强化学习：强化学习是一种优化智能体在环境中行为的一种方法。根据环境反馈的奖励，调整智能体的行为策略，提升智能体实现目标的能力。

〇强化学习考虑的是**序贯决策过程**：

智能体处在特定的环境中产生一系列的动作，而环境能够根据这些动作改变智能体的当前状态。

举例

遥控直升飞机的特技表演；打败围棋世界冠军；管理股票证券；发电厂调控；控制人型机器人双足行走；视频游戏上超越人类

目标：选择一组动作使未来奖励和最大化

动作可能在未来很久才会产生影响；奖励可能是延时的；有可能会牺牲短期利益从而获得长期的回报

举例：

投资（要几个月才会收益）；直升机加油（防止几小时后没油坠机）

强化学习：

①产生的结果(动作) 能够改变数据的分布(状态)
②最终的目标可能要很长时间才能观察到(下棋)
③没有明确的标签(label) 数据
④根据当前的奖励，最终实现长远的目标

监督学习(Supervised Learning, SL)/非监督学习：

①产生的结果(输出) 不会改变数据的分布②结果是瞬时的③要么有明确的标签数据(SL)④要么完全没有任何标签数据(USL)

●马尔可夫性 Markov property

智能体未来的状态只与当前时刻的状态S_t有关，而与过去的状态$\{S_1,\dots,S_{t-1}\}$无关，那么称智能体的模型具有马尔可夫性。

$$P[S_{t+1}|S_t] = P[S_{t+1}|S_1,\dots,S_t]$$

未来只与当前有关，与历史无关$S_{1:t} \to S_t \to S_{t+1:\infty}$

一旦当前状态确定了，历史状态都可以丢弃了，也就是说当前状态足以决定未来状态是什么样的

全/部分可观测

强化学习主要研究的是具有马尔可夫性的问题. s_t:环境/模型内在状态

状态转移矩阵：

对于一个马尔可夫状态s和后继状态s'，状态转移概率定义为

$$P_{ss'} = P(S_{t+1} = s'|S_t = s)$$ o_t:智能体观测量

状态转移矩阵P 定义从所有状态s到所有后继状态s'的转移概率

$$P = \begin{array}{c} \\ from \end{array} \begin{array}{c} to \\ \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$ 其中矩阵的每行和为 1

●马尔可夫过程 Markov Process

一个马尔可夫过程是一个无记忆的随机过程，即一组具有马尔可夫性的随机状态序列 S1; S2;···

定义：

马尔可夫过程（马尔可夫链）可以用一组$\langle S,P\rangle$表示

S是（有限）状态集

P是状态转移概率矩阵$P_{ss'} = P(S_{t+1} = s'|S_t = s)$

●马尔可夫奖励过程 Markov Reward Process

一个马尔可夫奖励过程是一个马尔可夫链加上奖励

定义：

一个马尔可夫奖励过程由一组$\langle S,P,R,\gamma\rangle$构成

S是一组有限状态集

P是状态转移概率矩阵$P_{ss'} = P(S_{t+1} = s'|S_t = s)$

R是奖励函数，$R_s = E(R_{t+1}|S_t = s)$

γ是折扣因子，$\gamma \in [0,1]$

回报 Return:回报G_t代表从t时刻往后所有的折扣奖励:

$$\boldsymbol{G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1}}$$

折扣因子γ代表未来的奖励在当前时刻贡献的价值

$k+1$时刻后的奖励R对当前回报的贡献只有$\boldsymbol{\gamma^k R}$

0=目光短浅；1=目光长远 回报对应某一具体的轨迹

如果想要调整奖励的重要性，数学上很方便，在循环马尔可夫过程问题中能避免无穷回报。但是有可能会忽视未来奖励。如果奖励代表金钱，近期的奖励会比远期产生更多的收益。自然界的人类或动物行为模式更倾向于近期奖励。有时候也会使用无折扣的马尔可夫奖励过程（即 1）。例如所有的事件序列都有终止状态

价值函数$v(s)$ 代表智能体在状态s 下的长期价值

一个马尔可夫奖励过程的状态价值函数等于从状态s出发的期望回报 价值代表所有轨迹的期望

$$\boldsymbol{v(s) = \mathrm{E}[G_t|S_t = s]}$$

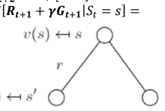
MRPs 的贝尔曼方程 Bellman equation

价值函数拆分成两部分:瞬间奖励R_{t+1};后继状态的折扣价值$\gamma v(S_{t+1})$

$v(s) = E[\boldsymbol{G_t}|S_t = s] = [\boldsymbol{R_{t+1} + \gamma R_{t+2}} + \cdots|S_t = s] = E[\boldsymbol{R_{t+1} + \gamma}(\boldsymbol{R_{t+2}} + \cdots)|S_t = s] = E[\boldsymbol{R_{t+1} + \gamma G_{t+1}}|S_t = s] = E[\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma v(S_{t+1})|S_t = s]$

$v(s) = E[\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma v(S_{t+1})|S_t = s]$

$v(s) = R_s + \gamma \sum_{s' \in S} P_{ss'} v(s')$



矩阵：$v = R + \gamma P v$

$$\begin{bmatrix} v(1) \\ \dots \\ v(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1) \\ \dots \\ R(n) \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(1) \\ \dots \\ v(n) \end{bmatrix}$$

$v = (I - \gamma P)^{-1} R$: n个状态下的计算复杂度 O(n^3)

●马尔可夫决策过程 Markov Decision Process, MDP

马尔可夫决策过程是马尔可夫奖励过程加上决策. 问题的所有状态都具有马尔可夫性.

一个马尔可夫决策过程由一组$\langle S,A,P,R,\gamma\rangle$构成

S是一组有限状态集

A是有限动作集

P是状态转移概率矩阵

$$P_{ss'}^a = P(S_{t+1} = s'|S_t = s, A_t = a)$$

R是奖励函数，$R_s^a = E(R_{t+1}|S_t = s, A_t = a)$

γ是折扣因子，$\gamma \in [0,1]$

●强化学习的主要组成元素：

策略：智能体的行为

价值函数（值函数、性能指标函数）：智能体在某一状态和/或某一动作时是好还是坏

模型：智能体对真实环境的估计

策略：代表了智能体是如何行为的，是从状态到动作的映射，是状态到动作的一种分布

确定性策略：$a = \pi(s)$

随机性策略：$\pi(a|s) = P(A_t = a|S_t = s)$

一个策略定义了一个智能体的行为，MDP 问题的策略取决于当前时刻的状态(与历史无关)，即策略是静态的(时不变性)，迷宫中的箭头（上下左右）代表策略$\pi(s)$在状态s的动作

给定一个 MDP 的M = $\langle S,A,P,R,\gamma\rangle$和策略$\pi$:

状态序列$S_1,S_2,\dots$是一个马尔可夫过程$\langle S,P^\pi\rangle$

状态和奖励序列$S_1,R_1,S_2,\dots$是一个马尔可夫奖励过程$\langle S,P^\pi,R^\pi,\gamma\rangle$

$P_{ss'}^\pi = \sum_{a\in A} \pi(a|s) P_{ss'}^a \qquad R_s^\pi = \sum_{a\in A} \pi(a|s) R_s^a$

