcher der Ansätze für die Regelung des FUMU1 in Frage kommt, wurden die Verfahren auf nachfolgende Punkte geprüft:

- Die resultierende Regelung soll integrierendes Verhalten aufweisen.
- Die Beschreibungsform der Regelstrecke soll auf ein möglichst einfaches Verfahren für die Prädiktion führen.
- Erfahrungsgemäß sind modellprädiktive Regelungen sensiv auf Messrauschen und Signal-

quantisierung. Weshalb die Signalgüte der Stellgrösse über eine Filterstruktur beinflussbar sein soll.

Schlussendlich wurden zwei Ansätze als Kombination verschiedener Verfahren näher untersucht und simulativ verifiziert. Beide Ansätze haben folgende Punkte gemein:

- Das Modell der Regelstrecke wird im Zustandsraum abgebildet, was unter Anbetracht des Modellansatzes der Identifikation sinnvoll ist.
- Die nicht messbaren Systemzustände müssen geschätzt werden.

Nachfolgend wird der geeigneteren Ansatz näher betrachtet. Der Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, dass die vergangene, optimale Stellgrösse gefiltert wird. In [Iko12] wird dargestellt, dass der gewählte Ansatz sehr nahe mit dem GPC-Ansatz für SISO-Systeme verwandt ist.

4.3.2 Theorie zur MPC-Regelung

Modellansatz

Es wird davon ausgegangen, dass das Zustandsraummodell eine nicht sprungfähige Minimalrealisierung darstellt. Des Weiteren wird angenommen, dass ein Schätzproblem vorliegt.

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \underline{A}_d \underline{x}(k) + \underline{B}_d \underline{u}(k) + \underline{\zeta}(k) & \underline{A} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_u)} \\ \underline{y}_m(k) &= \underline{C}_d \underline{x}(k) + \underline{v}(k) & \underline{C} \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_x)} \\ \underline{y}(k) &= \underline{C}_d \underline{x}(k) \end{aligned} \quad (4.67)$$

$\underline{\zeta}(k)$ bezeichnet das Prozessrauschen, $\underline{v}(k)$ das Messrauschen, $\underline{x}(k)$ den wahren Systemzustand und $\underline{y}(k)$ die wahre Regelgrösse zum Zeitpunkt k .

Erweitertes Modell, integrierende Regelung

Der I-Anteil wird implizit als Teil der Regelstrecke, über die Rückwärtsdifferenz

$$\Delta \underline{u}(k) = \underline{u}(k) - \underline{u}(k-1) \quad (4.68)$$

formuliert. Hierfür wird im Modell (4.67) die Stellgrösse durch $\underline{u}(k) = \Delta \underline{u}(k) + \underline{u}(k-1)$ substituiert. Die Erweiterung des Zustandsraummodells aus Gleichung (4.67) führt auf

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{u}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{A}_d & \underline{B}_d \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{u}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_d \\ \underline{I} \end{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) + \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{\zeta}(k) \\ \underline{y}_m(k) &= \begin{bmatrix} \underline{C}_d & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{u}(k-1) \end{bmatrix} + \underline{v}(k) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Das erweiterte Streckenmodell wird zukünftig über

$$\begin{aligned} \bar{\underline{x}}(k+1) &= \bar{\underline{A}} \bar{\underline{x}}(k) + \bar{\underline{B}} \Delta \underline{u}(k) + \bar{\underline{F}} \underline{\zeta}(k) & \bar{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{(\bar{n}_x \times \bar{n}_x)}, \bar{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{(\bar{n}_x \times n_u)}, \bar{\underline{F}} \in \mathbb{R}^{(\bar{n}_x \times n_x)} \\ \bar{\underline{y}}_m(k) &= \bar{\underline{C}} \bar{\underline{x}}(k) + \underline{v}(k) & \bar{\underline{C}} \in \mathbb{R}^{(n_y \times \bar{n}_x)} \\ \bar{\underline{y}}(k) &= \bar{\underline{C}} \bar{\underline{x}}(k) \end{aligned} \quad (4.70)$$

angeschrieben und es ist $\bar{n}_x = n_x + n_u$. Die Eigenwerte der erweiterten Regelstrecke sind die Wurzeln des charakteristischen Polynoms

$$P = \det(zI - \bar{A}) = \det(zI - A_d)(z - 1)^{n_u} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.71)$$

Das System weist zusätzlich zu den Eigenwerten der Strecke $\lambda(A_d)$, n_u Eigenwerte bei eins, also Integratoren auf. Die vollständige Beobachtbarkeit bzw. Steuerbarkeit bleibt beim erweiterten Modell erhalten.

Zeitdiskretes, stationäres Kalman-Filter

Unter der Annahme, dass $\underline{\zeta}(k)$ und $\underline{v}(k)$ unkorrelierte, mittelwertfreie weisse Rauschprozesse sind, beschreibt $\text{Cov}(\underline{\zeta}) = \underline{Q}_k$ die Kovarianz-Matrix des Prozessrauschen und $\text{Cov}(\underline{v}) = \underline{R}_k$ die Kovarianz-Matrix des Messrauschen. Für ein LTI-System strebt das Standard Kalman-Filter gegen einen stationären Zustand.

Die Updategleichung für den geschätzten Systemzustand lautet ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{u}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{u}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ I \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} H_x \\ H_{\Delta u} \end{bmatrix} (y_m(k) - C_d \hat{x}(k)) \quad (4.72)$$

Die Dimensionen der Untermatrizen H_x und $H_{\Delta u}$ sind $H_x \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_y)}$ und $H_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{(n_u \times n_y)}$. Die Kurzschreibweise hierfür ist

$$\hat{x}(k+1) = \bar{A} \hat{x}(k) + \bar{B} \Delta u(k) + \underline{H} \underline{\varepsilon}(k) \quad \underline{H} \in \mathbb{R}^{(\bar{n}_x \times n_y)} \quad (4.73)$$

wobei

$$\underline{\varepsilon}(k) = y_m(k) - \bar{C} \hat{x}(k) = y_m(k) - C_d \hat{x}(k) \quad (4.74)$$

den Messfehler zum Zeitpunkt k beschreibt. Die nicht modellierte Systemdynamik sowie Störungen werden dem Freiheitsgrad $\hat{u}(k-1)$ zugeschrieben. Wie sich zeigen wird, ist dies für die Regelung unproblematisch. Der zusätzliche Freiheitsgrad des erweiterten Modells kann auch als Eingangsstörung interpretiert werden. Beim Modellansatz sind zwei wesentliche Aspekte zu beachten:

- Die Signalqualität kann über das Kalman-Filter beeinflusst werden.
- Die aufbauende Regelung hat, falls $\hat{u}(k-1)$ nicht geschätzt oder beobachtet wird eine statische Regeldifferenz.

Eine detaillierte Herleitung befindet sich in [BBM10]. Der Schätzfehler $\bar{\varepsilon}(k) = \bar{x}(k) - \hat{x}(k)$ beschreibt die Differenz zwischen dem wahren Systemzustand und dem geschätzten Systemzustand. Durch Differenzbildung von der Zustandsgleichung des erweiterten Modellansatzes aus (4.70) und der Updategleichung (4.73) folgt für den Schätzer die Dynamik

$$\bar{\varepsilon}(k+1) = (\bar{A} - \underline{H} \bar{C}) \bar{\varepsilon}(k) + \bar{F} \underline{\zeta}(k) - \underline{H} \underline{v}(k) \quad (4.75)$$

Offensichtlich wird der Schätzfehler durch das Prozess- und Messrauschen permanent angeregt. Man erkennt, dass wenn die Verstärkung von \underline{H} gross ist, auch der Einfluss von $\underline{v}(k)$ auf den Schätzfehler gross ist.

Die Rückführmatrix \underline{H} wird derart gewählt, dass der Erwartungswert des quadratischen Schätzfehlers minimal wird. Die Rückführmatrix

$$\underline{H} = \left(\bar{C} \underline{P} \bar{C}^T + \underline{R}_k \right)^{-1} \bar{C} \underline{P} \bar{A}^T \quad (4.76)$$

bezeichnet die optimale Rückführdifferenz. Dabei bezeichnet \underline{P} die positiv-definite Lösung der zeitdiskreten Matrix-Riccati-Gleichung

$$\bar{\underline{A}} \underline{P} \bar{\underline{A}}^T - \underline{P} - \bar{\underline{A}} \underline{P} \bar{\underline{C}}^T \left(\bar{\underline{C}} \underline{P} \bar{\underline{C}}^T + \underline{R}_k \right)^{-1} \left(\bar{\underline{C}} \underline{P} \bar{\underline{A}}^T \right) + \underbrace{\bar{\underline{F}} \underline{Q}_k \bar{\underline{F}}^T}_{\bar{\underline{Q}}_k} = 0 \quad (4.77)$$

Für detailliertere Ausführungen sei an dieser Stelle auf die ausführliche Literatur [Lun08b, Hay96, ILM92, Ise11, Ise92b, Ost11] verwiesen.

Prädiktion der Regelgrösse

Für die Prädiktion des zukünftigen Verlaufs der Regelgrösse wird Gleichung (4.73) herangezogen. Zum Zeitpunkt $k+1$ wird der Zustand und die Regelgrösse über

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1) &= \bar{\underline{A}} \hat{\underline{x}}(k) + \bar{\underline{B}} \Delta \underline{u}(k) + \underline{H} \underline{\varepsilon}(k) \\ \hat{\underline{y}}(k+1) &= \bar{\underline{C}} \hat{\underline{x}}(k+1) \end{aligned} \quad (4.78)$$

präzidiert. Zum Zeitpunkt $k+2$ folgt

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+2) &= \bar{\underline{A}} \hat{\underline{x}}(k+1) + \bar{\underline{B}} \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{H} \underline{\varepsilon}(k+1) \\ &= \bar{\underline{A}}^2 \hat{\underline{x}}(k) + \bar{\underline{A}} \bar{\underline{B}} \Delta \underline{u}(k) + \bar{\underline{A}} \underline{H} \underline{\varepsilon}(k) + \bar{\underline{B}} \Delta \underline{u}(k+1) + \underline{H} \underline{\varepsilon}(k+1) \\ \hat{\underline{y}}(k+2) &= \bar{\underline{C}} \hat{\underline{x}}(k+2) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Unter den in Abschnitt 4.3.2 genannten Bedingungen ist $\underline{\varepsilon}(k)$ selbst eine unkorrelierte, weisse Rauschsequenz und deshalb nicht präzidierbar. Folglich wird $\underline{\varepsilon}(k+j) = \underline{0}$ für $j > 0$ angesetzt.

Sukzessives Entwickeln bis zum Prädiktionshorizont H_p führt unter Berücksichtigung von $H_u \leq H_p$ Stellgrößenänderungen $\Delta \underline{u}(k), \dots, \Delta \underline{u}(k+H_u-1)$ auf die Regelgrößen $\hat{\underline{y}}(k+1), \dots, \hat{\underline{y}}(k+H_p)$. In Matrixschreibweise kann die Prädiktion über

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{y}}(k+1) \\ \hat{\underline{y}}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{\underline{y}}(k+H_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{C}} \bar{\underline{A}} \\ \bar{\underline{C}} \bar{\underline{A}}^2 \\ \vdots \\ \bar{\underline{C}} \bar{\underline{A}}^{H_p} \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}(k) + \begin{bmatrix} \bar{\underline{C}} \bar{\underline{B}} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \bar{\underline{C}} \bar{\underline{A}} \bar{\underline{B}} & \bar{\underline{C}} \bar{\underline{B}} & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\underline{C}} \bar{\underline{A}}^{H_p-1} \bar{\underline{B}} & \bar{\underline{C}} \bar{\underline{A}}^{H_p-2} \bar{\underline{B}} & \dots & \bar{\underline{C}} \bar{\underline{A}}^{H_p-H_u} \bar{\underline{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \underline{u}(k) \\ \Delta \underline{u}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta \underline{u}(k+H_u-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\underline{C}} \underline{H} \\ \bar{\underline{C}} \bar{\underline{A}}^2 \underline{H} \\ \vdots \\ \bar{\underline{C}} \bar{\underline{A}}^{H_p-1} \underline{H} \end{bmatrix} \underline{\varepsilon}(k) \quad (4.80)$$

oder kurz

$$\hat{\underline{Y}} = \underline{S}_x \hat{\underline{x}}(k) + \underline{S}_{\Delta u} \Delta \underline{U}(k) + \underline{S}_{\varepsilon} \underline{\varepsilon}(k) \quad (4.81)$$

angegeben werden. Die Dimensionen der Matrizen \underline{S}_x , $\underline{S}_{\Delta u}$ und $\underline{S}_{\varepsilon}$ sind

$$\underline{S}_x \in \mathbb{R}^{(n_y H_p \times \bar{n}_x)}, \underline{S}_{\Delta u} \in \mathbb{R}^{(n_y H_p \times n_u H_u)}, \underline{S}_{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{(n_y H_p \times n_y)} \quad (4.82)$$

Die einzelnen Terme sind wie folgt zu interpretieren:

1. $\underline{S}_x \hat{\underline{x}}(k)$: Homogene, zukünftige Lösung des DGL-Systems
2. $\underline{S}_{\Delta u} \Delta \underline{U}(k)$: Partikuläre, zukünftige Lösung des DGL-Systems
3. $\underline{S}_e \underline{\varepsilon}(k)$: Korrektur der zukünftigen Gesamtlösung durch das stationäre Kalman-Filter

Das Optimierungsproblem

Als Optimierungsproblem wird

$$\begin{aligned} \underline{u}^*(k) &= \arg \min_{\underline{u}(k)} \{V_{mpc}\} \quad \text{wobei} \\ V_{mpc} &= \sum_{j=1}^{H_p} (\underline{w}(k+j) - \hat{\underline{y}}(k+j))^T \underline{Q} (\underline{w}(k+j) - \hat{\underline{y}}(k+j)) + \sum_{j=1}^{H_u} \Delta \underline{u}^T(k+j-1) \underline{R} \Delta \underline{u}(k+j-1) \end{aligned} \quad (4.83)$$

angesetzt. Die Wichtungsmatrizen \underline{Q} und \underline{R} seien Diagonalmatrizen der Dimension $\underline{Q} \in \mathbb{R}^{(n_y \times n_y)}$ bzw. $\underline{R} \in \mathbb{R}^{(n_u \times n_u)}$ und gewichten den zukünftigen Verlauf des Regelfehlers $\underline{e}(k+j) = \underline{w}(k+j) - \hat{\underline{y}}(k+j)$ für $j = 1, \dots, H_p$ respektive den zukünftigen Verlauf der Stellgrößenänderung $\Delta \underline{u}(k+j-1)$ für $j = 1, \dots, H_u$ mit $H_u \leq H_p$. Die Stellgrößenänderung ist $\Delta \underline{u}(k+j-1) = 0$ für $j > H_u$, weshalb die zukünftige Stellgröße $\underline{u}(k+H_p+i) = \underline{u}(k+H_p+i-1)$ konstant ist für $i = 0, 1, \dots, \infty$.

Ferner wird die Führungsgröße als konstant angenommen, also $\underline{w}(k+j) = \underline{w}(k)$ für $j = 1, \dots, H_p$. Falls der zukünftige Führungsgrößenverlauf bekannt ist, muss diese Annahme nicht getroffen werden. Das Kausalitätsprinzip wird dadurch nicht verletzt.

Ein wesentlicher Vorteil der MPC-Regelung ist es, dass an das Optimierungsproblem aus Gleichung (4.83) Nebenbedingungen gestellt werden können. Folglich resultiert ein Quadratisches Programm. Die MPC-Regelung mit Nebenbedingungen an die Stell- und an die Regelgrößen wurde implementiert und simulativ ausgetestet. Die Lösung des Quadratischen Programms erfolgt dabei suboptimal über eine sogenannte Primal-Dual Methode (Hildreth's Quadratic Programming Procedure), der Algorithmus stammt aus [LY10]. Am Prüfstand konnte die MPC-Regelung aufgrund des verhältnismässig hohen Rechenaufwands nicht erprobt werden. Zudem soll erwähnt sein, dass die MPC-Positionsregelung des VC6 ohne Nebenbedingungen eine zufriedenstellende Regelgüte erzielt.

Lösung des Optimierungsproblems

Mit den Matrizen

$$\bar{\underline{Q}} = \text{diag}([\underline{Q}, \dots, \underline{Q}]) \quad \bar{\underline{Q}} \in \mathbb{R}^{(n_y H_p \times n_y H_p)}, \quad \bar{\underline{R}} = \text{diag}([\underline{R}, \dots, \underline{R}]) \quad \bar{\underline{R}} \in \mathbb{R}^{(n_u H_u \times n_u H_u)} \quad (4.84)$$

und dem Vektor

$$\underline{W}^T = \underline{w}^T(k) \begin{bmatrix} \underline{I} & \dots & \underline{I} \end{bmatrix} = \underline{w}^T(k) \underline{1}^T \quad \underline{1} \in \mathbb{R}^{(n_y H_p \times n_y)} \quad (4.85)$$

kann das Gütfunktional aus Gleichung (4.83) über

$$V_{mpc} = (\underline{W} - \hat{\underline{Y}})^T \bar{\underline{Q}} (\underline{W} - \hat{\underline{Y}}) + \Delta \underline{U}^T \bar{\underline{R}} \Delta \underline{U} \quad (4.86)$$

angeschrieben werden. Einsetzen von Gleichung (4.81) führt auf

$$V_{mpc} = \frac{1}{2} \Delta \underline{U}^T \bar{\underline{E}} \Delta \underline{U} + \Delta \underline{U}^T \underline{f} + c \quad (4.87)$$

mit der Matrix \underline{E} bzw. dem Vektor \underline{f}

$$\underline{E} = 2 (\underline{S}_{\Delta u}^T \underline{\bar{Q}} \underline{S}_{\Delta u} + \underline{\bar{R}}) \quad (4.88a)$$

$$\underline{f} = -2 \underline{S}_{\Delta u}^T \underline{\bar{Q}} [\underline{W} - (\underline{S}_x \hat{\underline{x}}(k) + \underline{S}_e \underline{\varepsilon}(k))] \quad (4.88b)$$

und der von $\Delta \underline{U}$ unabhängigen Grösse

$$c = \hat{\underline{x}}^T(k) \underline{S}_x^T \underline{\bar{Q}} \underline{S}_e \underline{\varepsilon}(k) + \underline{\varepsilon}^T(k) \underline{S}_e^T \underline{\bar{Q}} [\underline{W} - (\underline{S}_x \hat{\underline{x}}(k) + \underline{S}_e \underline{\varepsilon}(k))] \quad (4.89)$$

Partielles ableiten von V_{mpc} nach $\Delta \underline{U}$ und nullsetzen führt auf

$$\frac{\partial V_{mpc}}{\partial \Delta \underline{U}} = \underline{E} \Delta \underline{U} + \underline{f} \stackrel{!}{=} \underline{0} \quad (4.90)$$

Unter der Voraussetzung das \underline{E} regulär ist bezeichnet

$$\Delta \underline{U}^* = -\underline{E}^{-1} \underline{f} = (\underline{S}_{\Delta u}^T \underline{\bar{Q}} \underline{S}_{\Delta u} + \underline{\bar{R}})^{-1} \underline{S}_{\Delta u}^T \underline{\bar{Q}} [\underline{1} \underline{w}(k) - (\underline{S}_x \hat{\underline{x}}(k) + \underline{S}_e \underline{\varepsilon}(k))] \quad (4.91)$$

den optimalen, zukünftigen Stellgrößenänderungsverlauf. Zum Zeitpunkt k wird lediglich die Stellgrösse $\underline{u}^*(k)$ auf die Regelstrecke ausgegeben. Mit der Abkürzung

$$\underline{K}_{mpc} = \begin{bmatrix} I & \underline{0} \end{bmatrix} (\underline{S}_{\Delta u}^T \underline{\bar{Q}} \underline{S}_{\Delta u} + \underline{\bar{R}})^{-1} \underline{S}_{\Delta u}^T \underline{\bar{Q}}, \quad I \in \mathbb{R}^{(n_u \times n_u)}, \underline{0} \in \mathbb{R}^{(n_u \times n_u(H_p-1))}, \underline{K}_{mpc} \in \mathbb{R}^{(n_u \times n_y H_p)} \quad (4.92)$$

und den Grössen

$$\underline{K}_w = \underline{K}_{mpc} \underline{1} \quad \underline{K}_w \in \mathbb{R}^{(n_u \times n_y)} \quad (4.93a)$$

$$\underline{K}_x = \underline{K}_{mpc} \underline{S}_x \quad \underline{K}_x \in \mathbb{R}^{(n_u \times \bar{n}_x)} \quad (4.93b)$$

$$\underline{K}_e = \underline{K}_{mpc} \underline{S}_e \quad \underline{K}_e \in \mathbb{R}^{(n_u \times n_y)} \quad (4.93c)$$

folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (4.68) und der vergangenen, optimalen Stellgrösse $\underline{u}(k-1)^*$

$$\underline{u}(k)^* = \underline{u}(k-1)^* + \underline{K}_w \underline{w}(k) - \underline{K}_x \hat{\underline{x}}(k) - \underline{K}_e \underline{\varepsilon}(k) \quad (4.94)$$

Das Optimierungsproblem führt unter den genannten Annahmen auf eine integrierende, optimale Zustandsregelung inkl. statischem Kalman-Filter für die Schätzung und Filterung der Systemzustände mit den Rückführmatrizen \underline{K}_w , \underline{K}_x , und \underline{K}_e .

Blockschaltbild der MPC-Regelung

Zusammenfassend ergeben die Gleichungen (4.73) und (4.94) das Blockschaltbild der MPC-Regelung entsprechend Abbildung 4.17.

Ein-Ausgangsverhalten des Regelkreises im Nominalfall

Die nachfolgenden Überlegungen sind deterministischer Natur, die stochastischen Störungen aus Abschnitt 4.3.2 werden vernachlässigt. Des Weiteren wird angenommen, dass die Regelstrecke exakt bekannt ist. Um das Ein-Ausgangsverhalten des Regelsystems von den deterministischen Eingängen $\underline{w}(k), \underline{z}_1(k), \underline{z}_2(k)$ und $\underline{\eta}(k)$ zur Regelgrösse $\underline{y}(k)$ zu beschreiben, wird der Schätzfehler $\bar{\underline{\varepsilon}}(k) = \bar{\underline{x}}(k) - \hat{\underline{x}}(k)$

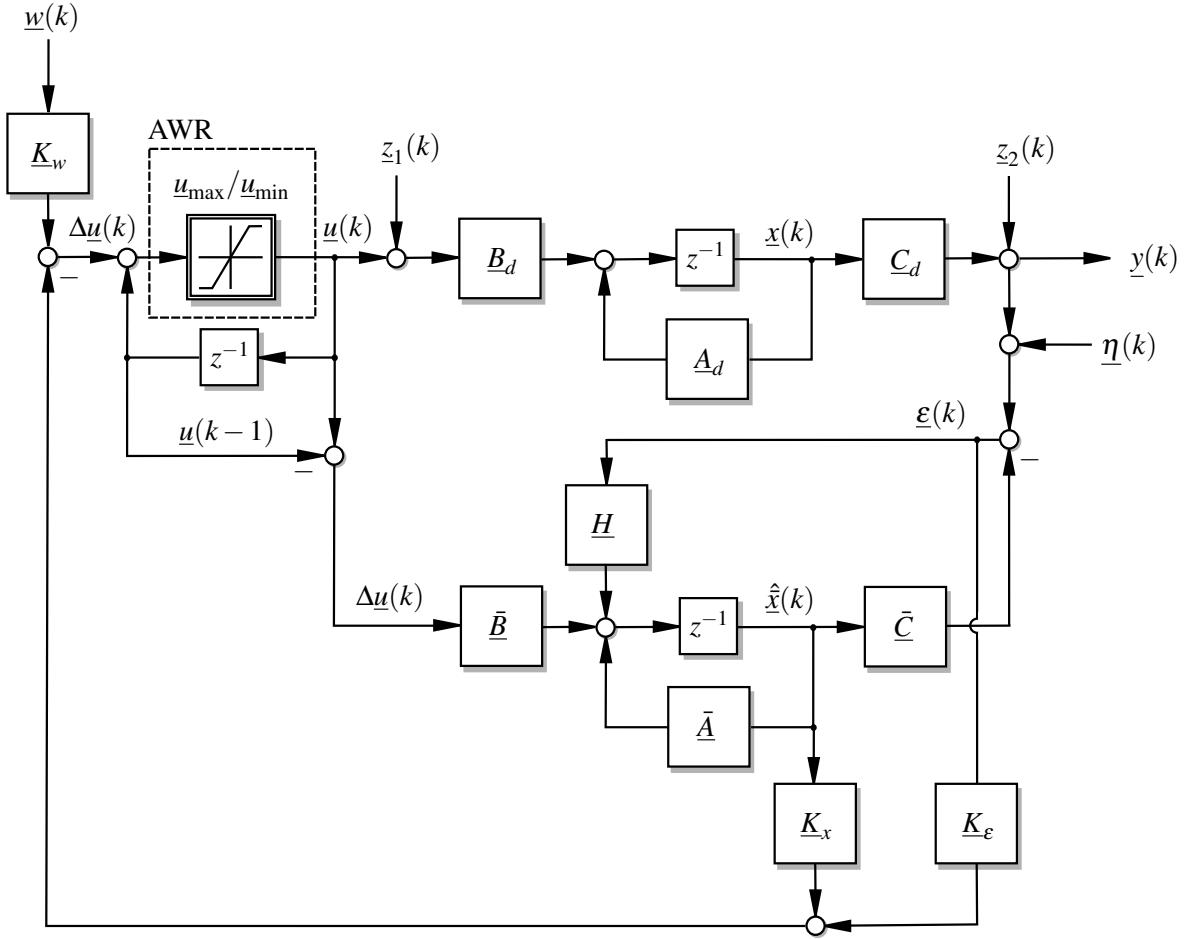


Abbildung 4.17: Blockschaltbild der MPC-Regelung

betrachtet. Das Regelsystem kann in Zustandsraumformulierung vollständig über

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{x}}(k+1) \\ \underline{\tilde{\varepsilon}}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{B} \underline{K}_x & \bar{B} (\underline{K}_x - \underline{K}_\varepsilon \bar{C}) \\ 0 & \bar{A} - H \bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{x}}(k) \\ \underline{\tilde{\varepsilon}}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \underline{K}_w \\ 0 \end{bmatrix} \underline{w}(k) \\ &+ \begin{bmatrix} \underline{B}_d \\ 0 \\ \underline{B}_d \\ 0 \end{bmatrix} \underline{z}_1(k) + \begin{bmatrix} -\bar{B} \underline{K}_\varepsilon \\ -H \end{bmatrix} \underline{z}_2(k) + \begin{bmatrix} -\bar{B} \underline{K}_\varepsilon \\ -H \end{bmatrix} \underline{\eta}(k) \\ \underline{y}(k) &= \begin{bmatrix} \underline{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{x}}(k) \\ \underline{\tilde{\varepsilon}}(k) \end{bmatrix} + I \underline{z}_2(k) \end{aligned} \quad (4.95)$$

dargestellt werden. In Kurzschreibweise lautet diese Gleichung

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{x}}(k+1) &= \underline{A}_w \underline{\tilde{x}}(k) + \underline{B}_w \underline{w}(k) + \underline{B}_{z_1} \underline{z}_1(k) + \underline{B}_{z_2} \underline{z}_2(k) + \underline{B}_\eta \underline{\eta}(k) \\ \underline{y}(k) &= \underline{C}_w \underline{\tilde{x}}(k) + I \underline{z}_2(k) \end{aligned} \quad (4.96)$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix \underline{A}_w des Regelsystems sind die Wurzeln des charakteristischen Polynoms

$$P(z) = \det(zI - \underline{A}_w) = \det(zI - (\bar{A} - H \bar{C})) \det(zI - (\bar{A} - \bar{B} \underline{K}_x)) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.97)$$

Die Eigenwerte des Regelsystems setzen sich folglich aus den Eigenwerten des stationären Kalman-Filters $\underline{\lambda}_k(\bar{A} - \underline{H} \bar{C})$ und den Eigenwerten des MPC-Reglers $\underline{\lambda}_x(\bar{A} - \bar{B} \underline{K}_x)$ zusammen. Die Eigenwerte $\underline{\lambda}_k$ beeinflussen die Eigenwerte $\underline{\lambda}_x$ nicht. Der Entwurf des Kalman-Filters und der MPC-Regelung kann vollständig unabhängig voneinander erfolgen. Das resultierende Regelsystem ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte $\underline{\lambda}_k$ und $\underline{\lambda}_x$ innerhalb des Einheitskreises liegen. In der Theorie wird diese Tatsache Separationstheorem⁵ genannt, vergl. [Alt08, Lun08b].

Die Übertragungsmatrizen, welche das Ein-Ausgangsverhalten von den Störeingängen $\underline{z}_1(k)$, $\underline{z}_2(k)$ und $\underline{\eta}(k)$ zur Regelgröße $\underline{y}(k)$ beschreiben, können über

$$\underline{G}_{yz_1}(z) = \underline{C}_w(z \underline{I} - \underline{A}_w)^{-1} \underline{B}_{z1} \cong (\underline{A}_w, \underline{B}_{z1}, \underline{C}_w, \underline{0}) \quad (4.98a)$$

$$\underline{G}_{yz_2}(z) = \underline{C}_w(z \underline{I} - \underline{A}_w)^{-1} \underline{B}_{z2} + \underline{I} \cong (\underline{A}_w, \underline{B}_{z2}, \underline{C}_w, \underline{I}) \quad (4.98b)$$

$$\underline{G}_{y\eta}(z) = \underline{C}_w(z \underline{I} - \underline{A}_w)^{-1} \underline{B}_\eta \cong (\underline{A}_w, \underline{B}_\eta, \underline{C}_w, \underline{0}) \quad (4.98c)$$

berechnet werden. Das Übertragungsverhalten von der Führungsgröße $\underline{w}(k)$ zur Regelgröße $\underline{y}(k)$ ist gesondert zu betrachten. Aufgrund der internen Struktur der Systemmatrix \underline{A}_w , der Eingangsmatrix \underline{B}_w und der Ausgangsmatrix \underline{C}_w lässt sich zeigen, dass die Führungsübertragungsmatrix über

$$\underline{G}_{yw}(z) = \bar{C}(z \underline{I} - (\bar{A} - \bar{B} \underline{K}_x))^{-1} \bar{B} \underline{K}_w \cong ((\bar{A} - \bar{B} \underline{K}_x), \bar{B} \underline{K}_w, \bar{C}, \underline{0}) \quad (4.99)$$

gebildet werden muss. Im Gegensatz zum Standartregelkreis gilt hier

$$\underline{G}_{yw}(z) + \underline{G}_{yz_2}(z) \neq \underline{I} \quad (4.100)$$

nicht, vergl. Gleichung (4.44).

Aus dem Separationstheorem lassen sich nachfolgende Punkte folgern:

1. Die Führungsübertragungsmatrix $\underline{G}_{yw}(z)$ wird im nominellen Fall nicht vom Kalman-Filter beeinflusst.
2. Ob der MPC-Regelung die wahren Systemzustände \bar{x} oder die geschätzten Systemzustände $\hat{\bar{x}}$ zugeführt werden, beeinflusst die Führungsübertragungsmatrix $\underline{G}_{yw}(z)$ im nominellen Fall nicht⁶.
3. Der Schätzfehler beeinflusst die Stabilität der MPC-Regelung nicht.
4. Die Eigenwerte der Zustandsschätzung $\underline{\lambda}_k(\bar{A} - \underline{H} \bar{C})$ müssen nicht an der Streckendynamik $\underline{\lambda}(\bar{A})$, sondern an der Dynamik der MPC-Regelung $\underline{\lambda}_x(\bar{A} - \bar{B} \underline{K}_x)$ gemessen werden. Die Dynamik des Schätzers ist sinnvollerweise schneller zu wählen, als die Dynamik der Regelung.

Analogien zu LQR und LQG

In der Theorie zur optimalen Zustandsregelung wird bei der Herleitung oftmals stillschweigend angenommen, dass es sich um eine Festwertregelung eines linearen oder an einem AP linearisierten Systems handelt. Das Gütefunktional lautet dabei

$$V_{lqr} = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{x}^T(k+j) \underline{Q}_{lqr} \bar{x}(k+j) + \underline{u}^T(k+j) \underline{R}_{lqr} \underline{u}(k+j) \quad (4.101)$$

⁵Das Separationsprinzip gilt auch unter der Annahme stochastischer Störungen $\underline{\zeta}(k)$ und $\underline{v}(k)$ und ist die Grundlage für den LQG-Reglerentwurf.

⁶Unterschiedliche Anfangsbedingungen werden dabei vernachlässigt.

Wird das erweiterte Modell aus Gleichung (4.69) und $\underline{Q}_{lqr} = \bar{C}^T \underline{Q} \bar{C}$ und $\underline{R}_{lqr} = \underline{R}$ eingesetzt folgt

$$V_{dlqr} = \sum_{j=1}^{\infty} \underline{y}^T(k+j) \underline{Q} \underline{y}(k+j) + \Delta \underline{u}^T(k+j) \underline{R} \Delta \underline{u}(k+j) \quad (4.102)$$

Die Minimierung des Gütefunktionalen führt auf den optimalen Zustandsregler

$$\underline{K} = \left(\bar{B}^T \underline{P} \bar{B} + \underline{R} \right)^{-1} \bar{B}^T \underline{P} \bar{A} \quad (4.103)$$

\underline{P} bezeichnet die positiv-definite Lösung der zeitdiskreten Matrix-Riccati-Gleichung

$$\bar{A}^T \underline{P} \bar{A} - \underline{P} - \bar{A}^T \underline{P} \bar{B} \left(\bar{B}^T \underline{P} \bar{B} + \underline{R} \right)^{-1} \left(\bar{B}^T \underline{P} \bar{A} \right) + \underline{Q} = 0 \quad (4.104)$$

Der daraus resultierende optimale Zustandsregler \underline{K} entspricht gerade derjenigen Lösung des Optimierungsproblems (4.83), wenn im Gütefunktional $H_p = H_u = \infty$, $\underline{w}(k+j) = 0$ für $\forall j$ angesetzt und bei der Prädiktion der Einfluss des Kalman-Filters vernachlässigt wird. Die Kombination eines Kalman-Filters und eines optimalen Zustandsreglers wird in der Literatur LQG-Regelung genannt.

4.3.3 Entwurf des Kalman-Filters und der MPC-Regelung

Das zum System $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ duale System ist gegeben durch $(\bar{A}^T, \bar{C}^T, \bar{B}^T)$ [Lun08b]. Das Dualitätsprinzip bringt für die Auslegung des Kalman-Filters direkten praktischen Nutzen, denn eine optimale Zustandsregelung \underline{K} von (\bar{A}, \bar{B}) entspricht einer optimalen Beobachtungsmatrix \underline{H} des dualen Systems (\bar{A}^T, \bar{C}^T) . In gleicher Weise entspricht die optimale Beobachtungsmatrix \underline{H} von (\bar{A}, \bar{C}) einer optimalen Zustandsregelung \underline{K} des dualen Systems (\bar{A}^T, \bar{B}^T) .

