Une nouvelle expression du potentiel Newtonien des systèmes verticalement homogènes

*Décembre 19, 2011 — **IPF**, Bordeaux.*

Audrey Trova[1,2], Jean-Marc Huré[1,2], Franck Hersant[1,2]

[1] Univ. Bordeaux, LAB, UMR 5804, F-33270, Floirac, France.
[2] CNRS, LAB, UMR 5804, F-33270, Floirac, France

e-mail: audrey.trova@obs.u-bordeaux1.fr.

1 Abstract

Déterminer numériquement le potentiel gravitationnel d'un corps céleste (étoiles en rotation, planètes, astéroïdes, etc.) est un grand classique des problèmes en Astrophysique. Pour de tels objets, le potentiel s'exprime généralement par une intégrale à **trois dimensions** avec un noyau singulier. Sans un traitement spécial, il n'est pas possible de le calculer avec une grande précision. Une des principales méthodes qui consiste à transformer le **noyau de Green** $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ en une série de polynômes de Legendre ne procure pas une précision très grande pour diverses raisons (série alternées et troncatures). Nous proposons ici une formulation régulière de ce noyau dans le cas des systèmes verticalement homogènes (Trova A., Huré J.M., Hersant F., 2012), tout à fait adaptée aux disques et aux anneaux.

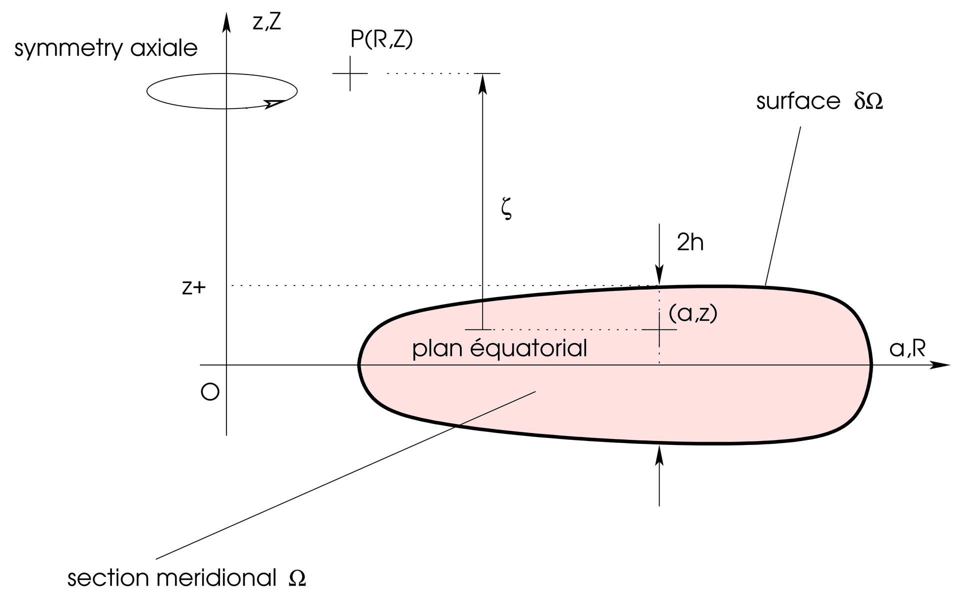

Figure 1: Configuration d'un corps axisymétrique

2 Le potential gravitationnel d'un corps axisymétrique

La potentiel gravitationnel en un point $P(\mathbf{r})$ d'un corps astrophysique de masse volumique locale $\rho(\mathbf{r}')$ est donné par (e.g Durand 1953) :

$$\psi(\mathbf{r}) = -G\iiint \rho(r')\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{1}$$

ce qui donne pour un corps axisymétrique verticalement homogène :

$$\psi(R,Z) = 2G\int_a \rho(a)\sqrt{\frac{a}{R}}da\int_\zeta k\mathbf{K}(k)d\zeta \tag{2}$$

où $\mathbf{K}(k)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce et k son module (fonction de $\zeta = Z - z$ et de a et R, coordonnées cylindriques radiales).

L'intégrale double représente le potentiel de la matière contenue à l'intérieur de la section Ω, ce qui veut dire que l'équation de la surface $\partial\Omega$ doit être connue (voir Fig.1).