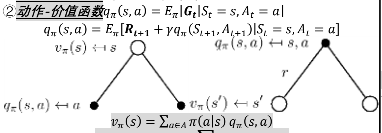
价值函数 Value Function

价值函数是对未来奖励的预测，评估智能体在某一状态下是好还是坏，因而可以用来选择对智能体最有利的动作

①***状态-价值函数***$v_\pi(s) = E_\pi[\boldsymbol{G_t}|S_t = s]$

②***动作-价值函数***$q_\pi(s,a) = E_\pi[\boldsymbol{G_t}|S_t = s, A_t = a]$

$$q_\pi(s,a) = E_\pi[\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma q_\pi(S_{t+1},A_{t+1})|S_t = s, A_t = a]$$



$$v_\pi(s) = \sum_{a\in A} \pi(a|s)\, q_\pi(s,a)$$

$$q_\pi(s,a) = R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_\pi(s')$$

$V_\pi(s)$ 的轨迹

$$s_t = s, a_t \sim \pi, r_{t+1} \sim \mathcal{R}, s_{t+1} \sim \mathcal{P}, a_{t+1} \sim \pi, \dots$$

$Q_\pi(s,a)$ 的轨迹

$$s_t = s, a_t = a, r_{t+1} \sim \mathcal{R}, s_{t+1} \sim \mathcal{P}, a_{t+1} \sim \pi, \dots$$

贝尔曼期望方程

$$v_\pi = \sum_{a\in A} \pi(a|s) \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_\pi(s')\right)$$

$$q_\pi(s,a) = R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a \sum_{a'\in A} \pi(a'|s')\, q_\pi(s',a')$$

$$v_\pi = (I - \gamma P^\pi)^{-1} R^\pi$$

最优价值函数：

最优状态-价值函数：在所有策略中价值函数最大的

$$v_*(s) = \max_\pi v_\pi(s)$$

最优动作-价值函数：所有策略中动作价值函数最大

$$q_*(s,a) = \max_\pi q_\pi(s,a)$$

最优价值函数代表了智能体在该 MDP 问题下最好的性能；如果得到了最优值函数，那么 MDP 问题就已经求解了

最优策略：$\pi \geq \pi'\ if\ v_\pi(s) \geq v_{\pi'}(s), \forall s$

定理

对任意马尔可夫决策过程

总是存在一个最优策略π_*比其它所有策略都不差

$$\pi_* \geq \pi \quad \forall \pi$$

所有最优策略的价值函数都相等，且等于最优价值函数，$V_{\pi_*}(s) = v_*(s)$

所有最优策略的动作-价值函数都相等，且等于最优动作-价值函数，$q_{\pi_*}(s,a) = q_*(s,a)$

寻找最优策略

一个最优策略可以通过最大化$q_*(s,a)$来确定

$$\pi_*(a|s) = \begin{cases} 1 & if\ a = \arg\max_{a\in A} q_*(s,a) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

对任何 MDP 都存在一个确定性的最优策略

如果$q_*(s,a)$已知，即可得到最优策略

最优化原理：

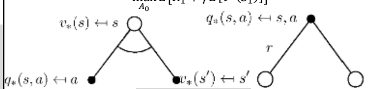
强化学习目标是找到一组时间序列的动作$\{A_0,A_1,\dots\}$使得智能体从S_0出发得到的期望累加奖励最大化

最优价值函数：

$$v^*(S_0) = E\left[\max_{A_0,A_1,\dots} (R_1 + \gamma R_2 + \gamma^2 R_3 + \cdots)\right]$$

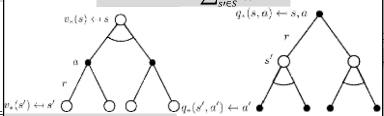
最优策略具有如下性质：不论初始状态和初始决策(第一步决策)如何，以第一步决策所形成的阶段和状态作为初始条件来考虑时，余下的决策对余下的问题而言也必构成最优策略

$$v^*(S_0) = E\left[\max_{A_0,A_1,\dots} (R_1 + \gamma R_2 + \gamma^2 R_3 + \cdots)\right]$$
$$= \max_{A_0} E\left[R_1 + \gamma \max_{A_1,A_2,\dots} (R_2 + \gamma R_3 + \cdots)\right]$$
$$= \max_{A_0} E[R_1 + \gamma E[v^*(S_1)]]$$



$$v_*(s) = \max_a q_*(s,a)$$

$$q_*(s,a) = R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_*(s')$$



关于v_*的 ~~Bellman 最优方程~~：

$$v_*(s) = \max_a \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_*(s')\right)$$

关于q_*的：$\boldsymbol{q_*(s,a) = R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a \max_{a'} q_*(s',a')}$

确定性的最优策略：

$$\pi_*(s) = \arg\max_{a\in A} q_*(s,a)$$

求解贝尔曼最优方程需要：

1 求解非线性算子 max
2 模型已知
3 足够的计算空间

$$\pi_*(s) = \arg\max_a \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s'} \mathcal{P}_{ss'}^a V_*(s')\right)$$

动态规划 DP

通过把原问题分解为相对简单的子问题来求解复杂问题的方法，适用于：

最优子结构性质：问题的最优解所包含的子问题的解也是最优的

满足最优化原理

最优解划分成子问题

子问题重叠性质：在用递归算法自顶向下对问题进行求解时，每次产生的子问题并不总是新问题，有些子问题会被重复计算多次

子问题重复出现多次

每个子问题计算一次，保存起来，再次需要求解子问题时直接查找结果

马尔可夫决策过程满足如下两个属性：

贝尔曼方程具有递归形式

价值函数可以保存和重复利用

●价值迭代

$$v'(s) = \max_a \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s'\in\mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v(s')\right)$$

贝尔曼最优方程的难点在于求解的v_*同时存在于等式左右两边

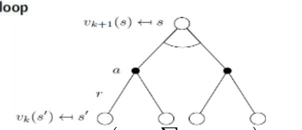
价值迭代的基本思路：

1 对v_*定义一个估计函数 v
2 将估计函数代入方程右边，等式左边得到一个新函数 v′
3 v'是对 v* 更为准确的估计
4 将 v′ 代入右式继续上述过程

1: 初始化一个函数 v_1 (e.g. $v_1(s) = 0, \forall s \in \mathcal{S}$)
2: **loop**
3: 根据已知的 v_k 计算一个新的函数

$$v_{k+1}(s) = \max_{a\in\mathcal{A}} \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s'\in\mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_k(s')\right), \forall s \in \mathcal{S}$$

4: $k \leftarrow k+1$
5: **end loop**



$$v_{k+1}(s) = \max_{a\in A} \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_k(s')\right)$$

$$\boldsymbol{v_{k+1}} = \max_{a\in A} (\boldsymbol{R^a} + \gamma \boldsymbol{P^a v_k})$$

●价值迭代算子

价值迭代定义一个以函数作为输入的算子 T，对给定的函数v_k计算新的函数

$$v_{k+1}(s) = [T(v_k)](s) = \max_a \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_k(s')\right)$$