Das stochastische Optimierungsproblem des Kalman-Filters aus Abschnitt 4.3.2 führt auf die Matrix-Riccati-Gleichung (4.77). Das deterministische Optimierungsproblem der Zustandsregelung aus Abschnitt 4.3.2 führt hingegen auf die Matrix-Riccati-Gleichung (4.104). Wird hier das System $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ durch dessen duales System $(\bar{A}^T, \bar{C}^T, \bar{B}^T)$ ersetzt resultiert wiederum Gleichung (4.77). Das stochastische Optimierungsproblem des Kalman-Filters kann folglich auch als deterministisches Optimierungsproblem einer Zustandsregelung mit dem dualen System interpretiert werden. Für die Auslegung des Kalman-Filters relativiert sich dessen stochastische Natur insofern, dass die Kovarianz-Matrizen \bar{Q}_k und \bar{R}_k auch als Wichtungsmatrizen des dualen Regelungsproblems verstanden werden können.

Empfehlungen an den Anwender

Nachfolgende Ausführungen richten sich insbesondere an Anwender die wenig Erfahrung in der Auslegung von optimalen Zustandsreglern und Beobachterstrukturen haben. Die Auslegung des Kalman-Filters und der MPC-Regelung stützt sich auf Empfehlungen aus [Gee04] und ist an das Verfahren LQG/LTR angelehnt. Die Theorie hierzu kann bspw. in [HJS08] nachgelesen werden. Es wird vorausgesetzt, dass die Regelstrecke über Eingangs- und Ausgangswichtungsmatrizen geeignet skaliert ist.

Wichtungsmatrizen der MPC-Regelung: Bei einer optimalen Zustandsregelung werden die Wichtungsmatrizen

$$\underline{Q}_{lqr} = \bar{C}^T \bar{C}, \quad \underline{R}_{lqr} = \rho I \quad (4.105)$$

empfohlen, was über die Überlegungen in Abschnitt 4.3.2 direkt mit dem Gütefunktional der MPC-Regelung in Verbindung gebracht werden kann. Für die Wichtungsmatrizen der MPC-Regelung folgt

$$\underline{Q} = I, \quad \underline{R} = \rho I \quad \rho \geq 0 \quad (4.106)$$

Für die Interpretation des Regelparameters ρ soll Gleichung (4.91) der optimalen, zukünftigen Stellgrößenänderung betrachtet werden. Hier gilt es die Matrix $\underline{M} = \underline{S}_{\Delta u}^T \underline{Q} \underline{S}_{\Delta u} + \underline{R}$ zu invertieren. Mit den genannten Empfehlungen folgt $\underline{M} = \underline{S}_{\Delta u}^T \underline{S}_{\Delta u} + \rho \underline{I}$. Über den Skalierungsfaktor ρ sind die Eigenwerte $\lambda(\underline{M})$ der Matrix \underline{M} direkt beeinflussbar. Dies soll kurz aufgezeigt werden:

Sei \underline{v}_i der Eigenvektor zum Eigenwert λ_i der Matrix $\underline{S}_{\Delta u}^T \underline{S}_{\Delta u}$ so kann geschrieben werden

$$\underline{M} \underline{v}_i = (\underline{S}_{\Delta u}^T \underline{S}_{\Delta u} + \rho \underline{I}) \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i + \rho \underline{v}_i = (\lambda_i + \rho) \underline{v}_i \quad (4.107)$$

Offensichtlich ist \underline{v}_i auch ein Eigenvektor der Matrix \underline{M} , die Eigenwerte hingegen sind die Summe $\lambda + \rho$. Damit ΔU^* existiert muss die Matrix $\underline{M} > 0$ sein. ρ muss folglich so gewählt werden, dass $\lambda_i + \rho > 0$ für $\forall i$ gilt. In Bezug auf das Regelverhalten kann gesagt werden, je kleiner ρ gewählt wird, desto dynamischer fällt die resultierende Regelung aus.

Prädiktions- und Stellgrößenhorizont: Für die Wahl des Prädiktionshorizont H_p ist es nützlich die Sprungantworten der Regelstrecke zu betrachten.

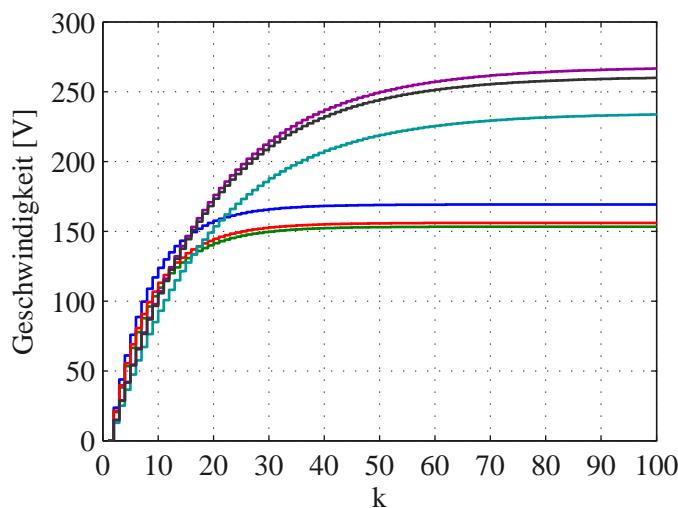


Abbildung 4.18: Sprungantworten der Strecke in die Hauptübertragungsrichtungen, Abtastzeit 1 ms, BGRCMS: $dq_{1,\dots,6}(k)$

In Abbildung 4.18 sind die Sprungantworten des Modells von den Stellgrößen $u_i(k) \rightarrow dq_{Si}(k)$ für $i = 1, \dots, 6$ eingezeichnet. Nach 60 Abtastschritten erreichen die Sprungantworten der horizontalen Dynamik ca. 95% ihres statischen Endwertes. Als Richtwert wird für den Prädiktionshorizont $H_p = 60$ empfohlen.

Für die Wahl des Stellgrößenhorizontes soll die innere Struktur der Übertragungsmatrix der Strecke betrachtet werden. Das Zustandsraummodell weist zwar eine Ordnung von $n_x = 12$ auf, 6 der Eigenwerte sind jedoch einfache Integratoren. Folglich weisen die Übertragungsmatrizen $G_{ii}(z)$ maximal 6 Pole und einen Integrator auf. Als Richtwert wird deshalb $H_u \leq 6$ empfohlen und es gilt prinzipiell, je grösser H_u gewählt wird, desto besser ist das Störverhalten der Regelung.

Wichtungsmatrizen des Kalman-Filters: Wird die Empfehlung des optimalen Zustandsreglers auf das duale Problem des Kalman-Filters übertragen, müssen hier die Wichtungsmatrizen

$$\underline{\underline{Q}}_k = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}^T, \quad \underline{\underline{R}}_k = \rho_k \underline{\underline{I}} \quad \rho_k > 0 \quad (4.108)$$

eingesetzt werden. Beim Kalman-Filter gilt grundsätzlich, je kleiner ρ_k gewählt wird, desto höher ist die Dynamik des Schätzers und desto grösser sind die Gewichte in \underline{H} . ρ_k ist also so zu wählen, dass der Schätzer möglichst dynamisch, der Einfluss des Messrauschen jedoch tolerierbar ist, siehe hierzu Gleichung (4.75).

Grundsätzlich ist es empfehlenswert das Regelverhalten über Simulationen auf die Erfüllung der Anforderungen zu prüfen.

Entwurf des Kalman-Filters

Für das Kalman-Filter haben sich die Wichtungsmatrizen

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{Q}}_k &= \text{diag}([10^2 \cdot \underline{1} \ 10 \cdot \underline{1} \ 10^4 \cdot \underline{1}]) \quad \text{mit } \underline{1} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] \\ \rho_k &= 10^{-6}\end{aligned}\tag{4.109}$$

als geeignet herausgestellt.

Entwurf der MPC-Regelung

Die über Simulationen optimierten Regelparameter der MPC-Regelung lauten

$$\begin{aligned}H_p &= 60 & \underline{Q} &= \text{diag}([1 \ 1.2 \ 1.4 \ 14 \ 12 \ 14]) \\ H_u &= 3 & \underline{R} &= \text{diag}([2 \ 2 \ 2 \ 20 \ 20 \ 20])\end{aligned}\tag{4.110}$$

4.3.4 Stabilitätsnachweis der Gesamtregelstrecke

Die Eigenwerte des Schätzers $\underline{\lambda}_k(\underline{\bar{A}} - \underline{H} \underline{\bar{C}})$ und des MPC-Reglers $\underline{\lambda}_x(\underline{\bar{A}} - \underline{\bar{B}} \underline{K}_x)$ sind in Abbildung 4.19 eingezeichnet. Alle Eigenwerte liegen innerhalb des Einheitskreises. Das Regelsystem ist stabil. Die Dämpfung der schwingungsfähigen Eigenwerte liegt bei ca. 0.7.

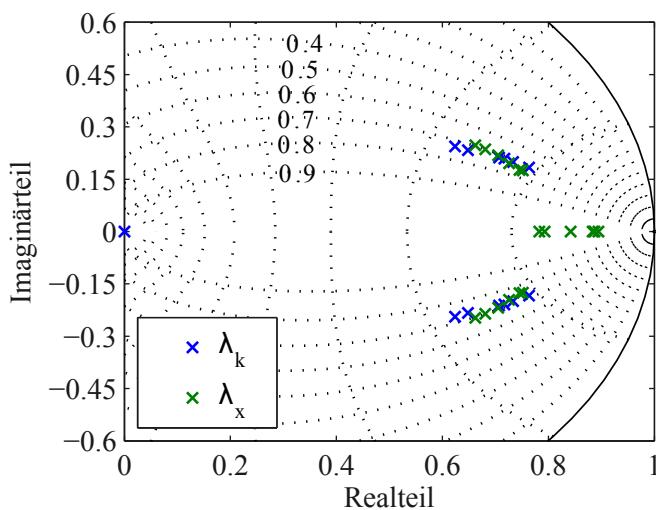


Abbildung 4.19: Eigenwerte des Schätzers und des MPC-Reglers

4.3.5 Singulärwertverlauf der MPC-Regelung

Der Singulärwertverlauf der Übergangsfunktionen $G_{yw}(z)$, $G_{yz_1}(z)$, $G_{yz_2}(z)$ und $G_{y\eta}(z)$ ist in Abbildung 4.20 dargestellt. Das Regelsystem weist keine statische Regelabweichung auf. Eingangsstörungen werden bei 44 Hz minimal mit -5.5 dB abgeschwächt. Die Bandbreite des Regelsystems beträgt 38 Hz, das Führungsverhalten ist gut gedämpft. Weiter ist erkennbar, dass Störungen am Messeingang $\eta(k)$ deutlich verstärkt werden.

Die direkte Gegenüberstellung des Singulärwertverlaufs der PID-T₁-Regelung und der MPC-Regelung ist in Abbildung A.9 eingezeichnet.

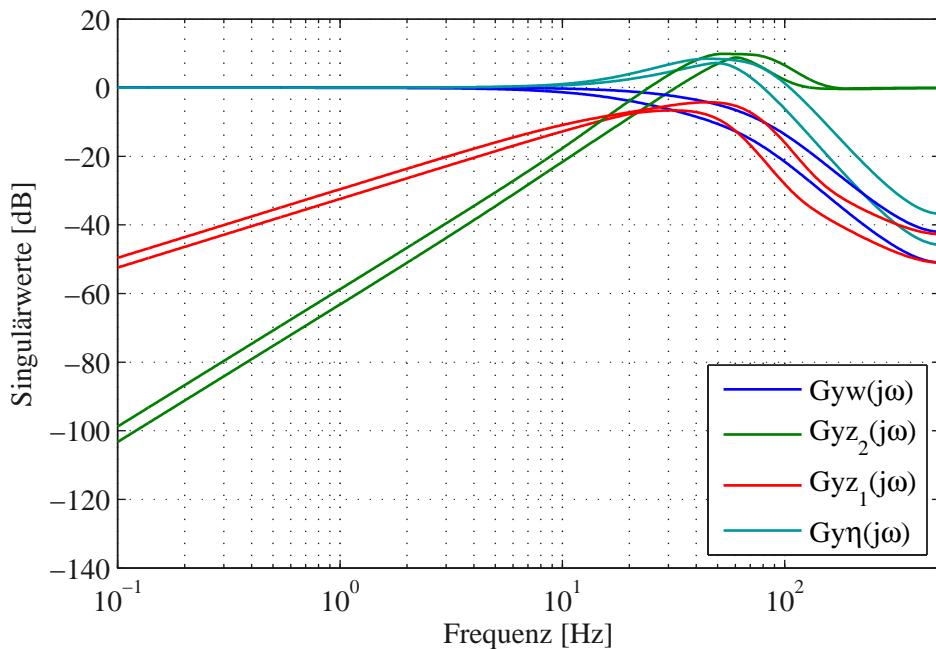


Abbildung 4.20: Singulärwertverlauf der MPC-Regelung

4.3.6 Vergleich zwischen den gemessenen Sprungantworten und der Simulation

In Abbildung 4.15 ist der Vergleich zwischen den gemessenen Sprungantworten und der Simulation des MPC-Regelsystems eingezeichnet. Bei der Simulation sind die gleichen Randbedingungen wie bei der PID-Regelung berücksichtigt, vergl. Abschnitt 4.2.6.

In Abbildung 4.21(a,b) wird ein Führungssprung $w^T(k) = [0.12 \ 0.12 \ 0.12 \ 0 \ 0 \ 0]$ V und in Abbildung 4.21(c,d) wird ein Führungssprung $w^T(k) = [0 \ 0 \ 0 \ 0.12 \ 0.12 \ 0.12]$ V betrachtet. Der Verlauf der Sprungantworten ist nahezu asymptotisch. Die vertikalen Sprungantworten sind nach ca. 40 ms eingeschwungen. Die horizontalen Sprungantworten sind nach ca. 50 ms eingeschwungen. Die Stellgröße der vertikalen Aktoren ist deutlich stärker verrauscht als bei der horizontalen Dynamik. Die Simulation bildet das Führungsverhalten im Zeitbereich gut ab.

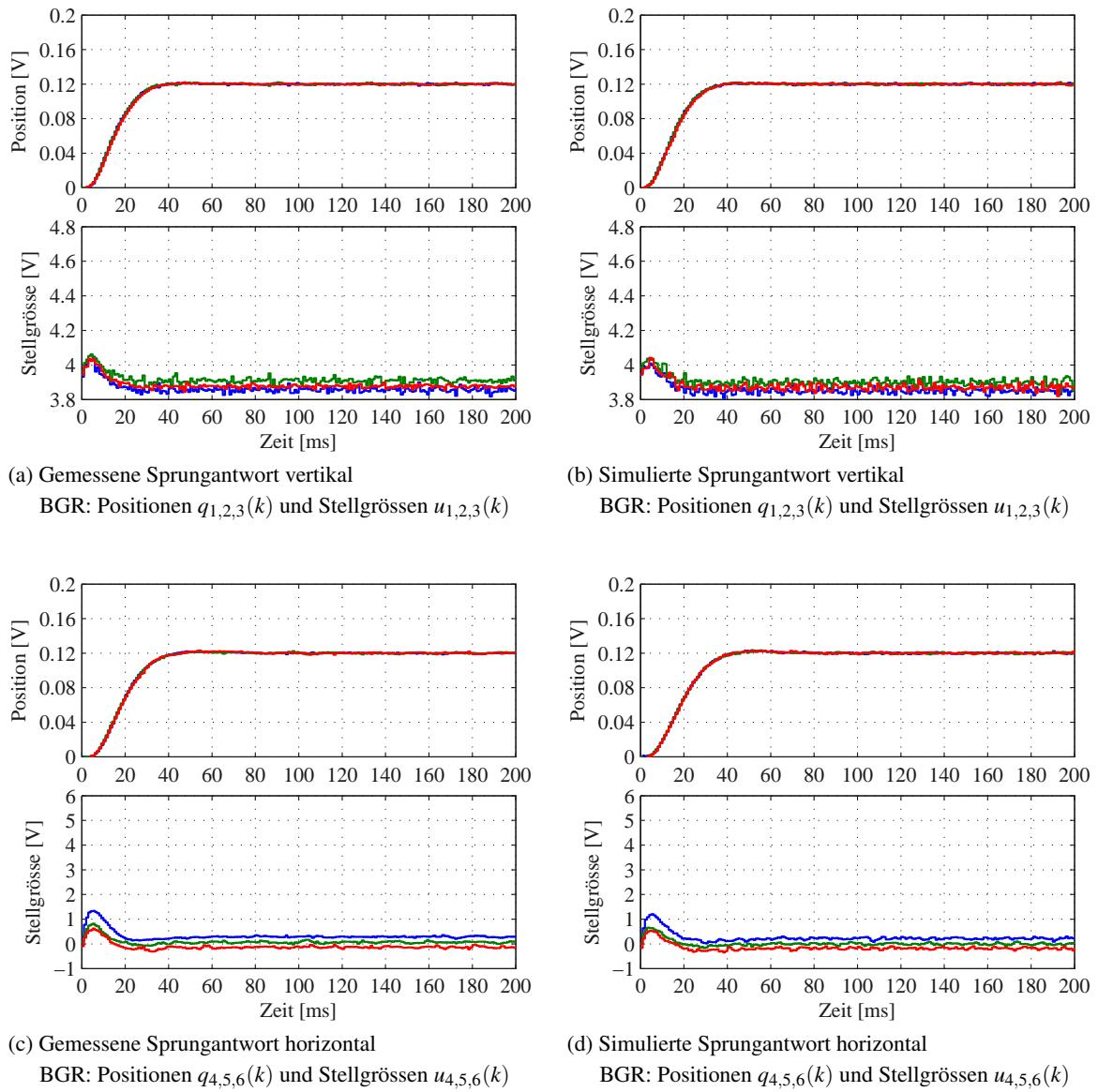


Abbildung 4.21: Gegenüberstellung von den gemessenen und den simulierten Sprungantworten des MPC-Regelsystems

Anmerkung

- Im Gegensatz zur herkömmlichen PID- T_1 -Regelung ist die Abtastzeit $T_s = 1$ ms bei der MPC-Regelung hinreichend. Erfahrungsgemäss sind modellbasierte Regelungen toleranter in Bezug auf die Abtastzeit.
- Die Wahl der Wichtungsmatrizen des Kalman-Filters kann in Bezug auf die Signalgüte der Stellgrösse verbessert werden.

5 Experimentelle Modellbildung

White-Box-Modell

Wie in Kapitel 2 beschrieben kann durch die theoretische Modellbildung die grundlegende Struktur eines physikalischen Modells des VC6 gefunden werden. Charakteristische Systemeigenschaften können mit Hilfe des Modells untersucht und verstanden werden. Die unbekannten Modellparameter wurden dabei experimentell ermittelt.

Im Allgemeinen unterliegen die physikalischen Modellparameter gewissen Modellunsicherheiten. Als Ergänzung bietet sich deshalb die experimentelle Modellbildung an. Unter der Verwendung von Messdaten werden bei der experimentellen Modellbildung mathematische Modelle ermittelt, mit denen das Ein-Ausgangsverhalten des VC6 beschrieben werden kann.

Black-Box-Modell

Ein Black-Box-Modell beschreibt das Ein- Ausgangsverhalten eines Systems als Black-Box. Über dessen interne Wechselwirkungen können keine Rückschlüsse auf die Wirklichkeit gemacht werden.

Der Vorteil der Black-Box-Systemidentifikation ist, dass auf eine Modellierung des Prozesses mit Hilfe von Differentialgleichungen verzichtet werden kann. Anstelle dessen werden Identifikationsalgorithmen benötigt, welche die Black-Box-Modelle anhand von Messdaten bestimmen. Wird das Ein- Ausgangsverhalten durch die ermittelten Modelle hinreichend beschrieben, können diese dem Entwurf einer Regelung zugrunde gelegt oder auch für die Systemdiagnose herangezogen werden.

5.1 Grundlagen der Black-Box-Systemidentifikation

In folgendem Abschnitt soll ein grundlegendes Verständnis der Systemidentifikation und der verwendeten Identifikationsmethoden vermittelt werden. Die Systemidentifikation soll hierbei als Werkzeug für den Anwender verstanden werden. Die praxisrelevanten Aspekte der verwendeten Identifikationsmethoden werden aufgezeigt und Vor- und Nachteile dargestellt. Bei den Algorithmen handelt es sich um eine Zusammenstellung aus den Werken [Lju87, Lju01, McK95, Ise92b, Ise11, Zhu01, And97]. Das Ziel ist es, ein lineares, nicht-sprungfähiges, zeitdiskretes MIMO-Black-Box-Modell zu identifizieren.

Die Forderung an die Systemidentifikation besteht darin, die unbekannten Parameter (Koeffizienten) des Modells derart zu bestimmen, dass der Fehler des Ein-Ausgangsverhalten zwischen dem realen Prozess und dessen Modell minimal wird. Die Modellordnung ist dabei bekannt. Es handelt sich somit um eine Parameteroptimierung und nicht um eine Strukturoptimierung.

Wichtigstes Werkzeug der Systemidentifikation ist die Optimierungstheorie, mit deren Hilfe der Fehler zwischen dem Prozess und dessen Modell minimiert wird. Neben dem Modellansatz führen insbesondere die unterschiedlichen Fehlermodelle zu unterschiedlichen Optimierungsproblemen, da über das Fehlermodell der Prädiktor und die Anforderungen an den Identifikationsalgorithmus definiert werden.

5.1.1 Grundlegendes zur MIMO-Systemidentifikation

SIMO- und MISO-Modelle versus MIMO-Modelle

Gewisse Vorgehensweisen zielen darauf ab, das Problem der MIMO-Systemidentifikation über SIMO- oder MISO-Modellstrukturen auf die Problemstellung der SISO-Systemidentifikation zu reduzieren. Wird der zu identifizierende Prozess gleichzeitig über alle Eingänge angeregt und alle Ausgänge gemessen führt dies im Allgemeinen auf die Problemstellung der MIMO-Systemidentifikation.

Modellstruktur

Die bei der MIMO-Systemidentifikation verwendeten Modellstrukturen lassen sich in der Hauptklassen unterteilen:

1. Übertragungsmatrix: $\underline{G}(z)$
2. Polynommatrizen: $\underline{I} + \underline{A}_1 z^{-1} + \dots + \underline{A}_{n_A} z^{-n_A} = \underline{B}_1 z^{-d-1} + \dots + \underline{B}_{n_B} z^{-d-n_B}$
3. Zustandsraummodelle: $\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \underline{u}(k), \quad \underline{y}(k) = \underline{C} \underline{x}(k)$

Hinsichtlich der MPC-Regelung sind Zustandsraummodelle die geeignete Modellstruktur. Falls eine Minimalrealisierung vorliegt, können Zustandsraummodelle einfach in Übertragungsmatrizen überführt werden. Die Darstellung mit Hilfe von Polynommatrizen ist heutzutage weniger gebräuchlich.

Kanonische Zustandsraummodelle

Man kann zeigen, dass eine Ähnlichkeitstransformation eines Zustandsraummodells keinen Einfluss auf die zugehörige Übertragungsmatrix hat. Daraus folgt, dass die Zustandsraumbeschreibung keine eindeutige Beschreibung für das Ein- Ausgangsverhalten eines Systems ist. Die Transformation ist deshalb so zu wählen, dass möglichst viele Elemente des Trippels $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ zu 0 oder 1 werden. Dies wird durch die Transformation auf sogenannte kanonische Formen erreicht [Ise92b].

5.1.2 Modellansatz

Aus der theoretischen Modellbildung ist bekannt, dass sich die Dynamik des VC6 mit $\underline{x}^T = [\underline{q}_s^T \ \dot{\underline{q}}_s^T]$ als zeitkontinuierliches Zustandsraummodell der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{x} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C} \underline{x} \quad \text{mit} \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{(12 \times 12)}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{(12 \times 6)}, \underline{C} \in \mathbb{R}^{(6 \times 12)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

darstellen lässt. Dabei sind

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{I} \\ \underline{0} & \tilde{\underline{A}} \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\underline{B}} \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

wobei alle Untermatrizen von der Dimension (6×6) sind. Vom Eingang \underline{u} zur Geschwindigkeit $\dot{\underline{q}}_s$ handelt es sich folglich um ein proportionales System 6ter Ordung, mit anschliessender, zeitkontinuierlicher Integration. Die Diskretisierung mit der Euler-Vorwärts-Methode liefert das zeitdiskrete Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \underline{A}_d \underline{x}(k) + \underline{B}_d \underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) &= \underline{C}_d \underline{x}(k) \end{aligned} \quad (5.3)$$

und es sind

$$\underline{A}_d = T_s \underline{A} + \underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{I} & T_s \underline{I} \\ \underline{0} & \tilde{\underline{A}}_d \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_d = T_s \underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \tilde{\underline{B}}_d \end{bmatrix}, \quad \underline{C}_d = \underline{C} \quad (5.4)$$

mit den Untermatrizen

$$\tilde{\underline{A}}_d = T_s \underline{A} + \underline{I}, \quad \tilde{\underline{B}}_d = T_s \underline{B} \quad (5.5)$$

Durch die Diskretisierung mit der Euler-Vorwärts-Methode entsteht im Gegensatz zur ZOH-Transformation keine zusätzliche Verkoppelung über die Integrationsgleichungen beim zeitdiskreten Modell. Somit handelt es sich auch hier um ein proportionales System sechster Ordnung mit anschliessender, zeitdiskreter Integration. Das Blockschaltbild hierzu ist in nachfolgender Abbildung 5.1 eingezeichnet.

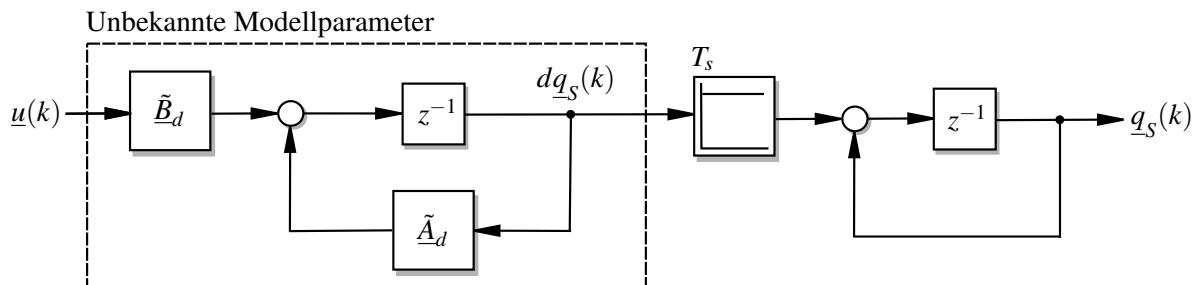


Abbildung 5.1: Blockschaltbild des diskreten Modells

Die Geschwindigkeit $d\underline{q}_s(k)$ lässt sich einfach anhand von

$$d\underline{q}_s(k) = \frac{\underline{q}_s(k+1) - \underline{q}_s(k)}{T_s} \quad (5.6)$$

bestimmen¹.

In dieser Form genügt es, die diskrete Geschwindigkeit über das Positionssignals zu bestimmen, die Matrizen $\tilde{\underline{A}}_d, \tilde{\underline{B}}_d \in \mathbb{R}^{(6 \times 6)}$ anhand der Ein- und Ausgangssignale zu identifizieren und anschliessend über die Gleichung (5.4) in das gesuchte Modell überzuführen. Interessiert das zeitkontinuierliche Modell, kann das zeitdiskrete Modell entsprechend

$$\underline{A} = \frac{1}{T_s} (\underline{A}_d - \underline{I}), \quad \underline{B} = \frac{1}{T_s} \underline{B}_d \quad (5.7)$$

vom \mathcal{Z} - in den \mathcal{L} -Bereich transformiert werden.

Der Vorteil dieses Modellansatzes ist es, dass alle Zustände messbar sind. Des Weiteren kann ein proportionales Modell identifiziert werden. Die erforderlichen Identifikationsalgorithmen vereinfachen sich dadurch wesentlich. Lineare Identifikationsmethoden, bei denen Zustandsraummodelle identifiziert werden können, bei welchen nicht alle Zustände messbar sind gehören zur Klasse der Subspace-Systemidentifikationsmethoden, der interessierte Leser sei auf die Werke [Ise11, Lju87, McK95] verwiesen. In dieser Form kann das Zustandsraummodell auch als Polynommatrizen-Modell interpretiert werden, wodurch sich einfache Rückschlüsse auf bekannte Eigenschaften von SISO-Systemidentifikations-Modellen und Methoden ableiten lassen. Die Problemstellung einer geeigneten kanonischen Darstellungsform wird nicht weiter beachtet.

¹Die Schreibweise soll darauf hinweisen, dass für die Berechnung der aktuellen Geschwindigkeit, die um einen Abtastschritt in der Zukunft liegende Position $\underline{q}_s(k+1)$ verwendet wird.

Für eine einfachere Schreibweise soll der zu identifizierende Prozess zukünftig durch

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \underline{x}(k) + \underline{B} \underline{u}(k) \quad \text{mit} \quad \underline{x}(k) = d\underline{q}_S(k) \quad \text{und} \quad \underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)} \quad (5.8)$$

angeschrieben werden. Das Modell entspricht einer Linearisierung im AP. $\underline{u}(k)$ und $\underline{x}(k)$ sind daher als die relativen Änderungen der absoluten Signalwerte $\underline{U}(k)$ und $\underline{X}(k)$ zu den Gleichwerten \underline{U}_{00} und \underline{X}_{00} zu verstehen.

$$\underline{u}(k) = \underline{U}(k) - \underline{U}_{00} \quad (5.9a)$$

$$\underline{x}(k) = \underline{X}(k) - \underline{X}_{00} \quad (5.9b)$$

5.1.3 ARX-Systemidentifikation mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Die \mathcal{Z} -Transformation der Gleichung (5.8) liefert das Prozessmodell

$$\underline{x}(z) = (\underline{I} - \underline{A} z^{-1})^{-1} \underline{B} z^{-1} \underline{u}(z) \quad (5.10)$$

Beim ARX-Modellansatz wird davon ausgegangen, dass der Prozessausgang durch ein weisses Rauschen $\underline{v}(k)$ und ein Störfilter der Form

$$\underline{x}(z) = (\underline{I} - \hat{\underline{A}} z^{-1})^{-1} \hat{\underline{B}} z^{-1} \underline{u}(z) + (\underline{I} - \hat{\underline{A}} z^{-1})^{-1} \underline{v}(z) \quad (5.11)$$

überlagert wird, vergl. Abbildung 5.2. Durch Ansetzen des Gleichungsfehlers $\underline{e}(k+1) = \underline{v}(k+1)$ und Rücktransformation in den Zeitbereich folgt

$$\underline{e}(k+1) = \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{A}} \underline{x}(k) - \hat{\underline{B}} \underline{u}(k) \quad (5.12)$$

Als Prädiktor wird beim ARX-Modellansatz

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \hat{\underline{A}} \underline{x}(k) + \hat{\underline{B}} \underline{u}(k) \quad (5.13)$$

angesetzt. Es ist zu beachten, dass für die Prädiktion aktuelle Messwerte $\underline{x}(k)$ einfließen, weshalb sich Gleichung (5.12) in der Form

$$\underline{e}^T(k+1) = \underline{x}^T(k+1) - \begin{bmatrix} \underline{x}^T(k) & \underline{u}^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{A}}^T \\ \hat{\underline{B}}^T \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

für $N+1$ Messwerte in ein überbestimmtes GLS entwickeln lässt.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{e}^T(1) \\ \underline{e}^T(2) \\ \vdots \\ \underline{e}^T(N) \end{bmatrix}}_{\underline{E}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}^T(1) \\ \underline{x}^T(2) \\ \vdots \\ \underline{x}^T(N) \end{bmatrix}}_{\underline{X}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}^T(0) & \underline{u}^T(0) \\ \underline{x}^T(1) & \underline{u}^T(1) \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}^T(N-1) & \underline{u}^T(N-1) \end{bmatrix}}_{\Psi} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\underline{A}}^T \\ \hat{\underline{B}}^T \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{\Theta}}} \quad (5.15)$$

Die Dimensionen sind $\underline{\Psi} \in \mathbb{R}^{(N \times 2n_x)}$, $\underline{E}, \underline{X} \in \mathbb{R}^{(N \times n_x)}$, $\hat{\underline{\Theta}} \in \mathbb{R}^{(2n_x \times n_x)}$, wobei $n_x = n_u$ sein muss.

Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Als Minimierungsproblem wird

$$\hat{\underline{\Theta}}^* = \arg \min_{\hat{\underline{\Theta}}} \left\{ V = \sum_{k=1}^N \underline{e}(k) \underline{e}^T(k) = \underline{E}^T \underline{E} \right\} \quad (5.16)$$

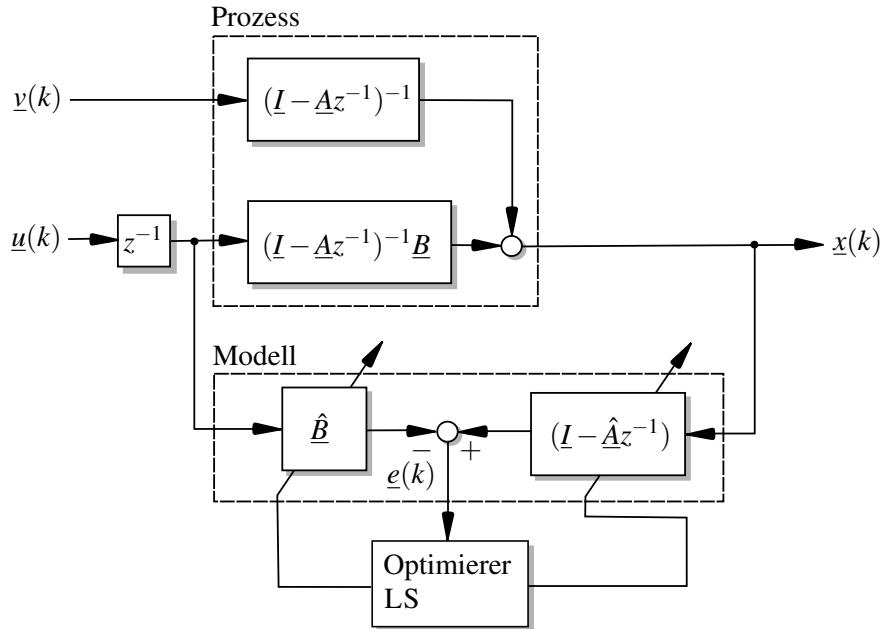


Abbildung 5.2: Blockschaltbild der ARX-Systemidentifikation

angesetzt. Partielles Ableiten von \underline{V} nach \underline{E} und Nullsetzen

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial \underline{E}} = -2\underline{\Psi}^T \underline{X} + 2\underline{\Psi}^T \underline{\Psi} \hat{\Theta} \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.17)$$

führt auf die Standardlösung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$\hat{\Theta}^* = (\underline{\Psi}^T \underline{\Psi})^{-1} \underline{\Psi}^T \underline{X} \quad (5.18)$$

Die Matrix

$$P = (\underline{\Psi}^T \underline{\Psi})^{-1} \underline{\Psi}^T \quad (5.19)$$

wird als Pseudoinverse bezeichnet. Sie existiert falls die Matrix $\underline{\Psi}^T \underline{\Psi}$ $2n_x$ linear unabhängige Spalten, also den Rang 12 hat. Linear abhängige Spalten entstehen, wenn das System nicht ausreichend angeregt wird. Damit das Gütefunktional \underline{V} ein eindeutiges Minimum besitzt, muss die Matrix $\underline{\Psi}^T \underline{\Psi}$ positiv definit und das System stabil sein. Die beiden genannten Bedingungen sind erfüllt, falls

$$\det(\underline{\Psi}^T \underline{\Psi}) > 0 \quad (5.20)$$

Vorteile

- Der Algorithmus ist einfach zu implementieren.
- Die Methode ist bei nicht stark verrauschten Signalen robust.
- Da für die Prädiktion aktuelle Messwerte verwendet werden, erübrigt sich das Problem der unbekannten Anfangswerte $\underline{x}(0)$.
- Ein einmaliger Rechendurchlauf liefert den Parametersatz $\hat{\Theta}$.

