强化学习：强化学习是一种优化智能体在环境中行为的一种方法。根据环境反馈的奖励，调整智能体的行为策略，提升智能体实现目标的能力。

〇强化学习考虑的是**序贯决策过程**：

智能体处在特定的环境中产生一系列的动作，而环境能够根据这些动作改变智能体的当前状态。

举例

遥控直升飞机的特技表演；打败围棋世界冠军；管理股票证券；发电厂调控；控制人型机器人双足行走；视频游戏上超越人类

目标：选择一组动作使未来奖励和最大化

动作可能在未来很久才会产生影响；奖励可能是延时的；有可能会牺牲短期利益从而获得长期的回报

举例：

投资（要几个月才会收益）；直升机加油（防止几小时后没油坠机）

强化学习：

①产生的结果(动作) 能够改变数据的分布(状态)
②最终的目标可能要很长时间才能观察到(下棋)
③没有明确的标签(label) 数据
④根据当前的奖励，最终实现长远的目标

监督学习(Supervised Learning, SL)/非监督学习：

①产生的结果(输出) 不会改变数据的分布②结果是瞬时的③要么有明确的标签数据(SL)④要么完全没有任何标签数据(USL)

●马尔可夫性 Markov property

智能体未来的状态只与当前时刻的状态S_t有关，而与过去的状态$\{S_1,\ldots,S_{t-1}\}$无关，那么称智能体的模型具有马尔可夫性。

$$P[S_{t+1}|S_t]=P[S_{t+1}|S_1,\ldots,S_t]$$

未来只与当前有关，与历史无关$S_{1:t}\to S_t\to S_{t+1:\infty}$

一旦当前状态确定了，历史状态都可以丢弃了，也就是说当前状态足以决定未来状态是什么样的

全/部分可观测

强化学习主要研究的是具有马尔可夫性的问题。

s_t:环境/模型

内在状态

状态转移矩阵：

对于一个马尔可夫状态s和后继状态s'，状态转移概率定义为

$$P_{ss'}=P(S_{t+1}=s'|S_t=s)$$

o_t:智能体观测量

状态转移矩阵P 定义从所有状态s到所有后继状态s'的转移概率

$$P=\begin{array}{c}\\ from\end{array}\begin{array}{c}to\\ \begin{bmatrix}P_{11}&\cdots&P_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ P_{n1}&\cdots&P_{nn}\end{bmatrix}\end{array}$$

其中矩阵的每行和为 1

●马尔可夫过程 Markov Process

一个马尔可夫过程是一个无记忆的随机过程，即一组具有马尔可夫性的随机状态序列 S1; S2;···

定义：

马尔可夫过程（马尔可夫链）可以用一组$\langle S,P\rangle$表示

S是（有限）状态集

P是状态转移概率矩阵$P_{ss'}=P(S_{t+1}=s'|S_t=s)$

●马尔可夫奖励过程 Markov Reward Process

一个马尔可夫奖励过程是一个马尔可夫链加上奖励

定义：

一个马尔可夫奖励过程由一组$\langle S,P,R,\gamma\rangle$构成

S是一组有限状态集

P是状态转移概率矩阵$P_{ss'}=P(S_{t+1}=s'|S_t=s)$

R是奖励函数，$R_s=E(R_{t+1}|S_t=s)$

γ是折扣因子，$\gamma\in[0,1]$

回报 Return:回报G_t代表从t时刻往后所有的折扣奖励:

$$\boldsymbol{G_t=R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k R_{t+k+1}}$$

折扣因子γ代表未来的奖励在当前时刻贡献的价值

$k+1$时刻后的奖励R对当前回报的贡献只有$\boldsymbol{\gamma^k R}$

0=目光短浅；1=目光长远 回报对应某一具体的轨迹

如果想要调整奖励的重要性，数学上很方便，在循环马尔可夫过程问题中能避免无穷回报。但是有可能会忽视未来奖励。如果奖励代表金钱，近期的奖励会比远期产生更多的收益。自然界的人类或动物行为模式更倾向于近期奖励。有时候也会使用无折扣的马尔可夫奖励过程（即 1）。例如所有的事件序列都有终止状态

价值函数$v(s)$ 代表智能体在状态s 下的长期价值

一个马尔可夫奖励过程的状态价值函数等于从状态s出发的期望回报 价值代表所有轨迹的期望

$$\boldsymbol{v(s)=E[G_t|S_t=s]}$$

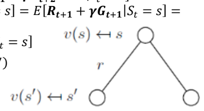
MRPs 的贝尔曼方程 Bellman equation

价值函数拆分成两部分:瞬间奖励R_{t+1};后继状态的折扣价值$\gamma v(S_{t+1})$

$v(s)=E[\boldsymbol{G_t}|S_t=s]=[\boldsymbol{R_{t+1}+\gamma R_{t+2}}+\cdots|S_t=s]=$
$E[\boldsymbol{R_{t+1}+\gamma(R_{t+2}}+\cdots)|S_t=s]=E[\boldsymbol{R_{t+1}+\gamma G_{t+1}}|S_t=s]=$
$E[\boldsymbol{R_{t+1}}+\gamma v(S_{t+1})|S_t=s]$

$v(s)=E[\boldsymbol{R_{t+1}}+\gamma v(S_{t+1})|S_t=s]$

$v(s)=R_s+\gamma\sum_{s'\in S}P_{ss'}v(s')$



矩阵：$v=R+\gamma Pv$

$$\begin{bmatrix}v(1)\\ \ldots\\ v(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R(1)\\ \ldots\\ R(n)\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}P_{11}&\cdots&P_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ P_{n1}&\cdots&P_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v(1)\\ \ldots\\ v(n)\end{bmatrix}$$

$v=(I-\gamma P)^{-1}R$: n个状态下的计算复杂度 O(n^3)

●马尔可夫决策过程 Markov Decision Process, MDP

马尔可夫决策过程是马尔可夫奖励过程加上决策. 问题的所有状态都具有马尔可夫性.