T为价值迭代算子

贝尔曼最优方程：

$$\underline{\boldsymbol{v_*(s) = [T(v_*)](s) = \max_a \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_*(s')\right)}}$$

价值迭代收敛性，$\gamma < 1$(此时价值迭代算子是收缩算子)

使用∞-范数比较两个价值函数的不同,即状态集上两个函数最大的差值$\|u - v\|_\infty = \max_{s\in S} |u(s) - v(s)|$

收缩算子：对于任意两个函数f,g，如果两个函数的距离经过一个算子T后能够被缩小，那么这个算子被称为收缩算子

$$\|T(f - g)\|_\infty < \|f - g\|_\infty$$

$$\begin{aligned} &|[\mathcal{T}(u)](s) - [\mathcal{T}(v)](s)|, \quad \forall s \in \mathcal{S} \\ &= \left|\max_{a_1} \left(\mathcal{R}^{a_1} + \gamma \sum_{s'\in\mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^{a_1} u(s')\right) - \max_{a_2} \left(\mathcal{R}^{a_2} + \gamma \sum_{s'\in\mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^{a_2} v(s')\right)\right| \\ &\leq \max_a \left|\left(\mathcal{R}^a + \gamma \sum_{s'\in\mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a u(s')\right) - \left(\mathcal{R}^a + \gamma \sum_{s'\in\mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v(s')\right)\right| \\ &= \gamma \max_a \left|\sum_{s'\in\mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a (u(s') - v(s'))\right| \\ &\leq \gamma \|u - v\|_\infty \qquad (\gamma < 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|\mathcal{T}(u - v)\|_\infty < \|u - v\|_\infty$

从任意初始价值函数 v_1 出发，经过价值迭代计算的新函数 v_{k+1} 与最优价值函数之间的距离

$$\begin{aligned} \|v_{k+1} - v_*\|_\infty &= \|\mathcal{T} v_k - \mathcal{T} v_*\|_\infty \\ &\leq \gamma \|v_k - v_*\|_\infty \\ &\vdots \\ &\leq \gamma^k \|v_1 - v_*\|_\infty \end{aligned}$$

当k $\to \infty, v_k \to v_*$

策略

智能体可根据给定的策略决定在当前状态下如何采取下一步动作

1 确定性策略：$a_t = \pi(s_t)$
2 随机性策略：$a_t \sim \pi(s_t)$

给定一个策略，就可以对它的好坏进行评估

智能体按照给定的策略执行动作，获得的期望回报称为该策略的价值函数$v_\pi(s) = E_\pi[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots|S_t = s, A_t \sim \pi(S_t)]$

价值函数越高的策略，性能越好

贝尔曼期望方程

价值函数也可以写成动态规划的形式

$$\underline{\boldsymbol{v_\pi = \sum_a \pi(a|s) \left(R_s^a + \gamma P_{ss'}^a v_\pi(s')\right)}}$$

对于最优策略来讲

$$\boldsymbol{\pi_*(s) = \arg\max_{a\in A} \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_*(s')\right)}$$

它的价值函数就是最优价值函数，满足贝尔曼最优方程

$$\boldsymbol{v_*(s) = \max_a \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_*(s')\right)}$$

相比于其它策略，最优策略具有最大的价值函数

$$\boldsymbol{v_*(s) = v_{\pi*}(s) \geq v_\pi(s), \forall s \epsilon S}$$

在给定策略π的情况下，智能体有限个状态之间的转移可以用矩阵形式表示

$$\boldsymbol{P^\pi = \begin{bmatrix} P_{S_1,S_1}^\pi & \cdots & P_{S_1,S_n}^\pi \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{S_n,S_1}^\pi & \cdots & P_{S_n,S_n}^\pi \end{bmatrix}}$$

其中$\boldsymbol{P_{S_i,S_j}^\pi}$代表了在策略$\pi$下，从状态$\boldsymbol{S_i}$转移到$\boldsymbol{S_j}$的概率

贝尔曼期望方程:$v_\pi = (I - \gamma P^\pi)^{-1} R^\pi$:矩阵很大,矩阵稀疏

$$\boldsymbol{v_\pi = \begin{bmatrix} v_\pi(S_1) \\ \dots \\ v_\pi(S_n) \end{bmatrix}, \qquad R_\pi = \begin{bmatrix} \sum_a \pi(a|S_1) R_{S_1}^a \\ \dots \\ \sum_a \pi(a|S_n) R_{S_n}^a \end{bmatrix}}$$

如何提升策略————————————

给定一个策略π计算π的价值函数

$$v_\pi(s) = E_\pi[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots|S_t = s, A_t \sim \pi(S_t)]$$

从v_π提取出贪心策略

$$\pi' = greedy(v_\pi)$$

$$\pi'(s) = \arg\max_{a\in A} \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_\pi(s')\right)$$

新的策略继续上述过程,经过多次策略迭代后，策略收敛到$\boldsymbol{\pi_*}$

<u>**策略迭代**</u>

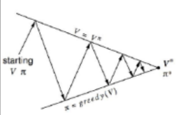
1: 给定一个初始策略 π_1, $k = 1$
2: **loop**
3: **策略评估**：对当前策略 π_k 计算它的价值函数 v_{π_k}

$$\begin{aligned} v_{\pi_k}(s) &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \dots|S_t = s, A_t \sim \pi_k(S_t)] \\ &= \sum_a \pi_k(a|s) (\mathcal{R}_s^a + \gamma \mathcal{P}_{ss'}^a v_{\pi_k}(s')) \end{aligned}$$

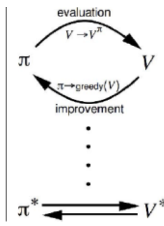
4: **策略提升**：根据 v_{π_k} 提取出新的策略

$$\pi_{k+1}(s) = \mathrm{argmax}_{a\in\mathcal{A}} \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s'\in\mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_{\pi_k}(s')\right)$$

5: $k \leftarrow k+1$
6: **end loop**



策略提升产生的新策略 $\pi' \geq \pi$，即 $v_{\pi'}(s) \geq v_\pi(s), \forall s \in \mathcal{S}$



考虑一个确定性的策略，$a = \pi(s)$

根据贪心策略对策略进行提升

$$\boldsymbol{\pi'(s) = \arg\max_{a\in A} \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'} P_{ss'}^a v_\pi(s')\right) = \arg\max_{a\in A} q_\pi(s,a)}$$

上述过程提升了任意 s 一步的价值

$$\boldsymbol{q_\pi(s,\pi'(s)) = \max_{a\in A} q_\pi(s,a) \geq q_\pi(s,\pi(s)) = v_\pi(s)}$$

因此新策略的价值函数得到了提升,$\boldsymbol{v_{\pi'}(s) \geq v_\pi(s)}$

$$\begin{aligned} v_\pi(s) &\leq q_\pi(s,\pi'(s)) = \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1})|S_t = s, A_t = \pi'(S_t)] \\ &\leq \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma q_\pi(S_{t+1},\pi'(S_{t+1}))|S_t = s, A_t = \pi'(S_t)] \\ &\leq \mathbb{E}_\pi[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 q_\pi(S_{t+2},\pi'(S_{t+2}))| \\ &\qquad S_t = s, A_t = \pi'(S_t), A_{t+1} = \pi'(S_{t+1})] \\ &\leq \mathbb{E}_{\pi'}[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \dots|S_t = s] = v_{\pi'}(s) \end{aligned}$$