Nachteile

- Die gestellte Forderung an das Störmodell führt im Allgemeinen auf Schätzungen mit Bias.

- Die Methode ist in dieser Form nur anwendbar, wenn alle Zustände messbar sind oder aus den Messungen bestimmt werden können.

5.1.4 OE-Systemidentifikation mit Hilfe der Methode des Prädiktionsfehlers

Beim OE-Modellansatz wird davon ausgegangen, dass der Prozess aus Gleichung (5.10) direkt durch ein weisses Rauschen gestört wird.

$$\underline{x}(z) = (\underline{I} - \hat{\underline{A}} z^{-1})^{-1} \hat{\underline{B}} z^{-1} \underline{u}(z) + \underline{v}(z) \quad (5.21)$$

Im Zeitbereich wird der Prädiktions- oder Ausgangsfehler $\underline{e}(k+1) = \underline{v}(k+1)$ wie folgt definiert

$$\underline{e}(k+1) = \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1) = \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{A}} \hat{\underline{x}}(k) - \hat{\underline{B}} \underline{u}(k) \quad (5.22)$$

Als Prädiktor wird beim OE-Modellansatz

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = \hat{\underline{A}} \hat{\underline{x}}(k) + \hat{\underline{B}} \underline{u}(k) \quad (5.23)$$

angesetzt. Für die Prädiktion wird der aktuelle Modellausgang verwendet, was den fundamentalen Unterschied zum ARX-Modellansatz darstellt. Durch sukzessive Entwicklung von Gleichung (5.23) für $\hat{\underline{x}}(k+2), \hat{\underline{x}}(k+3), \dots, \hat{\underline{x}}(k+N)$ wird ersichtlich, dass dieser Ansatz auf ein nichtlineares Ausgleichsproblem führt. Ein weiteres Problem sind die unbekannten Anfangsbedingungen $\hat{\underline{x}}(0)$. Diese können jedoch als Teil des Optimierungsproblems formuliert werden.

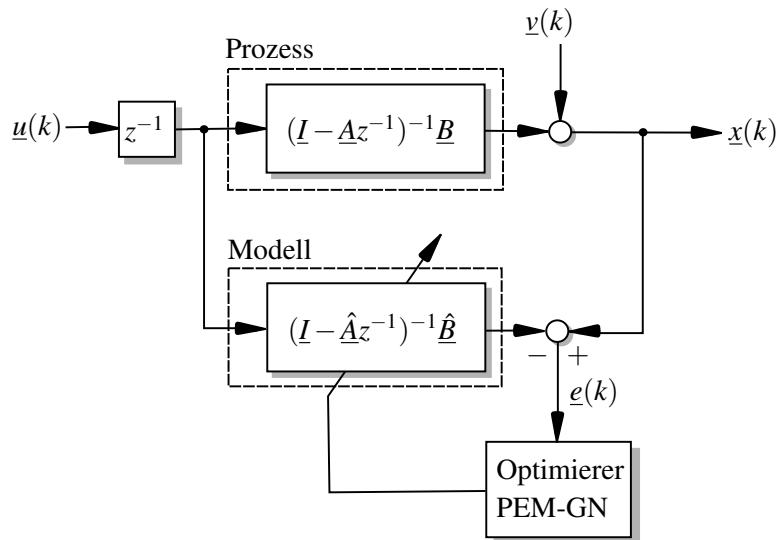


Abbildung 5.3: Blockschaltbild der PEM-OE-Systemidentifikation

Gauss-Newton-Methode für überbestimmte Gleichungssysteme

Beim Gauss-Newton-Algorithmus handelt es sich um ein iteratives Gradientenabstiegsverfahren. Es wird vorausgesetzt, dass eine Initialisierungslösung $\hat{\theta}_0$ in einer konvexen Umgebung des Optimums $\hat{\theta}^*$ vorhanden ist. Diese kann bspw. über das Verfahren der ARX-Systemidentifikation gewonnen werden. Die nachfolgenden Ausführungen stammen aus der Dissertation [And97].

Dass Minimierungsproblem wird wie folgt definiert.

$$\hat{\underline{\theta}}^* = \arg \min_{\hat{\underline{\theta}}} \left\{ V = \det \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \underline{e}(k) \underline{e}^T(k) \right) \right\} \quad (5.24)$$

Im Gegensatz zum Gütefunktional der ARX-Methode ist V eine skalare Grösse und $\underline{\hat{\theta}}$ als Vektor zu lesen. Falls die unbekannten Anfangsbedingungen $\underline{x}(0)$ als Teil des Optimierungsproblems formuliert werden, hat $\underline{\hat{\theta}}$ die Dimension $n = (n_x(2n_x + 1) \times 1)$ wobei $n_x = n_u$ ist.

Die Updategleichung für die Parameter $\underline{\hat{\theta}}^i$ lautet

$$\underline{\hat{\theta}}^{i+1} = \underline{\hat{\theta}}^i + \mu_i^* \underline{R}^{-1} \underline{f} \quad (5.25)$$

Bei $n = n_x(2n_x + 1) = 78$ unbekannten Parametern sind

$$\underline{Q} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \underline{e}(k) \underline{e}^T(k) \quad \underline{Q} \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)} \quad (5.26a)$$

$$\underline{R} = \sum_{k=1}^N \underline{\psi}(k) \underline{Q}^{-1} \underline{\psi}^T(k) \quad \underline{R} \in \mathbb{R}^{(n \times n)} \quad (5.26b)$$

$$\underline{f} = \sum_{k=1}^N \underline{\psi}(k) \underline{Q}^{-1} \underline{e}(k) \quad \underline{f} \in \mathbb{R}^{(n \times 1)} \quad (5.26c)$$

Dabei ist

$$\underline{\psi}(k) = \frac{\partial \underline{e}(k)}{\partial \underline{\hat{\theta}}} \quad (5.27)$$

der Gradient des Prädiktionsfehlers aus Gleichung (5.22). Die optimale Schrittweite μ^*

$$\mu_i^* = \arg \min_{\mu} \left\{ V \left(\underline{\hat{\theta}}^i + \mu_i \underline{R}^{-1} \underline{f} \right) \right\} \quad (5.28)$$

wird über ein eindimensionales Optimierungsproblem bestimmt. Dieses wird mit Hilfe des Verfahrens des Goldenen-Schnittes gelöst. Vorteil dieser Methode ist es, dass für μ eine obere und untere Grenze vorgeben werden kann sowie dass für die Entscheidung, in welcher Richtung das Minima liegt nur ein Funktionswert ausgewertet werden muss. Der interessierte Leser sei auf das Skriptum [Kna08] verwiesen. Die Berechnung des Gradient aus Gleichung (5.27) ist zwar analytisch möglich, siehe hierzu [CM98], wurde jedoch über die zentrierte Differenzen

$$\frac{\partial \underline{e}(k)}{\partial \underline{\hat{\theta}}} \approx \frac{1}{2\Delta\hat{\theta}} \begin{bmatrix} e_1(k, \hat{\theta}_1 + \Delta\hat{\theta}) - e_1(k, \hat{\theta}_1 - \Delta\hat{\theta}) & \dots & e_{n_x}(k, \hat{\theta}_1 + \Delta\hat{\theta}) - e_{n_x}(k, \hat{\theta}_1 - \Delta\hat{\theta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1(k, \hat{\theta}_n + \Delta\hat{\theta}) - e_1(k, \hat{\theta}_n - \Delta\hat{\theta}) & \dots & e_{n_x}(k, \hat{\theta}_n + \Delta\hat{\theta}) - e_{n_x}(k, \hat{\theta}_n - \Delta\hat{\theta}) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

approximiert.

Vorteile:

- Es werden keine expliziten Forderungen an das Störfilter gestellt.
- Das Verfahren ist weniger sensitiv auf Messrauschen als die ARX-Methode.
- Es ist problemlos auf Zustandsraummodelle anwendbar, bei denen nicht alle Zustände messbar sind.

Nachteile:

- Es muss eine Startlösung $\underline{\theta}_0$ vorhanden sein.
- Der Rechenaufwand ist über die Iterationen und das unterlagerte Optimierungsproblem hoch.
- Der Algorithmus hat keine garantiierte Konvergenz.

5.2 Praktische Aspekte der Systemidentifikation

5.2.1 Unbekannte Gleichwerte und Filterung der Ein- und Ausgangssignale

Nach den Gleichungen (5.9a) und (5.9b) müssen den Identifikationsmethoden die relativen Änderungen $\underline{u}(k)$, $\underline{x}(k)$ der absoluten Signale $\underline{U}(k)$, $\underline{X}(k)$ zugrunde gelegt werden. Wird die Messung nicht aus einer Gleichgewichtslage gestartet, gelten die Gleichwerte \underline{U}_{00} und \underline{X}_{00} als unbekannt. Bei der offline Systemidentifikation kann der empirische Erwartungswert eines Signales $\underline{X}(k)$

$$\hat{\underline{X}}_{00} := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{X}(k) \quad (5.30)$$

als Schätzung des Gleichwertes $\hat{\underline{X}}_{00}$ verwendet werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, das Signal $\underline{X}(k)$ mit einem Bandpass zu filtern. Das Filter wird zeitkontinuierlich parametriert und mittels bilinearer Transformation diskretisiert. Die Übertragungsfunktion des Bandpass-Filters lässt sich durch

$$G_{bp}(z^{-1}) = \frac{B_{bp}(z^{-1})}{A_{bp}(z^{-1})} \quad \text{mit} \quad B_{bp}(z^{-1}) = \frac{2T_s\omega_2}{(T_s\omega_1+2)(T_s\omega_2+2)} [1 - z^{-2}] \quad (5.31)$$

$$A_{bp}(z^{-1}) = \left[1 + \frac{2(T_s^2\omega_1\omega_2 - 4)}{(T_s\omega_1+2)(T_s\omega_2+2)} z^{-1} + \frac{(T_s\omega_1-2)(T_s\omega_2-2)}{(T_s\omega_1+2)(T_s\omega_2+2)} z^{-2} \right] \quad (5.32)$$

schreiben. Wobei ω_1 die Grenzfrequenz des Hochpasses und ω_2 die Grenzfrequenz des Tiefpasses festlegen.

5.2.2 Anregung des Prozesses

Ein wesentlicher Bestandteil der Identifikationsverfahren ist die Erzeugung eines geeigneten Eingangssignals. Die zu bevorzugende Vorgehensweise ist die gleichzeitige Anregung aller Eingänge $\underline{u}(k)$ und Messung aller Ausgänge $\underline{x}(k)$, da dadurch ein kohärentes Modell gewonnen werden kann [Ise92b, MKBG95]. Des Weiteren wird in [Ise92b, Ise11] empfohlen unkorrelierte Eingangssignale zu verwenden, da dadurch die Konvergenz verbessert und die Evaluierung der Resultate vereinfacht werden kann. Bei der Systemidentifikation kommt bei der Erzeugung von geeigneten Testsignalen, neben der Anforderung, dass alle wesentlichen Frequenzen des Prozesses angeregt werden müssen, im Allgemeinen folgende Konsistenzbedingung hinzu.

Konsistenzbedingung an die Eingangssignale

- Die Eingangssignale $\underline{u}(k)$ sind unkorreliert mit dem Fehler $e(k) = \underline{v}(k)$

Ist diese Bedingungen nicht gegeben, kann keine konsistente Schätzung der Modellparameter vollzogen werden. Bei dem verwendeten Identifikationsverfahren kann diese Bedingung nicht eingehalten werden,

da im Regelbetrieb Störungen am Ausgang über die Regelung auf die Stellgrößen einkoppeln. Es handelt sich um das Problem der Identifikation im Regelbetrieb. Es existieren zwar Identifikationsmethoden für MIMO-Systeme, welche formal eine konsistente Schätzung im Regelbetrieb liefern, siehe bspw. [ZB93, ZBE91], diese Verfahren übersteigen von der Komplexität jedoch den Rahmen dieser Arbeit.

Nach [Ise92b] ist zunächst zu prüfen, ob sich die für die Identifikation im offenen Regelkreis entwickelten Methoden aus Abschnitt 5.1.3 und Abschnitt 5.1.4 auch im geschlossenen Regelkreis anwenden lassen. Simulationen am nichtlinearen System haben gezeigt, dass die zu erwartende Modellgüte des im Regelbetrieb identifizierten Modells hinreichend ist ($Fit_i \geq 90\%$).

Erzeugung des Anregungssignals

Für die Erzeugung geeigneter Eingangssignale existieren in der Literatur unterschiedliche Verfahren, siehe bspw. [Ise92b, Ise11, Lju87]. Aufgrund der relativ schwachen Verkoppelung des Systems werden einfach zu erzeugende Anregungssignale eingesetzt. Es werden 6 unabhängige RBS eingebracht, also Sprungfolgen mit Amplitude $\pm A$. Die Amplitude wird über eine minimale Haltezeit $T_{min} = F T_s$ gehalten, wobei $F \in \mathbb{Z}^+$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Amplitude das Vorzeichen wechselt ist gleichverteilt ($P(A) = P(-A) = 0.5$). Je kleiner F gewählt wird, desto grösser ist die Anregung im hochfrequenten Bereich.

Einbringung des Anregungssignals

Ein weiterer Punkt ist die Einbringung des Anregungssignals im Regelbetrieb. Hier wurden zwei Möglichkeiten in Erwägung gezogen:

1. Einbringung der Anregungssequenzen über die Führungsgröße $w(k)$
2. Einbringung der Anregungssequenzen durch Überlagerung der Stellgröße am Störeingang $z_1(k)$

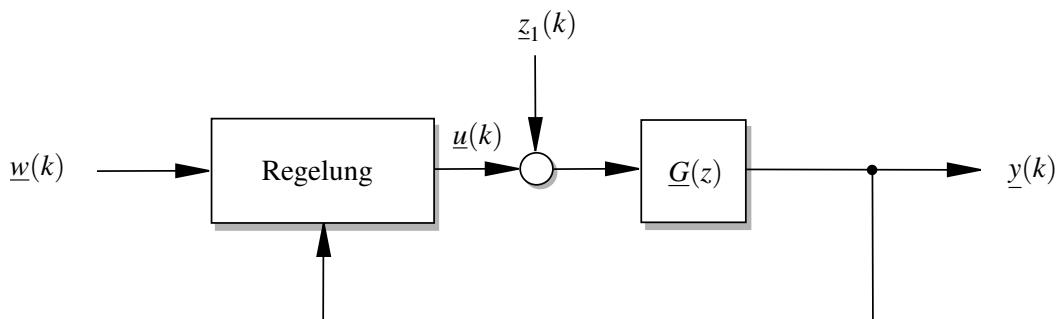


Abbildung 5.4: Anregung im Regelbetrieb

Der Arbeitsraum des VC6 ist über die mechanischen Anschlüsse begrenzt. Die Berücksichtigung dieser Begrenzungen kann über die Führungsgröße einfach eingehalten werden, weshalb die Anregung über die Führungsgröße $w(k)$ eingebracht wird. Es davon ausgegangen, dass wenn $w(k)$ unkorreliert ist, auch $u(k)$ unkorreliert ist. Dies wird anhand nachfolgender Ausführungen überprüft.

5.2.3 Qualifikation der Signalgüte

Unkorreliertheit

Ein hinreichendes Mass für Unkorreliertheit stellt der Korrelationskoeffizient dar, welcher für zwei Signale x und y als

$$r_{xy} := \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \quad (5.33)$$

definiert ist. Eine Schätzung des Korrelationskoeffizienten, stellt der empirische Korrelationskoeffizient

$$r_{xy_e} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (5.34)$$

dar. Dieser ist ein Mass für den linearen Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen und kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen, das Vorzeichen bestimmt dabei die Richtung der linearen Abhängigkeit. Im Falle $r_{xy_e} = 0$ besteht kein linearer Zusammenhang. Für die entsprechenden Betrachtungen von Zufallsvektoren kann die empirische Korrelationskoeffizient-Matrix durch Bestimmung der empirischen Kovarianz-Matrix

$$\underline{\text{Cov}}_e(\underline{x}) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})(\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})^T \quad (5.35)$$

und anschliessender Normierung der Einträge i, j mit

$$\underline{R}_e(\underline{x}) = \frac{\underline{\text{Cov}}_e(i, j)}{\sigma_e(x_i)\sigma_e(x_j)} \quad (5.36)$$

bestimmt werden. Als Masszahl für die Unkorreliertheit wird die Kondition der Korrelationskoeffizienten-Matrix verwendet.

$$\text{cond}_2(\underline{R}_e) = \frac{\sigma_{\max}(\underline{R}_e)}{\sigma_{\min}(\underline{R}_e)} \quad (5.37)$$

Die Abhängigkeit der Masseinheiten bei der Kovarianz-Matrix wird bei der Korrelationskoeffizienten-Matrix vermieden.

5.2.4 Skalierung

In Bezug auf die Numerik, sowie die verwendeten Gütefunktionale aus den Gleichungen (5.16) und (5.24) ist eine geeignete Skalierung der Ein- und Ausgangssignale sinnvoll. Da dadurch die Konditionierung der Matrix $\Psi^T \Psi$ aus Gleichung (5.19) verbessert, sowie die relative Skalierung des Gleichungs- und Prädiktionsfehlers aus Gleichung (5.12) und Gleichung (5.22) aufgehoben werden kann. Eine geeignete Vorgehensweise besteht darin, die Ein- und Ausgangssignale mit Diagonalmatrizen zu gewichten, so dass die maximalen Amplituden der Ein- und Ausgänge im Bereich ± 1 zu liegen kommen.

$$\begin{aligned} \underline{u}_s(k) &= \underline{W}_u \underline{u}(k) & \text{mit } \underline{W}_u = \text{diag}([1/u_{\max,1} \ 1/u_{\max,2} \dots 1/u_{\max,n_u}]), & \underline{W}_u \in \mathbb{R}^{(n_u \times n_u)} \\ \underline{x}_s(k) &= \underline{W}_x \underline{x}(k) & \text{mit } \underline{W}_x = \text{diag}([1/x_{\max,1} \ 1/x_{\max,2} \dots 1/x_{\max,n_x}]), & \underline{W}_x \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_x)} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass die Kondition der Kovarianz-Matrizen des Ein- und Ausgangssignals sowohl als Mass für die Unkorreliertheit, als auch für eine geeignete Skalierung eingesetzt werden kann.

$$\text{cond}_2(\underline{\text{Cov}}_e) = \frac{\sigma_{\max}(\underline{\text{Cov}}_e)}{\sigma_{\min}(\underline{\text{Cov}}_e)} \quad (5.39)$$

Das über die skalierten Signale identifizierte Modell $(\hat{\underline{A}}_s, \hat{\underline{B}}_s, \hat{\underline{x}}_s(0))$ kann über die Gleichungen

$$\hat{\underline{A}} = \underline{W}_x^{-1} \hat{\underline{A}}_s \underline{W}_x, \quad \hat{\underline{B}} = \underline{W}_x^{-1} \hat{\underline{B}}_s \underline{W}_u, \quad \hat{\underline{x}}(0) = \underline{W}_x^{-1} \hat{\underline{x}}_s(0) \quad (5.40)$$

in das physikalische Einheitensystem der Messung rücktransformiert werden.

5.2.5 Qualifikation der Modellgüte

Für die Qualifikation der identifizierten Modelle existieren in der Literatur unterschiedliche Verfahren. Das in dieser Arbeit verwendeten Gütemass ist der Fit_i

$$Fit_i [\%] := 100\% \left(1 - \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [x_i(k) - \hat{x}_i(k)]^2}{\sum_{k=1}^N [x_i(k) - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N x_i(l)]^2}} \right) \quad (5.41)$$

$\hat{x}_i(k)$ bezeichnet dabei den Modellausgang i des Modells und $x_i(k)$ die zugehörige Messung des Prozesses. Beim Fit_i beschreibt der Term unter der Wurzel den auf die Messlänge N , mit der Varianz normierten, quadratischen Modellfehler $e_i(k)$. Je besser der Modellausgang die Messung approximiert, desto näher ist der Fit bei 100%. Da es sich bei dem zu identifizierenden Prozess um ein MIMO-System handelt, wird jeweils der Fit von der Messung i und Prädiktion i ausgewertet, wobei $i = 1, 2 \dots n_x$. Eine Masszahl für den Gesamtfit ist der Mittelwert

$$Fit [\%] := \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} Fit_i \quad (5.42)$$

5.3 Black-Box-Systemidentifikation des FUMU1

Versuchsdurchführung

Das System wird im Regelbetrieb (MPC-Regelung) am AP $\underline{x}_0 = \underline{0}$ identifiziert. Für die Bestimmung der unbekannten Gleichwerte wird das System über $T = 9$ s im AP gehalten und anschliessend über $T = 10$ s über die Sollposition $\underline{w}(k)$ angeregt. Für ein möglichst hohes Nutz- zu Rauschsignalverhältnis wird der VC6 innerhalb der mechanischen Begrenzungen maximal ausgelenkt. Als Anregung wird ein RBS nach Abschnitt 5.2.2 mit $F = 30$ und $T_s = 1$ ms verwendet. Es ergeben sich somit $N = 9 \cdot 10^3 \times 12$ Messpunkte für die Bestimmung der Gleichwerte und $N = 10 \cdot 10^3 \times 12$ Messpunkte für die Identifikation.

Signalverarbeitung und Skalierung

1. Anhand von Gleichung (5.30) werden die Gleichwerte \underline{U}_{00} und \underline{Q}_{S00} über die $N = 9001 \times 12$ Messpunkte berechnet und von den gemessenen Signalen $\underline{U}(k)$ und $\underline{Q}_S(k)$ abgezogen.
2. Über die Beziehung (5.6) wird die Positionsmessung $\underline{q}_S(k)$ auf die Geschwindigkeit $\underline{x}(k) = d\underline{q}_S(k)$ umgerechnet.

3. Die $N = 10 \cdot 10^3 \times 12$ Messpunkte der Signale $\underline{u}(k)$ und $\underline{x}(k)$ werden mit einem Bandpassfilter entsprechend der Gleichung (5.32) gefiltert, wobei $\omega_1 = 2\pi \cdot 0.01$ rad/s und $\omega_2 = 2\pi \cdot 200$ rad/s.
4. Die Ein- und Ausgangssignale werden durch $\underline{u}_s = \underline{W}_u \underline{u}$ mit $\underline{W}_u = \text{diag}([6 \ 6 \ 6 \ 1 \ 1 \ 1])$ 1/V und $\underline{x}_s = \underline{W}_x \underline{x}$ mit $\underline{W}_x = 0.12 \underline{I}$ s/V skaliert.

5.3.1 Identifikation

Entsprechend Abschnitt 5.1.3 wird ein ARX-Modell identifiziert. Dieses wird anschliessend mit der OE-Systemidentifikationsmethode nach Abschnitt 5.1.4 über 20 Iterationen verfeinert. Das identifizierte Modell wird anhand von Gleichung (5.40) in das physikalische Einheitensystem rücktransformiert und anschliessend entsprechend Gleichung (5.4) in ein Zustandsraummodell mit Eingang Sollspannung $\underline{u}(k)$ und Ausgang $\underline{q}_S(k)$ 12ter Ordnung transformiert.

Die identifizierten Modellparameter nach Gleichung (5.40) (Eingang: Sollspannung $\underline{u}(k)$ in [V], Ausgang: Geschwindigkeit $d\underline{q}_S(k)$ in [V/s]) sind

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} 0.8565 & 0.0218 & 0.0211 & -0.0096 & -0.0050 & 0.0080 \\ 0.0156 & 0.8659 & 0.0222 & 0.0019 & 0.0226 & 0.0124 \\ 0.0154 & 0.0204 & 0.8655 & 0.0034 & -0.0070 & -0.0080 \\ -0.0003 & -0.0041 & 0.0042 & 0.9444 & 0.0051 & 0.0039 \\ 0.0043 & -0.0018 & -0.0037 & 0.0062 & 0.9452 & 0.0066 \\ -0.0040 & 0.0034 & 0.0004 & 0.0034 & 0.0058 & 0.9447 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_d = \begin{bmatrix} 11.8219 & -2.0989 & -2.2652 & -0.0889 & -0.0563 & 0.2364 \\ 0.7558 & 10.2740 & -2.4871 & 0.0478 & 0.3591 & 0.0985 \\ -1.7889 & -1.0968 & 10.7204 & -0.0361 & 0.0578 & -0.0750 \\ 0.0934 & 0.3512 & -0.5176 & 1.0723 & -0.2784 & -0.1367 \\ -0.5260 & 0.1487 & 0.3693 & 0.1286 & 1.2401 & -0.2737 \\ 0.4027 & -0.3701 & -0.0038 & -0.1255 & -0.0034 & 1.2259 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}^T(0) = \begin{bmatrix} -0.0603 & -0.5592 & 0.0465 & -0.2598 & -0.1042 & 0.0898 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(\hat{A}_d)^T = \begin{bmatrix} 0.8428 & 0.8435 & 0.9018 & 0.9548 & 0.9377 & 0.9415 \end{bmatrix}, \quad T_s = 1 \text{ ms} \quad (5.43)$$

Anmerkung

Anstelle der MPC-Regelung wurden auch Experimente mit der dezentralen Regelstruktur durchgeführt. Die Modellgüte der ARX-Systemidentifikation ist bei der Anwendung der MPC-Regelung deutlich besser als bei dezentralen PID-Regelung. Die resultierende Modellqualität der OE-Identifikation ist trotz des Unterschieds der Modellgüte des Initialisierungsmodells bei beiden Regelstrategien gleich hoch.

5.3.2 Qualifikation der Signal- und Modellgüte

Qualifikation der Signalgüte

Die Qualifikation der Signalgüte wird anhand der Kondition der Korrelationskoeffizienten-Matrix, Gleichung (5.37) und Kovarianz-Matrix, Gleichung (5.39) durchgeführt. Die Zahlenwerte sind in nachfol-

gender Tabelle aufgelistet. Die Masszahlen $\text{cond}_2(\underline{R}_e)$ und $\text{cond}_2(\text{Cov}_e)$ weisen von der Größenordnung auf keine lineare Abhängigkeit und eine geeignete Skalierung hin.

Tabelle 5.1: Qualifikation der Signalgüte anhand der Kondition der Korrelationskoeffizienten- und Kovarianz-Matrix

Signal	$\text{cond}_2(\underline{R}_e)$	$\text{cond}_2(\text{Cov}_e)$
$\underline{w}(k)$	1.4743	1.4743
$\underline{u}_s(k)$	1.8953	2.2187
$\underline{x}_s(k)$	2.2432	2.3780

In [Zhu01] und [DP04] wird empfohlen die Korrelation zwischen dem Fehler $\underline{e}(k)$ und der Stellgrösse $\underline{u}_s(k)$ zu überprüfen. Die nach Gleichung (5.33) normierten Kreuzkorrelationen zwischen dem Fehler $\underline{e}(k)$ und der Stellgrösse $\underline{u}_s(k)$ sind in Abbildung 5.5 dargestellt. Der Prädiktionsfehler und die Stellgrösse sind wenig korreliert.

Die Grafiken zur Autokorrelation von $\underline{w}(k)$, $\underline{u}(k)$ und $\underline{x}(k)$ sind in Anhang [A.1] in den Abbildungen A.3,A.4 und A.5 abgebildet.

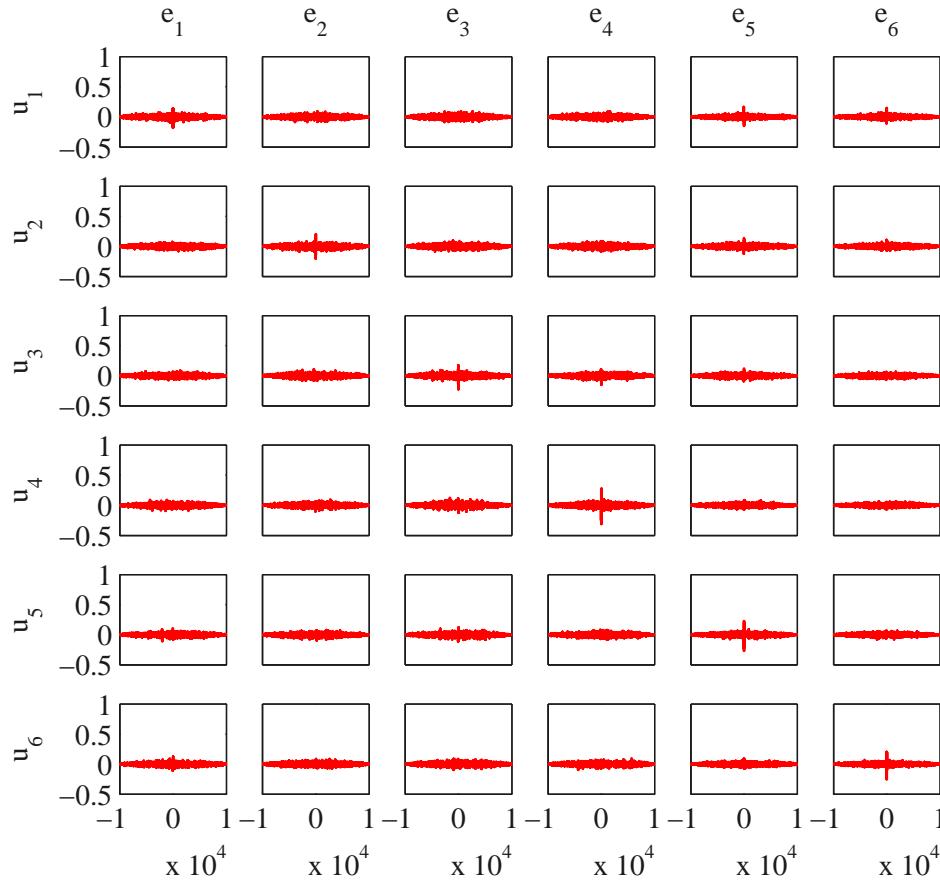


Abbildung 5.5: Normierte Kreuzkorrelation der Stellgrösse und des Prädiktionsfehlers

Qualifikation der Modellgüte

Der Vergleich von Messung und simuliertem Modellausgang des identifizierten OE-Modells aus Gleichung (5.43) der ersten 300 ms ist in Abbildung 5.6 dargestellt.

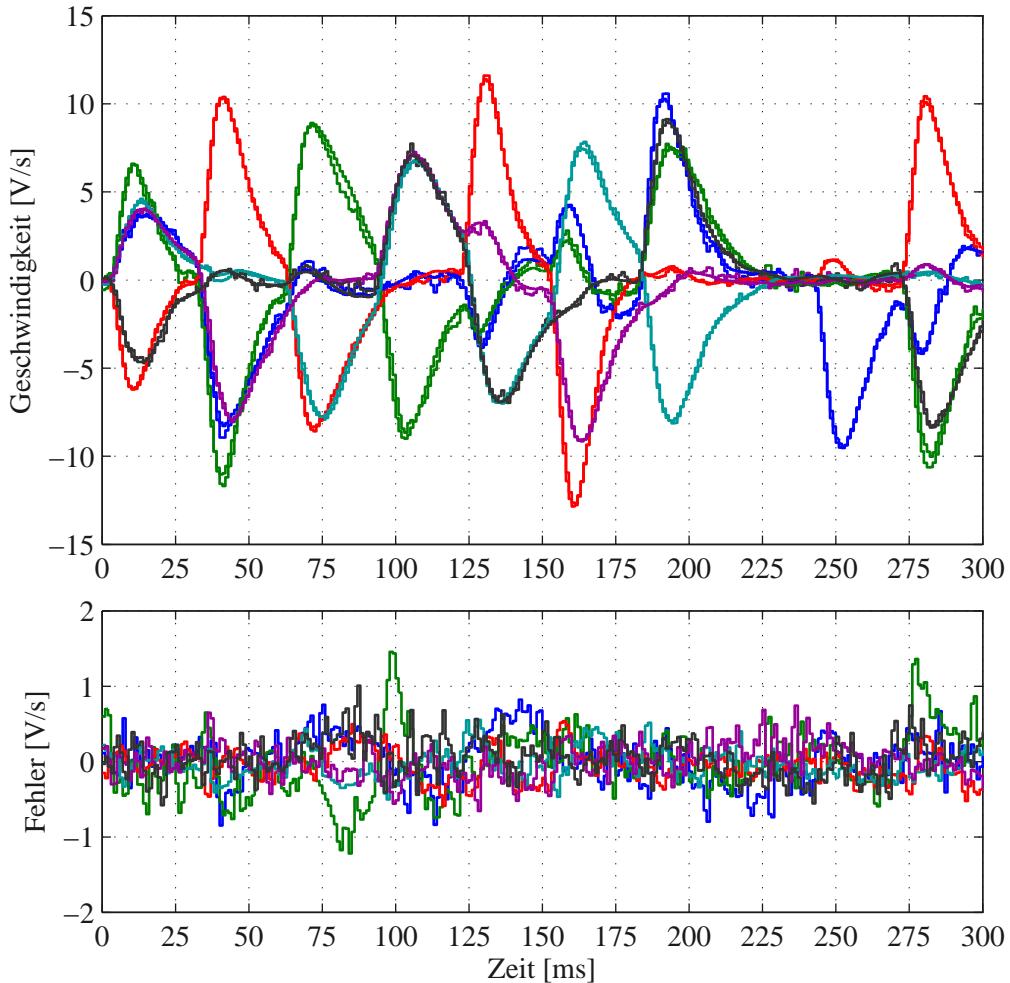


Abbildung 5.6: Vergleich zwischen der Messung und der Prädiktion

Der zugehörige Fit aus Gleichung (5.41) der gesamten Messung beträgt:

$$Fit_i = [92.23 \ 89.79 \ 93.57 \ 93.27 \ 92.81 \ 92.5648] \% \quad (5.44a)$$

$$Fit = 92.37\% \quad (5.44b)$$

Das identifizierte Modell weist mit 92.37% eine hohe Modellgüte auf und kann als quantitativ beurteilt werden. Es ist auffallend, dass der Prozessausgang $dqs_2(k)$ schlechter abgebildet wird als die übrigen, vergl. den Fit in Abbildung 5.7 sowie den Prädiktionsfehler in Abbildung 5.6. An dieser Stelle ist unklar, ob es sich um ein messtechnisches Problem handelt.