一个马尔可夫决策过程由一组$\langle S,A,P,R,\gamma\rangle$构成

S是一组有限状态集

A是有限动作集

P是状态转移概率矩阵

$$P^a_{ss'}=P(S_{t+1}=s'|S_t=s,A_t=a)$$

R是奖励函数，$R^a_s=E(R_{t+1}|S_t=s,A_t=a)$

γ是折扣因子，$\gamma\in[0,1]$

●强化学习的主要组成元素：

策略：智能体的行为

价值函数（值函数、性能指标函数）：智能体在某一状态和/或某一动作时是好还是坏

模型：智能体对真实环境的估计

策略：代表了智能体是如何行为的，是从状态到动作的映射，是状态到动作的一种分布

确定性策略：$a=\pi(s)$

随机性策略：$\pi(a|s)=P(A_t=a|S_t=s)$

一个策略定义了一个智能体的行为，MDP 问题的策略取决于当前时刻的状态(与历史无关)，即策略是静态的(时不变性)，迷宫中的箭头（上下左右）代表策略$\pi(s)$在状态s的动作

给定一个 MDP 的M $=\langle S,A,P,R,\gamma\rangle$和策略$\pi$:

状态序列$S_1,S_2,\ldots$是一个马尔可夫过程$\langle S,P^\pi\rangle$

状态和奖励序列$S_1,R_1,S_2,\ldots$是一个马尔可夫奖励过程$\langle S,P^\pi,R^\pi,\gamma\rangle$

$P^\pi_{ss'}=\sum_{a\epsilon A}\pi(a|s)P^a_{ss'}$ $\quad R^\pi_s=\sum_{a\epsilon A}\pi(a|s)R^a_s$

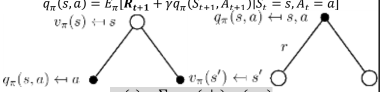
价值函数 Value Function

价值函数是对未来奖励的预测，评估智能体在某一状态下是好还是坏，因而可以用来选择对智能体最有利的动作

①***状态-价值函数***$v_\pi(s)=E_\pi[\boldsymbol{G_t}|S_t=s]$

②***动作-价值函数***$q_\pi(s,a)=E_\pi[\boldsymbol{G_t}|S_t=s,A_t=a]$

$$q_\pi(s,a)=E_\pi[\boldsymbol{R_{t+1}}+\gamma q_\pi(S_{t+1},A_{t+1})|S_t=s,A_t=a]$$



$$v_\pi(s)=\sum_{a\epsilon A}\pi(a|s)\,q_\pi(s,a)$$
$$q_\pi(s,a)=R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}v_\pi(s')$$

$V_\pi(s)$ 的轨迹

$$s_t=s,a_t\sim\pi,r_{t+1}\sim\mathcal{R},s_{t+1}\sim\mathcal{P},a_{t+1}\sim\pi,\ldots$$

$Q_\pi(s,a)$ 的轨迹

$$s_t=s,a_t=a,r_{t+1}\sim\mathcal{R},s_{t+1}\sim\mathcal{P},a_{t+1}\sim\pi,\ldots$$

贝尔曼期望方程

$$v_\pi=\sum_{a\in A}\pi(a|s)\left(R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}v_\pi(s')\right)$$
$$q_\pi(s,a)=R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}\sum_{a'\in A}\pi(a'|s')\,q_\pi(s',a')$$
$$v_\pi=(I-\gamma P^\pi)^{-1}R^\pi$$

最优价值函数：

最优状态-价值函数：在所有策略中价值函数最大的

$$v_*(s)=\max_\pi v_\pi(s)$$

最优动作-价值函数：所有策略中动作价值函数最大

$$q_*(s,a)=\max_\pi q_\pi(s,a)$$

最优价值函数代表了智能体在该 MDP 问题下最好的性能；如果得到了最优值函数，那么 MDP 问题就已经求解了

最优策略：$\pi\ge\pi'\,if\ v_\pi(s)\ge v_{\pi'}(s),\forall s$

定理

对任意马尔可夫决策过程

总是存在一个最优策略π_*比其它所有策略都不差

$$\pi_*\ge\pi\quad\forall\pi$$

所有最优策略的价值函数都相等，且等于最优价值函数，$V_{\pi_*}(s)=v_*(s)$

所有最优策略的动作-价值函数都相等，且等于最优动作-价值函数，$q_{\pi_*}(s,a)=q_*(s,a)$

寻找最优策略

一个最优策略可以通过最大化$q_*(s,a)$来确定

$$\pi_*(a|s)=\begin{cases}1 & if\ a=\arg\max_{a\in A}q_*(s,a)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

对任何 MDP 都存在一个确定性的最优策略

如果$q_*(s,a)$已知，即可得到最优策略

最优化原理：

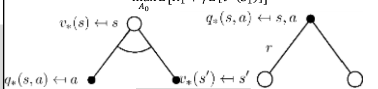
强化学习目标是找到一组时间序列的动作$\{A_0,A_1,\ldots\}$使得智能体从S_0出发得到的期望累加奖励最大化

最优价值函数：

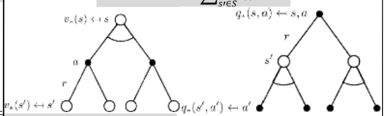
$$v^*(S_0)=E\left[\max_{A_0,A_1,\ldots}(R_1+\gamma R_2+\gamma^2R_3+\cdots)\right]$$

最优策略具有如下性质：不论初始状态和初始决策(第一步决策)如何，以第一步决策所形成的阶段和状态作为初始条件来考虑时，余下的决策对余下的问题而言也必构成最优策略

$$v^*(S_0)=E\left[\max_{A_0,A_1,\ldots}(R_1+\gamma R_2+\gamma^2R_3+\cdots)\right]$$
$$=\max_{A_0}E\left[R_1+\gamma\max_{A_1,A_2,\ldots}(R_2+\gamma R_3+\cdots)\right]$$
$$=\max_{A_0}E[R_1+\gamma E[v^*(S_1)]]$$



$$v_*(s)=\max_a q_*(s,a)$$
$$q_*(s,a)=R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}v_*(s')$$



关于v_*的 Bellman ~~最优方程~~：

$$\underline{v_*(s)=\max_a\left(R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}v_*(s')\right)}$$

关于q_*的：$\boldsymbol{q_*(s,a)=R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}\max_{a'}q_*(s',a')}$

确定性的最优策略：

$$\pi_*(s)=\arg\max_{a\epsilon A}q_*(s,a)$$

求解贝尔曼最优方程需要：

1 求解非线性算子 max
2 模型已知
3 足够的计算空间

$$\pi_*(s)=\arg\max_a\left(\mathcal{R}^a_s+\gamma\sum_{s'}\mathcal{P}^a_{ss'}V_*(s')\right)$$

动态规划 DP

通过把原问题分解为相对简单的子问题来求解复杂问题的方法，适用于：

最优子结构性质：问题的最优解所包含的子问题的解也是最优的，也就是满足最优化原理，将问题划分成子问题。

子问题重叠性质：使用递归算法自顶向下对问题进行求解，每次产生的子问题并不总是新问题。（子问题重复多次出现，保存第一次的解）

马尔可夫决策过程满足以上两个属性：贝尔曼方程具有递归性；价值函数保存和重复利用。

●价值迭代

$$V'(s)=\max_a\left(\mathcal{R}^a_s+\gamma\sum_{s'}\mathcal{P}^a_{ss'}V(s')\right)$$