因为$\boldsymbol{v_{\pi1} \leq v_{\pi2} \leq \cdots \leq v_{\pi k} \leq v_*}$**单调递增有上界，所以收敛**

当策略不再变化时满足贝尔曼最优方程

价值迭代 VS 策略迭代

●价值迭代

$$\underline{\boldsymbol{v_{k+1}(s) = \max_a (R_s^a + \gamma P_{ss'}^a v_k(s'))}}$$

只在收敛得到$\boldsymbol{v_*}$后计算$\boldsymbol{\pi_*}$，中间过程不产生策略

涉及赋值操作，计算量小,$O(|S|^2|A|)$，迭代次数多

●策略迭代

$$\underline{\boldsymbol{v_\pi(s) = \sum_a \pi(a|s) (R_s^a + \gamma P_{ss'}^a v_\pi(s'))}}$$

$$\boldsymbol{\pi'(s) = \arg\max_{a\in A} \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'} P_{ss'}^a v_\pi(s')\right)}$$

每次迭代开始时给定一个$\boldsymbol{\pi}$，结束时产生一个新$\boldsymbol{\pi'}$,迭代次数少求解方程，计算量大，矩阵求逆$O(|S|^3)$，策略提升,$O(|S|^2|A|)$

动态规划方法

$$v_*(s) = \max_a \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_*(s')\right)$$

动作规划：价值迭代/策略迭代

通过迭代有效求解原始问题中非线性的 max 算子

依赖系统模型，R，P

足够的计算空间记录每个状态的函数值

价值迭代$\boldsymbol{v_*(s)}$

策略迭代$\boldsymbol{v_\pi(s), \pi(s)}$

状态-动作价值函数

$$q_*(s,a) = R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a \max_{a'} q_*(s',a')$$

●基于 Q 函数的价值迭代

初始化q_1, (e.g. q1(s; a) = 0; ∀s ∈ S; ∀a ∈ A)

迭代计算新的 Q 函数

$$\boldsymbol{q_{k+1}(s,a) = R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a \max_{a'} q_k(s',a')}$$

●基于 Q 函数的策略迭代

给定一个策略π_1

策略评估：计算 k 的状态-动作价值函数

$$q_{\pi k}(s,a) = R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a \sum_{a'\in A} \pi(a'|s')\, q_{\pi k}(s',a')$$

共同的不足：对模型依赖, R;P

要么是 MDP 问题的模型已知

要么智能体对环境建模

无模型的策略评估方法：

蒙特卡洛方法；时间差分方法

策略提升：根据$q_{\pi k}$提取出新的策略

$$\boldsymbol{\pi_{k+1}(s) = \arg\max_{a\epsilon A}}\, q_{\pi k}(s,a)$$

迭代策略评估:

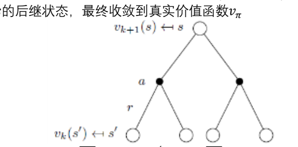
问题:对给定策略$\boldsymbol{\pi}$计算它的价值函数

方法:基于贝尔曼期望方程迭代更新价值函数

初始化一个价值函数v_1, $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_\pi$

同步更新：

在每次迭代中，对所有的状态$s \in S$，根据$v_k(s')$更新$v_{k+1}(s)$，其中s'是s的后继状态，最终收敛到真实价值函数v_π



$$v_{k+1}(s) = \sum_{a\in A} \pi(a|s) \left(R_s^a + \gamma \sum_{s'\in S} P_{ss'}^a v_k(s')\right)$$

贝尔曼期望更新算子T^π，$T^\pi(v) = R^\pi + \gamma P^\pi v$

该算子是γ-收缩的，即经过该算子两个价值函数的距离变为原来的γ倍

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}^\pi(u) - \mathcal{T}^\pi(v)\|_\infty &= \|(\mathcal{R}^\pi + \gamma\mathcal{P}^\pi u) - (\mathcal{R}^\pi + \gamma\mathcal{P}^\pi v)\|_\infty \\ &= \|\gamma\mathcal{P}^\pi(u - v)\|_\infty \\ &\leq \|\gamma\mathcal{P}^\pi\|u - v\|_\infty\|_\infty \\ &\leq \gamma\|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

所以迭代策略评估收敛到v_π

●异步动态规划:就地动态规划;优先动态规划;实时动态规划

蒙特卡洛方法 Monte-Carlo, MC

MC 方法直接从经历过的事件中学习

无模型方法：不需要 MDP 的转移/奖励函数

从完整的事件中学习：没有自举

基于最简单的思想：价值= 平均回报

运行 MC 方法通常要求：

所有事件都到达终止状态$\{S_1,A_1,\dots,S_{terminal}\}$

或者事件的时序足够长$\{S_1,A_1,\dots,S_T\}$; T ≫ 1

蒙特卡洛策略评估

目标：从策略π产生的事件中学习v_π：$S_1,A_1,R_2,\dots,S_k \sim \pi$

回忆下回报的定义是所有折扣奖励和

$$\boldsymbol{G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots \gamma^{T-1} R_t}$$

回忆下价值函数的定义是回报的期望$v_\pi(s) = E_\pi[\boldsymbol{G_t}|S_t = s]$

蒙特卡洛策略评估方法使用回报的经验均值作为回报的期望

基于样本更新：

接下来的课程将主要使用智能体从环境获得的样本进行更新，使用样本的奖励和状态转移$\langle S,A,,R,S'\rangle$而不是奖励函数 R 和转移函数 P。好处包括：

无模型：不需要预前知道 MDP 的模型信息

通过样本避免整个状态空间的维数灾问题

每次更新的计算量是固定，与后继的状态空间 n = |S| 无关

首次经过的 MC 策略评估

为了评估状态 s,假设在一次事件中第一次经过状态 s 的时刻为 t,计数加一 N(s) ← N(s) + 1，全部回报相加 S(s) ← S(s)+Gt，估计的价值等于回报均值 V(s) = S(s)/N(s)，根据大数定理，当 N(s) → ∞ 时, V(s) → $v_\pi(s)$

每次经过的 MC 策略评估

为了评估状态 s，对一次事件中每一次经过状态 s 的时刻 t，计数加一 N(s) ← N(s)+1，全部回报相加 S(s) ← S(s) +Gt，估计的价值等于回报均值 V(s) = S(s)/N(s)，同样当 N(s) → ∞ 时, V(s) → $v_\pi(s)$

增量计算均值

一个序列$x_1,x_2,\dots$的均值$\mu_1,\mu_2,\dots$可以通过增量的方式计算

$$\begin{aligned} \mu_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k x_j &= \frac{1}{k}\left(x_k + \sum_{j=1}^{k-1} x_j\right) = \frac{1}{k}(x_k + (k-1)\mu_{k-1}) \\ &= \mu_{k-1} + \frac{1}{k}(x_k - \mu_{k-1}) \end{aligned}$$