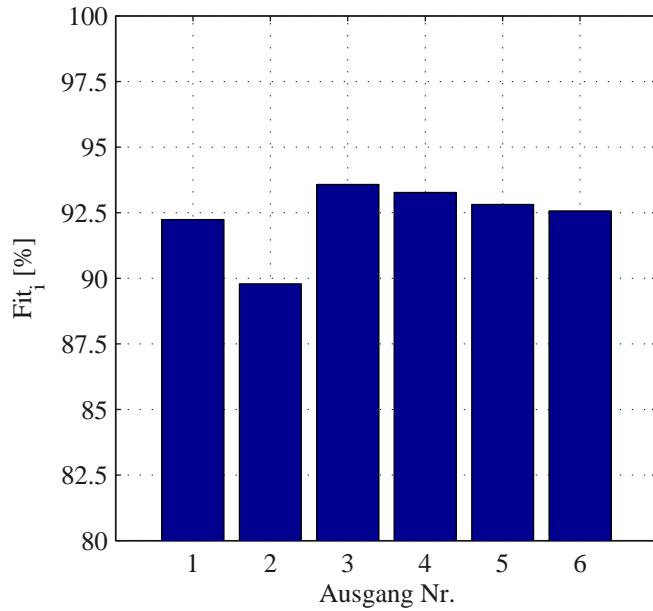


Abbildung 5.7: Qualifikation der Modellgüte

Qualifikation der Modellgüte durch den Quervergleich mit weiteren Datensätzen

Um sicherzustellen, dass es sich bei dem identifizierten Modell nicht um ein lokales Minimum handelt wird in [Lju87] empfohlen, dass identifizierte Modell mit alternativen Datensätzen zu verifizieren. Die grafische Auswertung des Quervergleichs mit zwei weiteren Datensätzen ist in Anhang [A.1] dargestellt. Der Fit der beiden Messungen beträgt:

$$\text{Abbildung A.1 } Fit_i = [92.15 \ 88.16 \ 93.43 \ 92.46 \ 92.59 \ 92.66] \% \quad (5.45a)$$

$$Fit = 91.91\%$$

$$\text{Abbildung A.2 } Fit_i = [91.70 \ 87.47 \ 92.86 \ 93.34 \ 93.55 \ 93.08] \% \quad (5.45b)$$

$$Fit = 92.00\%$$

5.4 Frequenzgangmessungen der Strecke

5.4.1 Grundsätzliches Problem der Messung im Regelbetrieb

Bei MIMO-Systemen kann der Frequenzgang $G_{ij}(j\omega)$ von $\underline{G}(j\omega)$ analog zu SISO-Systemen über die \mathcal{Z} -Transformation der Gewichtsfolge $g_{ij}(k)$

$$G_{ij}(j\omega) := \mathcal{Z}\{g_{ij}(k)\} \quad (5.46)$$

definiert werden. Für n_u Ein- und n_y Ausgänge beschreibt

$$\begin{bmatrix} y_1(j\omega) \\ \vdots \\ y_{n_y}(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(j\omega) & \dots & G_{1n_u}(j\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n_y 1}(j\omega) & \dots & G_{n_y n_u}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(j\omega) \\ \vdots \\ u_{n_u}(j\omega) \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

das statische Ein-Ausgangsverhalten auf sinusförmige Eingangssignale $u(j\omega)$. Um die Frequenzgänge $G_{ij}(j\omega)$ direkt über den Eingang $u_j(k)$ und die Ausgänge $y_i(k)$ für $i = 1, \dots, n_y$ messtechnisch zu ermitteln, müssen alle Eingänge $u_l(k) = 0$ für $l \neq j$ sein. Im Regelbetrieb kann diese Forderung formal nicht eingehalten werden. Wie bei der Identifikation stellt sich an dieser Stelle die Frage, wie das Anregungssignal in den Regelkreis eingebracht werden muss, um diese Bedingung so gut wie möglich einzuhalten, vergl. Abbildung 5.4.

5.4.2 Anregung des Systems

Einbringung des Anregungssignals

In einem einfachen Gedankenexperiment wird davon ausgegangen, dass die dezentrale Regelung für die Positionsregelung des VC6 eingesetzt wird. Wird die Anregung über den Störeingang z_1 eingebracht, also der Stellgrösse $u_j(k)$ überlagert, so kann unter Berücksichtigung der schwachen Verkoppelung des VC6 davon ausgegangen werden, dass die Ausgänge $y_l(k)$ für $l \neq j$ nur schwach angeregt werden. Da über die dezentrale Regelung $K_{jj}(z)$ lediglich die Regelabweichung $e_j(k) = w_j(k) - y_j(k)$ auf die Stellgrösse $u_j(t)$ wirkt, kann weiter gefolgert werden, dass die Stellgrößen $u_l(k)$ für $l \neq j$ vernachlässigbar wenig auslenken und somit die Ausgänge $y_l(k)$ nicht anregen.

Wird die endliche Signalauflösung und der begrenzte AR des VC6 berücksichtigt, so kann auf zwei wesentliche Punkte geschlossen werden:

- Durch die Überlagerung der Stellgrösse $u_j(k)$ mit dem Anregungssignal wird der Ausgang $y_j(k)$ angeregt und es kann der Hauptfrequenzgang $G_{ii}(j\omega)$ bestimmt werden.
- Die Frequenzgänge der Nebendiagonalen von $G(j\omega)$ können über dieses Verfahren nur unzureichend bestimmt werden.

Anregungssignal

Für die Anregung wird ein Sinus mit logarithmisch-ansteigender Frequenz, ein sogenanntes Chirp-Signal entsprechend

$$x_c(k) = A \sin \left(2\pi NT_s \frac{f_0}{\ln \left(\frac{f_1}{f_0} \right)} \left[\left(\frac{f_1}{f_0} \right)^{\frac{k}{N}} - 1 \right] \right) + O \quad (5.48)$$

verwendet. Dabei bezeichnet A die Amplitude, O den Offset, N die Signallänge, f_0 die Frequenz bei $x_c(1)$ und f_1 die Frequenz bei $x_c(N)$ in Hz.

5.4.3 Hauptfrequenzgänge

Als Anregung hat sich das Chirp-Signal nach Gleichung (5.48) mit den Parametern

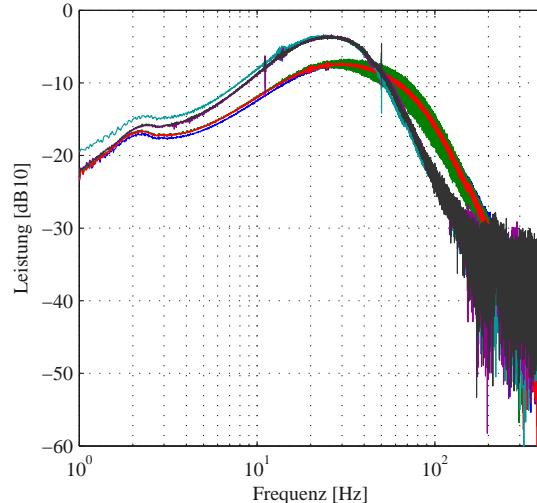
$$A = 0.1 \text{ V}, O = 0 \text{ V}, N = 6 \cdot 10^4, f_0 = 0.1 \text{ Hz}, f_1 = 500 \text{ Hz} \quad (5.49)$$

bewährt.

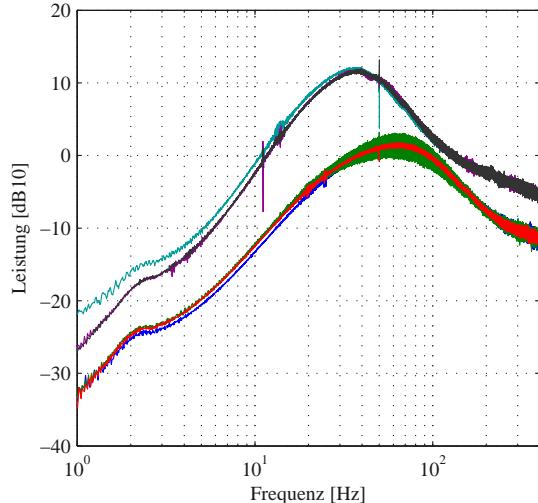
Anhand der gemessenen Ein- und Ausgangssignale $u_j(k)$ und $y_j(k)$ wird der Hauptfrequenzgang $G_{jj}(j\omega)$ über die Schätzung der Leistungsdichtespektren $P_{u_jy_j}(j\omega)$ und $P_{u_ju_j}(j\omega)$ nach

$$G_{jj}(j\omega) = \frac{P_{u_jy_j}(j\omega)}{P_{u_ju_j}(j\omega)}, \quad \text{für } j = 1 \dots 6 \quad (5.50)$$

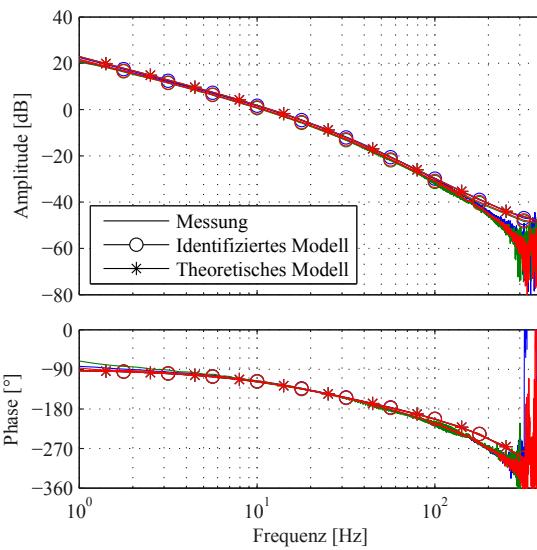
bestimmt², vergl. [Unb11]. Die Schätzung der Leistungsdichtespektren wird nach der Methode von Welch durchgeführt, siehe [Hay96].



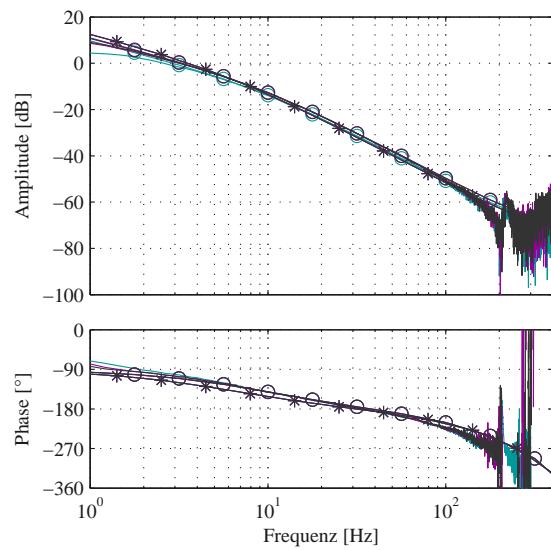
(a) Leistungsdichtespektren $P_{u_jy_j}(j\omega), \forall j$



(b) Leistungsdichtespektren $P_{u_ju_j}(j\omega), \forall j$



(c) Hauptfrequenzgänge, RGB: $u_j(k) \rightarrow q_{Sj}(k)$ für $j = 1, 2, 3$



(d) Hauptfrequenzgänge, CMS: $u_j(k) \rightarrow q_{Sj}(k)$ für $j = 4, 5, 6$

Abbildung 5.8: Leistungsdichtespektren der Stellgrößen und gemessene Hauptfrequenzgänge

Die Leistungsdichtespektren sowie die resultierenden Frequenzgänge sind in Abbildung 5.8 aufgeführt. Neben den gemessenen Hauptfrequenzgängen sind die Frequenzgänge des theoretischen Modells nach

²MATLAB: `tfeestimate.m`

Gleichung (3.34) und des identifizierten Modells nach Gleichung (5.43) eingetragen. Der Amplituden- und Phasengang des identifizierten Modells stimmt bis ca. 100 Hz. Das theoretische Modell bildet die Hauptfrequenzgänge 1...3 in etwa gleich gut ab, wie das identifizierte Modell. Bei den Hauptfrequenzgängen 4...6 bildet das identifizierte Modell die gemessene Dynamik besser ab als das theoretische Modell. Ab 100 Hz wirkt der nichtmodellierte Einfluss der Strukturdynamik und der Voice-Coil-Aktoren.

Anmerkung

- Untersuchungen haben gezeigt, dass die Frequenzgangschätzungen im Regelbetrieb nach dem oben beschriebenen Verfahren bei der dezentralen und der MPC-Regelung nahezu identische Ergebnisse liefern.
- Die oben genannten Punkte wurden durch die Experimente bestätigt. Die Qualität der geschätzten Frequenzgänge der Nebendiagonalen von $\underline{G}(z)$ ist unzureichend.

6 Experimentelle Systemanalyse

Die wesentlichen Erfahrungen, die bei der Montage der Mechanik, der Inbetriebnahme der Elektronik und der Inbetriebnahme der Regelung gesammelt wurden, werden im nachfolgenden Kapitel aufgeführt.

Es wird dargelegt, wie der AP für die Regelung festgelegt wird. Aufbauend werden die umgesetzten Regelstrategien im Zeit- und im Frequenzbereich analysiert. Für die Verifikation des Störverhaltens werden Lastsprünge aufgenommen. Die Robustheit der dezentralen PID- und der MPC-Regelung wird anhand des Führungsverhaltens bei maximaler Beladung geprüft.

Neben dem dynamischen Verhalten der Positionsregelung interessiert insbesondere das statische Verhalten des Systems als Waage. Die Wiederholgenauigkeit des FUMU1 wird messtechnisch ermittelt. In Anlehnung an das Grundkonzept von D. Reber wird die Wiederholgenauigkeit anhand des Summenstroms der drei vertikalen Aktoren verifiziert. Das Einschaltverhalten der Waage auf längeren Zeitskalen wird untersucht. Abschliessend wird aufgezeigt, wie die relative Verkipfung der Waage im Gravitationsfeld über die Strommessungen bestimmt werden kann.

6.1 Grundsätzliches zum Prüfstand

In Abbildung 6.1 ist der Gesamtaufbau des FUMU1 abgebildet.

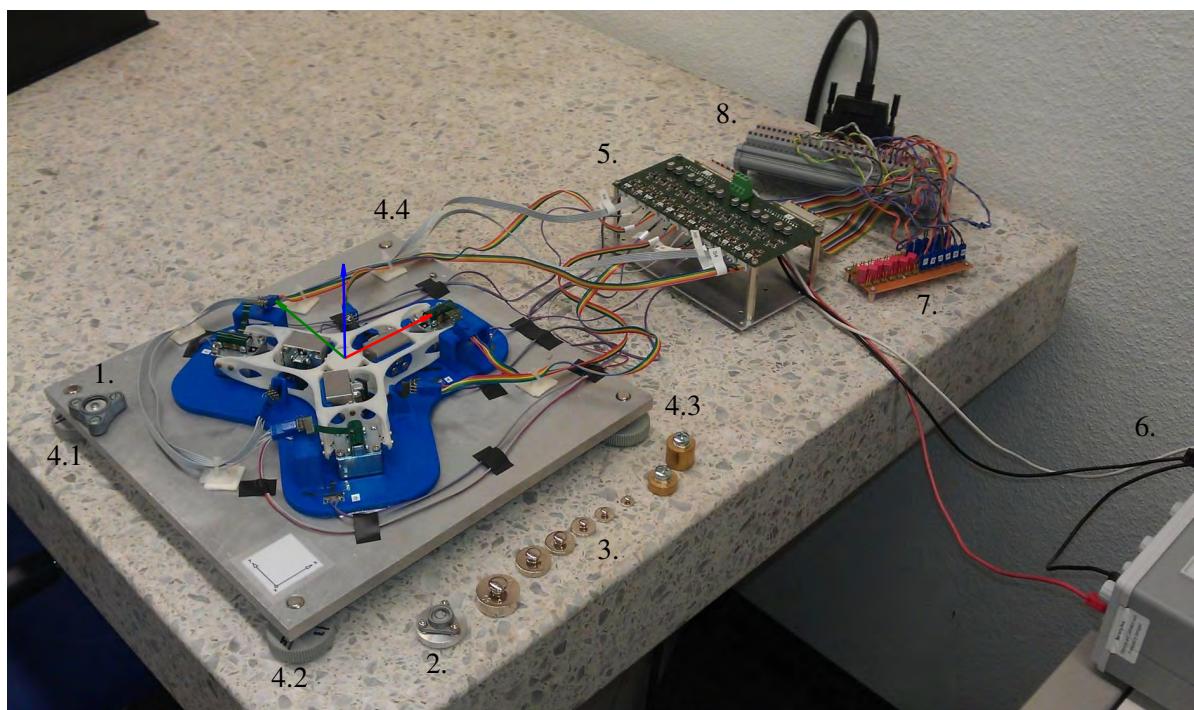


Abbildung 6.1: Aufbau FUMU1

1. Libelle Aluminiumplatte
2. Libelle für die Wägeplattform (Waagschale)
3. Gewichte: 49g, 26 g, 1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 50 g (von r. nach l.)
4. Stellschraube (4 ×)
5. Elektronik (Steller: lineare Spannungsquellen, Positionsmessung)
6. Speisung (+10/-5 V)
7. RC-AAF-Filter, $7 \times f_g = 7.2$ Hz
8. Schnittstelle Target System (12 × AI, 6 × AO)

6.1.1 Inbetriebnahme

Montage der Mechanik

Die Montage der Mechanik verlief problemlos. Einige Fotos zur Montage sind in Abbildung A.10 aufgeführt. Die einzelnen Montageschritte wurden wie folgt durchgeführt:

1. Befestigung der inneren drei Spulenkörper inkl. Magnettöpfe an der Wägeplattform.
2. Einführen der Wägeplattform mit den inneren drei Spulenkörpern in die Halterungen auf der Bodenplatte.
3. Anschrauben der inneren drei Magnettöpfe an die Halterung.
4. Anbringen der äusseren drei Magnettöpfe inkl. Spulenkörper und Befestigung.

Es wurde darauf geachtet, dass die Mechanik möglichst viel Spiel innerhalb der Anschläge hat. Zukünftig sollten die Magnettöpfe bspw. über Schrauben und eine Verstiftung, form- und kraftschlüssig fixiert werden. Über die vier Stellschrauben ist das System überbestimmt, hier hätten drei Stellschrauben ausgereicht. Wie bereits in Abschnitt 3.4 angemerkt, wurde die Bodenplatte beim Aushärten verzogen, weshalb diese von MTAG auf eine Aluminiumplatte geklebt wurde.

Elektronik

Die Elektronik des FUMU1 wurde von MTAG umgesetzt. Aufgrund der Erfahrungen mit der einfachen Wägezelle aus Abschnitt 2.2 wurden unter Rücksprache mit D. Reber folgende Punkte durch die Elektronik realisiert.

- *Steller:* 6 × Lineare Spannungsansteuerung mit Maximalspannung +10/-5 V
- *Strommessung:* 6 × Strommessung des Spulenstroms der Voice-Coil-Aktoren
- *Positionsmessung:* 6 × Positionsmessung der Voice-Coil-Aktoren
- *Analoge Filter:* 6 × AAF für die Positionsmessung, 6 × AAF für die Strommessung

Die Grenzfrequenz der AAF für die Positionsmessung beträgt $f_g = 1.06$ kHz. Die Filterung der Strommessung ist bei der Elektronik fehlerhaft, weshalb das System um sechs einfache analog RC-AAF mit $f_g = 7.2$ Hz erweitert wurde, vergl. Abbildung 6.1. Der Verstärkungsfaktor der stromproportionalen Spannung (Shunt) beträgt $V_s = 1 + 10 \text{ k}\Omega / 4.7 \text{ k}\Omega = 3.128$.

Die Stellgrösse der horizontalen Aktoren wurde über einen einfachen Spannungsteiler skaliert. Bei +10/-5 V am Eingang der Elektronik resultieren +0.32/-1.60 V für die horizontalen Aktoren (Verstärkungsfaktor

$W_u = 4.7 \text{ k}\Omega / 14.7 \text{ k}\Omega = 0.3197$). Die Spulenpaare der Voice-Coil-Aktoren sind so verdrahtet, dass ausgehend von der Spannung, die doppelte Kraft wirkt.

Es wurde festgestellt, dass die Positionsmessung der Kanäle 1 und 6 der Elektronik (Positionen q_{S3} und q_{S4}) relativ zu den anderen Kanälen um den Faktor zwei verstärkt wird. Die Skalierung wird softwareseitig korrigiert. Es ist an dieser Stelle unklar ob dies durch ein fehlerhaftes Bauteil oder sogar durch eine defekte Helligkeitsregelung verursacht wird.

Bei der Elektronik sind einige Fehler aufgetreten, weshalb die Inbetriebnahme der Elektronik verhältnismässig viel Zeit in Anspruch nahm. Die Fehler konnten so korrigiert werden, dass das FUMU1 funktionstüchtig ist.

Positionsregelung

Für die Inbetriebnahme der Positionsregelung wurde eine dezentrale PID-Regelung entsprechend Abschnitt 4.2 verwendet. Dem Entwurf wurde das theoretische Modell aus Gleichung (3.34) zugrunde gelegt. Die Inbetriebnahme wurde in zwei Schritten durchgeführt. Zunächst wurden die vertikalen Aktoren in Betrieb genommen, so dass die Wägeplattform schwebt. In einem zweiten Schritt wurden zusätzlich die horizontalen Aktoren eingebunden. Die Inbetriebnahme der Regelung verlief problemlos.

6.1.2 Festlegung des Arbeitspunktes

Bei perfekter Fertigung und Montage existiert rein formal ein AP bei dem die Aktorströme des FUMU1 ohne Beladung

$$i_{10,20,30} = \frac{i_{t0}}{3} = \frac{m \cdot g_z}{w_e \cdot 3} = 11.4 \text{ mA} \quad \text{und} \quad i_{40,50,60} = 0 \text{ mA} \quad (6.1)$$

sind, siehe Gleichung (3.56). Aufgrund der Fertigungstoleranzen und dem Verzug der Bodenplatte existiert dieser AP nicht. Es wurde deshalb versucht einen AP aufzufinden bei dem $i_{40,50,60} \approx 0 \text{ mA}$ zumindest näherungsweise gilt, weil dann $F_{gz} \approx i_{t0} \cdot w_e$. Da auch hier kein geeigneter AP gefunden werden konnte, wurde ein alternatives Vorgehen für die Festlegung des AP angewendet. Für die Systemidentifikation und die Frequenzgangmessungen ist es erforderlich das System geeignet anregen zu können. Dabei wird ein möglichst grosser AR benötigt. Die Bezugspunkte q_{S0} wurden so festgelegt, dass der AP möglichst im Zentrum der mechanischen Anschlüsse ist. Das detaillierte Vorgehen ist in Anhang [A.6] dargestellt.

Das System ist sensitiv gegenüber den am Prüfstand herrschenden Lichtverhältnissen (künstliches Licht) und gegenüber Temperaturschwankungen, weshalb der AP in Bezug auf die Strommessung variiert. Ein typischer Stromwert beträgt

$$\vec{i}_0^T = \left[\begin{array}{cccccc} 10.86 & 11.02 & 10.88 & 0.27 & 0.07 & -0.13 \end{array} \right] \text{ mA} \quad (6.2)$$

6.1.3 Analoge und digitale Filterung

Die Kraft der Voice-Coil-Aktoren ist proportional zum Strom. Die Signalqualität der Strommessung ist für die Bestimmung der Masse des Wägeguts zentral. Um Aliasing-Effekte zu unterdrücken wird das zum Strom proportionale Spannungssignal (Shunt) über ein analoges RC-AAF gefiltert. Durch die verwendeten Bauteilen ($R = 4.7 \text{ k}\Omega$, $C = 4.7 \mu\text{F}$) ergibt sich die Grenzfrequenz zu $f_g = 7.2 \text{ Hz}$. Die

Abtastzeit beträgt $T_s = 1$ ms. Bei der Nyquistfrequenz $f_{nyq} = 500$ Hz wird die Amplitude durch das analoge AAF ca. -37 dB abgeschwächt.

Das gemessene Stromsignal wird digital weiterverarbeitet. Das Blockschaltbild der digitalen Signalverarbeitung ist in Abbildung 6.2 eingezeichnet.

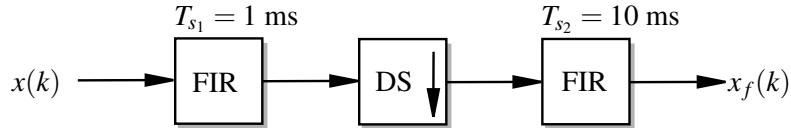


Abbildung 6.2: Digitale Signalverarbeitung

Die Signalverarbeitung wird durch folgende Punkte beschrieben:

1. FIR-Filterung des Signals ($T_{s1} = 1$ ms)
2. Down-Sampling ($10 \times$)
3. FIR-Filterung des Signals ($T_{s2} = 10$ ms)

Als Filter wird ein Chebyshev-Fenster mit $N = 50$ Koeffizienten eingesetzt¹. Der Amplitudengang ist in Abbildung 6.3 aufgeführt. Bei $T_{s1} = 1$ ms beträgt die Amplitudenunterdrückung -60 dB bei 50 Hz. Bei $T_{s2} = 10$ ms beträgt die Amplitudenunterdrückung -60 dB bei 5 Hz. Die Durchlaufzeit beträgt $N T_s + (N - 1)10 T_s = 540$ ms.

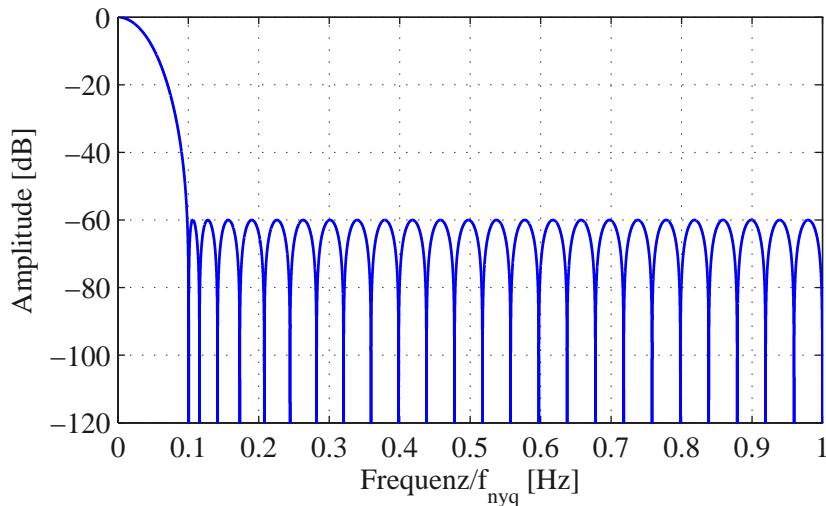


Abbildung 6.3: FIR-Chebyshev-Filter

6.1.4 Signalquantisierung

Die Auflösung der AI- und AO-Karten beträgt 16 Bit. Die AO werden über einen Signalbereich von ± 10 V und die AI über einen Signalbereich von ± 3.3 V betrieben. Für die Signale ergeben sich die

¹ MATLAB: chebwin.m

nachfolgenden Signalquantisierungen.

$$\begin{aligned}\Delta u_{1,2,3} &= 20 \text{ V} \cdot 2^{-16}, \quad \Delta u_{4,5,6} = 20 \text{ V} \cdot W_u \cdot 2^{-16}, \quad \Delta q_S = 6.6 \text{ V} \cdot 2^{-16} \\ \Delta i_{1,\dots,6} &= \frac{6.6 \text{ V} \cdot 2^{-16}}{V_s R_s}, \quad \Delta i_t = 3 \Delta i_{1,\dots,6}, \quad \Delta m_w = \Delta i_t \frac{w_e}{g}\end{aligned}\quad (6.3)$$

Die Signalquantisierung der Stellgrösse bezieht sich auf den Ausgang der Elektronik. Die Signalquantisierung der Position, des Stroms und der Masse auf den AI des Target Systems. Die resultierenden Zahlenwerte sind in Tabelle 6.1 eingetragen.

Tabelle 6.1: Signalquantisierung

Signal	Variable	Quantisierung
Stellgrösse	$\Delta u_{1,2,3}$	0.305 mV
Stellgrösse	$\Delta u_{4,5,6}$	0.098 mV
Position	$\Delta q_{1,2,5,6}$	0.10 mV \cong 32 nm
Position	$\Delta q_{3,4}$	0.10 mV \cong 16 nm
Strom	$\Delta i_{1,\dots,6}$	$\approx 0.69 \mu\text{A}$
Wägesignal (Strom)	Δi_t	$\approx 2.06 \mu\text{A}$
Wägesignal (Masse)	Δm_w	$\approx 3.88 \text{ mg}$

6.1.5 Ermittlung der Positions-Spannungskonstanten

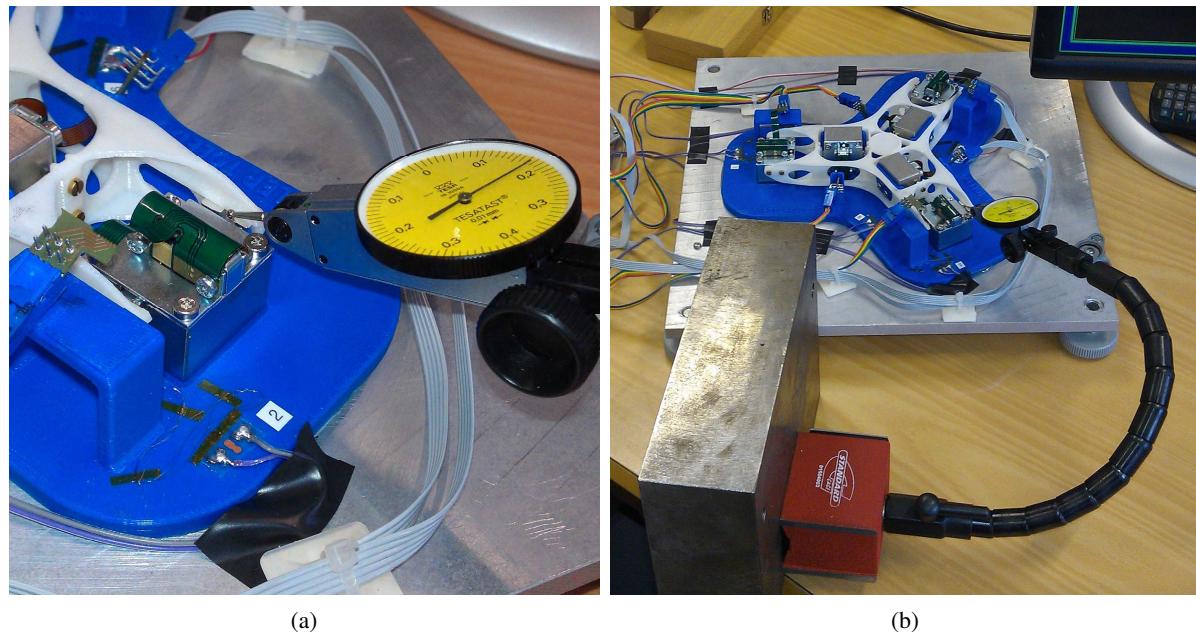


Abbildung 6.4: Ermittlung der Positions-Spannungskonstanten mit Hilfe eines Messtasters

Die Positions-Spannungskonstante der einzelnen Sensoren wird mit Hilfe eines Messtasters über eine Ausgleichsrechnung ermittelt. Das System befindet sich während der Messung im Regelbetrieb.

Die Positions-Spannungskonstante wird für jeden Sensor einzeln bestimmt. Für die Bestimmung der Positions-Spannungskonstante $K_{u_{pos}i}$ wird die Wägeplattform in Richtung des Normalvektors des Sensors i verfahren. Die Normalvektoren der Sensoren 1 bis 3 zeigen in z -Richtung. Eine Verschiebung in z -Richtung entspricht einem Offset der Positionen 1 bis 3. Die Normalvektoren der Sensoren 4 bis 6 liegen in der (x,y) -Ebene. Dabei gilt die Abbildungsvorschrift

$$\begin{bmatrix} \Delta q_{S4} \\ \Delta q_{S5} \\ \Delta q_{S6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta n_{S4} \\ \Delta n_{S5} \\ \Delta n_{S6} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

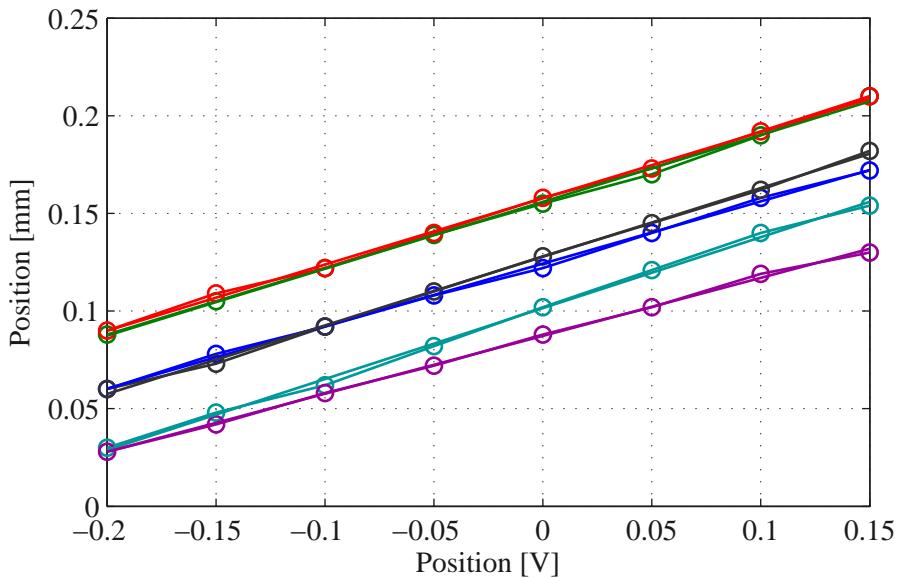


Abbildung 6.5: BGRCMS: Mit dem Messfühler ermittelte Positionen 1...6

Über die acht Messpunkte ergeben sich nachfolgende Positions-Spannungskonstanten.

$$K_{u_{pos}}^T = \begin{bmatrix} 3.1297 & 2.9187 & 2.9453 & 2.7541 & 3.3681 & 2.8455 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ V/m} \quad (6.5)$$

Damit alle Sensoren die gleiche Konstante aufweisen, werden die gemessenen Positionssignale softwareseitig durch $\underline{W} = \text{diag}([1.10723 \ 1.0626 \ 1.1364 \ 0.9292 \ 1.0999])$ gewichtet. Somit weisen alle Sensoren die Verstärkung $3.1297 \cdot 10^3 \text{ V/m}$ auf.