- Difficulté majeure : Divergence de la fonction $\mathbf{K}(k)$. En effet $\mathbf{K}(k) \to \infty$ quand $k \to 1$ (correspondant à $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$). Cette divergence est logarithmique (voir Fig. 2).
- Méthode classique : Transformation du noyau de Green en polynôme de Legendre. Mais cela pose de nouvelles difficultés :
  - Série alternée
  - Troncature
  - Multiplicité du calcul intégral
- Nouvelle approche : Régularisation de l'intégrale (2) en cherchant une nouvelle expression pour l'intégrale :

$$\int_\zeta k\mathbf{K}(k)d\zeta \tag{3}$$

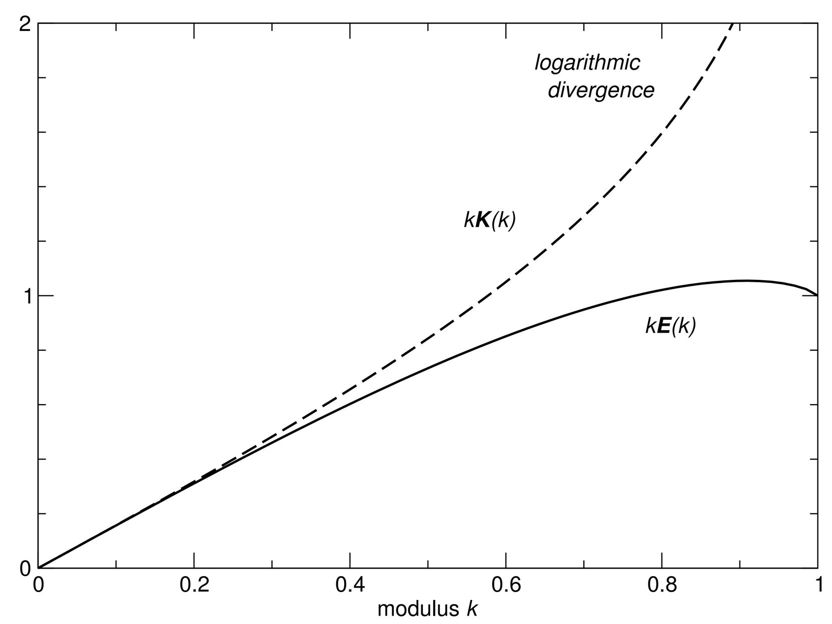

Figure 2: Variation des fonctions $\mathbf{K}(k)$ et $\mathbf{E}(k)$ en fonction du module k.

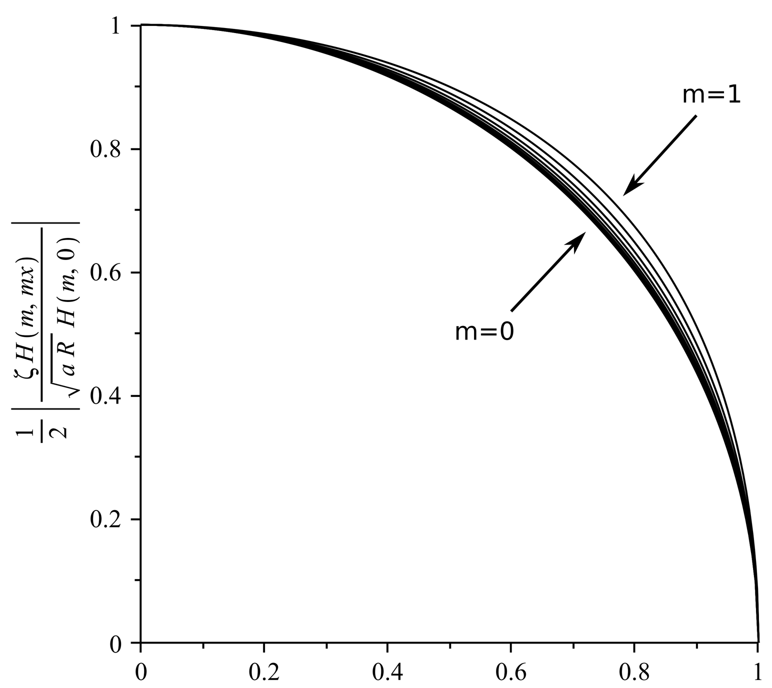

Figure 3: Variation de la fonction $\zeta\mathbf{H}(m,k)$ normalisée en fonction des modules m et $k = mx$.