增量式的 MC 更新

根据事件$S_1,A_1,R_1,\dots,S_T$对$V(s)$增量式地更新

对状态S_t，回报是G_t

$$N(S_t) \leftarrow N(S_t) + 1$$
$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \frac{1}{N(S_t)}(G_t - V(S_t))$$

如果环境是动态、不断变化的，我们更希望是能够跟踪当前不断变化的均值，遗忘掉很久之前的事件

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(G_t - V(S_t))$$

时间差分学习 Temporal Difference (TD) Learning

TD 方法直接从智能体经历的事件中学习

无模型的：不知道 MDP 问题的转移和奖励函数

可以从非完整的事件中学习，借助自举法

根据一个猜测值更新另一个猜测值

MC 和 TD

目标：根据智能体在策略π作用下产生的经历在线学习v_π

增量式的 MC 方法:调整价值$V(S_t)$向真实的回报G_t逼近

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(G_t - V(S_t))$$

最简单形式的 TD 学习算法: TD(0)

调整价值$V(S_t)$向估计的回报$\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1})$逼近

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t))$$

TD 目标：$\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1})$

TD 误差：$\boldsymbol{\delta_t = R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t)$

TD 学习算法：

1: 给定策略 π, 初始状态分布 D_0, $V(s) = 0, \forall s \in \mathcal{S}$, 学习率 α
2: **for** $t = 1, 2, \dots$ **do**
3: **if** $S_t = S_{terminal}$ 或 S_t 未初始化 **then**
4: 初始化 $S_t \sim D_0$
5: **end if**
6: 根据 S_t 采样 $A_t \sim \pi(S_t)$, 智能体执行 A_t 后观察 $(S_t, A_t, R_{t+1}, S_{t+1})$
7: 更新 $V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(R_{t+1} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t))$
8: **end for**

MC 和 TD 对比

MC 是高方差，零偏差：

需要完整的事件序列计算出回报后学习

好的收敛性(即使是使用逼近器也能保证收敛性);

与价值函数初始值无关;

原理简单，使用方便;

要求事件达到终止状态或序列足够长

能够利用马尔可夫性，因此在马尔可夫环境下更有效

TD 是低方差，有偏差：

可以在智能体运行过程中的每一步在线学习

可以从不完整的事件序列中学习

通常情况是比 MC 更有效

TD(0) 能够收敛到$v_\pi(s)$

(但是与逼近器结合后并不一定收敛)

受价值函数初始值影响

不能利用马尔可夫性，因此在非马尔可夫环境下更有效

偏差/方差的权衡:

回报$\boldsymbol{G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots \gamma^{T-1} R_t}$是$v_\pi(S_t)$的无偏估计

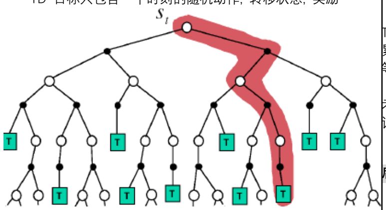
真实的 TD 目标$\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma v_\pi(S_{t+1})$是$v_\pi(S_t)$的无偏估计

TD 目标$\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1})$是$v_\pi(S_t)$的有偏估计

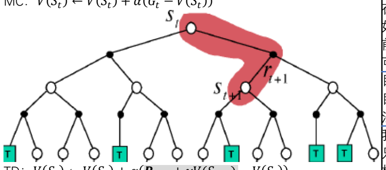
TD 目标比回报的方差要小很多

回报的计算包含整个序列中的随机动作，转移状态，奖励

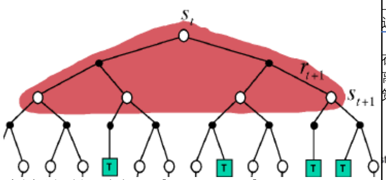
TD 目标只包含一个时刻的随机动作，转移状态，奖励



MC: $V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(G_t - V(S_t))$



TD: $V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t))$



动态规划更新: $V(S_t) \leftarrow E_\pi[\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1})]$

自举法: 更新时包含一个猜测量

MC 不使用自举　　DP 使用自举　　TD 使用自举

采样法: 使用采样的数据计算期望

MC 使用采样　　DP 不使用采样　　TD 使用采样

等价模型:

MC 收敛结果对应最小二乘误差，最佳匹配观测的回报

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T_k}\left(G_t^k - V(s_t^k)\right)^2$$

TD(0) 收敛结果对应最大似然马尔可夫模型$\langle S, A, \hat{P}, \hat{R}, \gamma\rangle$

$$\hat{P}_{s,s'}^a = \frac{1}{N(s,a)}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T_k} 1(s_t^k, a_t^k, s_{t+1}^k = s, a, s')$$

$$\hat{R}_{s,s'}^a = \frac{1}{N(s,a)}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T_k} 1(s_t^k, a_t^k = s, a) r_t^k$$

$n = 1 \quad (TD) \quad G_t^{(1)} = R_{t+1} + \gamma V(S_{t+1})$

$n = 2 \quad\quad G_t^{(2)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 V(S_{t+2})$

$\vdots$

$n = \infty \quad (MC) \quad G_t^{(\infty)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots + \gamma^{t+T-1} R_T$

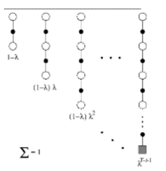
n-步的回报:

$$\boldsymbol{G_t^{(n)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots \gamma^{n-1} R_{t+n} + \gamma^n V(S_{t+n})}$$

n-步时间差分学习

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha\left(\boldsymbol{G_t^{(n)}} - V(S_t)\right)$$

TD(λ), λ-回报



λ-回报$\boldsymbol{G_t^\lambda}$将所有的 n-步回报$\boldsymbol{G_t^{(n)}}$整合在一起

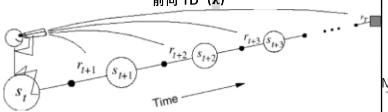
对每项使用权重$(1-\lambda)\lambda^{n-1}$

$$\boldsymbol{G_t^\lambda} = (1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\boldsymbol{G_t^{(n)}}$$

前向更新的 TD(λ)形式

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha\left(\boldsymbol{G_t^\lambda} - V(S_t)\right)$$

前向 TD（λ）



更新价值函数向**λ** -回报逼近，面向未来时刻计算$\boldsymbol{G_t^\lambda}$，与 MC 一样要求完整的事件序列

资格迹 Eligibility Traces

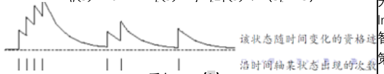
可信度：警铃和闪光是否和高压电直接相关?