6.1.6 Leistungsdichtespektren

Für die Bestimmung nachfolgend aufgeführter Leistungsdichtespektren werden jeweils $99 \cdot 10^3$ Datenpunkte verwendet. Die Leistungsdichtespektren werden nach der Methode von Welch bestimmt. In Abbildung 6.6(a) sind die Leistungsdichtespektren der einzelnen Strommessungen 1 bis 6 bei aktiver PID-Regelung eingetragen. In Abbildung 6.6(b) sind die Leistungsdichtespektren der einzelnen Strommessungen bei aktiver MPC-Regelung eingetragen. Der Strom wird vor der AD-Wandlung über ein AAF mit $f_g = 7.2 \text{ Hz}$ gefiltert. Das Messrauschen beeinflusst über die Rückführung und die Regelung die Stellgröße und somit den Strom. Wie bereits in den Singulärwertdiagrammen aufgezeigt, wird das Messrauschen bei der MPC-Regelung mehr verstärkt als bei der PID-Regelung. Dies ist anhand der entsprechenden Leistungsdichtespektren erkennbar.

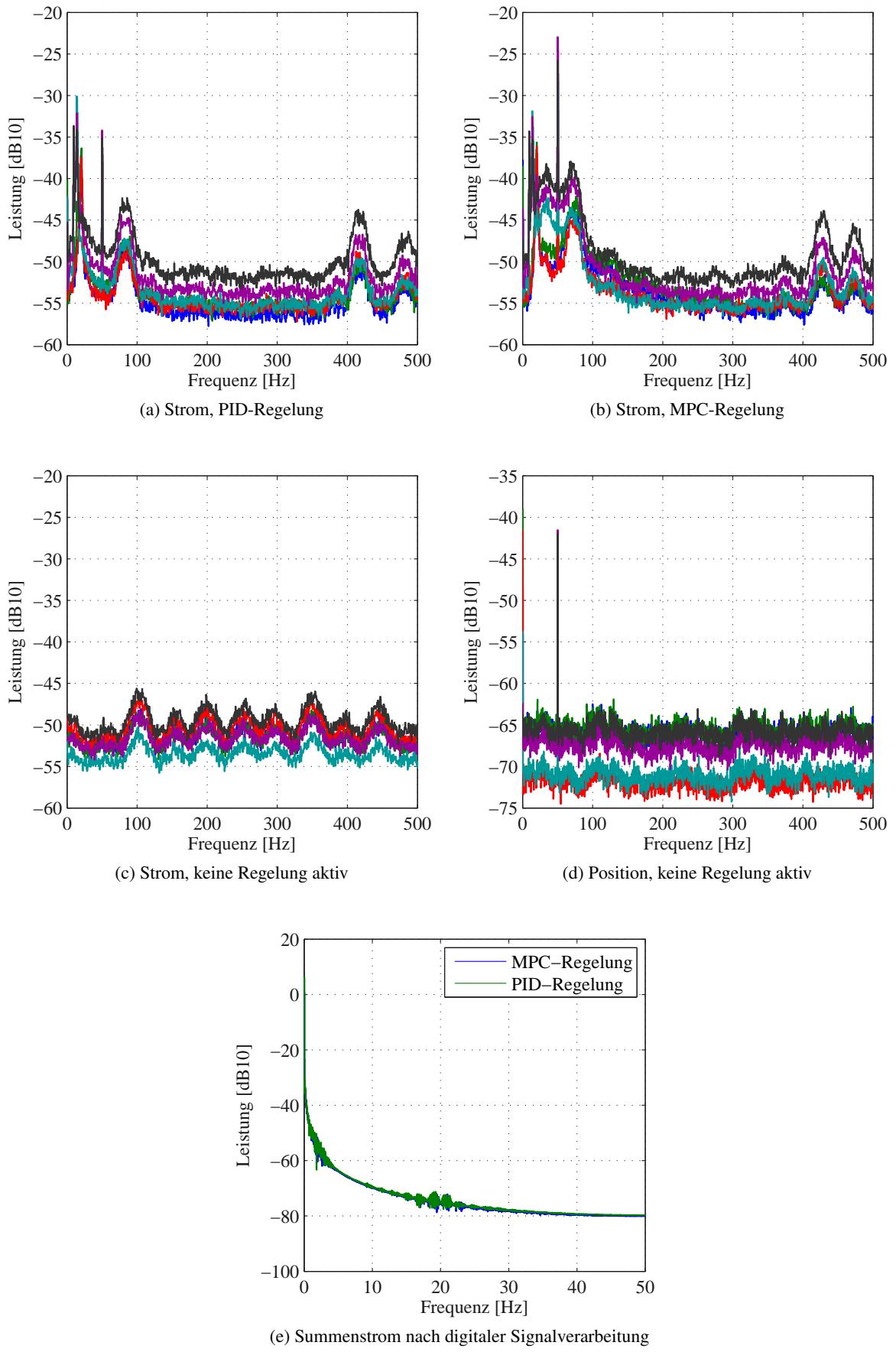


Abbildung 6.6: Leistungsdichtespektren

In Abbildung 6.6(e) ist das Leistungsdichtespektrum des digital gefilterten Summenstroms $i_t = i_1 + i_2 + i_3$ eingetragen, vergl. Abschnitt 6.1.3. Für die Bestimmung der Masse ist die unterschiedliche Signalqualität unwesentlich. Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Summenstrom vor der digitalen Signalverarbeitung gebildet wird. In Abbildung 6.6(c) ist das Leistungsdichtespektrum der Stromsignale und in Abbildung 6.6(d) das Leistungsdichtespektrum der Positionssignale bei inaktiver Regelung eingezeichnet. Für die Simulationen wird das Positionssignal durch ein weisses Rauschen mit einer Standardabweichung $\sigma = 10^{-\frac{65}{10} \frac{1}{2}} \approx 0.56 \text{ mV}$ überlagert.

6.2 Messungen zur Regelgüte

6.2.1 Lastsprung

Um das Störverhalten zu verifizieren werden Lastsprünge aufgenommen. Die Waage ist dabei mit einem Wägewert beladen und eingeschwungen. Der eigentliche Lastsprung meint das Regelverhalten des Systems beim abrupten entfernen des Wägewerts. Es wurde versucht ein Messaufbau zu gestalten, bei dem nur der Lastsprung, nicht aber die Manipulation des Wägewerts auf das System einwirkt. Fotos zum Messaufbau sind in Abbildung A.11 abgebildet. Es werden Lastsprünge von $26 \text{ g} \rightarrow 0 \text{ g}$ und $49 \text{ g} \rightarrow 0 \text{ g}$ aufgenommen. 26 g entsprechen 41% und 49 g entsprechen 77% des Eigengewichts des schwebenden Teils der Waage.

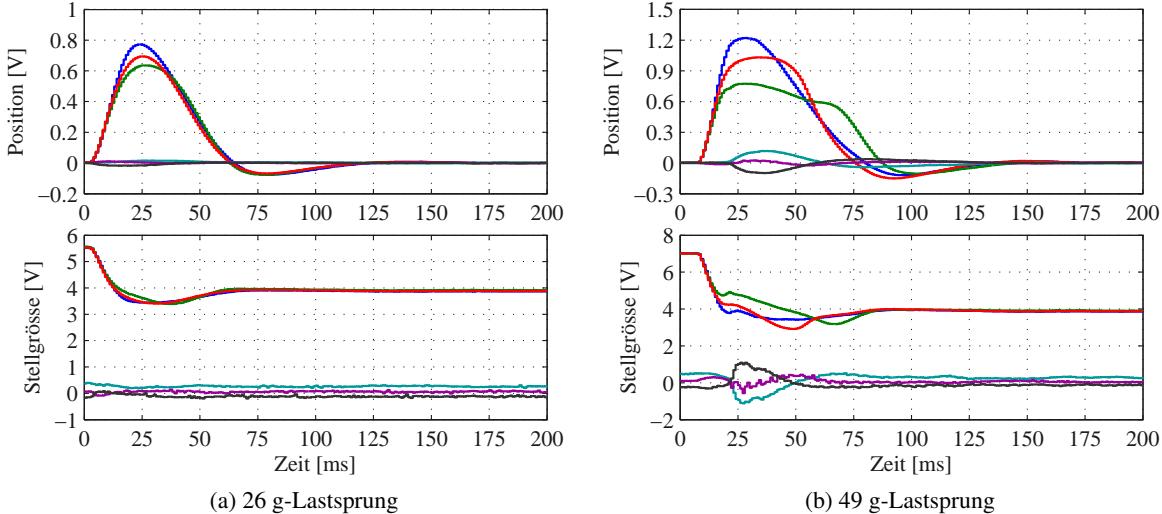


Abbildung 6.7: Lastsprünge PID-Regelung, BGRCMS: $q_{s1,\dots,s6}(k)$, $u_{1,\dots,6}(k)$

PID-Regelung: In Abbildung 6.7 sind die Lastsprünge des PID-Regelsystems aufgeführt. Der maximale Ausschlag der Position beträgt bei dem 26 g -Lastsprung 0.77 V und das System benötigt ca. 125 ms Einschwingzeit. Bei dem 49 g -Lastsprung beträgt der maximale Ausschlag der Position 1.22 V und das System benötigt ca. 180 ms Einschwingzeit. Die Stellgrösse $u_4(k)$ ist von einer hochfrequenten Schwingung überlagert. Es wird vermutet, dass die Wägeplattform bzw. der Spulenkörper des Aktors 4 an einen mechanischen Anschlag schlägt.

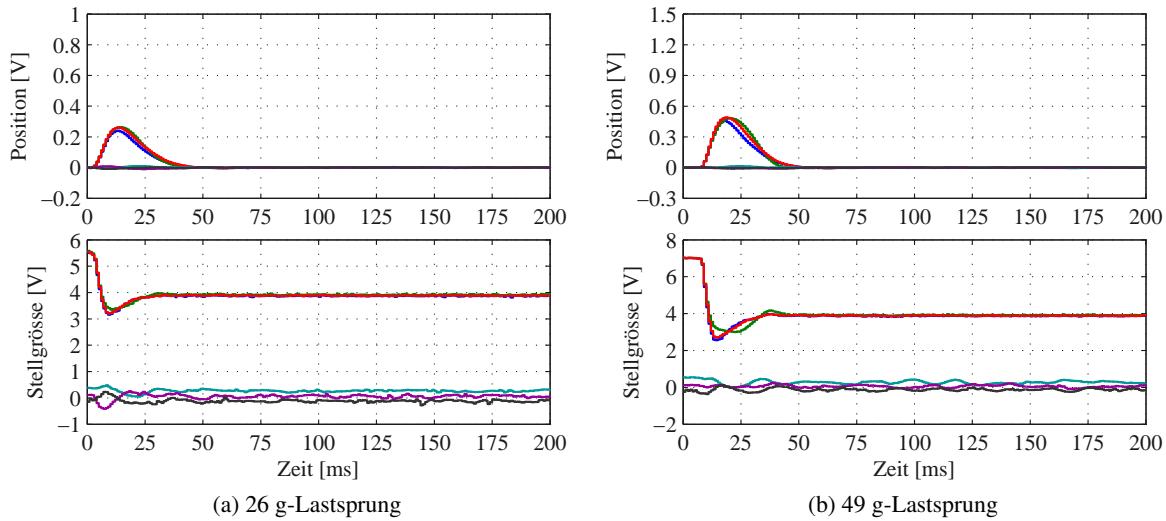


Abbildung 6.8: Lastsprünge MPC-Regelung, BGRCMS: $q_{S1,\dots,S6}(k)$, $u_{1,\dots,6}(k)$

MPC-Regelung: In Abbildung 6.8 sind die Lastsprünge des MPC-Regelsystems aufgeführt. Der maximale Ausschlag der Position beträgt bei dem 26 g-Lastsprung 0.26 V und das System benötigt ca. 50 ms Einschwingzeit. Bei dem 49 g-Lastsprung beträgt der maximale Ausschlag der Position 0.49 V und das System benötigt ca. 60 ms Einschwingzeit.

6.2.2 Führungsverhalten bei Last

Es werden Führungssprungantworten bei 20 g und 50 g Beladung der Waage aufgenommen².

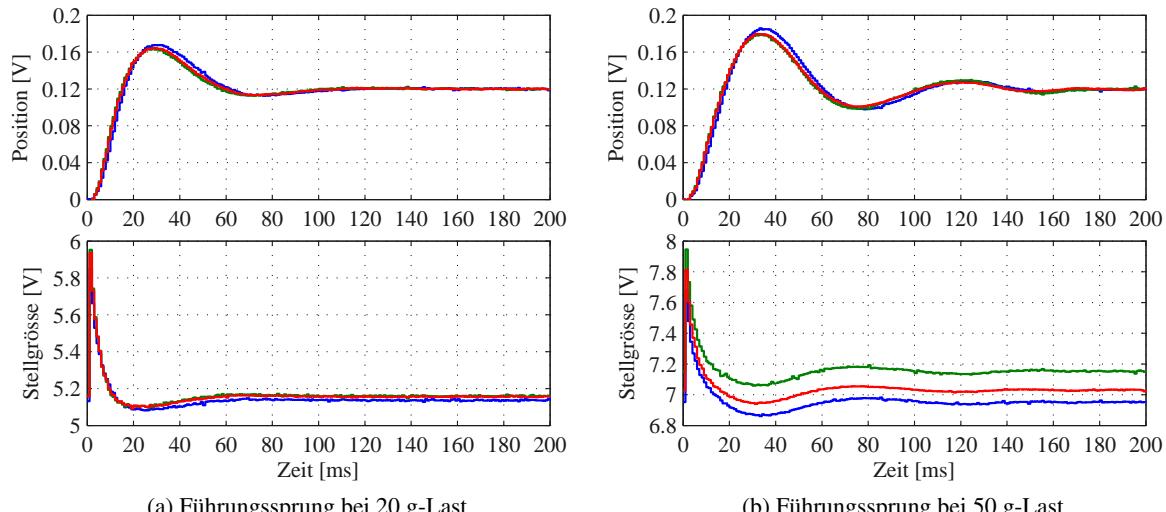


Abbildung 6.9: Führungssprungantworten bei Last. PID-Regelung, BGR: $q_{S1\ S2\ S3}(k)$, $y_{1\ 2\ 3}(k)$

PID-Regelung: Bei 20 g-Last überschwingt die Position 31%. Das System benötigt ca. 120 ms um

²Führungssprungantworten bei Null-Last wurden bereits in den Abbildungen 4.15 und 4.21 dargestellt.

einzuenschwingen. Bei 50 g-Last überschwingt die Position 54%. Das System benötigt ca. 180 ms um einzuschwingen.

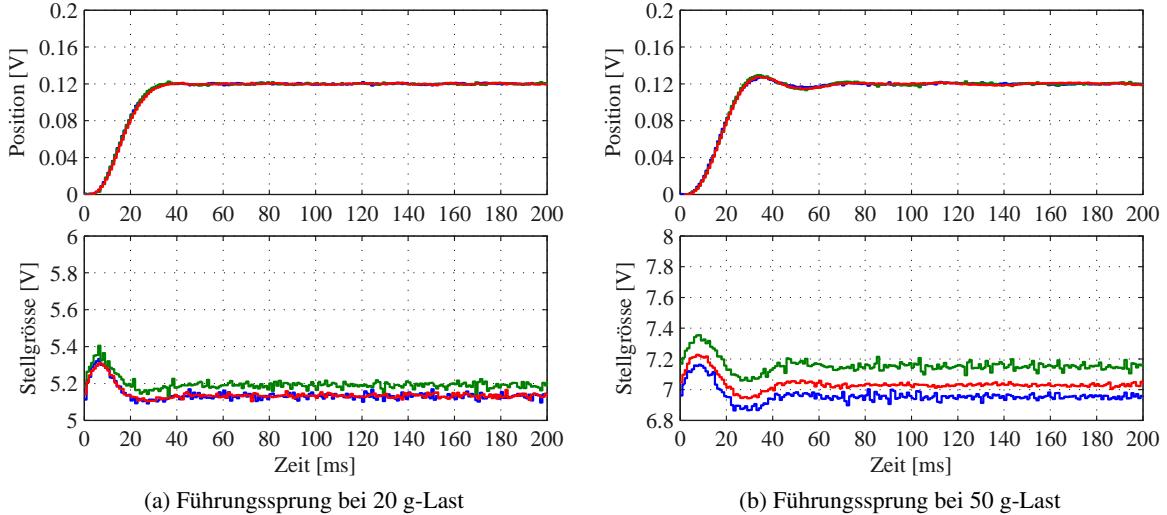


Abbildung 6.10: Führungssprungantworten bei Last. MPC-Regelung, BGR: $q_{S1,S2,S3}(k)$, $u_{1,2,3}(k)$

MPC-Regelung: Bei 20 g-Last überschwingt die Position 3%. Das System benötigt ca. 60 ms um einzuschwingen. Bei 50 g-Last überschwingt die Position 8%. Das System benötigt ca. 90 ms um einzuschwingen. Die MPC-Regelung ist robuster in Bezug auf die zusätzliche Beladung.

6.2.3 Einschwingverhalten bei Last

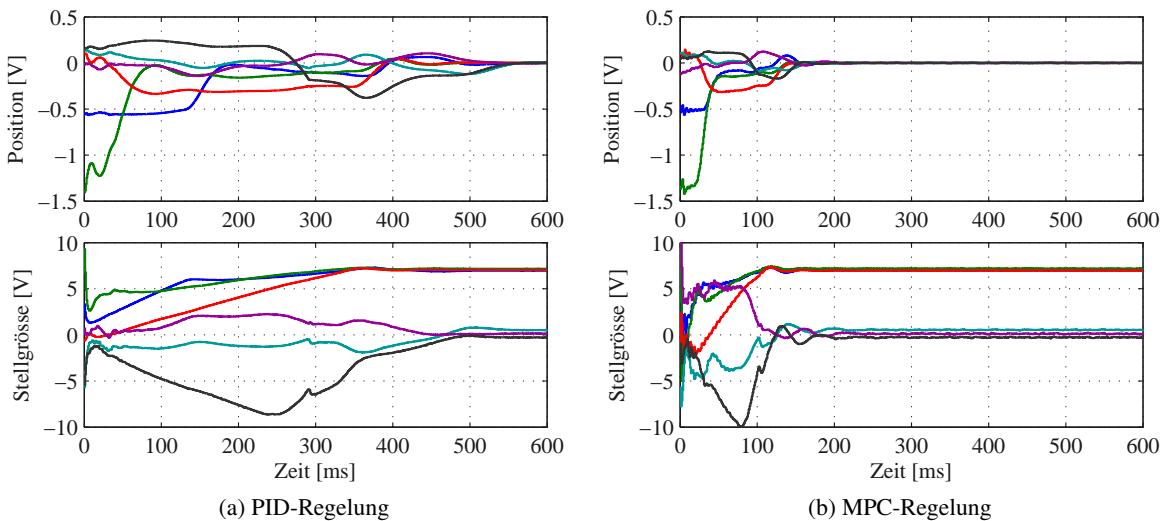


Abbildung 6.11: Einschwingverhalten bei 50-g Last, BGRCMS: $q_{S1\dots 6}(k)$, $u_{1\dots 6}(k)$

Die Waage wird mit einer Zusatzmasse von 50 g beladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ms wird die Regelung zugeschaltet und das Einschwingverhalten des Regelsystems aufgezeichnet. Das Einschwingverhalten der beiden Regelstrategien ist in Abbildung 6.11 aufgeführt. Die PID-Regelung benötigt ca. 560 ms um in die Regellage einzuschwingen. Die MPC-Regelung benötigt ca. 200 ms. Anhand der hochfrequenten Schwingungen in den Positions- und Stellgrössensignalen ist ersichtlich, dass das System bei der MPC-Regelung in die mechanischen Anschläge schlägt.

6.2.4 Führungs frequenzgangmessungen

Das in Abschnitt 5.4.1 thematisierte Problem der Ermittlung der Frequenzgänge der Strecke im Regelbetrieb, besteht bei der Messung der Führungs frequenzgangmessungen nicht. Als Anregungssignal wird ein Chirp-Signal entsprechend Gleichung (5.48) mit den Parametern aus Gleichung (5.49) verwendet.

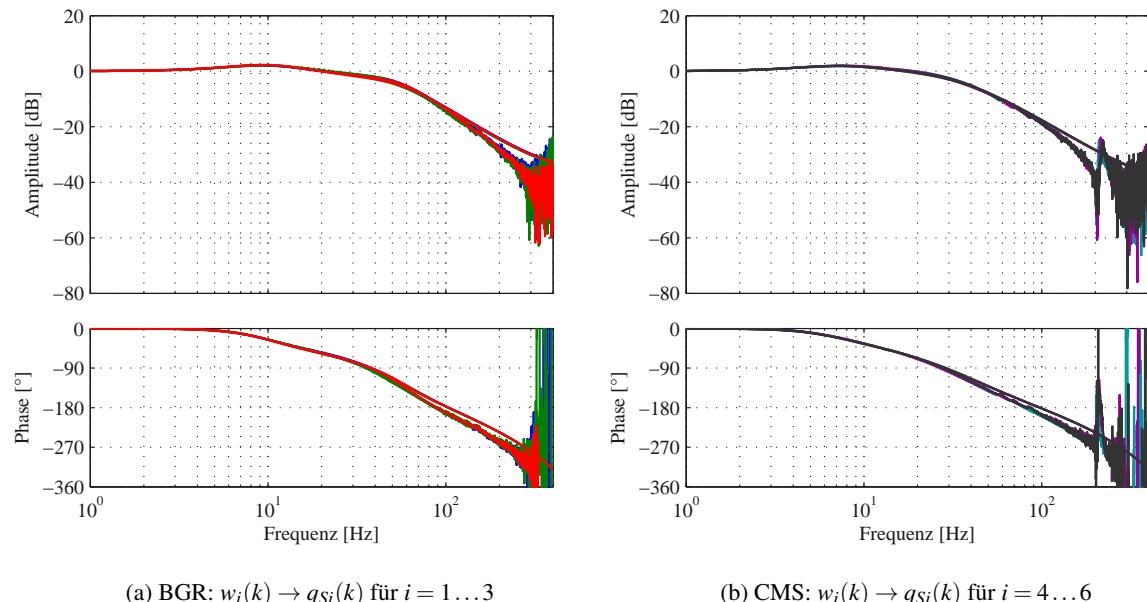


Abbildung 6.12: Gegenüberstellung von den gemessenen und den simulierten Führungs frequenzgängen der PID-Regelung

Die Führungs frequenzgangmessungen von der Führungsgröße $w_i(k) \rightarrow q_{Si}(k)$ für $i = 1, \dots, 6$ des PID-Regelsystems sind in Abbildung 6.12 und die entsprechenden Führungs frequenzgangmessungen des MPC-Regelsystems in Abbildung 6.13 aufgeführt. Neben den gemessenen Frequenzgängen sind die Führungs frequenzgängen der Modelle der Regelsysteme eingezeichnet. Die Modelle der Regelsysteme bilden das gemessene Führungsverhalten bis ca. 100 Hz quantitativ ab. In Abbildung 6.12(b) ist der Einfluss der nicht modellierten Strukturdynamik (Resonanz bei 210 Hz) besonders gut ersichtlich.

Die Gegenüberstellung von den gemessenen Führungs frequenzgängen und denjenigen der Modelle von allen Eingängen $w(k)$ zu allen Regelgrößen $q_S(k)$ ist für das PID-Regelsystem in Abbildung (A.7) und für das MPC-Regelsystem in Abbildung (A.8) aufgeführt.

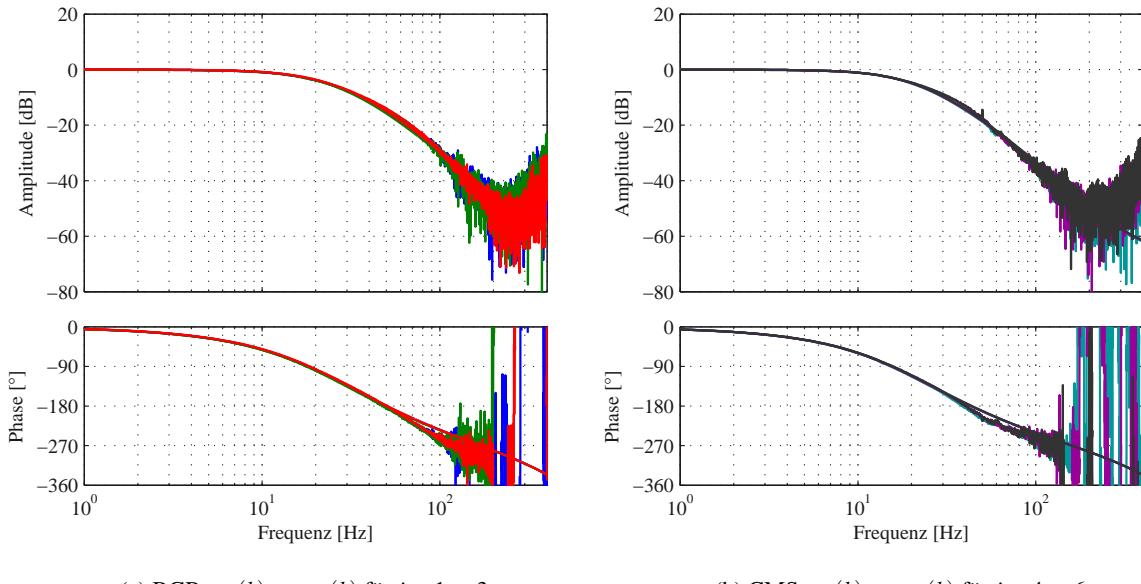


Abbildung 6.13: Gegenüberstellung von den gemessenen und den simulierten Führungs frequenzgängen der MPC-Regelung

6.2.5 Anmerkungen zu den Regelstrategien

Die dezentrale PID-Regelung ist grundsätzlich für die Festwertregelung des Systems geeignet. Dadurch eröffnet sich für MTAG die Möglichkeit die Festwertregelung zukünftig durch analoge SISO-PID-Regler umzusetzen. Die Parametrierung der PID-Regler kann verbessert werden. Die MPC-Regelung überwiegt die dezentrale PID-Regelung in den Punkten Führungsverhalten, Störverhalten und Robustheit. Sind die Parameter der MPC-Regelung festgelegt, gestaltet sich die Reglersynthese über die Systemidentifikation nahezu autonom. Bei der momentanen Parametrierung der beiden Regelungen sind die Stellamplituden bei der MPC-Regelung im allgemeinen kleiner als bei der PID-Regelung, dafür ist die Signalqualität der Stellgrösse bei der MPC-Regelung schlechter als bei der PID-Regelung.

6.3 Messungen zum System als Waage

6.3.1 Wiederholgenauigkeit

Die Wiederholgenauigkeit des Wägesystems wird ermittelt. Bei der Versuchsdurchführung werden folgende Punkte eingehalten:

- Als Wägesignal wird der digital gefilterte Summenstrom der Aktoren 1...3 gemessen. Es werden die absoluten Signale verwendet.
- Es werden 24 Messungen der Lasten: 0 g, 1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 50 g durchgeführt. Es resultieren 168 Messpunkte.
- Während der Messung wird darauf geachtet, dass im Versuchsraum möglichst konstante Temperatur und Lichtverhältnisse herrschen.

Über eine Ausgleichsrechnung wird der lineare Zusammenhang zwischen dem Summenstrom und der Masse des Wägeguts ausgemittelt. Der Ansatz lautet

$$m_w = \hat{a} i_{tf} - \hat{m} \quad (6.6)$$

und es ergeben sich die Werte $\hat{a} = 1.8655 \text{ g/mA}$ und $\hat{m} = 61.1355 \text{ g}$. Der analytische Wert der Strom-Massekonstanten beträgt

$$a_{ana} = 2\pi R B N / g_z = 2\pi \cdot 11.06 \text{ mm} \cdot 10^3 \cdot 0.27 \text{ T} / 9.81 \text{ m/s}^2 = 1.9126 \text{ g/mA} \quad (6.7)$$

Der über die Messung ermittelte Wert entspricht 97.54% des analytischen Werts. Der ermittelte Wert von m entspricht 94.77% des Wertes aus dem CAD-Export (64.51 g).

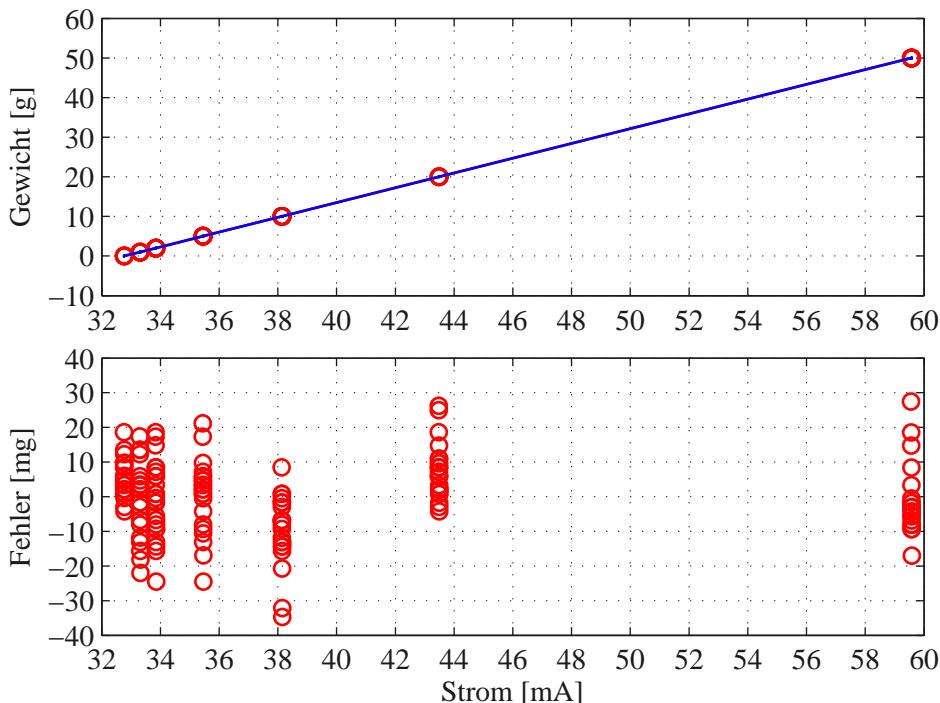


Abbildung 6.14: Messung der Wiederholgenauigkeit

Abbildung 6.14 zeigt die Gegenüberstellung der Messpunkte und dem linearen Fit. Zudem ist der Fehler zwischen der tatsächlichen und der über die Ausgleichsrechnung bestimmten Masse eingetragen. Die theoretische Quantisierung der Masse beträgt 3.88 mg. Die grösste Abweichung liegt bei rund 35 mg, also Faktor 9 mal die Massenquantisierung.

In Abbildung 6.15 sind die Histogramme der Strommessungen eingetragen. Die Mittelwerte und die Standardabweichungen der Strommessungen betragen dabei

$$\begin{aligned} \underline{\mu}^T &= [33.39 \ 33.84 \ 35.45 \ 38.14 \ 43.49 \ 59.58] \text{ mA} && \text{Mittelwert} \\ \underline{\sigma}^T &= [5.77 \ 5.78 \ 6.09 \ 5.39 \ 4.18 \ 5.37] \text{ } \mu\text{A} && \text{Standardabweichung} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Die Standardabweichung σ entspricht in etwa der dreifachen Stromquantisierung des Summenstroms ($\Delta i_t = 2.05 \mu\text{A}$). Unter der Annahme eines normalverteilten Signals liegen 97.73% der Messungen

innerhalb von 3σ , dies entspricht in schlimmsten Fall ca. $18 \mu\text{A}$. Mit der Strom-Massenkonstanten aus Gleichung (6.7) ergeben sich ca. $3\sigma = 34 \text{ mg}$ ($\sigma = 11.4 \text{ mg}$) in Gramm. Dies korrespondiert zum Fehler in Abbildung 6.14.

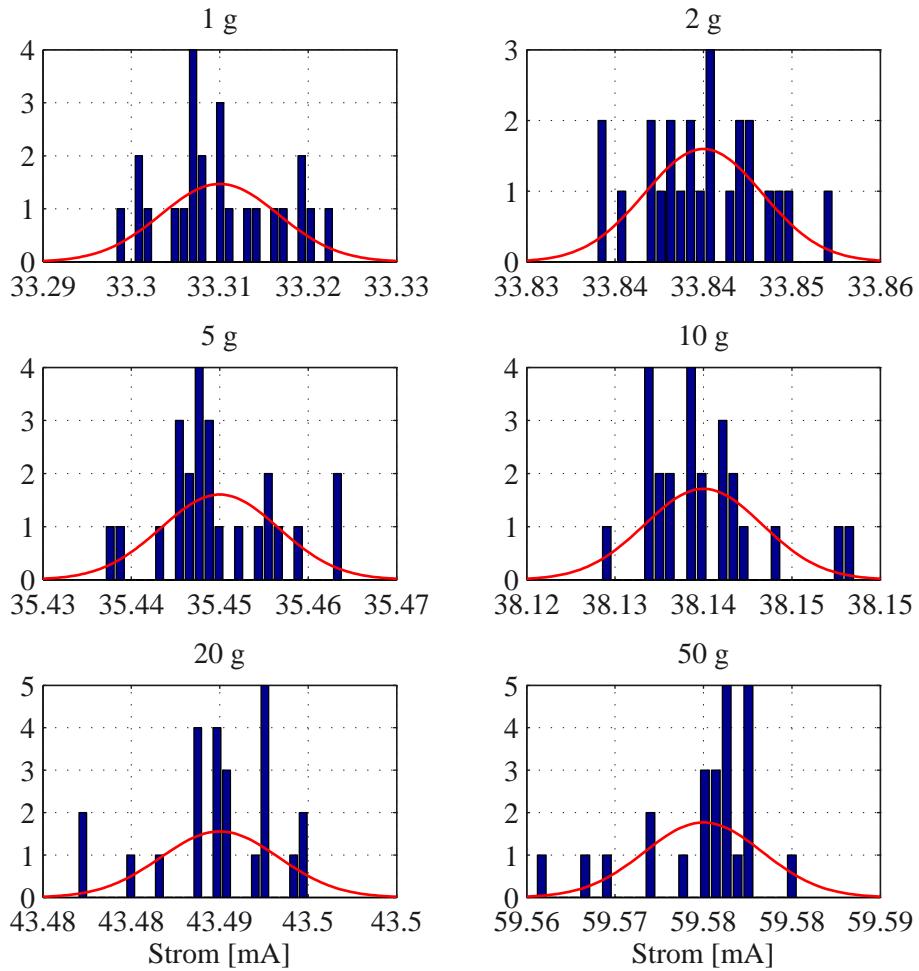


Abbildung 6.15: Histogramme der Strommessung der unterschiedlichen Prüfgewichte

Schlussfolgerung und Anmerkungen

Bei der Verwendung des Summenstroms der horizontalen Aktoren für die Ermittlung der Masse ist das FUMU1 mit einer Standardabweichung von rund $6 \mu\text{A}$ für den Summenstrom bzw. 11 mg für die Masse nicht als Präzisionswaage geeignet. Unter Anbetracht der fehlerbehafteten Mechanik aus Kunststoff und der Tatsache, dass es sich bei dem Versuchsaufbau in erster Linie um ein Funktionsmuster für die Erprobung der Regelung handelt, ist dieses Ergebnis zufriedenstellend. Zudem muss beachtet werden, dass bei üblichen Präzisionswaagen diverse Einflüsse der Umgebung die den Messprozess beeinflussen kompensiert werden.