3 Une nouvelle expression du potentiel gravitationnel

Après plusieurs calculs, nous sommes arrivés à une nouvelle expression de l'intégrale (3) :

$$\int k\mathbf{K}(k)d\zeta = \int k\mathbf{E}(k)d\zeta + \zeta\mathbf{H}(m,k) \tag{4}$$

avec

$$\mathbf{H}(m,k) = k\left[\mathbf{K}(k) - (1-m^2)\mathbf{\Pi}(m,k)\right], \tag{5}$$

où $\mathbf{E}(k)$ et $\mathbf{\Pi}(m,k)$ sont respectivement les intégrales de deuxième et troisième espèces et m son module. Cette nouvelle expression est totalement régulière car effectivement :

- La fonction $\mathbf{E}(k)$ est régulière quelque soit la valeur de k (Fig. 2)
- La fonction $\mathbf{H}(k)$ qui est singulière en $k = 1$, à cause de $\mathbf{K}(k)$, voit cette divergence disparaitre grâce au facteur ζ car lorsque $k = 1 \to \zeta = 0$ (voir Fig. 3)

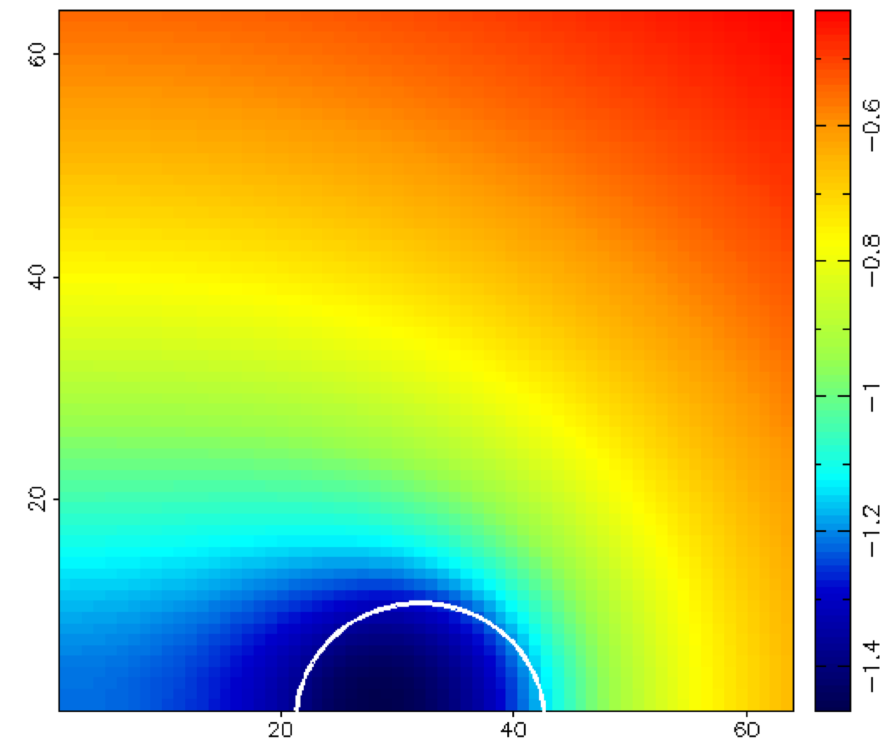

Figure 4: Potentiel à l'intérieur et à l'extérieur d'un tore de section circulaire (surface $\partial\Omega$ en blanc), calculé avec l'Eq. 6 aux noeuds d'une grille $(R, Z \geq 0)$ régulière (64×64).

Cette nouvelle expression de l'intégrale sur ζ (4), nous permet d'obtenir une nouvelle relation pour le potentiel gravitationnel :

$$\begin{aligned}\psi(R,Z) = {} & 2G\int_a \rho(a)\sqrt{\frac{a}{R}}da\int_\zeta k\mathbf{E}(k)d\zeta \\ & + 2G\int_a \rho(a)\sqrt{\frac{a}{R}}\left[\zeta_+\mathbf{H}(m,k_+) - \zeta_-\mathbf{H}(m,k_-)\right]da.\end{aligned} \tag{6}$$

Cette nouvelle formule :

- est générale (aucune hypothèse sur la forme de l'objet n'a été posée) et totalement régulière.
- a une seule contrainte : $\partial_z\rho = 0$ (systèmes verticalement homogènes).
- peut servir à générer différentes approximations (à longue distance, anneaux minces, etc...).

La figure 4 montre une application de l'équation (6) dans le cas d'un tore circulaire homogène.

