Stage L3

Luc GUILLOT - Astrid LACOTTE

14 avril 2025

1 Notations et définitions générales

On assimile Ω à $\Omega = \frac{\mathbb{Z}}{M\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$.

On définit la transformée de Fourier de u par $\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \sum_{\nu \in \Omega} u(\nu) \cdot e^{-2i\pi \langle \xi, \nu \rangle}$ avec $\langle \xi, \nu \rangle = \frac{\xi_1 \nu_1}{M} + \frac{\xi_2 \nu_2}{N}$ pour $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ et la transformée de Fourier inverse par $\mathcal{F}^{-1}(u)(x) = \check{u}(x) = \frac{1}{MN} \sum_{y \in \Omega} u(y) \cdot e^{2i\pi \langle x, y \rangle}$
On rappelle que la convolution se définit par $f * g(x) = \sum_{y \in \Omega} f(y) g(y - x)$ et l'autocorrélation par $A(k)(x) = \sum_{y \in \Omega} k(y) \overline{k(x + y)}$

Rappel : Il y a équivalence entre les trois points suivants :
$k_1 * W = k_2 * W$
$A(k_1) = A(k_2)$
$|\mathcal{F}(k_1)| = |\mathcal{F}(k_2)|$
Il existe donc un unique représentant k_0 tel que $\hat{k_0} \in \mathbb{R}_+^{MN}$. On dispose de cette expression de k_0 :
$k_0 = \mathcal{F}^{-1}(\sqrt{|\mathcal{F}(\frac{\gamma}{\sigma^2})|}) = \mathcal{F}^{-1}(|\mathcal{F}(u)|)$

2 Première partie : $u = k_0 * W$

On se donnne une image $u = k_0 * W$ avec $k_0 \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ un noyau à estimer et $W \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{R})$ un bruit blanc gaussien, c'est-à-dire $W_{i,j} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ iid pour tout $(i, j) \frac{\mathbb{Z}}{M\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$. Ainsi, $u \sim N(0, \gamma)$ avec γ la matrice de covariance de u. Dans la suite, on manipulera toujours des noyaux normés (pour la norme 2).

On définit la covariance empirique par $\Gamma = \frac{A(u)}{MN}$ et on propose un estimateur empirique du noyau $K_0 = \mathcal{F}^{-1}(\sqrt{|\mathcal{F}(\Gamma)|})$.

Résultats théoriques :

$\mathbb{E}[\Gamma(x)] = \gamma(x)$

$\mathbb{V}[\Gamma(x)] = \frac{2\|\gamma\|_2^2}{(MN)^2}$

$\mathbb{E}[\hat{K_0}^2(\xi)] = \hat{k_0}^2(\xi)$

$\mathbb{V}[\hat{K_0}^2(\xi)] = \mathbb{V}[\hat{K_0}^2(\xi)]$

$\mathbb{E}[K_0(x)] = k_0(x) \frac{\sqrt{MN}\sqrt{\pi}}{2}$

$$\xi \neq 0 : \mathbb{E}[\hat{K_0^2}(\xi)] = \mathbb{E}[\hat{K_0} * \hat{K_0}(\xi)] = \mathbb{E}[\sum_{z\in\Omega} \hat{K_0}(z)\hat{K_0}(\xi - z)] = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{z\in\Omega} \mathbb{E}[|\hat{k_0}(z)||\hat{W}(z)||\hat{k_0}(\xi - z)||\hat{W}(\xi - z)|]$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{z\in\Omega} \hat{k_0}(z)\hat{k_0}(\xi - z)\mathbb{E}[|\hat{W}(z)||\hat{W}(\xi - z)|] = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{z\neq\frac{\xi}{2}} \hat{k_0}(z)\hat{k_0}(\xi - z)\sigma^2\frac{\pi}{4}MN + \frac{1}{\sigma^2}\hat{k_0}(\frac{\xi}{2})^2\sigma^2 MN$$
$$= \frac{\pi}{4}MN(\hat{k_0} * \hat{k_0}(\xi) - \hat{k_0}(\frac{\xi}{2})^2) + MN\hat{k_0}(\frac{\xi}{2})^2$$
$$= \frac{\pi}{4}MN\hat{k_0} * \hat{k_0}(\xi) + MN(1 - \frac{\pi}{4})\hat{k_0}(\frac{\xi}{2})^2$$

$$\xi = 0 : \mathbb{E}[\hat{K_0^2}(0)] = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{z\in\Omega} \hat{k_0}(z)\hat{k_0}(-z)\mathbb{E}[|\hat{W}(z)||\hat{W}(-z)|] = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{z\in\Omega} \hat{k_0}(z)\hat{k_0}(-z)NM\sigma^2$$
$$MN\hat{k_0} * \hat{k_0}(0) = MN\hat{k_0^2}(0)$$