6.3.2 Stromverlauf bei Verkipfung der Wägeplattform

Über die Stellschrauben kann das FUMU1 relativ zum Gravitationsfeld verkippt werden, vergl. Abbildung 6.1. Es werden zwei Messreihen durchgeführt. Einmal wird der Strom der Aktoren bei der Rotation um φ_x (Stellschraube 1&2) und einmal bei Rotation um φ_y (Stellschraube 2&3) aufgezeichnet. Über die Steigung der Gewinde (1.5 mm/U) und dem Loch zu Loch Abstand der Gewinde (27 cm) kann der Winkel φ_x bzw. φ_y näherungsweise bestimmt werden. Es werden jeweils 17 Messpunkte aufgenommen (Nominallage plus $8 \times 1/4$ Drehungen der Stellschrauben in die positive und in die negative Richtung).

Nachbildung des Stromverlaufs über die theoretische Jacobi-Matrix der Aktoren

Die Rotation der Wägeplattform relativ zum Gravitationsfeld um den Winkel φ entspricht im Inertialsystem des FUMU1 einer Rotation von \underline{g} um den Winkel $-\varphi$. Das Gravitationsfeld \underline{g} lässt sich näherungsweise durch

$$\underline{g}^T(\varphi_x) = g [0 \quad -\varphi_x \quad -1]^T \quad \text{Rotation um } \varphi_x \quad (6.9)$$

$$\underline{g}^T(\varphi_y) = g [\varphi_y \quad 0 \quad -1]^T \quad \text{Rotation um } \varphi_y \quad (6.10)$$

in Abhängigkeit des Winkels beschreiben. In einer statischen Gleichgewichtslage gilt $-\underline{f}_g = \underline{J}_A^T \underline{f}_{q_A} = \underline{J}_A^T \underline{i} w_e$. Wie in Abschnitt 6.1.2 aufgeführt, entspricht der Strom \underline{i}_0 des FUMU1 in der Nominallage nicht dem theoretischen Stromwert. Es werden deshalb die relativen Änderungen des Stromes zur Nominallage $\Delta \underline{i} = \underline{i} - \underline{i}_0$ in Abhängigkeit der Rotation φ_x bzw. φ_y betrachtet. Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.81) folgt für die relative Stromänderungsrate

$$\Delta \underline{i}(\varphi_i) = -\frac{m}{w_e} \underline{J}_A^{-T} \begin{bmatrix} \Delta \underline{g}(\varphi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{für } i = x, y \quad (6.11)$$

in Abhängigkeit des Winkels. \underline{J}_A^T wird aus den theoretischen Abmassen des FUMU1 aus Abschnitt 3.4.2 bestimmt. Als Gravitationskonstante wird $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ eingesetzt. Die Eigenmasse m und die Strom-Kraftkonstante w_e werden aus der Ausgleichsrechnung (6.6) übernommen ($w_e = \hat{a} g = 18.7628 \text{ N/A}$).

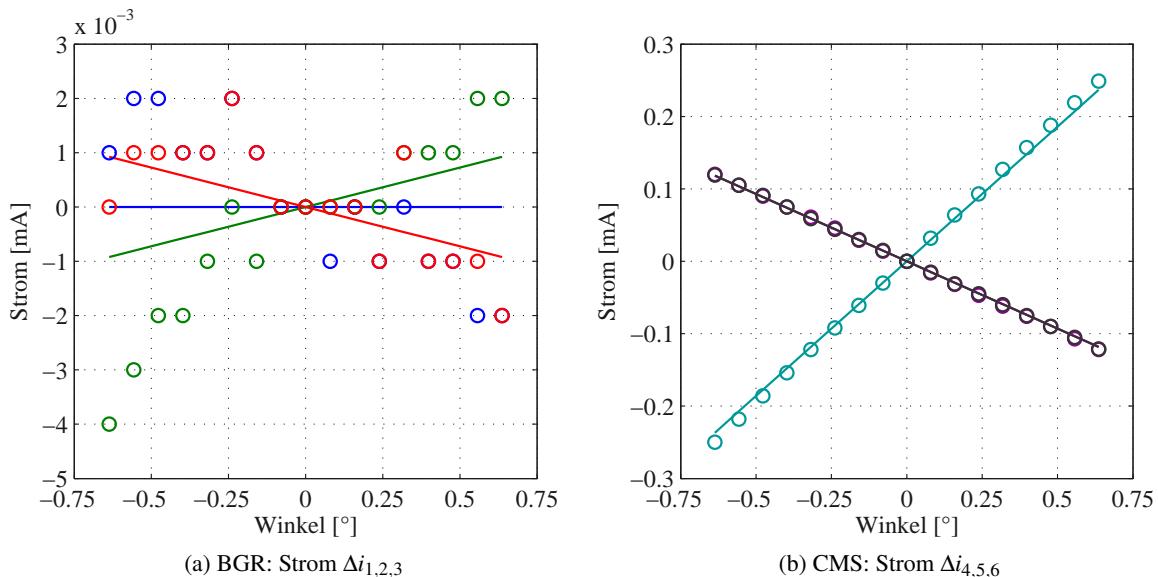


Abbildung 6.16: Rotation um φ_x , Vergleich mit den analytischen Werten, o: Messung, -: Modell

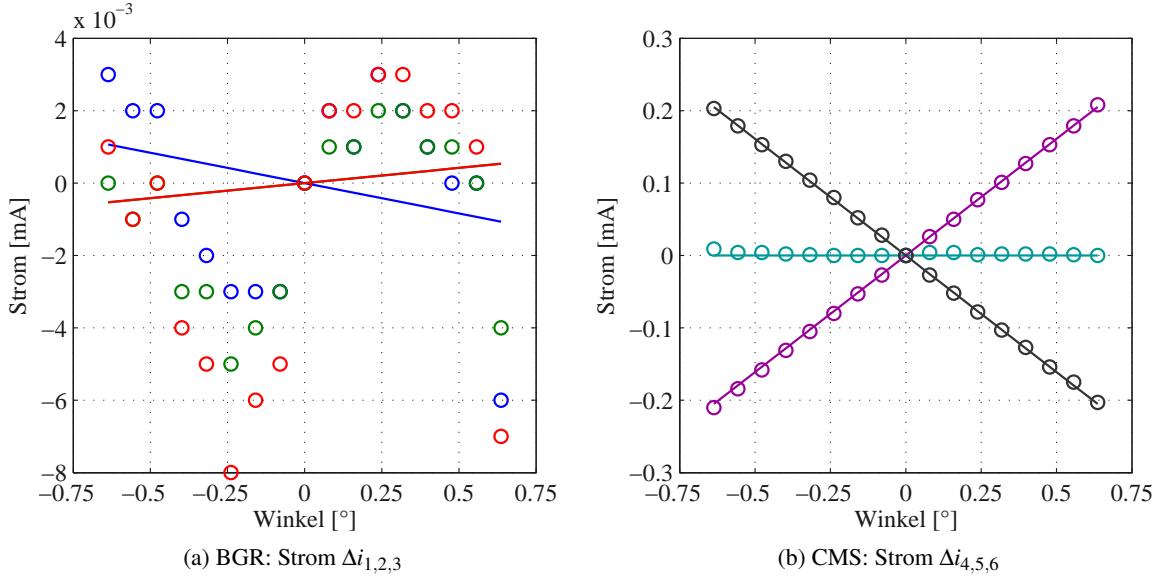


Abbildung 6.17: Rotation um φ_y , Vergleich mit den analytischen Werten, o : Messung, - : Modell

In Abbildung 6.16 ist der Vergleich zwischen der Messung und dem Modell des Stromverlaufs für die Rotation um φ_x und in Abbildung 6.17 für die Rotation um φ_y eingetragen. Die Strommessungen Δi werden über das Modell gut abgebildet.

Die Stromverläufe der vertikalen Aktoren 1...3 ändern praktisch nicht. Dies ist durch die Normalvektoren der Aktoren zu erklären. Für kleine Winkel ist der Stromverlauf der vertikalen Aktoren von der Art $i_{1,2,3} \propto \cos \theta \approx 1$. Für die horizontalen Aktoren ist der Stromverlauf jedoch von der Art $i_{4,5,6} \propto \sin \theta \approx \theta$.

Prinzipielles Vorgehen bei der Ermittlung der Schieflage bei Null-Last

Trotz der Diskrepanz zwischen dem theoretischen Modell und der Mechanik wird das statische Verhalten des relativen Stromverlaufs gut abgebildet. Nachfolgend soll aufgezeigt werden, wie die Verkippung der Waage über die theoretische Jacobi-Matrix der Aktoren und die Strommessung ermittelt werden kann.

Für die Umrechnung der Aktorkäfte in die globalen Kräfte gilt statisch $\underline{f}_g = -\underline{J}_A^T \underline{i} w_e$, dabei enthält \underline{f}_g in den ersten drei Zeilen \underline{m}_g , siehe auch Gleichung (3.83). Die ersten drei Zeilen des Vektors $\underline{J}_A^T \underline{i}$ zeigen folglich entgegengesetzt zu \underline{g} . Dieser Richtungsvektor wird mit \underline{n}_g bezeichnet, siehe Abbildung 6.18.

Es wird davon ausgegangen, dass $\|\underline{n}_g\|_2 = 1$ auf Eins normiert ist. $\underline{\tilde{n}}_g$ entspricht der Projektion von \underline{n}_g auf die (y,z) -Ebene. Die Winkel φ_x und φ_y können anhand von

$$\varphi_y = \text{sign}(n_{gx}) \cos^{-1} \left(\frac{\underline{n}_g^T \underline{\tilde{n}}_g}{\|\underline{\tilde{n}}_g\|_2} \right), \quad \varphi_x = -\text{sign}(n_{gy}) \cos^{-1} \left(\frac{\underline{e}_z^T \underline{\tilde{n}}_g}{\|\underline{\tilde{n}}_g\|_2} \right) \quad (6.12)$$

bestimmt werden. φ_x und φ_y beschreiben Euler-Winkel im Inertialsystem (x,y,z) des FUMU1. Da der Kosinus eine gerade Funktion bezeichnet, sind die Winkel nicht eindeutig. Die eindeutige Beschreibung von \underline{n}_g über die Euler-Winkel φ_x und φ_y kann über die Vorzeichen von n_{gx} und n_{gy} festgelegt werden.

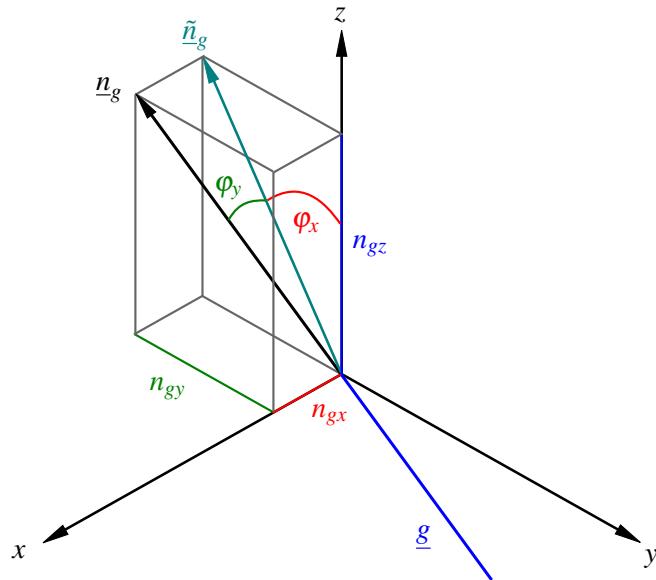


Abbildung 6.18: Skizze zur Bestimmung der Eulerwinkel

6.3.3 Einschaltverhalten

Das Langzeitverhalten des FUMU1 wird experimentell ermittelt. Vor Beginn der Messung ist das System über einen längeren Zeitraum nicht in Betrieb (kalt). Zu Beginn der Messung wird das System eingeschaltet. MTAG spricht in diesem Zusammenhang vom Einschaltverhalten. Es werden Langzeitmessungen bei Null-Last und 49 g-Last gemessen. Die Messdauer beträgt jeweils sechs Stunden. Der Strom wird dabei relativ zum Stromwert beim Einschalten gemessen. Es muss beachtet werden, dass die Messungen über Nacht durchgeführt wurden. Die Temperatur im Versuchsräum wird stark durch die Außentemperatur beeinflusst. Die Temperatur wird nicht gemessen.

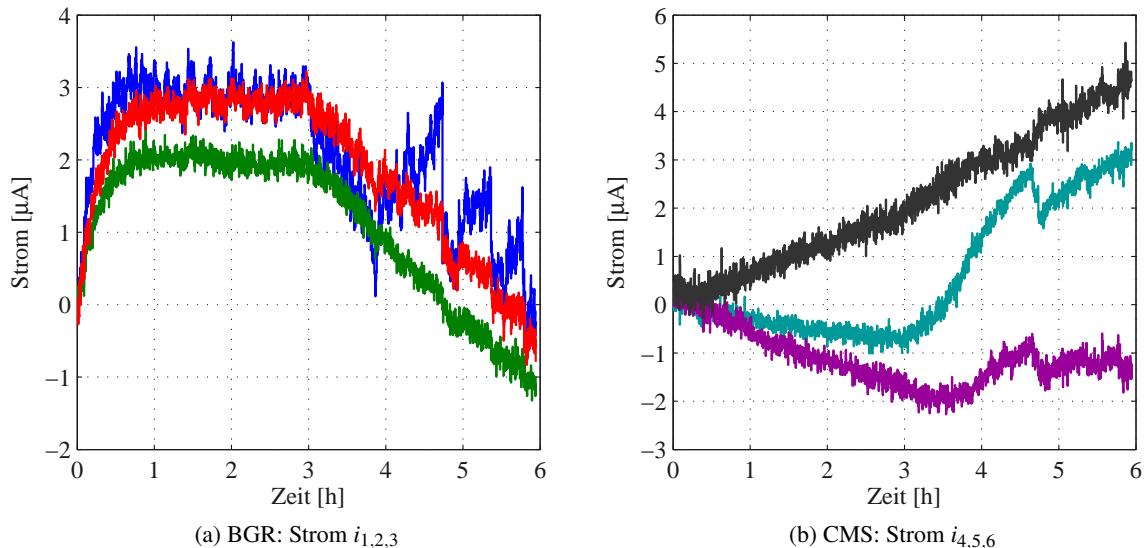


Abbildung 6.19: Einschaltverhalten, 0 g-Last

In Abbildung 6.19 sind die gemessenen Stromverläufe bei Null-Last aufgeführt. Der eigentliche Einschaltvorgang ist nach ca. einer Stunde abgeschlossen. Zum Zeitpunkt $t = 3$ h ist Sonnenuntergang und die Temperatur sinkt, was den Abfall der Stromverläufe erklärt. Der Strom i_3 fällt um ca. $3 \mu\text{A}$ bis zum Zeitpunkt $t = 6$ h. Bezogen auf die Spannung über dem Shunt entspricht dies $\Delta u_s = 0.44 \text{ mV}$. Der Temperaturkoeffizient der Strommessung aus Gleichung (3.74) liegt im AP bei ca. $\alpha_u u_0 \approx 0.2 \text{ mV/K}$. Über das Modell ergibt sich ein Temperaturfall von 2.2 K.

Es wird vermutet, dass die Sprünge in den Stromsignalen auf die Verbindungsrähte zwischen den Stellern und den Voice-Coil-Aktoren zurückzuführen sind (auch nach Angaben von MTAG).

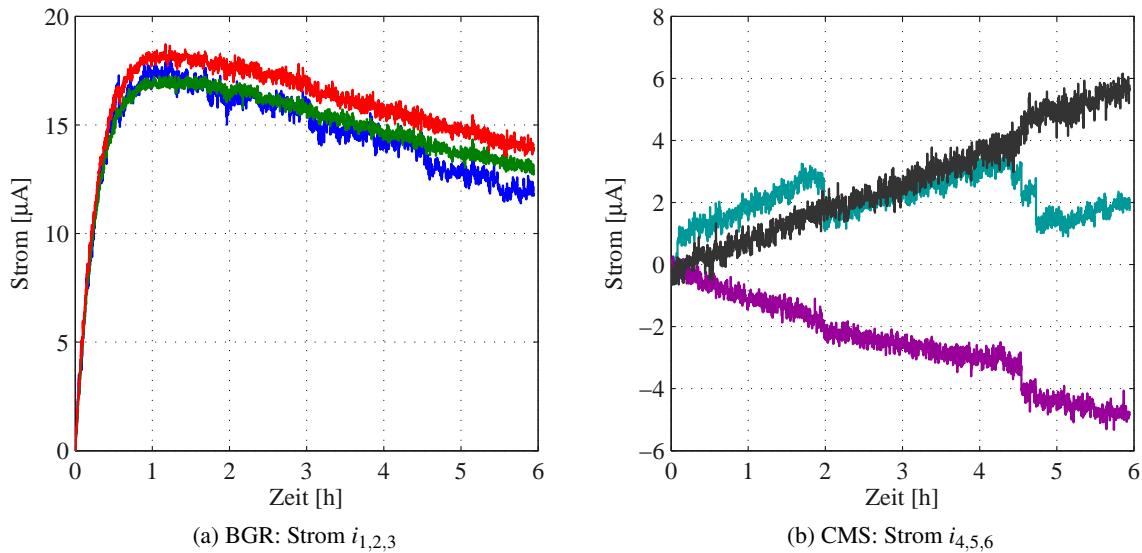


Abbildung 6.20: Einschaltverhalten, 49 g-Last

In Abbildung 6.20 sind die gemessenen Stromverläufe bei 49 g-Last aufgeführt. Der Einschaltvorgang ist nach ca. einer Stunde abgeschlossen. Hier wurde die Messung vier Stunden nach Sonnenuntergang gestartet. Wiederum ist der Abfall der Strommsignale $i_{1,2,3}$ nach Abschluss des Einschaltvorgangs auf den Temperaturfall im Versuchraum zurückzuführen.

7 Schlussbetrachtung

Rückblick

Theoretische Modellbildung

Neben der Erstellung eines Simulationsmodells dient die theoretische Modellbildung dem Zweck, tieferes Verständnis der wesentlichen Wechselwirkungen des Systems zu erlangen. Hierfür wurden mathematische Modelle der Voice-Coil-Aktoren und des Starrkörpermodells der Wägeplattform erstellt und untersucht. Es hat sich gezeigt, dass die Eigendynamik des elektromagnetischen Teils der Voice-Coil-Aktoren in Relation zur Dynamik der Mechanik vernachlässigt werden kann. Das statische Modell der Voice-Coil-Aktoren und die Bewegungsgleichung des Starrkörpers wurden zu einem linearen Modell des VC6 zusammengefasst.

Die Modellparameter der Voice-Coil-Aktoren wurden mit Hilfe einer herkömmlichen Wägezelle experimentell ermittelt. Die Massenverteilung des Starrkörpers wurde in einem ersten Schritt über Massenpunkte abgebildet. Beim theoretischen Modell des FUMU1 wurde der Trägheitstensor und die Masse des schwebenden Teils der Waage aus einem CAD-Modell exportiert.

Optimierung der kinematischen Konfiguration

Mit Hilfe der Jacobi-Matrix der Aktoren wurde ein geometrisches Gütemass für die Kraftübertragung abgeleitet und einem Optimierungsproblem zugrunde gelegt. Hinsichtlich des dynamischen Verhaltens des VC6 wurden Masszahlen zur Beurteilung der Steuerbarkeit untersucht. Die optimale Anordnung der Voice-Coil-Aktoren wurde anhand dieser Gütemasse festgelegt. Die Untersuchungen ergaben, dass unter Einhaltung der gestellten Randbedingungen eine 3-zählige Rotationssymmetrie resultiert, bei welcher die horizontalen Aktoren näher beim Zentrum der Waage angebracht sind als die vertikalen Aktoren. Aufbauend auf diese Erkenntnisse wurde von MTAG ein Funktionsmuster des VC6 konstruiert und hergestellt.

Das statische Modell des Wägeprozesses kann für das umgesetzte Konzept der Aktoren auf eine äquivalente Betrachtung einer Waage mit nur einem Aktor reduziert werden. Mit Hilfe dieses stark vereinfachten Modells wurde die Sensitivität der Waage auf Schieflage untersucht. Des Weiteren wurde die Temperaturempfindlichkeit der Strommessung analysiert und der Einfluss des statischen Auftriebs der Mechanik auf die Null-Last untersucht. Bei dem gegebenen Bauvolumen des FUMU1 ist der Einfluss gross. Durch eine geeignete Wahl des Materials der Wägeplattform kann dieser Einfluss jedoch deutlich verringert werden.

Positionsregelung

Für die Positionsregelung des VC6 wurden zwei unterschiedliche Regelstrategien untersucht. Die wesentlichen Grundlagen der System- und Regelungstheorie von Mehrgrößensystemen wurde dargestellt. Die Steuer- und Beobachtbarkeit des linearen Modells des VC6 wurde aufgezeigt. Durch die geometri-

sche Anordnung der Aktoren ist das System sowohl statisch, als auch dynamisch schwach verkoppelt. Aufgrund der schwachen Verkoppelung des Systems wurde eine dezentrale PID-Regelung entworfen. Der Stabilitätsnachweis des Regelsystems erfolgt über den Stabilitätsnachweis der Einzelregelkreise und die verallgemeinerte Diagonaldominanz der offenen Kette. Des Weiteren wurde eine lineare MPC-Regelstrategie untersucht. Bei den getroffenen Annahmen führt das Optimierungsproblem auf eine erweiterte, integrierende Zustandregelung. Die Zustände werden über ein stationäres Kalman-Filter geschätzt. Die Dynamik des Regelsystems wird im Zustandsraum beschrieben. Im nominellen Fall gilt wie bei einer herkömmlichen Zustandsregelung das Separationsprinzip. Die Stabilität des Regelkreises wird durch die Lage der Eigenwerte des Gesamtsystems nachgewiesen.

Experimentelle Modellbildung

Die theoretische Modellbildung ist im Allgemeinen zeitaufwendig und verlangt ein tiefgreifendes Systemverständnis. In Bezug auf die verwendeten Regelstrategien ist ein physikalisches Modell für den Entwurf der Regelung keine zwingende Bedingung. Es wird lediglich ein parametrisches Modell der Strecke benötigt, welches das reale Systemverhalten hinreichend beschreibt. Dabei wurde der Fokus auf die praxisrelevanten Aspekte der Systemidentifikation gelegt. Die Kombination der ARX-Systemidentifikation und der PEM-Systemidentifikation erzielt trotz der Schwierigkeit der Identifikation im Regelbetrieb eine hohe Modellgüte. Durch den gewählten Modellansatz in Zustandsraumdarstellung gestaltet sich die Identifikation verhältnismässig einfach. Das identifizierte Modell dient dem Entwurf und der Analyse der beiden Regelstrategien.

Experimentelle Systemanalyse

Die wesentlichen Erfahrungen der Inbetriebnahme des FUMU1 wurden dargestellt und diskutiert. Dies beinhaltet die Montage der Mechanik, die Inbetriebnahme der Elektronik und die Inbetriebnahme der Positionsregelung. Allgemein lässt sich sagen, dass das FUMU1 aufgrund der Fehler der Mechanik deutlich stärker verkoppelt ist als das theoretische Modell. Idealerweise wird die Mechanik zukünftig aus Aluminium oder Stahl gefertigt. Die Wägeplattform und die Bodenplatte wird gefräst und für die Montage der Magnettöpfe und Spulenkörper sind Anschläge und Verstiftungen vorgesehen.

Die Regelgüte der umgesetzten Regelstrategien wird durch verschiedene Experimente geprüft. Es zeigt sich, dass die dezentrale PID-Regelung grundsätzlich für die Positionsregelung des FUMU1 geeignet ist. Der Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, dass die dezentrale Regelung zukünftig durch sechs einfache analog PID-Regler realisiert werden kann. Die Regelgüte der MPC-Regelung übertrifft die PID-Regelung in Bezug auf das Führungs- und Störverhalten. Zudem ist die MPC-Regelung deutlich robuster gegenüber zusätzlicher Beladung der Waage. Bei der momentanen Parametrierung der beiden Regelungen sind die Stellamplituden bei der MPC-Regelung im allgemeinen kleiner als bei der PID-Regelung, dafür ist die Signalqualität der Stellgrösse bei der MPC-Regelung schlechter als bei der PID-Regelung.

Das Wägekonzept des FUMU1, also den Summenstrom der drei vertikalen Aktoren für die Ermittlung der Masse des Wägeguts heranzuziehen wurde messtechnisch analysiert. Es hat sich gezeigt, dass das FUMU1 aufgrund der Fehler der Mechanik nicht als Präzisionswaage geeignet ist. Des Weiteren wurde dargestellt, wie die relative Verkipfung der Waage im Gravitationsfeld ermittelt werden kann. Abschliessend wurde das Einschaltverhalten des System über einen längeren Zeitraum untersucht.

Ausblick

Folgende Punkte werden in den Ausblick gestellt:

1. Das in Gleichung (3.83) dargestellte Verfahren zur Ermittlung des Wägeguts über die Strommessung aller Aktoren soll am FUMU1 untersucht werden. Hier stellt sich die Frage, wie die Matrix $J_A^T \underline{W}_e$ messtechnisch einfach und zuverlässig ermittelt werden kann.
2. Auslegung und Erprobung einer dezentralen P-PI-Kaskadenregelung für die Positionsregelung des FUMU1. Es wird vermutet, dass über eine Kaskadenregelung deutlich besseres Führungs- und Störverhalten erzielt werden kann als bei der direkten PID-Regelung.
3. Konstruktion, Fertigung und Montage eines neuen Funktionsmusters. Die horizontalen Aktoren sind so nah als konstruktiv möglich an die äusseren Aktoren anzubringen. Die Wägeplattform und die Bodenplatte werden aus Aluminium oder Stahl als Präzisionsfrästeile gefertigt. Für die Magnettöpfe sind Verstiftungen und für die Spulenkörper Anschlüsse vorzusehen. Sinnvollerweise sind, zumindest für die horizontalen Aktoren, kleinere und leichtere Voice-Coil-Aktoren zu entwickeln.

Schlusswort

In Zusammenarbeit mit MTAG wurde ein völlig neuartiges Wägesystem entwickelt, umgesetzt und analysiert. Bestandteil dieses Prozesses zu sein erfüllte mich mit grosser Freude und Stolz. Rückblickend wird die Arbeit als anspruchsvoll, lehrreich und interessant empfunden.

Danksagung

In diesem Zusammenhang möchte ich mich bei meinem betreuenden Professor R. Altenburger für die grosse Unterstützung bedanken. Es soll hier hervorgehoben werden, dass der rasche Einstieg in die Thematik in erster Linie durch seine Hilfe zu begründen ist. Des Weiteren möchte ich mich bei allen beteiligten Personen bei der MTAG bedanken. Hierzu zählen die Lehrlinge, die die Mechanik und die Elektronik konstruiert und umgesetzt haben und die Laboranten, die mir bei der Inbetriebnahme behilflich waren. Insbesondere Herrn D. Reber danke ich für seine Mühe und die Unterstützung und natürlich für die Möglichkeit der Durchführung der vorliegenden Arbeit. Ein weiterer Dank gebührt den Mathematikprofessoren M. Robbiani und T. Haller sowie dem Professor für Leistungselektronik J. Lattmann.

Selbstverständlich bedanke ich mich auch bei meinen Eltern, Erika Anna und Ernst Andreas Peter. Ohne euch wäre ich heute nicht hier. Ihr habt mir die Möglichkeit des Studiums eröffnet.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner lieben Maria, für die Unterstützung, den Rückhalt und die Geduld.

Michael Ernst Peter

Anhang

A.1 Messungen

A.1.1 Quervergleich 1 des identifizierten Modells

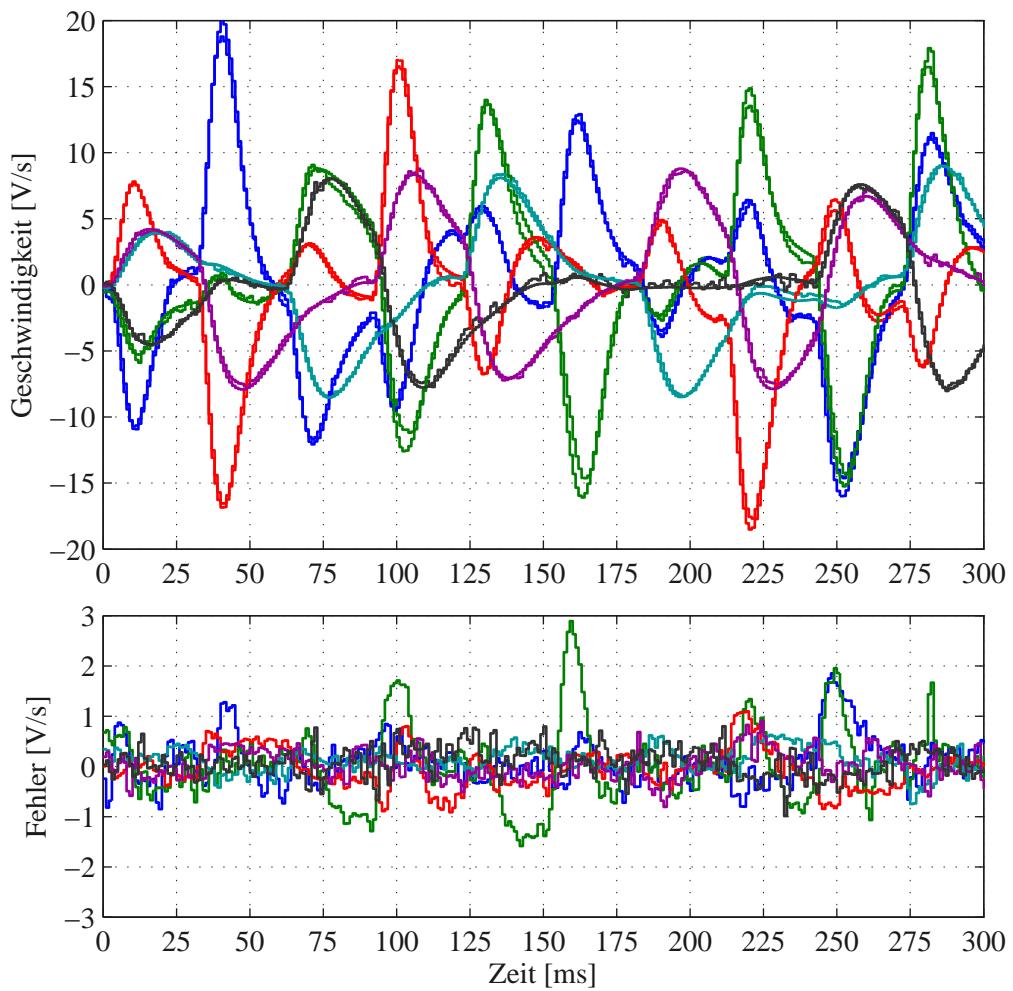


Abbildung A.1: Quervergleich mit einer alternativen Messung 1, BGRCMS: $q_{1,\dots,6}(k)$

A.1.2 Quervergleich 2 des identifizierten Modells

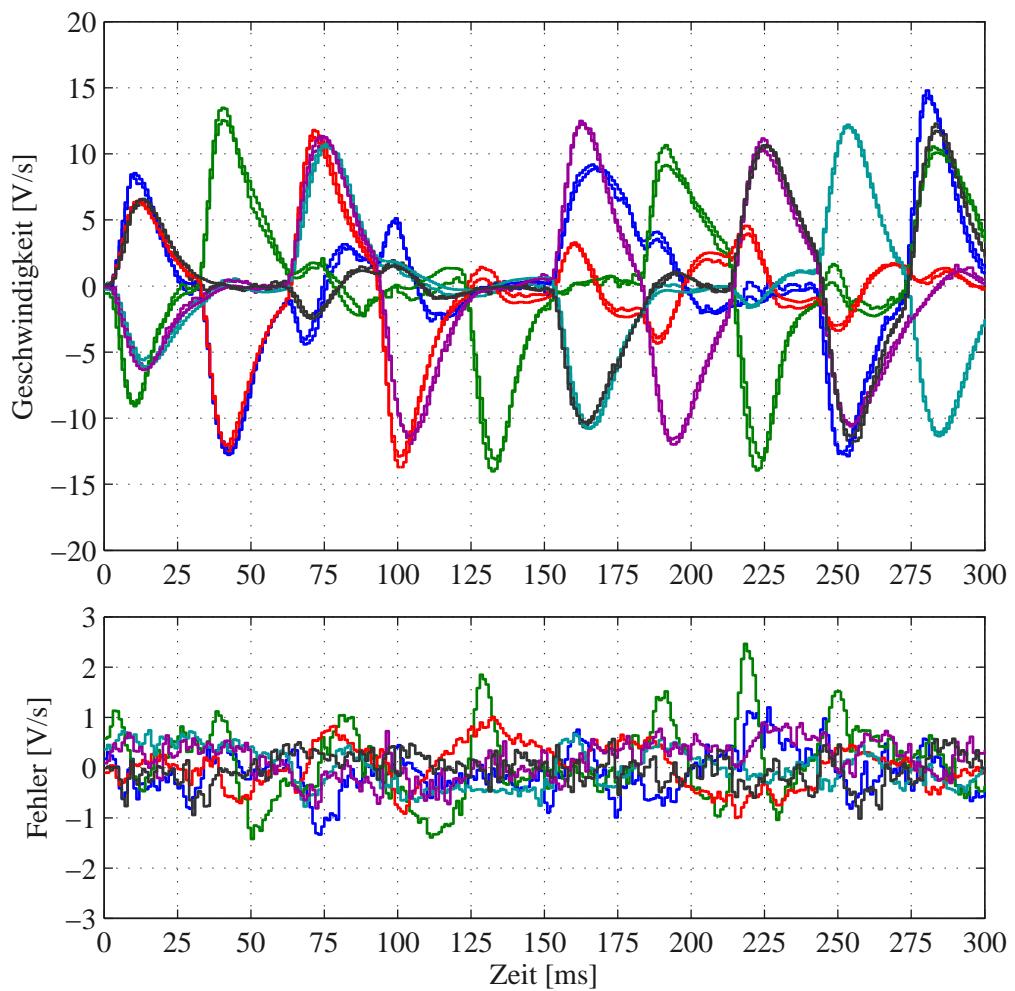


Abbildung A.2: Quervergleich mit einer alternativen Messung 2, BGRCMS: $q_{1,\dots,6}(k)$

