Stage L3

Luc GUILLOT - Astrid LACOTTE

11 avril 2025

1 Notations et définitions générales

On assimile Ω à $\Omega = \frac{\mathbb{Z}}{M\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$.

On définit la transformée de Fourier de u par $\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \sum_{\nu \in \Omega} u(\nu) \cdot e^{-2i\pi \langle \xi, \nu \rangle}$ avec $\langle \xi, \nu \rangle = \frac{\xi_1 \nu_1}{M} + \frac{\xi_2 \nu_2}{N}$ pour $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ et la transformée de Fourier inverse par $\mathcal{F}^{-1}(u)(x) = \check{u}(x) = \frac{1}{MN} \sum_{y \in \Omega} u(y) \cdot e^{2i\pi \langle x, y \rangle}$
On rappelle que la convolution se définit par $f * g(x) = \sum_{y \in \Omega} f(y) g(y - x)$ et l'autocorrélation par $A(k)(x) = \sum_{y \in \Omega} k(y) \overline{k(x + y)}$

Rappel : Il y a équivalence entre les trois points suivants :
$k_1 * W = k_2 * W$
$A(k_1) = A(k_2)$
$|\mathcal{F}(k_1)| = |\mathcal{F}(k_2)|$
Il existe donc un unique représentant k_0 tel que $\hat{k_0} \in \mathbb{R}_+^{MN}$. On dispose de cette expression de k_0 :
$k_0 = \mathcal{F}^{-1}(\sqrt{|\mathcal{F}(\frac{\gamma}{\sigma^2})|}) = \mathcal{F}^{-1}(|\mathcal{F}(u)|)$

2 Première partie : $u = k_0 * W$

On se donnne une image $u = k_0 * W$ avec $k_0 \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ un noyau à estimer et $W \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ un bruit blanc gaussien, c'est-à-dire $W_{i,j} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ iid pour tout $(i, j) \frac{\mathbb{Z}}{M\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$. Ainsi, $u \sim N(0, \gamma)$ avec γ la matrice de covariance de u. Dans la suite, on manipulera toujours des noyaux normés (pour la norme 2).

On définit la covariance empirique par $\Gamma = \frac{A(u)}{MN}$ et on propose un estimateur empirique du noyau $K_0 = \mathcal{F}^{-1}(\sqrt{|\mathcal{F}(\Gamma)|})$.

<u>Résultats théoriques :</u>

$\mathbb{E}[\Gamma(x)] = \gamma(x)$

$\mathbb{V}[\Gamma(x)] = \frac{2\|\gamma\|_2^2}{(MN)^2}$

$\mathbb{E}[\hat{K_0}^2(\xi)] = \hat{k_0}^2(\xi)$

$\mathbb{V}[\hat{K_0}^2(\xi)] = \mathbb{V}[\hat{K_0}^2(\xi)]$

$\mathbb{E}[\hat{K_0}(\xi)] = \hat{k_0}(\xi) \frac{\sqrt{MN}\sqrt{\pi}}{2}$

3 Deuxième partie

On étudie désormais une image $u = g(k_0 * W)$ avec k_0 et W identiques à la partie précédente et g une fonction strictement croissante. On cherche à estimer g et k_0. Pour ce faire, on retrouve d'abord g, qu'on inverse ensuite afin d'appliquer la méthode de la partie précédente pour retrouver k_0.

Si $X \sim \mathbb{N}(0, 1)$, $\mathbb{P}(g(X) \leq a) = \Phi(\tilde{g}^{-1}(a))$ où Φ désigne la fonction de répartition et $\tilde{g}^{-1}(a) = \{\sup y | g(y) \leq a\}$.

En pratique, on calcule un histogramme de l'image et on inverse Φ ce qui permet de retrouver une estimation G de g.

$G^{-1}(a) = \Phi^{-1}(i\frac{99.9}{100MN})$ pour $0 \leq i \leq MN-1$

<u>Résultats théoriques :</u>

4 Annexe des preuves

4.1 Première partie

$$\mathbb{E}[\Gamma(x)] = \gamma(x)$$

Preuve :

$$\mathbb{E}[\Gamma(x)] = \mathbb{E}[\frac{A(u)(x)}{MN}] = \frac{1}{MN}\mathbb{E}[\sum_{y\in\Omega} u(y)u(x+y)] = \frac{1}{MN}\sum_{y\in\Omega} Cov[u(y), u(x+y)] = \frac{1}{MN}\sum_{y\in\Omega}\gamma(x) = \gamma(x)$$

$$\mathbb{V}[\Gamma(x)] = \frac{2\|\gamma\|_2^2}{(MN)^2}$$

Preuve :

$$\mathbb{V}[\Gamma(x)] = \mathbb{E}[\Gamma^2(x)] - \mathbb{E}[\Gamma(x)]^2 = \mathbb{E}[\Gamma^2(x)] - \gamma(x)^2$$

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^2(\xi)] = \mathcal{F}(k_0)^2(\xi)$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[\hat{K_0}^2(\xi)] = \hat{k_0}^2(\xi)$$

Preuve :

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^2(\xi)] = \mathbb{E}[\frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{\sigma^2}](\xi) = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\mathbb{E}[\sum_{\nu\in\Omega}\Gamma(\nu)\cdot e^{-2i\pi\langle\xi,\nu\rangle}] = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{\nu\in\Omega}\mathbb{E}[\Gamma(\nu)]\cdot e^{-2i\pi\langle\xi,\nu\rangle} = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{\nu\in\Omega}\gamma(\nu)\cdot e^{-2i\pi\langle\xi,\nu\rangle}$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}\cdot\mathcal{F}(\gamma)(\xi) = \mathcal{F}(A(k_0))(\xi) = \mathcal{F}(k_0)^2(\xi)$$

$$\mathbb{V}[\mathcal{F}(K_0)^2(\xi)] = \mathcal{F}(k_0)^4(\xi)$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{V}[\hat{K_0}^2(\xi)] = \hat{k_0}^4(\xi)$$

Preuve : $\mathbb{V}[\mathcal{F}(K_0)^2(\xi)] = \mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^4(\xi)] - \mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^2(\xi)]^2 = \mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^4(\xi)] - \mathcal{F}(k_0)^4(\xi)$
$\mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^4(\xi)] =$

D'autre part,

$$\mathbb{E}[\hat{K_0}(\xi)] = \hat{k_0}(\xi)\frac{\sqrt{MN}\sqrt{\pi}}{2}$$

4.2 Deuxième partie