Or $\hat{k_0^2}(0) = \sum_{y\in\Omega} k_0^2(y)\cdot e^{-2i\pi\langle y,0\rangle} = \sum_{y\in\Omega} k_0^2(y) = 1$.
D'autre part, $k_0 \hat{*} k_0(0) = \sum_{y\in\Omega} k_0 * k_0(y) = \sum_{y\in\Omega}\sum_{\xi\in\Omega} k_0(\xi)k_0(y-\xi) = \sum_{y\in\Omega} k_0(y)\sum_{\xi\in\Omega} k_0(\xi) = (\sum_{y\in\Omega} k_0(y))^2$
Ainsi,

$$\mathbb{E}[K_0^2(x)] = \frac{1}{MN}\sum_{\xi\in\Omega}\mathbb{E}[\hat{K_0}^2(\xi)]e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} = \frac{1}{MN}(\mathbb{E}[\hat{K_0}^2(0)] + \sum_{\xi\neq 0}(\frac{\pi}{4}MN\hat{k_0} * \hat{k_0}(\xi)e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} + MN(1 - \frac{\pi}{4})\hat{k_0}(\frac{\xi}{2})^2 e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle})$$
$$= \hat{k_0^2}(0) + \frac{\pi}{4}MN\sum_{\xi\neq 0}\hat{k_0} * \hat{k_0}(\xi)e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} + MN(1 - \frac{\pi}{4})\sum_{\xi\neq 0}\hat{k_0}(\frac{\xi}{2})^2 e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle}$$
$$= 1 + \frac{\pi}{4}MN(k_0^2(x) - \frac{k_0 \hat{*} k_0(0)}{MN}) + MN(1 - \frac{\pi}{4})(\frac{1}{MN}\sum_{\xi\in\Omega} k_0 \hat{*} k_0(\frac{\xi}{2})e^{2i\pi\langle 2x,\frac{\xi}{2}\rangle} - \frac{1}{MN}k_0 \hat{*} k_0(0))$$
$$= 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}MNk_0^2(x) + (\frac{\pi}{4} - 1)k_0 \hat{*} k_0(0) + MN(1 - \frac{\pi}{4})k_0 * k_0(2x)$$
$$= (1 - \frac{\pi}{4})(1 - k_0 \hat{*} k_0(0) + MNk_0 * k_0(2x)) + \frac{\pi}{4}MNk_0^2(x)$$
$$= (1 - \frac{\pi}{4})(1 - (\sum_{y\in\Omega} k_0(y))^2 + MNk_0 * k_0(2x)) + \mathbb{E}[K_0(x)]^2$$

Finalement,

$$\mathbb{V}[K_0(x)] = (1 - \frac{\pi}{4})(1 - (\sum_{y\in\Omega} k_0(y))^2 + MNk_0 * k_0(2x))$$
$$= (1 - \frac{\pi}{4})(\sum_{y\in\Omega} k_0(y)^2 - (\sum_{y\in\Omega} k_0(y))^2 + MN\sum_{y\in\Omega} k_0(y)k_0(2x - y))$$
$$= (1 - \frac{\pi}{4})(\hat{k_0^2}(0) - k_0 \hat{*} k_0(0) + MNk_0 * k_0(2x))$$

3 Deuxième partie

On étudie désormais une image $u = g(k_0 * W)$ avec k_0 et W identiques à la partie précédente et g une fonction strictement croissante. On cherche à estimer g et k_0. Pour ce faire, on retrouve d'abord g, qu'on inverse ensuite afin d'appliquer la méthode de la partie précédente pour retrouver k_0.

Si $X \sim \mathbb{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(g(X) \leq a) = \Phi(\tilde{g}^{-1}(a))$ où Φ désigne la fonction de répartition et $\tilde{g}^{-1}(a) = \{\sup y | g(y) \leq a\}$.

En pratique, on calcule un histogramme de l'image et on inverse Φ ce qui permet de retrouver une estimation G de g.

$G^{-1}(a) = \Phi^{-1}(\frac{\lfloor\{x|g(x)\leq a\}\rfloor}{MN})$

4 Annexe des preuves

4.1 Première partie

$$\mathbb{E}[\Gamma(x)] = \gamma(x)$$

Preuve :

$$\mathbb{E}[\Gamma(x)] = \mathbb{E}[\frac{A(u)(x)}{MN}] = \frac{1}{MN}\mathbb{E}[\sum_{y\in\Omega} u(y)u(x+y)] = \frac{1}{MN}\sum_{y\in\Omega} Cov[u(y), u(x+y)] = \frac{1}{MN}\sum_{y\in\Omega}\gamma(x) = \gamma(x)$$

$$\mathbb{V}[\Gamma(x)] = \frac{2\|\gamma\|_2^2}{(MN)^2}$$

Preuve :

$$\mathbb{V}[\Gamma(x)] = \mathbb{E}[\Gamma^2(x)] - \mathbb{E}[\Gamma(x)]^2 = \mathbb{E}[\Gamma^2(x)] - \gamma(x)^2$$

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^2(\xi)] = \mathcal{F}(k_0)^2(\xi)$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[\hat{K_0}^2(\xi)] = \hat{k_0}^2(\xi)$$

Preuve :