贝尔曼最优方程的难点在于求解的v_*同时存在于等式左右两边

价值迭代的基本思路：

1 对v_*定义一个估计函数 v
2 将估计函数代入方程右边，等式左边得到一个新函数 v'
3 v'是对 v* 更为准确的估计
4 将 v' 代入右式继续上述过程

1: 初始化一个函数 V_1 (e.g. $V_1(s)=0,\forall s\in\mathcal{S}$)
2: **loop**
3: 根据已知的 V_k 计算一个新的函数

$$V_{k+1}(s)=\max_{a\in\mathcal{A}}\left(\mathcal{R}^a_s+\gamma\sum_{s'\in\mathcal{S}}\mathcal{P}^a_{ss'}V_k(s')\right),\forall s\in\mathcal{S}$$

4: $k\leftarrow k+1$
5: **end loop**

$$v_{k+1}(s)=\max_{a\epsilon A}\left(R^a_s+\gamma\sum_{s'\epsilon S}P^a_{ss'}v_k(s')\right)$$
$$\boldsymbol{v_{k+1}=\max_{a\epsilon A}(R^a+\gamma P^a v_k)}$$

- 价值迭代定义一个以函数作为输入的算子 $\mathcal{T}$，对给定的函数 V_k 计算新的函数

$$V_{k+1}(s)=[\mathcal{T}(V_k)](s)=\max_a\left(\mathcal{R}^a_s+\gamma\sum_{s'}\mathcal{P}^a_{ss'}V_k(s')\right)$$

- $\mathcal{T}$ 称为价值迭代算子

维数灾：DP的计算复杂度与状态数量呈多项式关系

贝尔曼最优方程：

$$\underline{\boldsymbol{v_*(s)=[T(v_*)](s)=\max_a\left(R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}v_*(s')\right)}}$$

价值迭代收敛性，$\gamma<1$(此时价值迭代算子是收缩算子)

使用∞-范数比较两个价值函数的不同,即状态集上两个函数最大的差值$\|u-v\|_\infty=\max_{s\in S}|u(s)-v(s)|$

收缩算子：对于任意两个函数f,g，如果两个函数的距离经过一个算子T后能够被缩小，那么这个算子被称为收缩算子

$$\|T(f-g)\|_\infty<\|f-g\|_\infty$$

是否需要证明过程？

$$\begin{aligned}&\left|[\mathcal{T}(u)](s)-[\mathcal{T}(v)](s)\right|,\quad\forall s\in\mathcal{S}\\ &=\left|\max_{a_1}\left(\mathcal{R}^{a_1}+\gamma\sum_{s'\in\mathcal{S}}\mathcal{P}^{a_1}_{ss'}u(s')\right)-\max_{a_2}\left(\mathcal{R}^{a_2}+\gamma\sum_{s'\in\mathcal{S}}\mathcal{P}^{a_2}_{ss'}v(s')\right)\right|\\ &\le\max_a\left|\left(\mathcal{R}^a+\gamma\sum_{s'\in\mathcal{S}}\mathcal{P}^a_{ss'}u(s')\right)-\left(\mathcal{R}^a+\gamma\sum_{s'\in\mathcal{S}}\mathcal{P}^a_{ss'}v(s')\right)\right|\\ &=\gamma\max_a\left|\sum_{s'\in\mathcal{S}}\mathcal{P}^a_{ss'}\left(u(s')-v(s')\right)\right|\\ &\le\gamma\|u-v\|_\infty\qquad(\gamma<1)\end{aligned}$$

$\Rightarrow\|\mathcal{T}(u-v)\|_\infty<\|u-v\|_\infty$

从任意初始价值函数 v_1 出发，经过价值迭代计算的新函数 v_{k+1} 与最优价值函数之间的距离

$$\begin{aligned}\|v_{k+1}-v_*\|_\infty&=\|\mathcal{T}v_k-\mathcal{T}v_*\|_\infty\\ &\le\gamma\|v_k-v_*\|_\infty\\ &\ \ \vdots\\ &\le\gamma^k\|v_1-v_*\|_\infty\end{aligned}$$

当$\mathrm{k}\to\infty,v_k\to v_*$

策略

智能体可根据给定的策略决定在当前状态下如何采取下一步动作

1 确定性策略：$a_t=\pi(s_t)$
2 随机性策略：$a_t\sim\pi(s_t)$

给定一个策略，就可以对它的好坏进行评估

智能体按照给定的策略执行动作，获得的期望回报称为该策略的价值函数$v_\pi(s)=E_\pi[R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\cdots|S_t=s,A_t\sim\pi(S_t)]$

在给定策略π的情况下，智能体有限个状态之间的转移可以用矩阵形式表示

$$\boldsymbol{P^\pi}=\begin{bmatrix}P^\pi_{S_1,S_1}&\cdots&P^\pi_{S_1,S_n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ P^\pi_{S_n,S_1}&\cdots&P^\pi_{S_n,S_n}\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{P^\pi_{S_i,S_j}}$代表了在策略$\pi$下，从状态$\boldsymbol{S_i}$转移到$\boldsymbol{S_j}$的概率

贝尔曼期望方程:$v_\pi=(I-\gamma P^\pi)^{-1}R^\pi$:矩阵很大,矩阵稀疏

$$\boldsymbol{v_\pi}=\begin{bmatrix}v_\pi(S_1)\\ \ldots\\ v_\pi(S_n)\end{bmatrix},\qquad\boldsymbol{R_\pi}=\begin{bmatrix}\sum_a\pi(a|S_1)R^a_{S_1}\\ \ldots\\ \sum_a\pi(a|S_n)R^a_{S_n}\end{bmatrix}$$

1: 给定一个初始策略 π_1, $k=1$
2: **loop**
3: 策略评估 policy evaluation：对当前策略 π_k 计算它的价值函数 V_{π_k}

$$\begin{aligned}V_{\pi_k}(s)&=\mathbb{E}[r_{t+1}+\gamma r_{t+2}+\ldots|s_t=s,a_t\sim\pi_k(s_t)]\\ &=\sum_a\pi_k(a|s)\left(\mathcal{R}^a_s+\gamma\sum_{s'}\mathcal{P}^a_{ss'}V_{\pi_k}(s')\right)\end{aligned}$$

4: 策略提升 policy improvement：根据 V_{π_k} 提取贪心策略

$$\pi_{k+1}(s)=\arg\max_a\left(\mathcal{R}^a_s+\gamma\sum_{s'}\mathcal{P}^a_{ss'}V_{\pi_k}(s')\right)$$