受频率启发：对发生次数最多的状态给予最高的可信度

受近因启发：对时间上最近发生的状态给予最高的可信度

资格迹将两种方式结合

$$E_0(s) = 0 \qquad E_t(s) = \gamma E_{t-1}(s) + 1(S_t = s)$$

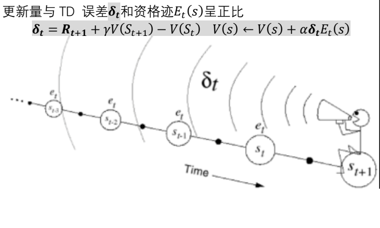


后向 **TD（λ）**

为每个状态s记录它的资格迹，更新s的价值$V(s)$

更新量与 TD 误差$\boldsymbol{\delta_t}$和资格迹$E_t(s)$呈正比

$$\boldsymbol{\delta_t = R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t) \quad V(s) \leftarrow V(s) + \alpha\boldsymbol{\delta_t}E_t(s)$$



TD(λ)和 TD(0)

当**λ**= 0 时，只有当前状态被更新

$$E_t(s) = 1(S_t = s) \qquad V(s) \leftarrow V(s) + \alpha\boldsymbol{\delta_t}E_t(s)$$

等同于 TD(0) 方法$V(s) \leftarrow V(s) + \alpha\boldsymbol{\delta_t}$

TD(λ)和 MC

当**λ**= 1 时，可信度被推迟到事件结束，考虑每个事件都到达终止状态的环境，使用离线更新，对每个事件序列，TD(1) 的所有更新和 MC 的所有更新是一致的

当使用离散更新时，前向和后向 **TD(λ)**所有的更新是相同的

$$\sum_{t=1}^{T}\alpha\delta_t E_t(s) = \sum_{t=1}^{T}\alpha(\boldsymbol{G_t^\lambda} - V(S_t))1(S_t = s)$$

MC 和 TD(1)

考虑在一次事件中 s 在 k 时刻被唯一访问一次

该状态的 TD(1) 资格迹会在被访问之后随时间衰减

$$E_t(s) = \gamma E_{t-1}(s) + 1(S_t = s) = \begin{cases} 0 & if\ t < k \\ \gamma^{t-k} & if\ \ t \geq k \end{cases}$$

TD(1) 在更新时会在线累计误差

$$\sum_{t=1}^{T-1}\alpha\delta_t E_t(s) = \alpha\sum_{t=k}^{T-1}\gamma^{t-k}\delta_t = (\boldsymbol{G_k} - V(S_k))$$

在事件结束时累计误差等于

$$\delta_k + \gamma\delta_{k+1} + \gamma^2\delta_{k+2} + \cdots + \gamma^{T-1-k}\delta_{T-1}$$

当**λ**= 1 时, TD 误差可以变换成 MC 误差

$$\boldsymbol{\delta_t = R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t)$$

$$\delta_k + \gamma\delta_{k+1} + \gamma^2\delta_{k+2} + \cdots + \gamma^{T-1-k}\delta_{T-1} = \boldsymbol{G_t} - V(S_t)$$

TD(λ) 和 TD(1)

TD(1) 大致等价于每次经过的 MC 方法，误差会随在线运行逐步累积，如果价值函数只在事件结束时离线更新，那么所有的更新量等同于 MC 方法

前向和后向 TD(λ)

考虑在一次事件中 s 在 k 时刻被唯一访问一次

该状态的 **TD(λ)**资格迹会在被访问之后随时间衰减

$$E_t(s) = \gamma\lambda E_{t-1}(s) + 1(S_t = s) = \begin{cases} 0 & if\ t < k \\ (\lambda\gamma)^{t-k} & if\ \ t \geq k \end{cases}$$

后向 TD(λ)在更新时会在线累计误差

$$\sum_{t=1}^{T-1}\alpha\delta_t E_t(s) = \alpha\sum_{t=k}^{T-1}(\lambda\gamma)^{t-k}\delta_t = \left(\boldsymbol{G_k^\lambda} - V(S_k)\right)$$

在事件结束时总共累计误差等于**λ** -回报

如果 s 被多次访问，$E_t(s)$也会累积多次的误差

前向提供理论原理，后向给出算法实现：在线学习；每一时刻更新；可以适用事件序列中的一小段，非完整序列

目标：获得最优策略，基于模型：动态规划、价值迭代、策略迭代

目标：获得策略的价值函数，基于样本：迭代策略评估.蒙特卡洛方法.时间差分学习.TD(λ) .

我们想获得最优策略，但是 MDP 的模型未知，或者问题空间太大，只能考虑和智能体最相关的状态：无模型方法；使用智能体的经验样本；最优化价值函数

上节课:无模型预测，估计一个模型未知 MDP 问题的价值函数

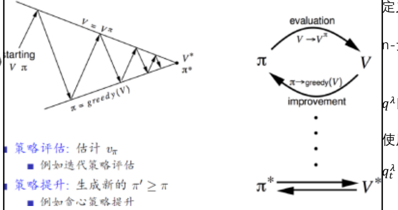
这节课:无模型控制，最优化一个模型未知 MDP 问题的价值函数

在策略(on-policy) 和离策略(off-policy) 学习

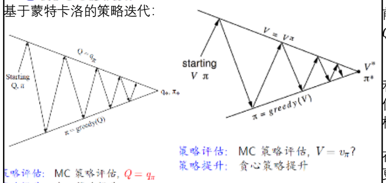
在策略学习：根据策略π 产生的样本来学习关于 π 的相关知识

离策略学习：根据另一策略μ产生的样本来学习关于 π 的相关知识

策略迭代:



基于蒙特卡洛的策略迭代:



动作-价值函数实现无模型的策略迭代:

基于 V(s) 进行贪心策略提升需要 MDP 的模型信息

$$\pi'(s) = \arg\max_{a\in A}\left(R_s^a + \gamma P_{ss'}^a V(s')\right)$$

基于 Q(s, a) 进行贪心策略提升是无模型的

$$\pi'(s) = \arg\max_{a\in A} Q(s,a)$$

ϵ-贪心探索

最简单实现连续探索的方法，所有的 m 个动作都有非零概率被选中执行，以 1−ϵ 概率选择贪心动作，以 ϵ 概率随机选择一个动作

$$\pi(a|s) = \begin{cases} \epsilon/m + 1 - \epsilon & if\ a^* = \arg\max_{a\in A} Q(s,a) \\ \epsilon/m & otherwise \end{cases}$$

给定任意 ϵ-贪心策略 π，根据q_π构造出新的 ϵ-贪心策略π'具有更好的性能，即$v_{\pi'}(s) \geq v_\pi(s)$

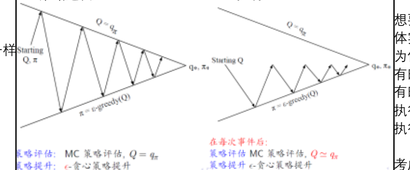
$$q_\pi(s, \pi'(s)) = \sum_{a\in A}\pi'(a|s) q_\pi(s,a)$$

$$= \epsilon/m\sum_{a\in A} q_\pi(s,a) + (1-\epsilon)\arg\max_{a\in A} q_\pi(s,a)$$

$$\geq \epsilon/m\sum_{a\in A} q_\pi(s,a) + (1-\epsilon)\sum_{a\in A}\frac{\pi(a|s) - \epsilon/m}{1-\epsilon} q_\pi(s,a)$$

$$= \sum_{a\in A}\pi(a|s) q_\pi(s,a) = v_\pi(s) \rightarrow v_{\pi'}(s) \geq v_\pi(s)$$

MC 策略迭代:　　　　　　MC 控制



无限探索，无穷时刻收敛为贪心策略 (Greedy in the Limit with Infinite Exploration, GLIE)