4 Approximation pour les anneaux et disques minces

Dans ce cas là, l'épaisseur locale du système $2h(a)$ est petite devant le rayon a. Ce qui signifie que $k_+ \sim k_-$. Nous pouvons trouver une très bonne approximation du premier membre de droite de l'équation (4) en développant en séries de Taylor la fonction $k\mathbf{E}(k)$ sur $\tilde{k} = \frac{k_+ + k_-}{2}$:

$$\int_\zeta k\mathbf{E}(k)d\zeta \approx \tilde{k}\left[\mathbf{K}(\tilde{k}) - \mathbf{E}(\tilde{k})\right](\zeta_+ - \zeta_-) + \left[2\mathbf{E}(\tilde{k}) - \mathbf{K}(\tilde{k})\right]\int_{\zeta_-}^{\zeta_+} kd\zeta \tag{7}$$

Nous en déduisons une forme approchée du potentiel d'un anneau ou disque mince à profil de densité vertical homogène :

$$\psi(R,Z) \approx 2G\int_a \rho(a)\left[\mathbf{T}(m,k)\right]_{-h}^{+h}da \tag{8}$$

où nous avons défini $\mathbf{T}(m,k)$ comme :

$$\mathbf{T}(m,k) = \sqrt{\frac{a}{R}}\left\{\zeta\mathbf{H}(m,k) + \tilde{k}\left[\mathbf{K}(\tilde{k}) - \mathbf{E}(\tilde{k})\right]\zeta\right\} + 2a\left[2\mathbf{E}(\tilde{k}) - \mathbf{K}(\tilde{k})\right]\operatorname{argsh}\left(\frac{\zeta}{a+R}\right). \tag{9}$$

La figure (5) montre l'erreur relative entre les équations (6) et (8). Nous obtenons une erreur relative moyenne de $10^{-3} - 10^{-4}$. Ce niveau de précision devrait convenir à de nombreuses applications.

Conclusion

Nous avons obtenu deux résultats :

- la relation (6) générale : aucune hypothèse sur la forme de l'objet, valide à l'intérieur et à l'extérieur et totalement régulière.
- la relation (8) : formule approchée avec une bonne précision, très bien adaptée à la modélisation des disques minces

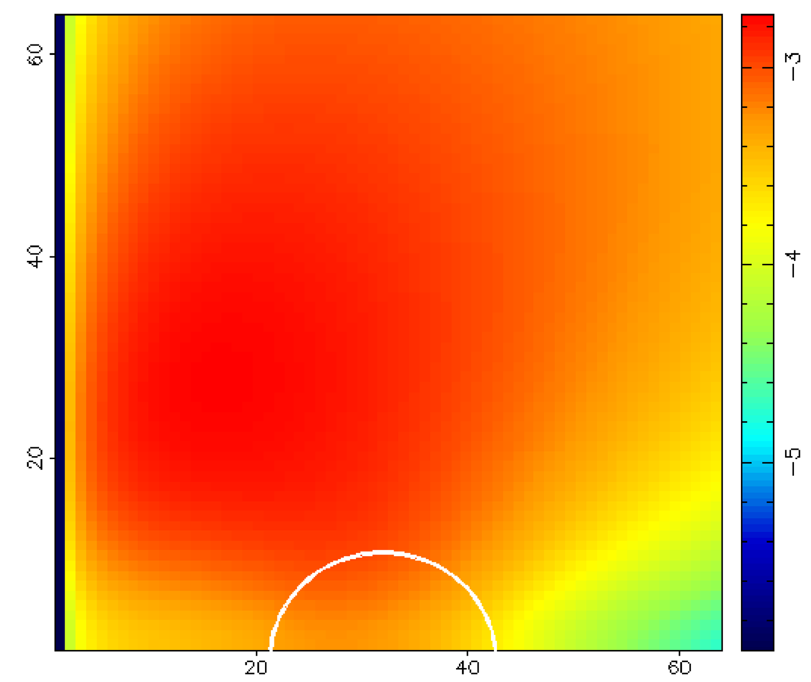

Figure 5: Erreur relative (échelle logarithmique) entre l'approximation (8) et la nouvelle formule du potentiel (6). Mêmes conditions que la figure 4.

Références

- Durand, E. 1953, Electrostatique. (Ed. Masson)
- Trova A., Huré J.M., Hersant F., 2012, en preparation