5: $k\leftarrow k+1$
6: **end loop**

- 策略迭代收敛时策略不再变化
- 迭代的次数不超过 MDP 的最大 (确定性) 策略数量

$$\pi_1\to\pi_2\to\cdots\to\pi_k=\pi_*$$
$$k\le|\mathcal{A}|^{|\mathcal{S}|}$$

- e.g. $|\mathcal{A}|=2,|\mathcal{S}|=10$, $k\le2^{10}=1024$

- 思考：策略迭代过程会出现死循环吗？即 $\pi_i\to\pi_{i+1}\to\cdots\to\pi_j=\pi_i$

不会，策略的价值只会越来越小

$$\|V_k-V_*\|_\infty\le\gamma^{k-1}\|V_1-V_*\|_\infty$$

- 假设初始 $V_1(s)=0,\forall s\in\mathcal{S}$
- 收敛阈值 ϵ，即 $\|V_k-V_*\|_\infty\le\epsilon$ 时认为收敛到 V_*

$$\gamma^{k-1}\|V_1-V_*\|_\infty\le\epsilon$$
$$\Rightarrow\boxed{k\ge1+\log_\gamma\frac{\epsilon}{\|V_*\|_\infty}}$$

- e.g. $\max V_*(s)=10,\gamma=0.95,\epsilon=0.001$, $k\ge180.56$

价值迭代 VS 策略迭代

●价值迭代

$$\underline{\boldsymbol{v_{k+1}(s)=\max_a(R^a_s+\gamma P^a_{ss'}v_k(s'))}}$$

只在收敛得到$\boldsymbol{v_*}$后计算$\boldsymbol{\pi_*}$，中间过程不产生策略

涉及赋值操作，计算量小,$O(|S|^2|A|)$，迭代次数多

●策略迭代

$$\underline{\boldsymbol{v_\pi(s)=\sum_a\pi(a|s)\left(R^a_s+\gamma P^a_{ss'}v_\pi(s')\right)}}$$
$$\boldsymbol{\pi'(s)=\arg\max_{a\epsilon A}\left(R^a_s+\gamma\sum_{s'}P^a_{ss'}v_\pi(s')\right)}$$

每次迭代开始时给定一个$\boldsymbol{\pi}$，结束时产生一个新$\boldsymbol{\pi'}$,迭代次数少

求解方程，计算量大，矩阵求逆$O(|S|^3)$，策略提升,$O(|S|^2|A|)$

价值迭代:寻找最优价值函数:(S^2A) per iteration
策略迭代:固定策略，计算价值:(S^3)
策略迭代：寻找最优策略(策略评估+提升):S^3+S^2A p

动态规划方法

$$v_*(s)=\max_a\left(R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}v_*(s')\right)$$

动作规划：价值迭代/策略迭代

通过迭代有效求解原始问题中非线性的 max 算子

依赖系统模型，R，P

足够的计算空间记录每个状态的函数值

价值迭代$\boldsymbol{v_*(s)}$

策略迭代$\boldsymbol{v_\pi(s),\pi(s)}$

状态-动作价值函数

$$q_*(s,a)=R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}\max_{a'}q_*(s',a')$$

●基于 Q 函数的价值迭代

初始化q_1, (e.g. q1(s; a) = 0; ∀s ∈ S; ∀a ∈ A)

迭代计算新的 Q 函数

$$\boldsymbol{q_{k+1}(s,a)=R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}\max_{a'}q_k(s',a')}$$

●基于 Q 函数的策略迭代

给定一个策略π_1

策略评估：计算 k 的状态-动作价值函数

$$q_{\pi k}(s,a)=R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}\sum_{a'\in A}\pi(a'|s')\,q_{\pi k}(s',a')$$

共同的不足：对模型依赖, R;P

要么是 MDP 问题的模型已知

要么智能体对环境建模

无模型的策略评估方法：

蒙特卡洛方法；时间差分方法

策略提升：根据$q_{\pi k}$提取出新的策略

$$\boldsymbol{\pi_{k+1}(s)=\arg\max_{a\epsilon A}}\,q_{\pi k}(s,a)$$

迭代策略评估：

问题:对给定策略$\boldsymbol{\pi}$计算它的价值函数

方法:基于贝尔曼期望方程迭代更新价值函数

初始化一个价值函数v_1, $v_1\to v_2\to\cdots\to v_\pi$

$$v_{k+1}(s)=\sum_{a\in A}\pi(a|s)\left(R^a_s+\gamma\sum_{s'\in S}P^a_{ss'}v_k(s')\right)$$

- 定义贝尔曼期望算子 $\mathcal{T}^\pi$

$$\mathcal{T}^\pi(v)=\mathcal{R}^\pi+\gamma\mathcal{P}^\pi v$$

- 该算子是 γ-收缩的，经过该算子两个函数的距离变为原来的 γ 倍

证明是否有必要

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}^\pi(u)-\mathcal{T}^\pi(v)\|_\infty&=\|(\mathcal{R}^\pi+\gamma\mathcal{P}^\pi u)-(\mathcal{R}^\pi+\gamma\mathcal{P}^\pi v)\|_\infty\\ &=\|\gamma\mathcal{P}^\pi(u-v)\|_\infty\\ &\le\|\gamma\mathcal{P}^\pi\|u-v\|_\infty\|_\infty\\ &\le\gamma\|u-v\|_\infty\end{aligned}$$

1: 给定一个价值函数 V_1, $k=1$
2: **loop**
3: 策略提升：根据 V_k 提取贪心策略

GPI：广义策略迭代

$$\pi_{k+1}(s)=\arg\max_{a\in\mathcal{A}}\left(\mathcal{R}^a_s+\gamma\sum_{s'\in\mathcal{S}}\mathcal{P}^a_{ss'}V_k(s')\right)$$

4: 迭代策略评估：令 $V_{k,1}=V_k$，做 n 次 $\mathcal{T}^{\pi_{k+1}}$ 迭代策略评估
for $l=1,\ldots,n$

$$V_{k,l+1}(s)=\sum_{a\in\mathcal{A}}\pi_{k+1}(a|s)\left(\mathcal{R}^a_s+\gamma\sum_{s'\in\mathcal{S}}\mathcal{P}^a_{ss'}V_{k,l}(s')\right)$$