智能体能无限次数地探索所有的状态-动作对：$\lim_{k\to\infty} N_k(s,a) = \infty$

策略在无穷时刻收敛到贪心策略

$$\lim_{k\to\infty}\pi_k(a|s) = 1(a = \arg\max_{a\in A} Q_k(s,a'))$$

ϵ-贪心策略的探索率ϵ能随时间衰减到零$\epsilon_k = \frac{1}{k}$，则它就满足 GLIE

GLIE 蒙特卡洛控制

使用策略π采集第k次事件$\{S_1, A_1, R_2, \ldots, S_T\} \sim \pi$

对事件中的每个状态S_t和动作A_t

$$N(S_t, A_t) \leftarrow N(S_t, A_t) + 1$$

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \frac{1}{N(S_t, A_t)}\left(G_t - Q(S_t, A_t)\right)$$

基于新得到的动作-价值函数对策略进行提升

$$\epsilon \leftarrow \frac{1}{k} \qquad \pi \leftarrow greedy(Q)$$

GLIE 蒙特卡洛控制能够收敛到最优动作-价值函数,

$$Q(s,a) \rightarrow q_*(s,a)$$

MC vs TD 控制

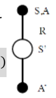
TD 学习和 MC 方法相比有如下优势:

低方差，在线学习，无完整事件序列

在控制方法中使用 TD 替代 MC:

基于 TD 方法训练$Q(S,A)$，使用 ϵ-贪心方法进行策略提升，每个时刻都对函数更新

基于 Sarsa 方法更新动作-价值函数



动作-价值函数的贝尔曼期望方程:

$$q_\pi(s,a) = R_s^a + \gamma\sum_{s'\in S} P_{ss'}^a\sum_{a'\in A}\pi(a'|s')\, q_\pi(s',a')$$

在某一时刻智能体观察到的一段事件(S, A, R, S', A')

基于样本的 TD 更新:

$$Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha(R + \gamma Q(S',A') - Q(S,A))$$

基于 Sarsa 的在策略控制:

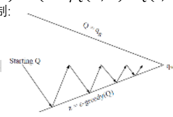
在每一时刻:

策略评估:

使用 Sarsa 方法，$Q \approx q_\pi$

策略提升:

ϵ-贪心策略提升



算法:

1: 任意初始化 $Q(s,a), \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}$，令 $Q(S_{terminal}, \cdot) = 0$
2: **repeat** {在每次事件中:}
3: 　初始化 S
4: 　根据从 Q 提取的策略 (例如 ϵ-贪心策略) 对 S 选择动作 A
5: 　**repeat** {对事件中的每一时刻}
6: 　　执行动作 A，观察 R, S'
7: 　　根据从 Q 提取的策略 (例如 ϵ-贪心策略) 对 S' 选择动作 A'
8: 　　$Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha[R + \gamma Q(S',A') - Q(S,A)]$
9: 　　$S \leftarrow S'$, $A \leftarrow A'$
10: 　**until** S 是终止状态
11: **until**

Sarsa 的收敛性:

当如下条件满足时 Sarsa 算法是收敛到最优动作-价值函数:

策略序列$\pi_t(a|s)$是 GLIE 的

更新步长α_t满足 Robbins-Monro 序列要求

$$\sum_{t=1}^{\infty}\alpha_t = \infty \qquad \sum_{t=1}^{\infty}{\alpha_t}^2 < \infty)$$

Sarsa vs MC

注意：蒙特卡洛方法并不能直接应用在这个问题上

并不是所有的策略都能到达终止状态，如果学到的某一策略使智能体待在原地不动，MC 在基于该策略对事件采样时永远都无法结束

Sarsa 算法没有这样的问题

每一步都在学习，很快就会发现这样的策略性能很差，然后转向其它策略

n-步 Sarsa

考虑 n-步的回报，n = 1, 2,∞:

$n = 1 \quad (Sarsa) \quad q_t^{(1)} = R_{t+1} + \gamma Q(S_{t+1}, A_{t+1})$

$n = 2 \quad\quad q_t^{(2)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 Q(S_{t+2}, A_{t+2})$

$\vdots$

$n = \infty \quad (MC) \quad q_t^{(\infty)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots + \gamma^{t+T-1} R_T$

定义 n-步的 Q-回报

$$q_t^{(n)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots + \gamma^{n-1} R_{t+n} + \gamma^n Q(S_{t+n}, A_{t+n})$$

n-步 Sarsa 算法更新 Q(s, a)，向 n-步 Q-回报逼近

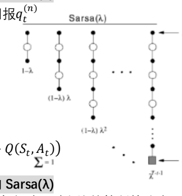
$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\left(q_t^{(n)} - Q(S_t, A_t)\right)$$

前向 Sarsa(λ)

q^λ回报包含了所有的n-步Q-回报$q_t^{(n)}$

使用$(1-\lambda)\lambda^{n-1}$对回报加权

$$q_t^\lambda = (1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1} q_t^{(n)}$$



前向 Sarsa(λ) 算法

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\left(q_t^\lambda - Q(S_t, A_t)\right)$$

后向 Sarsa(λ)

和 TD(λ) 算法一样，我们将资格迹引入到在线的控制算法中

但是 Sarsa(λ) 算法不同的地方在于为每个状态- 动作对都记录资格迹(之前是只对状态记录)

$$E_0(s,a) = 0 \qquad E_t(s,a) = \gamma\lambda E_{t-1}(s,a) + 1(S_t = s, A_t = a)$$

在每一时刻会对每个状态s和动作a的$Q(s,a)$更新

更新量与 TD 误差$\boldsymbol{\delta_t}$和资格迹$E_t(s,a)$呈正比

$$\boldsymbol{\delta_t = R_{t+1}} + \gamma Q(S_{t+1}, A_{t+1}) - Q(S_t, A_t)$$

$$Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \alpha\boldsymbol{\delta_t}E_t(s,a)$$

1: 任意初始化 $Q(s,a), \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}$
2: **repeat** {在每次事件中:}
3: 　令 $E(s,a) = 0, \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}$
4: 　初始化 S, A
5: 　**repeat** {对事件中的每一步}
6: 　　执行动作 A，观察 R, S'
7: 　　根据从 Q 提取的策略 (例如 ϵ-贪心策略) 对 S' 选择动作 A'
8: 　　$\delta \leftarrow R + \gamma Q(S',A') - Q(S,A)$
9: 　　$E(S,A) \leftarrow E(S,A) + 1$
10: 　　**for all** $s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}$ **do**
11: 　　　$Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha\delta E(s,a)$
12: 　　　$E(s,a) \leftarrow \gamma\lambda E(s,a)$
13: 　　**end for**
14: 　　$S \leftarrow S'$, $A \leftarrow A'$
15: 　**until** S 是终止状态
16: **until**

一步 Sarsa vs Sarsa(λ)

一步 Sarsa 只对最终导致高奖励的最后一步动作强化它的价值

资格迹方法能够对事件中的多个动作强化它们的价值

强化的幅度(箭头大小) 随着离奖励步数的增加而衰减

衰减率等于γλ

这里γ = 1, λ = 0.9

离策略学习

想要对目标策略$\pi(a|s)$进行评估，计算$v_\pi(s)$或$q_\pi(s,a)$，但是智能体实际的行为策略是$\mu(a|s)$：$\{S_1, A_1, R_2, \ldots, S_T\} \sim \mu$

为什么要考虑这种情况?