A.1.3 Normierte Korrelation der Führungsgrösse

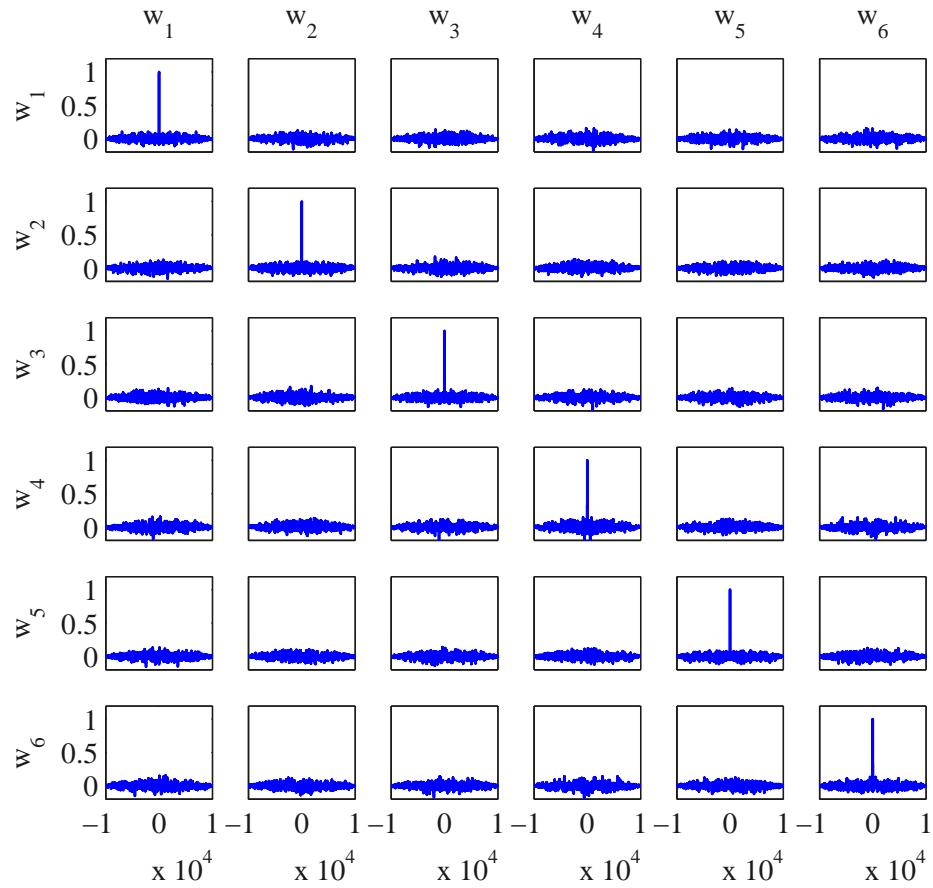


Abbildung A.3: Normierte Korrelation der Führungsgrösse

A.1.4 Normierte Korrelation der Stellgrösse

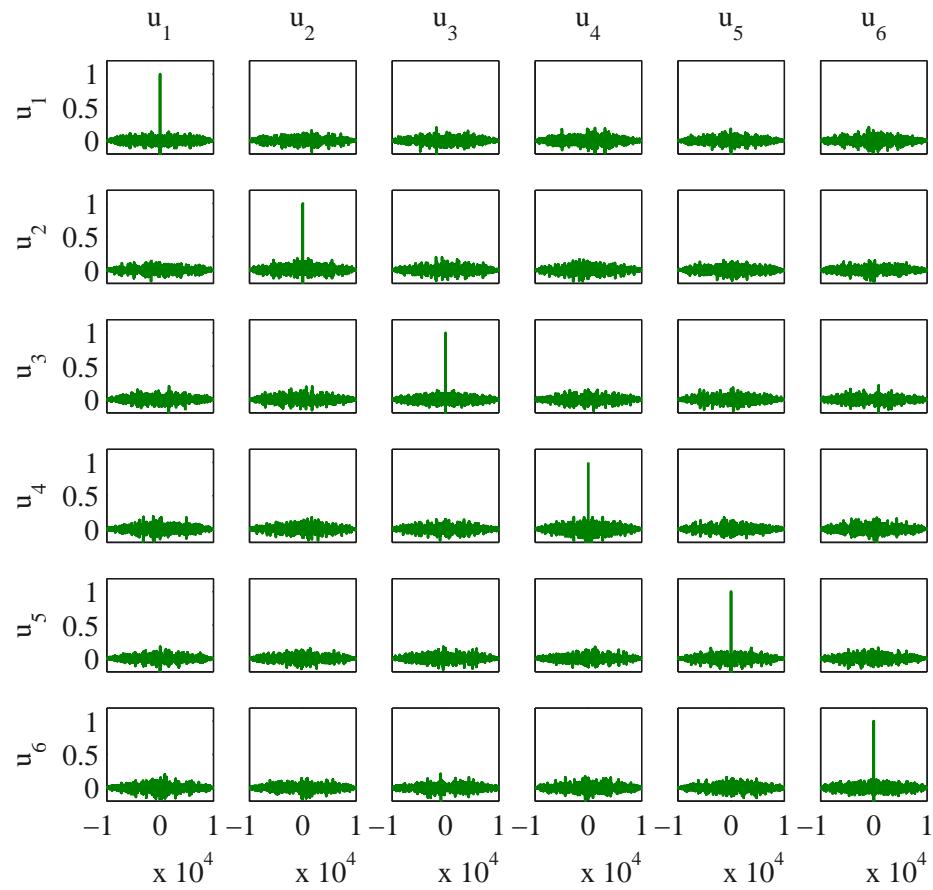


Abbildung A.4: Normierte Korrelation der Stellgrösse

A.1.5 Normierte Korrelation der Geschwindigkeit

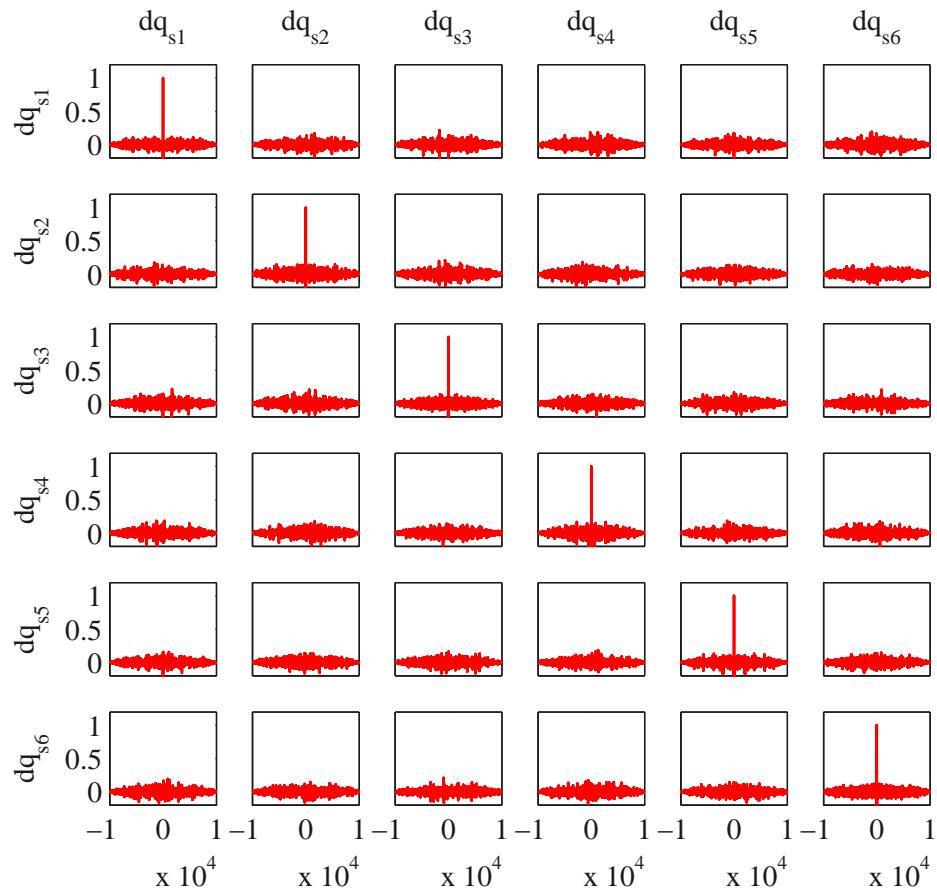


Abbildung A.5: Normierte Korrelation der Geschwindigkeiten

A.1.6 Normierte Kreuzkorrelation zwischen der Führungsgrösse und dem Prädiktionsfehler

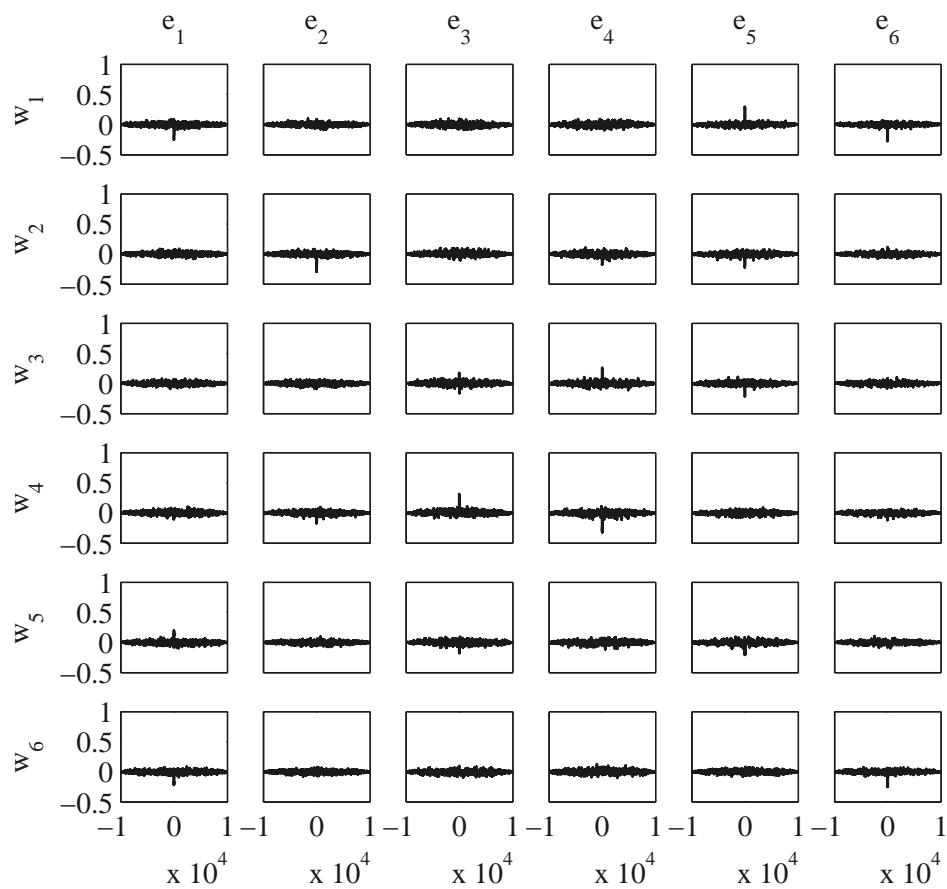


Abbildung A.6: Normierte Korrelation zwischen der Führungsgrösse und dem Prädiktionsfehler

A.1.7 Führungsfrequenzgangmessungen der dezentralen PID-Regelung

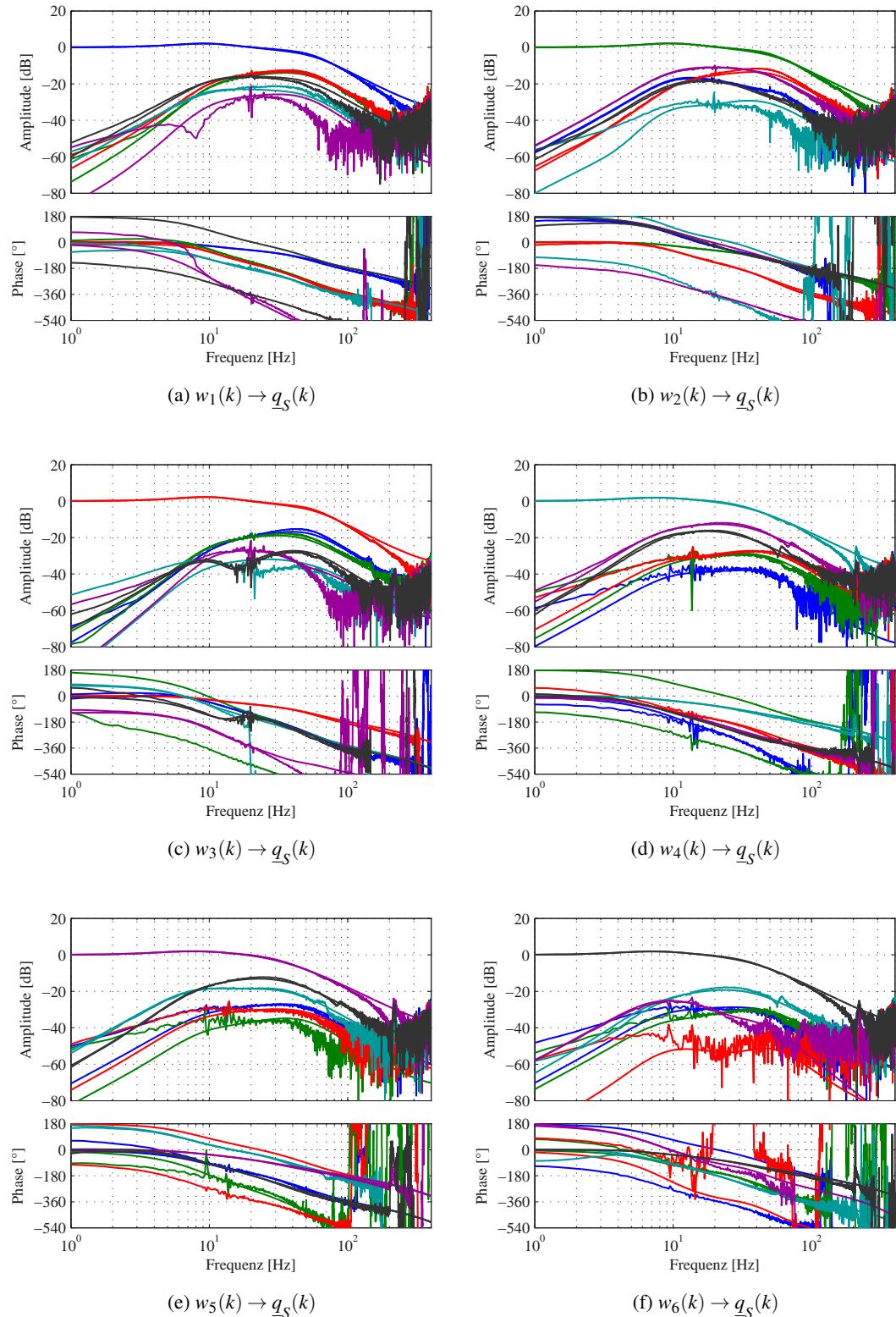


Abbildung A.7: Führungsfrequenzgang der PID-Regelung, Vergleich Simulation und Messung

A.1.8 Führungs frequenzgangmessungen der MPC-Regelung

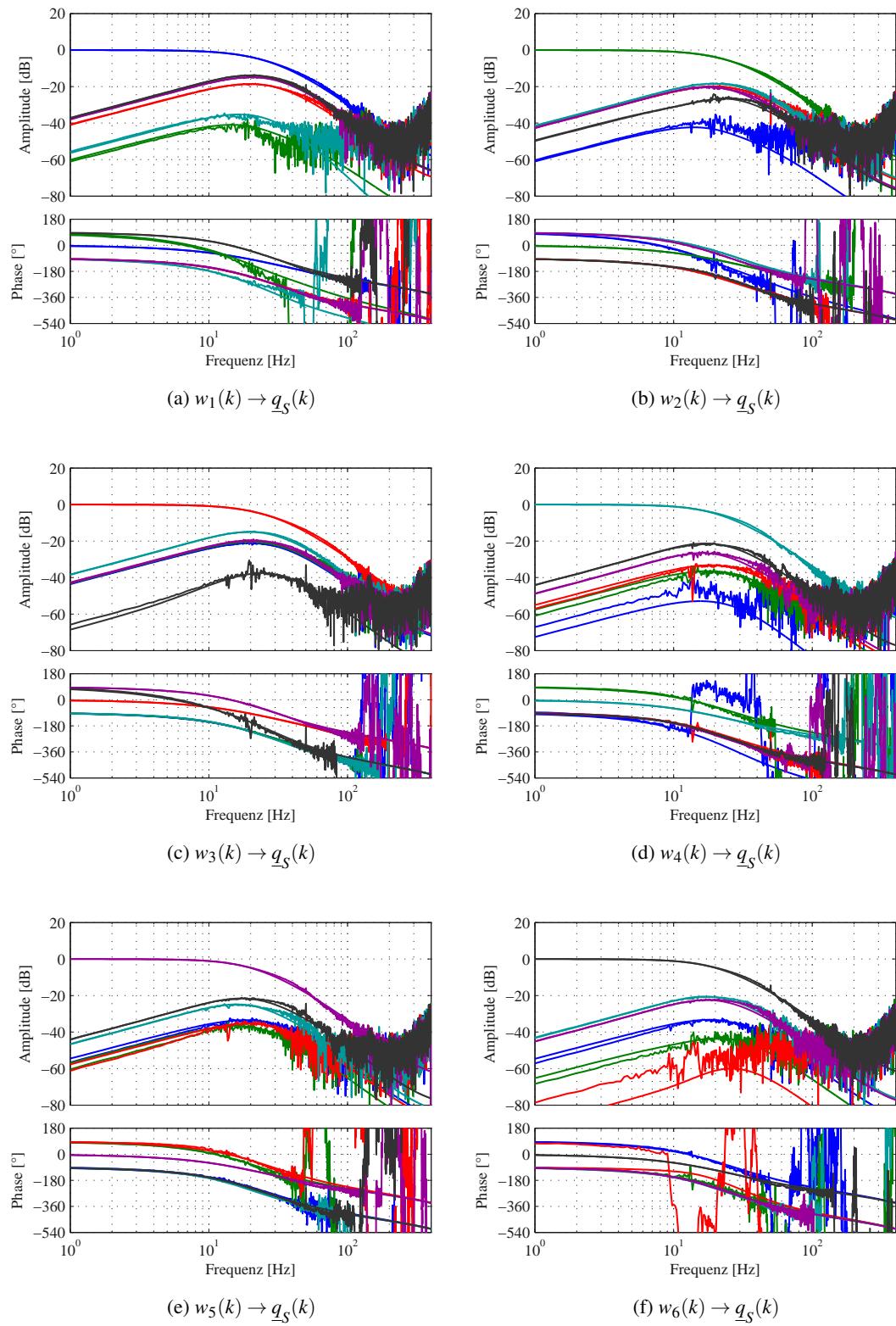


Abbildung A.8: Führungs frequenzgang der MPC-Regelung, Vergleich Simulation und Messung

A.2 Identifiziertes Modell

Der Aufbau des zeitkontinuierlichen Gesamtmodells aus den nachfolgend angegebenen Untermatrizen mit dem Zustandsvektor $\underline{x}^T = [q_{S1} \dots q_{S6} \dot{q}_{S1} \dots \dot{q}_{S6}]$ muss gemäss

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{I} \\ 0 & \tilde{\underline{A}} \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\tilde{B}} \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

durchgeführt werden. Das zeitdiskrete Modell (Transformation vom \mathcal{L} - in den \mathcal{Z} -Bereich mit der Euler-Vowärts-Methode) ist entsprechend

$$\underline{A}_d = T_s \underline{A} + \underline{I} = \begin{bmatrix} \underline{I} & T_s \underline{I} \\ 0 & \tilde{\underline{A}}_d \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_d = T_s \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\tilde{B}}_d \end{bmatrix}, \quad \underline{C}_d = \underline{C} \quad (\text{A.2})$$

durchzuführen, dabei lautet der Zustandsvektor $\underline{x}^T = [q_{S1} \dots q_{S6} d{q}_{S1} \dots d{q}_{S6}]$.

A.2.1 Zeitkontinuierliches, unskaliertes Modell

$$\hat{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -143.5376 & 21.7932 & 21.0832 & -9.6378 & -5.0303 & 8.0157 \\ 15.5924 & -134.0599 & 22.2197 & 1.9424 & 22.5970 & 12.4495 \\ 15.4302 & 20.4156 & -134.4873 & 3.4085 & -6.9690 & -8.0172 \\ -0.3244 & -4.0603 & 4.2217 & -55.6194 & 5.1086 & 3.8518 \\ 4.3120 & -1.7599 & -3.6569 & 6.2227 & -54.8309 & 6.6215 \\ -4.0462 & 3.4367 & 0.4272 & 3.4114 & 5.7639 & -55.2641 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1.1822 & -0.2099 & -0.2265 & -0.0089 & -0.0056 & 0.0236 \\ 0.0756 & 1.0274 & -0.2487 & 0.0048 & 0.0359 & 0.0099 \\ -0.1789 & -0.1097 & 1.0720 & -0.0036 & 0.0058 & -0.0075 \\ 0.0093 & 0.0351 & -0.0518 & 0.1072 & -0.0278 & -0.0137 \\ -0.0526 & 0.0149 & 0.0369 & 0.0129 & 0.1240 & -0.0274 \\ 0.0403 & -0.0370 & -0.0004 & -0.0126 & -0.0003 & 0.1226 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

$$\lambda(\hat{\underline{A}})^T = \begin{bmatrix} -157.1788 & -156.5224 & -98.1656 & -45.1514 & -62.2968 & -58.4842 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A.2.2 Zeitdiskretes, skaliertes Modell

$$\hat{A}_{ds} = \begin{bmatrix} 0.8565 & 0.0218 & 0.0211 & -0.0096 & -0.0050 & 0.0080 \\ 0.0156 & 0.8659 & 0.0222 & 0.0019 & 0.0226 & 0.0124 \\ 0.0154 & 0.0204 & 0.8655 & 0.0034 & -0.0070 & -0.0080 \\ -0.0003 & -0.0041 & 0.0042 & 0.9444 & 0.0051 & 0.0039 \\ 0.0043 & -0.0018 & -0.0037 & 0.0062 & 0.9452 & 0.0066 \\ -0.0040 & 0.0034 & 0.0004 & 0.0034 & 0.0058 & 0.9447 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_{ds} = \begin{bmatrix} 23.6438 & -4.1978 & -4.5305 & -1.0673 & -0.6754 & 2.8364 \\ 1.5117 & 20.5480 & -4.9742 & 0.5737 & 4.3086 & 1.1824 \\ -3.5779 & -2.1936 & 21.4407 & -0.4329 & 0.6942 & -0.9001 \\ 0.1868 & 0.7024 & -1.0351 & 12.8674 & -3.3410 & -1.6403 \\ -1.0520 & 0.2974 & 0.7386 & 1.5430 & 14.8812 & -3.2842 \\ 0.8054 & -0.7401 & -0.0076 & -1.5063 & -0.0413 & 14.7114 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda}(\hat{A}_{ds})^T = \begin{bmatrix} 0.8428 & 0.8435 & 0.9018 & 0.9548 & 0.9377 & 0.9415 \end{bmatrix}, \quad T_s = 1 \text{ ms} \quad (\text{A.4})$$

A.2.3 Zeitkontinuierliches, skaliertes Modell

$$\hat{A}_s = \begin{bmatrix} -143.5376 & 21.7932 & 21.0832 & -9.6378 & -5.0303 & 8.0157 \\ 15.5924 & -134.0599 & 22.2197 & 1.9424 & 22.5970 & 12.4495 \\ 15.4302 & 20.4156 & -134.4873 & 3.4085 & -6.9690 & -8.0172 \\ -0.3244 & -4.0603 & 4.2217 & -55.6194 & 5.1086 & 3.8518 \\ 4.3120 & -1.7599 & -3.6569 & 6.2227 & -54.8309 & 6.6215 \\ -4.0462 & 3.4367 & 0.4272 & 3.4114 & 5.7639 & -55.2641 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_s = \begin{bmatrix} 2.3644 & -0.4198 & -0.4530 & -0.1067 & -0.0675 & 0.2836 \\ 0.1512 & 2.0548 & -0.4974 & 0.0574 & 0.4309 & 0.1182 \\ -0.3578 & -0.2194 & 2.1441 & -0.0433 & 0.0694 & -0.0900 \\ 0.0187 & 0.0702 & -0.1035 & 1.2867 & -0.3341 & -0.1640 \\ -0.1052 & 0.0297 & 0.0739 & 0.1543 & 1.4881 & -0.3284 \\ 0.0805 & -0.0740 & -0.0008 & -0.1506 & -0.0041 & 1.4711 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

$$\underline{\lambda}(\hat{A}_s)^T = \begin{bmatrix} -157.1788 & -156.5224 & -98.1656 & -45.1514 & -62.2968 & -58.4842 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A.3 Vergleich der Singulärwertdiagramme der Regelungen

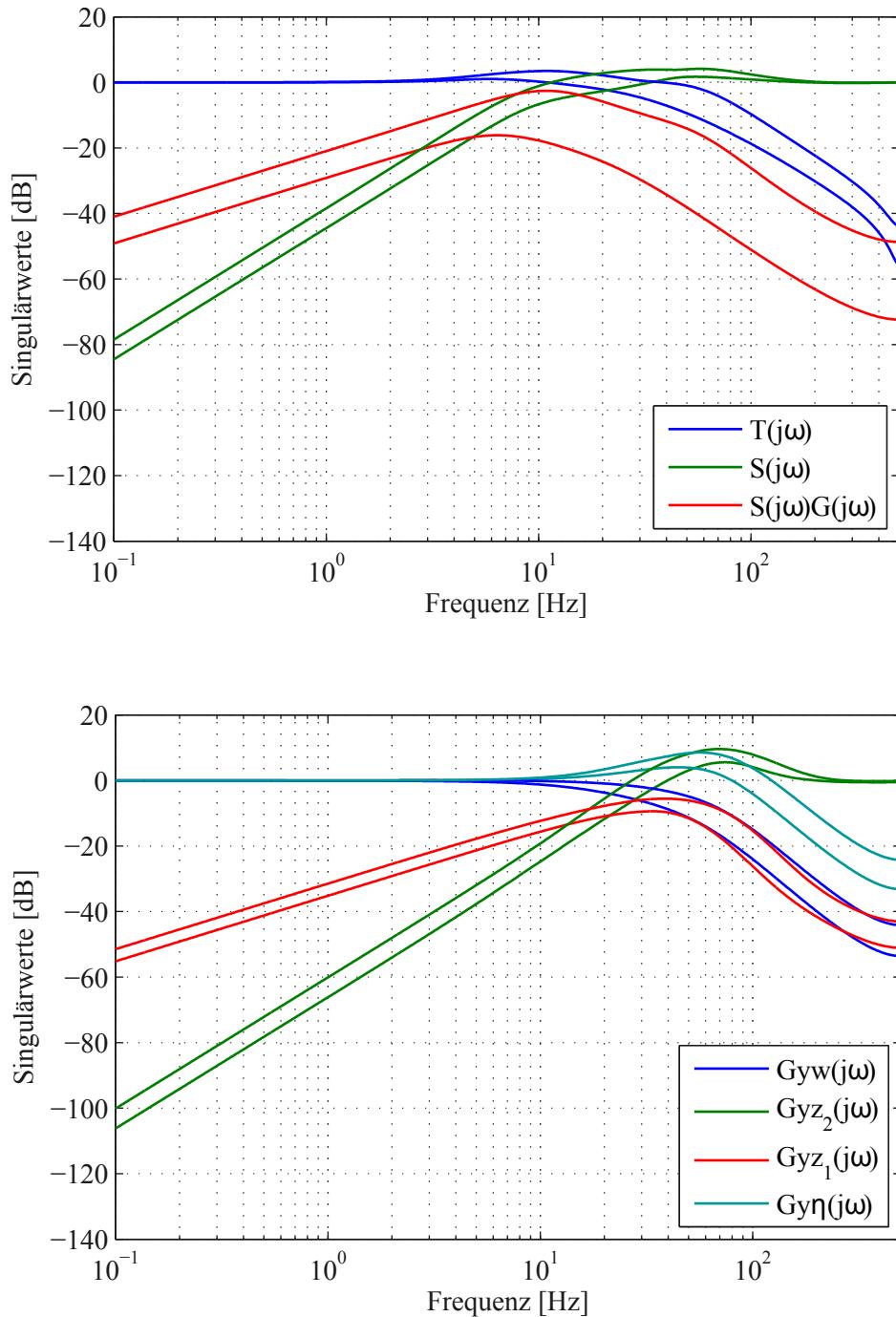


Abbildung A.9: Vergleich der Singulärwertdiagramme, oben: PID-Regelung, unten: MPC-Regelung

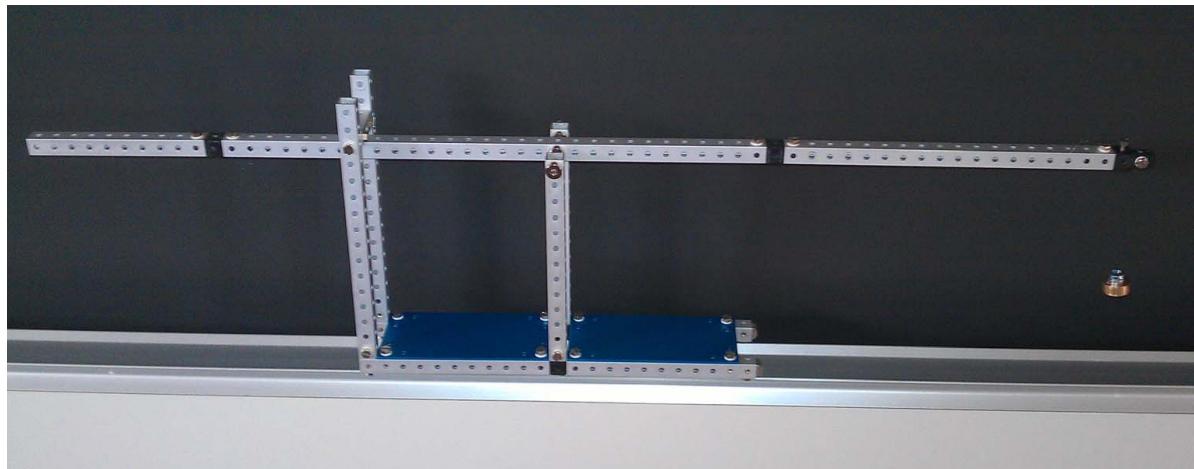
A.4 Fotos

A.4.1 Montage der Mechanik



Abbildung A.10: Fotos der Montage

A.4.2 Messaufbau der Lastsprünge



(a)



(b)

Abbildung A.11: Aufbau zur Messung der Lastsprünge

A.5 Umrechnung in die PID-Regelparameter

MATLAB: sisotool.m exportiert den Regler (Compensator) als Übertragungsfunktion, welche über den Befehl tf.m in die Form

$$K(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0 s}{s^2 + a_1 s} \quad (\text{A.6})$$

gebracht werden kann. Die Umrechnung in die Regelparameter muss anhand von

$$\begin{aligned} K_p &= -\frac{(b_0 - a_1 b_1)}{a_1^2} \\ T_n &= -\frac{(b_0 - a_1 b_1)}{(a_1 b_0)} \\ T_v &= -\frac{(b_3 a_1^2 - b_1 a_1 + b_0)}{(a_1 b_0 - a_1^2 b_1)} \\ T_p &= \frac{1}{a_1} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

durchgeführt werden.

A.6 Auffinden eines reproduzierbaren Arbeitspunktes

Über die Libelle der Aluminiumplatte und die Stellschrauben wird die Aluminiumplatte relativ zum Gravitationsfeld ausnivilliert. Für die Wägeplattform verbleiben die sechs mechanischen DOF q_{S0} . Mit Hilfe der Libelle für die Wägeplattform wird die Wägeplattform über die relativen Verschiebungen $\Delta q_{S1}, \Delta q_{S2}$ und Δq_{S3} ausnivilliert, dadurch werden die rotatorischen Freiheitsgrade ($\varphi_{x0}, \varphi_{y0}$) der Wägeplattform definiert. Die Bezugspunkte q_{S10}, q_{S20} und q_{S30} sind bis auf einen gemeinsamen Offset, also eine Verschiebung in z -Richtung festgelegt. Die verbleibenden DOF ($x_0, y_0, z_0, \varphi_{z0}$) werden so festgelegt, dass sich der schwebende Teil der Waage möglichst im Zentrum der mechanischen Anschlüsse befindet. Die mechanischen Anschlüsse werden über die Spulenkörper innerhalb der Magnettöpfe definiert. Das Auffinden der Mitte dieser Anschlüsse geschieht grafisch und wird nachfolgend kurz beschrieben.