$V_{k+1}=V_{k,n+1}$

5: $k\leftarrow k+1$
6: **end loop**

蒙特卡洛方法 Monte-Carlo, MC

MC 方法直接从经历过的事件中学习

无模型方法：不需要 MDP 的转移/奖励函数

从完整的事件中学习：没有自举

基于最简单的思想：价值= 平均回报

运行 MC 方法通常要求：

所有事件都到达终止状态$\{S_1,A_1,\ldots,S_{terminal}\}$

或者事件的时序足够长$\{S_1,A_1,\ldots,S_T\}$; T ≫ 1

蒙特卡洛策略评估

目标：从策略π产生的事件中学习v_π：$S_1,A_1,R_2,\ldots,S_k\sim\pi$

回忆下回报的定义是所有折扣奖励和

$$\boldsymbol{G_t=R_{t+1}+\gamma R_{t+2}+\cdots\gamma^{T-1}R_t}$$

回忆下价值函数的定义是回报的期望$v_\pi(s)=E_\pi[\boldsymbol{G_t}|S_t=s]$

蒙特卡洛策略评估方法使用回报的经验均值作为回报的期望

基于样本更新：

接下来的课程将主要使用智能体从环境获得的样本进行更新，使用样本的奖励和状态转移$\langle S,A,,R,S'\rangle$而不是奖励函数 R 和转移函数 P。好处包括：

无模型：不需要预前知道 MDP 的模型信息

通过样本避免整个状态空间的维数灾问题

每次更新的计算量是固定，与后继的状态空间 n = |S| 无关

首次经过的 MC 策略评估

为了评估状态 s, 假设在一次事件中第一次经过状态 s 的时刻为 t, 计数加一 N(s) ← N(s) + 1，全部回报相加 S(s) ← S(s)+Gt，估计的价值等于回报均值 V(s) = S(s)/N(s)，根据大数定理，当 N(s) → ∞ 时, V(s) → $v_\pi(s)$

每次经过的 MC 策略评估

为了评估状态 s，对一次事件中每一次经过状态 s 的时刻 t，计数加一 N(s) ← N(s)+1，全部回报相加 S(s) ← S(s) +Gt，估计的价值等于回报均值 V(s) = S(s)/N(s)，同样当 N(s) → ∞ 时, V(s) → $v_\pi(s)$

增量计算均值

一个序列$x_1,x_2,\ldots$的均值$\mu_1,\mu_2,\ldots$可以通过增量的方式计算

$$\mu_k=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j=\frac{1}{k}\left(x_k+\sum_{j=1}^{k-1}x_j\right)=\frac{1}{k}(x_k+(k-1)\mu_{k-1})$$
$$=\mu_{k-1}+\frac{1}{k}(x_k-\mu_{k-1})$$

增量式的 MC 更新

根据事件$S_1,A_1,R_1,\ldots,S_T$对$V(s)$增量式地更新

对状态S_t，回报是G_t

$$N(S_t)\leftarrow N(S_t)+1$$
$$V(S_t)\leftarrow V(S_t)+\frac{1}{N(S_t)}(G_t-V(S_t))$$

如果环境是动态、不断变化的，我们更希望是能够跟踪当前不断变化的均值，遗忘掉很久之前的事件

$$V(S_t)\leftarrow V(S_t)+\alpha(G_t-V(S_t))$$

时间差分学习 Temporal Difference (TD) Learning

TD 方法直接从智能体经历的事件中学习

无模型的：不知道 MDP 问题的转移和奖励函数

可以从非完整的事件中学习，借助自举法

根据一个猜测值更新另一个猜测值

MC 和 TD

目标：根据智能体在策略π作用下产生的经历在线学习v_π

增量式的 MC 方法:调整价值$V(S_t)$向真实的回报G_t逼近

$$V(S_t)\leftarrow V(S_t)+\alpha(G_t-V(S_t))$$

最简单形式的 TD 学习算法: TD(0)

调整价值$V(S_t)$向估计的回报$\boldsymbol{R_{t+1}}+\gamma V(S_{t+1})$逼近

$$V(S_t)\leftarrow V(S_t)+\alpha(\boldsymbol{R_{t+1}}+\gamma V(S_{t+1})-V(S_t))$$

TD 目标：$\boldsymbol{R_{t+1}}+\gamma V(S_{t+1})$

TD 误差：$\boldsymbol{\delta_t=R_{t+1}}+\gamma V(S_{t+1})-V(S_t)$

TD 学习算法：

1: 给定策略 π，初始状态分布 D_0，$V(s)=0,\forall s\in\mathcal{S}$，学习率 α，$t=0$
2: **loop**
3: **if** $s_t=S_{terminal}$ 或 s_t 未初始化 **then**
4: 初始化 $s_t\sim D_0$
5: **end if**
6: 采样动作 $a_t\sim\pi(s_t)$，执行 a_t 后观察 r_{t+1},s_{t+1}
7: 根据 $(s_t,a_t,r_{t+1},s_{t+1})$ 更新 $V(s_t)\leftarrow V(s_t)+\alpha\left(r_{t+1}+\gamma V(s_{t+1})-V(s_t)\right)$
8: $t\leftarrow t+1$
9: **end loop**

MC 和 TD 对比

MC 是高方差，零偏差：

需要完整的事件序列计算出回报后学习

好的收敛性(即使是使用逼近器也能保证收敛性);

与价值函数初始值无关;

原理简单，使用方便;

要求事件达到终止状态或序列足够长

能够利用马尔可夫性，因此在马尔可夫环境下更有效

TD 是低方差，有偏差：

可以在智能体运行过程中的每一步在线学习

可以从不完整的事件序列中学习

通常情况是比 MC 更有效

TD(0) 能够收敛到$v_\pi(s)$

(但是与逼近器结合后并不一定收敛)

受价值函数初始值影响

不能利用马尔可夫性，因此在非马尔可夫环境下更有效

偏差/方差的权衡：

回报$\boldsymbol{G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots \gamma^{T-1} R_t}$是$v_\pi(S_t)$的无偏估计

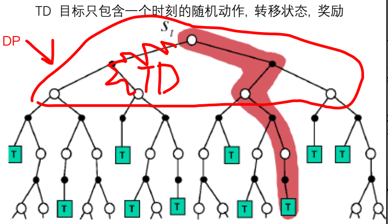
真实的 TD 目标$\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma v_\pi(S_{t+1})$是$v_\pi(S_t)$的无偏估计

TD 目标$\boldsymbol{R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1})$是$v_\pi(S_t)$的有偏估计

TD 目标比回报的方差要小很多

回报的计算包含整个序列中的随机动作，转移状态，奖励

TD 目标只包含一个时刻的随机动作，转移状态，奖励



自举法：更新时包含一个猜测量

MC 不使用自举　　DP 使用自举　　TD 使用自举

采样法：使用采样的数据计算期望

MC 使用采样　　DP 不使用采样　　TD 使用采样

等价模型：

MC 收敛结果对应最小二乘误差，最佳匹配观测的回报

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T_k} \left(G_t^k - V(s_t^k)\right)^2$$