有时智能体需要观察人类或别的智能体的行为去学习

有时需要重复利用旧策略$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{t-1}$产生的经验去学习

执行探索性的策略去学习最优策略

执行单一的策略去学习多个策略

Q-学习

考虑基于动作-价值$Q(s,a)$的离策略学习，不再使用重要性采样

智能体下一时刻执行的动作是由行为策略产生$A_{t-1} \sim \mu(\cdot|S_t)$

但是学习算法考虑的是由另一个目标策略产生的后继动作

$$A' \sim \pi(\cdot|St)$$

更新$Q(S_t, A_t)$向另一个后继动作的价值逼近

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha(R_{t+1} + \gamma Q(S_{t+1}, A') - Q(S_t, A_t))$$

Q-学习实现离策略控制:

现在允许行为策略和目标策略都能提升

目标策略π是由$Q(s,a)$生成的贪心策略

$$\pi(S_{t+1}) = \arg\max_{a'} Q(S_{t+1}, a')$$

行为策略μ是由$Q(s,a)$生成的例如 ϵ-贪心策略

那么 Q-学习的目标就是

$$R_{t+1} + \gamma Q(S_{t+1}, A') = R_{t+1} + \gamma\arg\max_{a'} Q(S_{t+1}, a')$$

$$= R_{t+1} + \gamma\max_{a'} Q(S_{t+1}, a')$$

Q-学习控制算法

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\left(R + \gamma\max_{a'} Q(S', a') - Q(S, A)\right)$$

Q 学习控制能够收敛到最优动作-价值函数,

Q-学习算法实现离策略控制:

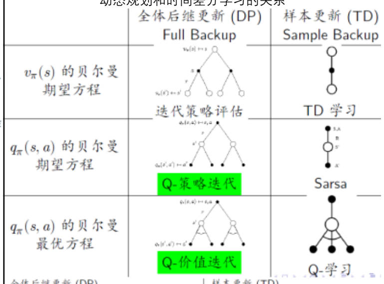
1: 任意初始化 $Q(s,a), \forall s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}$，令 $Q(S_{terminal}, \cdot) = 0$
2: **repeat** {在每次事件中:}
3: 　初始化 S
4: 　**repeat** {对事件中的每一时刻}
5: 　　根据从 Q 提取的策略 (例如 ϵ-贪心策略) 对 S 选择动作 A
6: 　　执行动作 A，观察 R, S'
7: 　　$Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha[R + \gamma\max_a Q(S',a) - Q(S,A)]$
8: 　　$S \leftarrow S'$
9: 　**until** S 是终止状态
10: **until**

Sarsa vs Q-学习

Q-学习正确地学到了最优路径，即沿着悬崖的边缘行走，但是由于使用的 ϵ-贪心策略会采取一定概率的随机动作，有时智能体跌入悬崖

Sarsa 学到的是安全路径,在学习过程中考虑了随机探索动作的影响，即使 Sarsa 学到的安全路径比 Q-学习的最优路径行走步数要长，但是每次获得的奖励和却比 Q-学习的高

动态规划和时间差分学习的关系



全体后继更新 (DP)	样本更新 (TD)
迭代策略评估 $V(s) \leftarrow \mathbb{E}[R + \gamma V(s')\mid s]$	TD 学习 $V(S) \xleftarrow{\alpha} R + \gamma V(S')$
Q-策略迭代 $Q(s,a) \leftarrow \mathbb{E}[R + \gamma Q(s',a')\mid s,a]$	Sarsa $Q(S,A) \xleftarrow{\alpha} R + \gamma Q(S',A')$
Q-价值迭代 $Q(s,a) \leftarrow \mathbb{E}[R + \gamma\max_{a'\in\mathcal{A}} Q(s',a')\mid s,a]$	Q- 学习 $Q(S,A) \xleftarrow{\alpha} R + \gamma\max_{a'\in\mathcal{A}} Q(S',a')$

其中，$x \xleftarrow{\alpha} y \equiv x \leftarrow x + \alpha(y - x)$

探索(exploration) 与利用(exploitation)

在线决策过程存在的一个关键问题是:

利用：根据当前的信息做出最佳的决策

探索：采样更多的信息

想要做出长期的最佳决策有时需要牺牲当前短期的部分利益

收集更多的信息从而做出整体最佳的决策

Q-学习

如果 Q-学习没有探索，即 ϵ = 0，学习结果容易陷入局部最优解，无法找到真正最优策略，如果 ϵ 很大也不好

1 状态，动作空间很大时，想要探索整个空间是费时费力的，对在线学习过程不利

2 随机的动作会降低智能体的实际回报

非均匀探索概率

ϵ-贪心策略除了最优动作，其它动作以等概率随机选择

假如：有两个动作看起来不错，而其它的动作完全不可行

那么比较合理的探索方式是选择那些看起来不错的动作，从不错的动作中选出最优的动作，而不是将精力浪费在看起来不可行的动作，**根据动作-价值决定动作被选中的概率**

波尔兹曼探索, Boltzmann exploration

$$\pi(a|s) = \frac{e^{Q(s,a)/T}}{\sum_{a'\in A} e^{Q(s,a')/T}}$$

a被选中的概率与$e^{Q(s,a)/T}$呈正比($Q(s,a) \geq 0$, ∀s, a)

温度系数 T > 0 决定了策略的随机性能

如果 T 很大，所有动作几乎以等概率选择(探索)

如果 T 很小，高价值的动作更容易被选中(利用)

极限情况 T → 0，只选择最优动作

求解非线性算子 max

动态规划：价值迭代/策略迭代

模型已知

预测(prediction)：蒙特卡洛方法，时间差分学习，TD(λ)

控制(control): Sarsa, Sarsa(λ), Q-学习

算法	查表法	线性逼近	非线性逼近
MC 控制	✓	(✓)	×
Sarsa	✓	(✓)	×
Q 学习	✓	×	×
LSPI	✓	(✓)	-

(√)代表算法会在最优价值函数附近振荡

最小二乘策略迭代:

策略评估：使用最小二乘学习策略的 Q 函数

策略提升：贪心策略提升

在/离策略	算法	查表法	线性逼近	非线性逼近
在策略	MC	✓	✓	✓
	LSMC	✓	✓	-
	TD	✓	✓	×
	LSTD	✓	✓	-
离策略	MC	✓	✓	✓
	LSMC	✓	✓	-
	TD	✓	×	×
	LSTD	✓	✓	-

批处理强化学习, Batch RL:

梯度下降法简单，易实现，但是对样本的利用率不足

批处理的方法能够基于智能体的经验("训练数据")，试着找到最合适的价值函数

使用逼近器的好处

使用较少数量的参数就能表达复杂的函数(计算复杂度)

对一个权重的调整就可以影响到很多的点(泛化能力)

多种特征表示和逼近器结构(多样性)

可微的函数逼近器，例如：特征函数的线性组合，神经网络，决策树，最近邻，傅立叶/小波基函数