Für die Festlegung der Bezugspunkte ($q_{S40}, q_{S50}, q_{S60}$) werden die generalisierten Koordinaten ($\perp q_{S4}, \perp q_{S5}, \perp q_{S6},$) eingeführt. Über geometrische Zusammenhänge kann man zeigen, dass die neuen Koordinaten über

$$\begin{bmatrix} \Delta q_{S4} \\ \Delta q_{S5} \\ \Delta q_{S6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \perp q_{S4} \\ \Delta \perp q_{S5} \\ \Delta \perp q_{S6} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

auf die generalisierten Koordinaten ($q_{S4}, q_{S5}, q_{S6},$) abgebildet werden. Im Regelbetrieb wird nun positiv und negativ in $\perp q_{S4}$ -Richtung verfahren, bis das System in einen mechanischen Anschlag fährt, erkennbar am Regelfehler und an der Stellgröße. Die Prozedur wird wiederholt für die $\perp q_{S5}$ -Richtung und $\perp q_{S6}$ -Richtung. Die von den mechanischen Anschlägen aufgespannte Fläche wird aufgezeichnet und die Mitte abgeschätzt. Anschliessend wird das System anhand von Gleichung (A.8) in die Mitte gefahren und diese Position als neuen Bezugspunkt festgelegt. Für die Festlegung von z_0 wird in gleicher Weise die Mitte in z -Richtung und für die Festlegung von φ_{z0} die Mitte in φ_z -Richtung bestimmt. Hier gilt

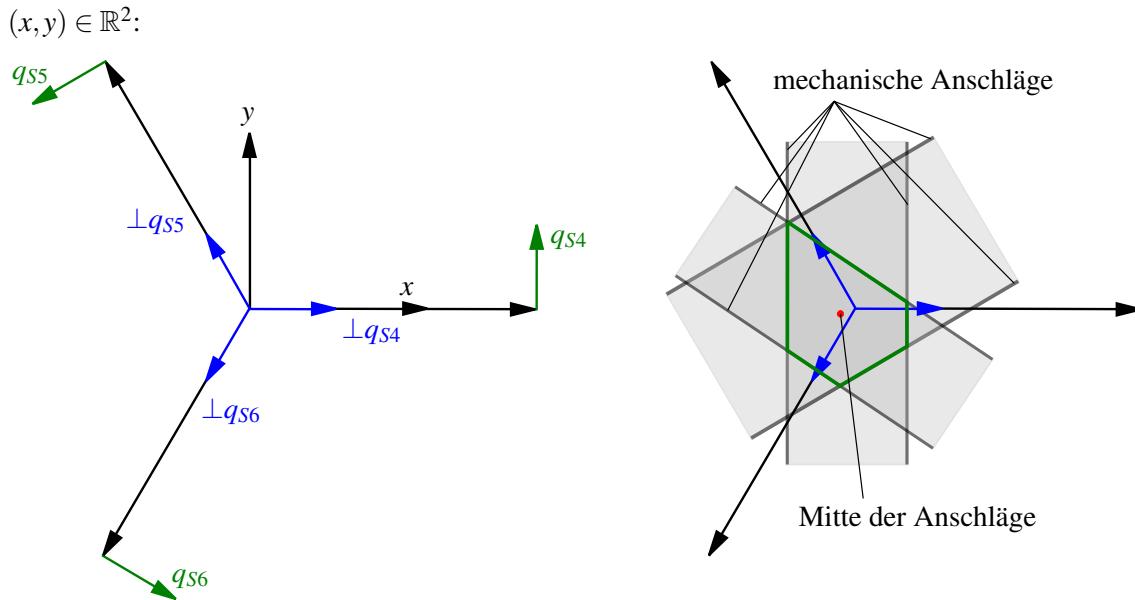


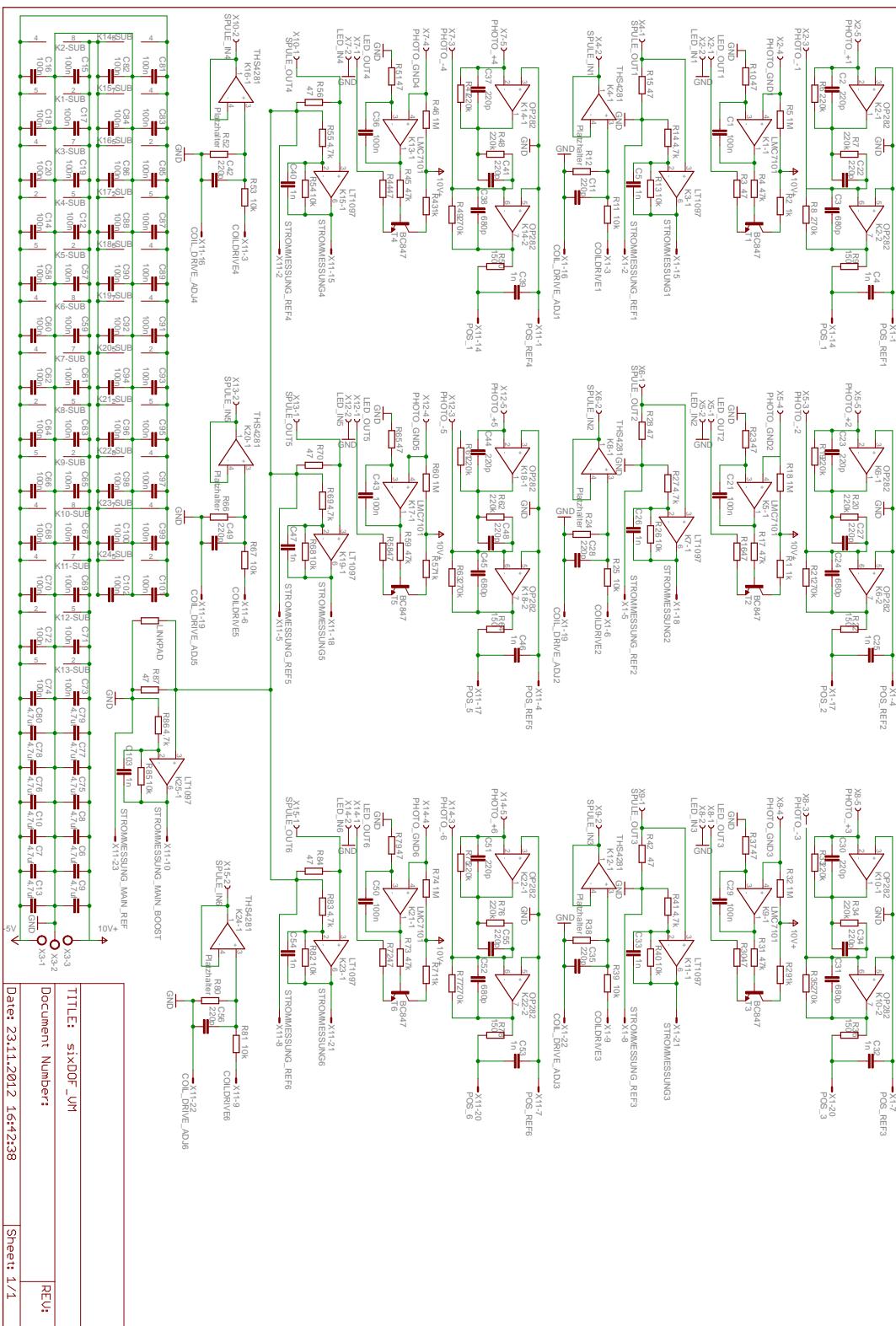
Abbildung A.12: Grafische Ermittlung der Mitte der mechanischen Anschlüsse

näherungsweise

$$\begin{bmatrix} \Delta q_{s1} \\ \Delta q_{s2} \\ \Delta q_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta z, \quad \begin{bmatrix} \Delta q_{s4} \\ \Delta q_{s5} \\ \Delta q_{s6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta \varphi_z \quad (\text{A.9})$$

Es resultieren die Bezugspunkte \underline{q}_{s0} , so dass die Wägeplattform normal zum Gravitationsfeld und in der Mitte der mechanischen Anschlägen in die Richtungen $(z, \varphi_z, -q_{s40}, -q_{s50}, -q_{s60})$ steht.

A.7 Elektronik



Bei der Schaltung wurden nachträglich Korrekturen vorgenommen.

A.8 Aufgabenstellung von MTAG

Daniel Reber
NE 131 ☎ 2319
✉ daniel.reber@mt.com

Draft

Technologie Management
F&E MT Load Cells
Mettler-Toledo AG

Multi Voice Coil Control

The vertical force produced by the gravity and the mass is used for gravimetric weighing. All other 5 degree of freedom need to be controlled by the mechanical system. Unfortunately these boundaries cause some effects on the vertical force, which are disturbing the measurement result.

Idea

The following idea is an approach which completely substitutes the mechanical levers by electromagnetic forces.

With 3 voice coil actuators acting in the vertical direction and 3 in the horizontal plane we control all 6 degrees of freedom.

The 3 main actuators deliver forces in the vertical axes, with this information we can derive the weight and the position of the weight in the horizontal plane.

With the other 3 actuators we control and stabilize the coils in the horizontal plane and we can detect inclination related to the horizontal plane.

With such an approach we have a direct measurement system which is most useful for small weight measurement. There is no friction because all six actuators are based on electromagnetic force.

Challenge

It needs to be proved that the system can be well controlled and defined what resolution we can get out of the system. To control the force we need 6 position sensors to control the desired position.

Each actuator has a small damping effect based on eddy currents.

Detail description

Magnet M1, M2 and M3 act in the vertical direction. Each system consists of an actuator (voice coil) and a position sensor.

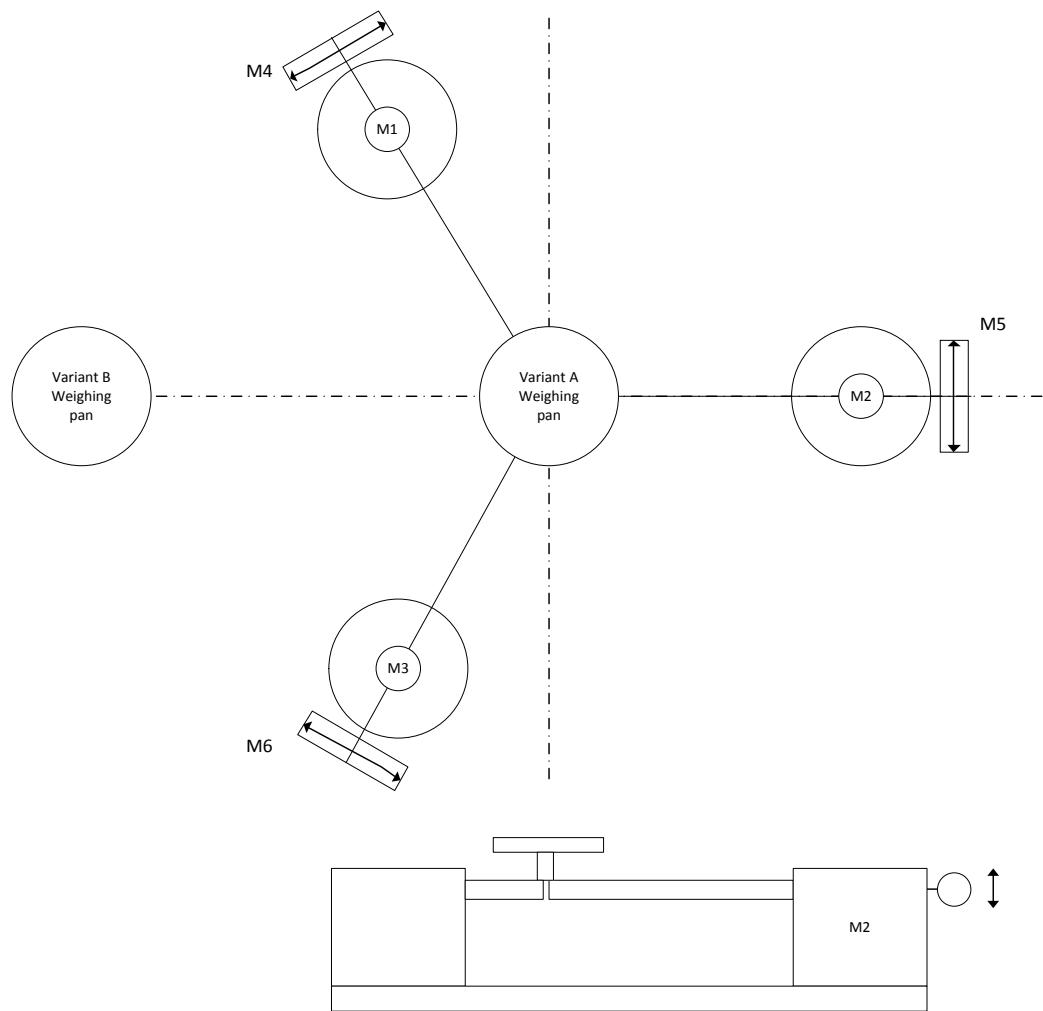
M4, M5 and M6 are perpendicular to the magnet systems M1 to M3 and have an angle of 120 degree to each other. The force vector of the magnet systems M4 to M6 are all in the vertical plane. Each system consists again of an actuator and a position sensor.

M4 to M6 are smaller than the main voice coils, they need to stabilize the position in the vertical plane.

For the weighing platform we have two variants.

Variant 1: The weighing platform is inside the 3 main magnets

Variant 2: The weighing platform is outside the 3 magnets



Top and side view of the system

Scope of work

Simulation

Define a controller structure based on a system model and prove if the system is controllable.

The sum of forces M1 to M3 deliver the weight information.

Based on the model derive sensitivities of misalignment of the coils i.e what is the impact if the coils are not acting exactly vertical (M1 to M3) and if the coils M4 to M6 act not exactly in the vertical plane.

Derive the sensitivity of tilting.

Derive parameters for Variant 1 and Variant 2

Realization

Implement the full system and prove the simulations

MT confidential for internal use only

Literaturverzeichnis

- [Aes02] AESCHLIMANN, B.: *Control Aspects of High Precision Active Magnetic Bearings*. Dissertation, EPFL Lausanne, 2002
- [All09a] ALLGÖWER, F.: *Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis: Regelgüte*. Handout, Uni Stuttgart, 2009
- [All09b] ALLGÖWER, F.: *Skalierung von Mehrgrössensystemen*. Skriptum Uni Stuttgart, 2009
- [Alt06] ALtenburger, R.: *Dynamische Eigenschaften und Regelung mechanisch verkoppelner Antriebssysteme*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2006
- [Alt08] ALtenburger, R.: *Regelungstechnik 3*. Skriptum ZHAW, 2008
- [Alt09a] ALtenburger, R.: *Regelungstechnik 1+2*. Skriptum ZHAW, 2009
- [Alt09b] ALtenburger, R.: *Signale und Systeme*. Skriptum ZHAW, 2009
- [And97] ANDERSEN, P.: *Identification of Civil Engineering Structures using Vector ARMA Models*. Aalborg University, Denmark, 1997
- [Bal99] BALTISBERGER, S.: *Transientes Verhalten von Waagen mit elektrodynamischer Kraftkompensation bei äusseren mechanischen Störungen*. Mettler Toledo AG, Firmen-internes Dokument, 1999
- [BBM10] BORELLI, F. ; BEMPORAD, A. ; MORARI, M.: *Predictive Control for linear and hybrid systems*. Skriptum, ETH-Zürich, 2010
- [BHWMM12] BURG, K. ; HAF, H. ; WILLE, F. ; MEISTER, A.: *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 2: Lineare Algebra*. Springer, Vieweg, 2012
- [BSMM08] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLING, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2008
- [CM98] CARRETTE, P. ; MCKELVEC, T.: *Model parameter gradients in prediction identification of state-space systems*. Department of Electrical Engineering, Linkping University, 1998
- [DB06] DORF, R. C. ; BISHOP, R. H.: *Moderne Regelungssysteme*. Pearson Studio, 2006
- [Din10] DING, B. C.: *Modern Predictive Control*. Taylor and Francis Group, CRC Press, 2010
- [DP04] DITTMAR, R. ; PFEIFFER, B. M.: *Modellbasierte prädiktive Regelung*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2004
- [DR01] DI RUSCIO, D.: *Model Predictive Control and Optimization*. Skriptum, Telemark University College, Norway, 2001

- [DR12] DI RUSCIO, D.: *Discrete LQ optimal control with integral action: A simple controller on incremental form for MIMO systems*. Telemark University College, Norway, 2012
- [Föll88] FÖLLIGER, O.: *Optimierung dynamischer Systeme, Eine Einführung für Ingenieure*. R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1988
- [FPW98] FRANKLIN, F. G. ; POWELL, D. J. ; WORKMAN, M.: *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley Longman, Inc., 1998
- [Gee04] GEERING, H. P.: *Regelungstechnik*. Springer Verlag, 2004
- [Gee07] GEERING, H. P.: *Optimal Control with Engineering Applications*. Springer Verlag, 2007
- [GHSW12] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W. A.: *Technische Mechanik 3, Kinetik*. Springer Verlag, 2012
- [Had98] HADWICH, V.: *Modellbildung in mechatronischen Systemen*. VDI GmbH, 1998
- [Hay96] HAYES, M.H.: *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. John Wiley & Sons, Inc., 1996
- [HGP07] HEIMANN, B. ; GERTH, W. ; POPP, K.: *Mechatronik, Komponenten - Methoden - Beispiele*. Carl Hanser Verlag, 2007
- [HJS08] HENDRICKS, E. ; JANNERUP, O ; SORENSEN, P. H.: *Linear Systems Control, Deterministic and Stochastic Methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008
- [HSSK12] HWANG, K. I. ; SEO, T. W. ; SONG, B. ; KIM, J. H.: *Shorted Turn in the Flat Coil Actuator for Fast Initial Response*. Journal of Magnetics, 2012
- [Iko12] IKONEN, E.: *Model Predictive Control and State Estimation*. Systems Engineering Laboratory, University of Oulu, 2012
- [ILM92] ISERMANN, R. ; LACHMANN, K. H. ; MATKO, D.: *Adaptive Control Systems*. Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering, 1992
- [Ise92a] ISERMANN, R.: *Identifikation Dynamischer Systeme 1, Grundlegende Methoden*. Springer Verlag, 1992
- [Ise92b] ISERMANN, R.: *Identifikation Dynamischer Systeme 2, Besondere Methoden, Anwendungen*. Springer Verlag, 1992
- [Ise08] ISERMANN, R.: *Mechatronische Systeme*. Springer Verlag, 2008
- [Ise11] ISERMANN, R.: *Identification of Dynamic Systems*. Springer Verlag, 2011
- [Jan10] JANSCHEK, K.: *Systementwurf mechatronischer Systeme*. Springer Verlag, 2010
- [JSW07] JUNG, J. P. ; SOHEE, H ; WOOK, H. K.: *Generalized Predictive Controls over State Space*. School of Electrical Engineering & Computer Science, Seoul National University, Seoul, Korea, 2007
- [Kin08] KINCKE, U.: *Messtechnik, Systemtheorie für Elektrotechniker*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008

- [Kna08] KNABNER, P.: *Nummerische Mathematik 2.* Skriptum Universität Erlangen, Germany, 2008
- [Kug12] KUGI, A.: *Skriptum Automatisierungs- und Regelungstechnik.* Skriptum, Technische Universität Wien, 2012
- [Lat09] LATTMANN, J.: *Elektrizitätslehre 4.* Skriptum ZHAW, 2009
- [Lev11a] LEVINE, W. S.: *Control System Advanced Methods.* CRC Press, 2011
- [Lev11b] LEVINE, W. S.: *Control System Fundamentals.* CRC Press, 2011
- [Lju87] LJUNG, L.: *System Identification, Theory for the User.* Prentice-Hall, 1987
- [Lju01] LJUNG, L.: *Prediction Error Estimation Methods.* Linköping University, Sweden, 2001
- [LM11] LUNDH, M. ; MOLANDER, M.: *State-Space Models in Model Predictive Control.* ABB Automation Products AB, 2011
- [Lun08a] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1.* Springer Verlag, 2008
- [Lun08b] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2.* Springer Verlag, 2008
- [LY10] LIU, T. S. ; YEH, C. W.: *Positioning Control of Voice Coil Motor with Shorted Turn.* IEEE, 2010
- [Mac89] MACIEJOWSKI, J. M.: *Multivariable Feedback Design.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989
- [Mac02] MACIEJOWSKI, J. M.: *Predictive Control with Constraints.* Prentice Hall, 2002
- [McK95] MCKELVEY, T.: *Identification of State-Space Models from Time and Frequency Data.* Linköping University, Sweden, 1995
- [MD11] MOSCHIK, S. ; DOURDOUMAS, N.: *Steuerbarkeitsmasse für lineare zeitinvariante Systeme - Ein Überblick.* Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, TU Graz, 2011
- [MKBG95] MIŠKOVIĆ, L. ; KARIMI, A. ; BOVIN, D. ; GEVERS, M.: *Closed-loop Identification of Multivariable Systems: With or Without Excitation of All References.* CESAME Belgium, EPFL Switzerland, 1995
- [Mos96] MOSER, M. A.: *Shorted Turn Effects in Rotatory Voice Coil Actuators.* IEEE, 1996
- [MR93] MUSKE, K. R. ; RAWLINGS, J. B.: *Model Predictive Control with Linear Models.* Dept. of Chemical Engineering, University of Texas Austin, 1993
- [Neu06] NEUGEBAUER, R.: *Parallelkinematische Maschinen, Entwurf, Konstruktion, Anwendung.* Springer Verlag, 2006
- [OSB04] OPPENHEIM, A. V. ; SCHAFER, R. W. ; BUCK, J. R.: *Zeitdiskrete Signale.* Pearson Studio, 2004
- [Ost11] OSTERTAG, E.: *Mono- and Multivariable Control and Estimation, Linear, Quadratic and LMI Methods.* Springer Verlag, 2011

- [Pet06] PETZOLD, O.: *Modellbildung und Untersuchung eines magnetisch gelagerten Rundtisches*. Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2006
- [Pet12a] PETER, M. E.: *Experimentelle Modellbildung und modellbasierter Entwurf einer Geschwindigkeitsregelung an einem Motormodell*. Arbeitsbericht, IMS, ZHAW, 2012
- [Pet12b] PETER, M. E.: *Systemanalyse und Druckregelung einer Luftkompressionsanlage*. MSE-Vertiefungsarbeit 2, ZHAW, 2012
- [Rai94] RAISCH, J.: *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich, Methoden der Regelungs- und Automatisierungstechnik*. R. Oldenbourg Verlag GmbH, München, 1994
- [Rie98] RIEGE, B.: *Strukturmasse für dynamische Systeme*. Gerhard-Mercator-Universität-GH Duisburg, 1998
- [Rob09] ROBBIANI, M.: *Analysis und Stochastik*. Skriptum, ZHAW, 2009
- [Rod97] RODDECK, W.: *Einführung in die Mechatronik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1997
- [Ros03] ROSSITER, J. A.: *Modelbased Predictive Control, A Practical Approach*. CRC Press, 2003
- [Rös11] RÖSE, A.: *Parallelkinematische Mechanismen zum intrakorporalen Einsatz in der laparoskopischen Chirurgie*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2011
- [Sch10] SCHRÖDER, D.: *Intelligente Verfahren, Identifikation und Regelung nichtlinearer Systeme*. Springer Verlag, 2010
- [Sch11] SCHLAKE, J. C.: *Modellbildung, Systemanalyse und Reglerentwurf örtlich verteilter Systeme basierend auf numerischen Approximationenmodellen*. VDI GmbH, 2011
- [Sch12] SCHIEHLEN, W. O.: *Technische Dynamik, rechnergestützte Modellierung mechanischer Systeme im Maschinen- und Fahrzeugbau*. Springer Verlag, 2012
- [SE12] SCHIEHLEN, W. ; EBERHARD, P.: *Technische Dynamik, Rechnergestützte Modellierung mechanischer Systeme im Maschinen- und Fahrzeugbau*. Springer Verlag, 2012
- [Sim06] SIMON, D.: *Optimal State Estimation*. John Wiley & Sons, Inc., 2006
- [SK09] SCHWARZ, H. R. ; KÖCKLER, N.: *Numerische Mathematik*. Vieweg + Teubner, 2009
- [SP05] SKOGESTAD, S. ; POSTLETHWAITE, I.: *Multivariable Feedback Control*. John Wiley & Sons, Inc., 2005
- [Spe08] SPESCHA, D.: *Entwicklung und Analyse eines Dynamometers in Hexapd-Struktur*. MSE-Vertiefungsarbeit 1, ZHAW, 2008
- [Sva11] SVARICEK, F.: *Moderne Methoden der Regelungstechnik*. Universität der Bundeswehr, München, 2011
- [Unb07] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik 2, Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. Vieweg+Teubner Verlag, 2007

- [Unb08] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik 1, Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, Fuzzy-Regelsysteme.* Vieweg+Teubner Verlag, 2008
- [Unb11] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik 3, Identifikation, Adaption, Optimierung.* Vieweg+Teubner Verlag, 2011
- [VDI92] VDI: *Modellbildung für Regelung und Simulation.* VDI GmbH, 1992
- [Wan09] WANG, L.: *Model Predictive Control System Design and Implementation Using Matlab.* Springer-Verlag London Limited, 2009
- [Wen07] WENDT, L.: *Taschenbuch der Regelungstechnik.* Verlag Harri Deutsch, 2007
- [ZB93] ZHU, Y. ; BACKX, T.: *Identification of Multivariable Industrial Processes.* Springer Verlag, 1993
- [ZBE91] ZHU, Y. C. ; BACKX, A. C. P. M. ; EYKHOFF, P.: *Multivariable Process Identification for Robust Control.* Eindhoven University of Technology, Netherlands, 1991
- [Zhu01] ZHU, Y.: *Multivariable System Identification for Process Control.* Elsevier Science & Technology Books, 2001
- [ZTF93] ZIEMER, R. E. ; TRANTER, W. H. ; FANNIN, D. R.: *Singal and Systems: Continuous and Discrete.* Macmillan Publishing Company, 1993

Abbildungsverzeichnis

1.1	Eine statische Waage	3
1.2	Konzeptskizze	4
2.1	Funktionsskizze Voice-Coil-Aktor (Schnitt durch den rotationssymmetrischen Körper) .	6
2.2	Allgemeines Ersatzschaltbild von zwei gekoppelten Spulen	6
2.3	Gegenüberstellung von Messung und identifiziertem Modell im Zeitbereich	8
2.4	Gegenüberstellung des gemessenen Frequenzgang mit dem identifizierten Modell des Voice-Coil-Aktors bei mechanischem Kurzschluss	9
2.5	Sprungantwort des elektromagnetischen Teils des Voice-Coil-Aktors mit und ohne Kurzschlussring	11
2.6	Blockschaltbild der Dynamik des Voice-Coil-Aktors	12
2.7	Leiterschleife im Magnetfeld	12
2.8	Komponenten der Wandlerkonstanten in Abhängigkeit des Rotationswinkels	14
2.9	Kraftkomponenten bei Verkipfung der Spule im Magnetfeld	15
2.10	Piranha 8001	16
2.11	Signalqualität im Zeit- und im Frequenzbereich mit und ohne AAF	16
2.12	Wiederholgenauigkeit des Target Systems, Mittelwerte der jeweils 20 Messungen . . .	17
2.13	Blockschaltbild der Wägezelle	18
2.14	Lineare Approximation	20
2.15	Gegenüberstellung von Messung und identifiziertem Modell im Zeitbereich	21
2.16	Gegenüberstellung von Messung, identifiziertem Modell und theoretischem Modell im Frequenzbereich	22
2.17	Blockschaltbild des VC6	28
2.18	Vektor-Nomenklatur	30
2.19	Blockschaltbild der nichtlinearen Simulation des VC6	31
3.1	Skizze der Spule inkl. Fahne eines Voice-Coil-Aktors (Quelle der CAD-3D-Ansicht: MTAG Zeichnung Nr.: ME-42900507)	34
3.2	Anwendung der Singulärwertzerlegung der linearen Abbildung auf den Einheitskreis .	37
3.3	Einfache Hebelübersetzung	38
3.4	Skizze der Richtungs- und Normalvektoren der Aktoren, Ansicht von oben	40
3.5	Skizze der Richtungs- und Normalvektoren der Sensoren, links: Skizze des Aufbaus der vertikalen Sensoren (Ansicht von der Seite, lediglich Sensor 1 eingezeichnet), rechts: Aufbau der horizontalen Sensoren (Ansicht von oben)	41
3.6	Optimierung der kinematischen Konfiguration	41
3.7	2-D-Optimierung der geometrischen Gütemasse	42
3.8	1-D-Optimierung der Masszahlen für Steuer- und Beobachtbarkeit	44
3.9	FUMU1 CAD-Zusammenstellung	45

3.10 Das Gütemass V_u der gewichteten Jacobi-Matrix der Aktoren und der Sensoren	46
3.11 Empfindlichkeit des Wägegutes auf die Variation des Gravitationsfeldes	52
4.1 Skizze des prinzipiellen Vorgehens	58
4.2 Dimensionen eines Zustandsraummodells	59
4.3 Singulärwertverlauf und Kondition des identifizierten, zeitkontinuierlichen Modells der Regelstrecke in Abhängigkeit der Frequenz, blau: unskaliertes System, grün: skaliertes System aus Anhang [A.2]	61
4.4 Erweitertes Blockschaltbild	61
4.5 Betrag und Kondition der relativen Verstärkungs-Matrix in Abhängigkeit der Frequenz	67
4.6 Überprüfung der Diagonaldominanz des identifizierten Modells blau: $ G_{ii}(j\omega) $, grün: $\sum_{j=1, j \neq i}^n G_{ij}(j\omega) $, rot: $\sum_{j=1, j \neq i}^n G_{ji}(j\omega) $	68
4.7 Standardregelkreis	69
4.8 Blockschaltbild einer dezentralen Regelung mit zwei Stell-, Regel- und Führungsgrößen	71
4.9 Blockschaltbild der dezentralen Regelung als Robustheitsbetrachtung	72
4.10 Frequenzgang der Strecke, der Regelung, der offenen Kette und der Führungsübertragungsfunktion der beiden Einzelregelkreise	74
4.11 Pol-Nullstellendiagramm der Führungsübertragungsfunktionen mit den approximierten Regelstrecken, blau: $\tilde{G}_{w11}(s)$, grün: $\tilde{G}_{w44}(s)$	75
4.12 Nachweis der Diagonal- und der verallgemeinerten Diagonaldominanz der Rückführdifferenzmatrix, blau: λ_p , -.- : Gleichung (4.64)	75
4.13 Blockschaltbild des zeitdiskreten PID-Reglers mit AWR	76
4.14 Singulärwertverlauf der PID-Regelsystems	77
4.15 Gegenüberstellung von den gemessenen und den simulierten Sprungantworten des PID-Regelsystems	78
4.16 Prinzipskizze einer modellprädiktiven Regelung	79
4.17 Blockschaltbild der MPC-Regelung	85
4.18 Sprungantworten der Strecke in die Hauptübertragungsrichtungen, Abtastzeit 1 ms, BGRCMS: $dq_{1,\dots,6}(k)$	88
4.19 Eigenwerte des Schätzers und des MPC-Reglers	89
4.20 Singulärwertverlauf der MPC-Regelung	90
4.21 Gegenüberstellung von den gemessenen und den simulierten Sprungantworten des MPC-Regelsystems	91
5.1 Blockschaltbild des diskreten Modells	95
5.2 Blockschaltbild der ARX-Systemidentifikation	97
5.3 Blockschaltbild der PEM-OE-Systemidentifikation	98
5.4 Anregung im Regelbetrieb	101
5.5 Normierte Kreuzkorrelation der Stellgröße und des Prädiktionsfehlers	105
5.6 Vergleich zwischen der Messung und der Prädiktion	106
5.7 Qualifikation der Modellgüte	107
5.8 Leistungsdichespektren der Stellgrößen und gemessene Hauptfrequenzgänge	109
6.1 Aufbau FUMU1	111
6.2 Digitale Signalverarbeitung	114
6.3 FIR-Chebyshev-Filter	114

6.4	Ermittlung der Positions-Spannungskonstanten mit Hilfe eines Messtasters	115
6.5	BGRCMS: Mit dem Messfühler ermittelte Positionen 1...6	116
6.6	Leistungsdichtespektren	117
6.7	Lastsprünge PID-Regelung, BGRCMS: $q_{S1,\dots,S6}(k), u_{1,\dots,6}(k)$	118
6.8	Lastsprünge MPC-Regelung, BGRCMS: $q_{S1,\dots,S6}(k), u_{1,\dots,6}(k)$	119
6.9	Führungssprungantworten bei Last, PID-Regelung, BGR: $q_{S1,S2,S3}(k), u_{1,2,3}(k)$	119
6.10	Führungssprungantworten bei Last. MPC-Regelung, BGR: $q_{S1,S2,S3}(k), u_{1,2,3}(k)$	120
6.11	Einschwingverhalten bei 50-g Last, BGRCMS: $q_{S1\dots 6}(k), u_{1\dots 6}(k)$	120
6.12	Gegenüberstellung von den gemessenen und den simulierten Führungs frequenzgängen der PID-Regelung	121
6.13	Gegenüberstellung von den gemessenen und den simulierten Führungs frequenzgängen der MPC-Regelung	122
6.14	Messung der Wiederholgenauigkeit	123
6.15	Histogramme der Strommessung der unterschiedlichen Prüfgewichte	124
6.16	Rotation um φ_x , Vergleich mit den analytischen Werten, o: Messung, -: Modell	125
6.17	Rotation um φ_y , Vergleich mit den analytischen Werten, o : Messung, - : Modell	126
6.18	Skizze zur Bestimmung der Eulerwinkel	127
6.19	Einschaltverhalten, 0 g-Last	127
6.20	Einschaltverhalten, 49 g-Last	128
A.1	Quervergleich mit einer alternativen Messung 1, BGRCMS: $q_{1,\dots,6}(k)$	133
A.2	Quervergleich mit einer alternativen Messung 2, BGRCMS: $q_{1,\dots,6}(k)$	134
A.3	Normierte Korrelation der Führungsgrösse	135
A.4	Normierte Korrelation der Stellgrösse	136
A.5	Normierte Korrelation der Geschwindigkeiten	137
A.6	Normierte Korrelation zwischen der Führungsgrösse und dem Prädiktionsfehler	138
A.7	Führungs frequenzgang der PID-Regelung, Vergleich Simulation und Messung	139
A.8	Führungs frequenzgang der MPC-Regelung, Vergleich Simulation und Messung	140
A.9	Vergleich der Singulärwertdiagramme, oben: PID-Regelung, unten: MPC-Regelung	143
A.10	Fotos der Montage	144
A.11	Aufbau zur Messung der Lastsprünge	145
A.12	Grafische Ermittlung der Mitte der mechanischen Anschläge	147

Tabellenverzeichnis

2.1	Modellparameter bei einer Spule	10
2.2	Modellparameter bei Parallelschaltung von zwei Spulen	10
2.3	Bekannte Modellparameter der Wägezelle	22
2.4	Experimentell ermittelte Modellparameter der Wägezelle	22
3.1	Vergleich der Gütemasse V_u , ($V_u \leq 1, V_u^* = 1$)	46
3.2	Vergleich der Gütemasse für Steuerbarkeit, v_{sv}, v_{sh} gilt es zu maximieren, s_S gilt es zu minimieren	46
3.3	Temperaturkoeffizienten und Nominalwerte (Angaben von MTAG)	54
5.1	Qualifikation der Signalgüte anhand der Kondition der Korrelationskoeffizienten- und Kovarianz-Matrix	105
6.1	Signalquantisierung	115