TD(0) 收敛结果对应最大似然马尔可夫模型$\langle S, A, \hat{P}, \hat{R}, \gamma \rangle$

$$\hat{P}_{s,s'}^a = \frac{1}{N(s,a)} \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T_k} 1(s_t^k, a_t^k, s_{t+1}^k = s, a, s')$$

$$\hat{R}_{s,s'}^a = \frac{1}{N(s,a)} \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T_k} 1(s_t^k, a_t^k = s, a) r_t^k$$

$n = 1$ (TD) $G_t^{(1)} = R_{t+1} + \gamma V(S_{t+1})$

$n = 2$ $G_t^{(2)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 V(S_{t+2})$

$\vdots$

$n = \infty$ (MC) $G_t^{(\infty)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots + \gamma^{t+T-1} R_T$

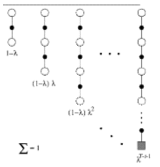
n-步的回报：

$$\boldsymbol{G_t^{(n)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots \gamma^{n-1} R_{t+n} + \gamma^n V(S_{t+n})}$$

n-步时间差分学习

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha\left(\boldsymbol{G_t^{(n)}} - V(S_t)\right)$$

TD(λ)，λ-回报



λ-回报$\boldsymbol{G_t^\lambda}$将所有的 n-步回报$\boldsymbol{G_t^{(n)}}$整合在一起

对每项使用权重$(1-\lambda)\lambda^{n-1}$

$$\boldsymbol{G_t^\lambda} = (1-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \boldsymbol{G_t^{(n)}}$$

前向更新的 TD(λ)形式

$$V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha\left(\boldsymbol{G_t^\lambda} - V(S_t)\right)$$

前向 TD(λ) 无法在线学习的原因是：

- 对当前时刻 $V(s_t)$ 的更新依赖未来时刻的观测
- 只有到未来时刻才能知道如何对 $V(s_t)$ 更新

引入资格迹：反映了状态被观测的次数和频率

定义一个变量代表状态 S 在过去被访问的信息

后向 TD（λ）

为每个状态s记录它的资格迹，更新s的价值$V(s)$

更新量与 TD 误差$\boldsymbol{\delta_t}$和资格迹$E_t(s)$呈正比

$$\boldsymbol{\delta_t = R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t) \quad V(s) \leftarrow V(s) + \alpha \boldsymbol{\delta_t} E_t(s)$$

```
任意初始化 V(S)
repeat {对每个 episode:}
  E(S) = 0, ∀S ∈ S
  初始化 s
  repeat {对 episode 的每一步:}
    a ~ π(s)
    执行 a 后观测奖励 r 和下一状态 s'
    δ ← r + γV(s') − V(s)
    E(s) ← E(s) + 1
    for all S ∈ S do
      V(S) ← V(S) + αδE(S)
      E(S) ← γλE(S)
    end for
    s ← s'
  until s 是终止状态
until
```

TD(λ)和 TD(0)

当$\boldsymbol{\lambda}$= 0 时，只有当前状态被更新

$$E_t(s) = 1(S_t = s) \qquad V(s) \leftarrow V(s) + \alpha \boldsymbol{\delta_t} E_t(s)$$

等同于 TD(0) 方法$V(s) \leftarrow V(s) + \alpha \boldsymbol{\delta_t}$

TD(λ)和 MC

当$\boldsymbol{\lambda}$= 1 时，可信度被推迟到事件结束，考虑每个事件都到达终止状态的环境，使用离线更新，对每个事件序列，TD(1) 的所有更新和 MC 的所有更新是一致的

当使用离散更新时，前向和后向 **TD(λ)**所有的更新是相同的

$$\sum_{t=1}^{T} \alpha \delta_t E_t(s) = \sum_{t=1}^{T} \alpha\left(\boldsymbol{G_t^\lambda} - V(S_t)\right) 1(S_t = s)$$

MC 和 TD(1)

考虑在一次事件中 s 在 k 时刻被唯一访问一次

该状态的 TD(1) 资格迹会在被访问之后随时间衰减

$$E_t(s) = \gamma E_{t-1}(s) + 1(S_t = s) = \begin{cases} 0 & if\ t < k \\ \gamma^{t-k} & if\ t \geq k \end{cases}$$

TD(1) 在更新时会在线累计误差

$$\sum_{t=1}^{T-1} \alpha \delta_t E_t(s) = \alpha \sum_{t=k}^{T-1} \gamma^{t-k} \delta_t = \left(\boldsymbol{G_k} - V(S_k)\right)$$

在事件结束时累计误差等于

$$\delta_k + \gamma\delta_{k+1} + \gamma^2 \delta_{k+2} + \cdots + \gamma^{T-1-k} \delta_{T-1}$$

当$\boldsymbol{\lambda}$= 1 时，TD 误差可以变换成 MC 误差

$$\boldsymbol{\delta_t = R_{t+1}} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t)$$

$$\delta_k + \gamma\delta_{k+1} + \gamma^2 \delta_{k+2} + \cdots + \gamma^{T-1-k} \delta_{T-1} = \boldsymbol{G_t} - V(S_t)$$

TD(λ) 和 TD(1)

TD(1) 大致等价于每次经过的 MC 方法，误差会随在线运行逐步累积，如果价值函数只在事件结束时离线更新，那么所有的更新量等同于 MC 方法

前向和后向 TD(λ)

考虑在一次事件中 s 在 k 时刻被唯一访问一次

该状态的 **TD(λ)**资格迹会在被访问之后随时间衰减

$$E_t(s) = \gamma\lambda E_{t-1}(s) + 1(S_t = s) = \begin{cases} 0 & if\ t < k \\ (\lambda\gamma)^{t-k} & if\ t \geq k \end{cases}$$

后向 TD(λ)在更新时会在线累计误差

$$\sum_{t=1}^{T-1} \alpha \delta_t E_t(s) = \alpha \sum_{t=k}^{T-1} (\lambda\gamma)^{t-k} \delta_t = \left(\boldsymbol{G_k^\lambda} - V(S_k)\right)$$

在事件结束时总共累计误差等于$\boldsymbol{\lambda}$ -回报

如果 s 被多次访问，$E_t(s)$也会累积多次的误差

前向提供理论原理，后向给出算法实现：在线学习；每一时刻更新；可以适用事件序列中的一小段，非完整序列

目标：获得最优策略，基于模型：动态规划、价值迭代、策略迭代

目标：获得策略的价值函数，基于样本：迭代策略评估.蒙特卡洛方法.时间差分学习.TD(λ) .