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^2(\xi)] = \mathbb{E}[\frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{\sigma^2}](\xi) = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\mathbb{E}[\sum_{\nu\in\Omega}\Gamma(\nu)\cdot e^{-2i\pi\langle\xi,\nu\rangle}] = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{\nu\in\Omega}\mathbb{E}[\Gamma(\nu)]\cdot e^{-2i\pi\langle\xi,\nu\rangle} = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{\nu\in\Omega}\gamma(\nu)\cdot e^{-2i\pi\langle\xi,\nu\rangle}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\cdot\mathcal{F}(\gamma)(\xi) = \mathcal{F}(A(k_0))(\xi) = \mathcal{F}(k_0)^2(\xi)$$

$$\mathbb{V}[\mathcal{F}(K_0)^2(\xi)] = \mathcal{F}(k_0)^4(\xi)$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{V}[\hat{K_0}^2(\xi)] = \hat{k_0}^4(\xi)$$

Preuve : $\mathbb{V}[\mathcal{F}(K_0)^2(\xi)] = \mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^4(\xi)] - \mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^2(\xi)]^2 = \mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^4(\xi)] - \mathcal{F}(k_0)^4(\xi)$

$$\mathbb{E}[\mathcal{F}(K_0)^4(\xi)] = \mathbb{E}[\Gamma^2(x)] = \mathbb{E}[(\frac{1}{MN}\sum_{y\in\Omega} u(y)u(x+y))^2] = \frac{1}{(MN)^2}\sum_{y\in\Omega}\sum_{z\in\Omega}\mathbb{E}[u(y)u(x+y)u(z)u(x+z)]$$

$$= \frac{1}{(MN)^2}\sum_{y\in\Omega}\sum_{z\in\Omega}\mathbb{E}[\sum_{a\in\Omega}k(a)W(y-a)\sum_{b\in\Omega}k(b)W(x+y-b)\sum_{c\in\Omega}k(c)W(z-c)\sum_{a\in\Omega}k(d)W(x+z-d)]$$

$$= \frac{1}{(MN)^2}\sum_{y\in\Omega}\sum_{z\in\Omega}(\sum_{a\in\Omega}k(a)k(x+a)k(a+z-y)k(a+x+z-y)\mathbb{E}[W(y-a)^4]$$

$$+\sum_{a\in\Omega}k(a)k(x+a)\mathbb{E}[W(y-a)^2]\sum_{c\in\Omega}k(c)k(x+c)\mathbb{E}[W(z-c)^2]$$

$$+\sum_{a\in\Omega}k(a)k(a+z-y)\mathbb{E}[W(y-a)^2]\sum_{b\in\Omega}k(b)k(b+z-y)\mathbb{E}[W(x+y-b)^2]$$

$$+\sum_{a\in\Omega}k(a)k(a+x+z-y)\mathbb{E}[W(y-a)^2]\sum_{b\in\Omega}k(b)k(b+x+z-y)\mathbb{E}[W(x+y-b)^2])$$

$$= \frac{1}{(MN)^2}\sum_{y\in\Omega}\sum_{z\in\Omega}(\sum_{a\in\Omega}k(a)k(x+a)k(a+z-y)k(a+x+z-y)\sigma^4+\sum_{a\in\Omega}k(a)k(x+a)\sigma^2\sum_{c\in\Omega}k(c)k(x+c)\sigma^2$$

$$+\sum_{a\in\Omega}k(a)k(a+z-y)\sigma^2\sum_{b\in\Omega}k(b)k(b+z-y)\sigma^2+\sum_{a\in\Omega}k(a)k(a+x+z-y)\sigma^2\sum_{b\in\Omega}k(b)k(b+x+z-y)\sigma^2)$$

$$= \frac{1}{(MN)^2}\sigma^4\sum_{y\in\Omega}\sum_{z\in\Omega}(A(k_0)(x)^2+A(k_0)(z-y)^2+A(k_0)(z+x-y)^2)$$

$$= \gamma(x)^2+2\sigma^4\frac{1}{(MN)}\sum_{y\in\Omega}A(k)(y)^2 = \gamma(x)^2+\frac{2\|\gamma\|_2^2}{(MN)^2}$$

$$\mathbb{E}[\hat{K_0}(\xi)] = \hat{k_0}(\xi)\frac{\sqrt{MN}\sqrt{\pi}}{2}$$

Preuve : On sait que $\mathbb{E}[|\hat{k_0}(\xi)|] = \hat{k_0}(\xi)$, $\mathbb{E}[|\hat{W}(\xi)|] = \sigma\sqrt{MN}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et que $\mathbb{E}[|\hat{W}^2(\xi)|] = \sigma^2 MN$ (papier sur les textons / calculs refaits). On effectue le calcul en Fourier. On appliquera ensuite la transformée de Fourier inverse par linéarité de l'espérance.

$$\mathbb{E}[\hat{K_0}(\xi)] = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}[|\hat{u}(\xi)|] = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}[|\hat{k_0}(\xi)||\hat{W}(\xi)|] = \frac{1}{\sigma}\hat{k_0}(\xi)\mathbb{E}[|\hat{W}(\xi)|] = \hat{k_0}(\xi)\frac{\sqrt{MN}\sqrt{\pi}}{2}$$

4.2 Deuxième partie