我们想获得最优策略，但是 MDP 的模型未知，或者问题空间太大，只能考虑和智能体最相关的状态：无模型方法；使用智能体的经验样本；最优化价值函数

上节课:无模型预测，估计一个模型未知 MDP 问题的价值函数

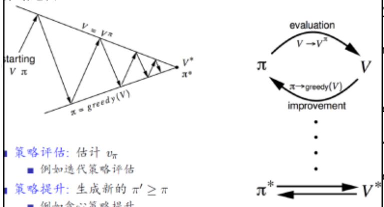
这节课:无模型控制，最优化一个模型未知 MDP 问题的价值函数

在策略(on-policy) 和离策略(off-policy) 学习

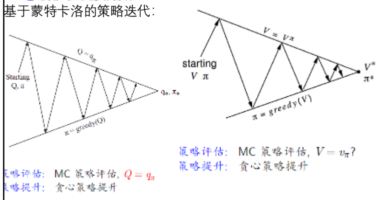
在策略学习：根据策略π 产生的样本来学习关于 π 的相关知识

离策略学习：根据另一策略μ产生的样本来学习关于 π 的相关知识

策略迭代：



基于蒙特卡洛的策略迭代：



动作-价值函数实现无模型的策略迭代：

基于 V(s) 进行贪心策略提升需要 MDP 的模型信息

$$\pi'(s) = \arg\max_{a \in A}\left(R_s^a + \gamma P_{ss'}^a V(s')\right)$$

基于 Q(s, a) 进行贪心策略提升是无模型的

$$\pi'(s) = \arg\max_{a \in A} Q(s,a)$$

ϵ-贪心探索

最简单实现连续探索的方法，所有的 m 个动作都有非零概率被选中执行，以 1−ϵ 概率选择贪心动作，以 ϵ 概率随机选择一个动作

$$\pi(a|s) = \begin{cases} \epsilon/m + 1 - \epsilon & if\ a^* = \arg\max_{a \in A} Q(s,a) \\ \epsilon/m & otherwise \end{cases}$$

给定任意 ϵ-贪心策略 π，根据q_π构造出新的 ϵ-贪心策略π'具有更好的性能，即$v_{\pi'}(s) \geq v_\pi(s)$

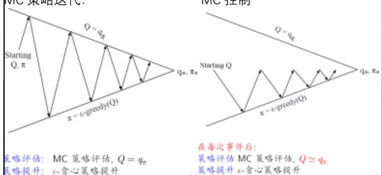
$$q_\pi(s, \pi'(s)) = \sum_{a \in A} \pi'(a|s) q_\pi(s,a)$$

$$= \epsilon/m \sum_{a \in A} q_\pi(s,a) + (1-\epsilon) \arg\max_{a \in A} q_\pi(s,a)$$

$$\geq \epsilon/m \sum_{a \in A} q_\pi(s,a) + (1-\epsilon) \sum_{a \in A} \frac{\pi(a|s) - \epsilon/m}{1-\epsilon} q_\pi(s,a)$$

$$= \sum_{a \in A} \pi(a|s) q_\pi(s,a) = v_\pi(s) \rightarrow v_{\pi'}(s) \geq v_\pi(s)$$

MC 策略迭代：　　　　MC 控制



无限探索，无穷时刻收敛为贪心策略 (Greedy in the Limit with Infinite Exploration, GLIE)

智能体能无限次数地探索所有的状态-动作对：$\lim_{k\to\infty} N_k(s,a) = \infty$

策略在无穷时刻收敛到贪心策略

$$\lim_{k\to\infty} \pi_k(a|s) = 1\left(a = \arg\max_{a \in A} Q_k(s,a')\right)$$

ϵ-贪心策略的探索率ϵ能随时间衰减到零$\epsilon_k = \frac{1}{k}$，则它就满足 GLIE

GLIE 蒙特卡洛控制

使用策略π采集第k次事件$\{S_1, A_1, R_2, \dots, S_T\} \sim \pi$

对事件中的每个状态S_t和动作A_t

$$N(S_t, A_t) \leftarrow N(S_t, A_t) + 1$$

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \frac{1}{N(S_t, A_t)}\left(G_t - Q(S_t, A_t)\right)$$

基于新得到的动作-价值函数对策略进行提升

$$\epsilon \leftarrow \frac{1}{k} \qquad \pi \leftarrow greedy(Q)$$

GLIE 蒙特卡洛控制能够收敛到最优动作-价值函数，

$$Q(s,a) \rightarrow q_*(s,a)$$

MC vs TD 控制

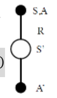
TD 学习和 MC 方法相比有如下优势：

低方差，在线学习，无完整事件序列

在控制方法中使用 TD 替代 MC：

基于 TD 方法训练$Q(S,A)$，使用 ϵ-贪心方法进行策略提升，每个时刻都对函数更新

基于 Sarsa 方法更新动作-价值函数



动作-价值函数的贝尔曼期望方程：

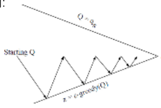
$$q_\pi(s,a) = R_s^a + \gamma \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \sum_{a' \in A} \pi(a'|s') q_\pi(s',a')$$

在某一时刻智能体观察到的一段事件(S, A, R, S', A')

基于样本的 TD 更新：

$$Q(S,A) \leftarrow Q(S,A) + \alpha(R + \gamma Q(S',A') - Q(S,A))$$

基于 Sarsa 的在策略控制：



在每一时刻：

策略评估：

使用 Sarsa 方法，$Q \approx q_\pi$

策略提升：

ϵ-贪心策略提升

算法：

```
任意初始化 Q(s,a), ∀s ∈ S, a ∈ A, 令 Q(S_terminal, ·) = 0
repeat {在每次事件中:}
  初始化 S
  根据从 Q 提取的策略 (例如 ϵ-贪心策略) 对 S 选择动作 A
  repeat {对事件中的每一时刻}
    执行动作 A, 观察 R, S'
    根据从 Q 提取的策略 (例如 ϵ-贪心策略) 对 S' 选择动作 A'
    Q(S,A) ← Q(S,A) + α[R + γQ(S',A') − Q(S,A)]
    S ← S', A ← A'
  until S 是终止状态
until
```

Sarsa 的收敛性：

当如下条件满足时 Sarsa 算法是收敛到最优动作-价值函数：

策略序列$\pi_t(a|s)$是 GLIE 的

更新步长α_t满足 Robbins-Monro 序列要求

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t = \infty \qquad \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t^2 < \infty)$$

Sarsa vs MC

注意：蒙特卡洛方法并不能直接应用在这个问题上

并不是所有的策略都能到达终止状态，如果学到的某一策略使智能体待在原地不动，MC 在基于该策略对事件采样时永远都无法结束

Sarsa 算法没有这样的问题

每一步都在学习，很快就会发现这样的策略性能很差，然后转向其它策略

n-步 Sarsa

考虑 n-步的回报，n = 1, 2, ∞：

$n = 1$ $(Sarsa)$ $q_t^{(1)} = R_{t+1} + \gamma Q(S_{t+1}, A_{t+1})$

$n = 2$ $q_t^{(2)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 Q(S_{t+2}, A_{t+2})$

$\vdots$

$n = \infty$ (MC) $q_t^{(\infty)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots + \gamma^{t+T-1} R_T$

定义 n-步的 Q-回报

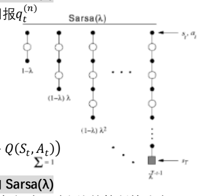
$$q_t^{(n)} = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \cdots + \gamma^{n-1} R_{t+n} + \gamma^n Q(S_{t+n}, A_{t+n})$$

n-步 Sarsa 算法更新 Q(s, a)，向 n-步 Q-回报逼近

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\left(q_t^{(n)} - Q(S_t, A_t)\right)$$

前向 Sarsa(λ)

q^λ回报包含了所有的n-步Q-回报$q_t^{(n)}$



使用$(1-\lambda)\lambda^{n-1}$对回报加权

$$q_t^\lambda = (1-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} q_t^{(n)}$$

前向 Sarsa(λ) 算法

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\left(q_t^\lambda - Q(S_t, A_t)\right)$$

后向 Sarsa(λ)

和 TD(λ) 算法一样，我们将资格迹引入到在线的控制算法中

但是 Sarsa(λ) 算法不同的地方在于为每个状态- 动作对都记录资格迹(之前是只对状态记录)

$$E_0(s,a) = 0 \qquad E_t(s,a) = \gamma\lambda E_{t-1}(s,a) + 1(S_t = s, A_t = a)$$

在每一时刻会对每个状态s和动作a的$Q(s,a)$更新

更新量与 TD 误差$\boldsymbol{\delta_t}$和资格迹$E_t(s,a)$呈正比

$$\boldsymbol{\delta_t = R_{t+1}} + \gamma Q(S_{t+1}, A_{t+1}) - Q(S_t, A_t)$$

$$Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \alpha \boldsymbol{\delta_t} E_t(s,a)$$

```
任意初始化 Q(s,a), ∀s ∈ S, a ∈ A
repeat {在每次事件中:}
  令 E(s,a) = 0, ∀s ∈ S, a ∈ A
  初始化 S, A
  repeat {对事件中的每一步}
    执行动作 A, 观察 R, S'
    根据从 Q 提取的策略 (例如 ϵ-贪心策略) 对 S' 选择动作 A'
    δ ← R + γQ(S',A') − Q(S,A)
    E(S,A) ← E(S,A) + 1
    for all s ∈ S, a ∈ A do
      Q(S,A) ← Q(S,A) + αδE(s,a)
      E(s,a) ← γλE(s,a)
    end for
    S ← S', A ← A'
  until S 是终止状态
until
```

一步 Sarsa vs Sarsa(λ)

一步 Sarsa 只对最终导致高奖励的最后一步动作强化它的价值

资格迹方法能够对事件中的多个动作强化它们的价值

强化的幅度(箭头大小) 随着离奖励步数的增加而衰减

衰减率等于γλ

这里γ = 1, λ = 0.9

离策略学习

想要对目标策略$\pi(a|s)$进行评估，计算$v_\pi(s)$或$q_\pi(s,a)$，但是智能体实际的行为策略是$\mu(a|s)$：$\{S_1, A_1, R_2, \dots, S_T\} \sim \mu$

为什么要考虑这种情况？

有时智能体需要观察人类或别的智能体的行为去学习

有时需要重复利用旧策略$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{t-1}$产生的经验去学习

执行探索性的策略去学习最优策略

执行单一的策略去学习多个策略

Q-学习

考虑基于动作-价值$Q(s,a)$的离策略学习，不再使用重要性采样

智能体下一时刻执行的动作是由行为策略产生$A_{t-1} \sim \mu(\cdot|S_t)$

但是学习算法考虑的是由另一个目标策略产生的后继动作

$$A' \sim \pi(\cdot|St)$$

更新$Q(S_t, A_t)$向另一个后继动作的价值逼近

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha(R_{t+1} + \gamma Q(S_{t+1}, A') - Q(S_t, A_t))$$

Q-学习实现离策略控制：

现在允许行为策略和目标策略都能提升

目标策略π是由$Q(s,a)$生成的贪心策略

$$\pi(S_{t+1}) = \arg\max_{a'} Q(S_{t+1}, a')$$

行为策略μ是由$Q(s,a)$生成的例如 ϵ-贪心策略

那么 Q-学习的目标就是

$$R_{t+1} + \gamma Q(S_{t+1}, A') = R_{t+1} + \gamma \arg\max_{a'} Q(S_{t+1}, a')$$

$$= R_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(S_{t+1}, a')$$

Q-学习控制算法

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha\left(R + \gamma \max_{a'} Q(S', a') - Q(S, A)\right)$$

Q 学习控制能够收敛到最优动作-价值函数，

Q-学习算法实现离策略控制：

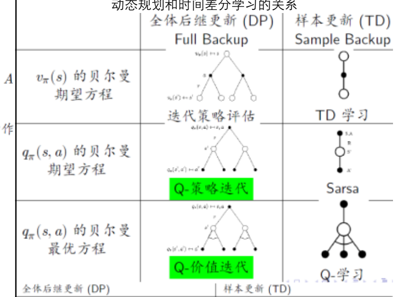
```
任意初始化 Q(s,a), ∀s ∈ S, a ∈ A, 令 Q(S_terminal, ·) = 0
repeat {在每次事件中:}
  初始化 S
  repeat {对事件中的每一时刻}
    根据从 Q 提取的策略 (例如 ϵ-贪心策略) 对 S 选择动作 A
    执行动作 A, 观察 R, S'
    Q(S,A) ← Q(S,A) + α[R + γ max_a Q(S',a) − Q(S,A)]
    S ← S'
  until S 是终止状态
until
```

Sarsa vs Q-学习

Q-学习正确地学到了最优路径，即沿着悬崖的边缘行走，但是由于使用的 ϵ-贪心策略会采取一定概率的随机动作，有时智能体跌入悬崖

Sarsa 学到的是安全路径,在学习过程中考虑了随机探索动作的影响，即使 Sarsa 学到的安全路径比 Q-学习的最优路径行走步数要长，但是每次获得的奖励和却比 Q-学习的高

动态规划和时间差分学习的关系



	全体后继更新 (DP) Full Backup	样本更新 (TD) Sample Backup
$v_\pi(s)$ 的贝尔曼期望方程	迭代策略评估	TD 学习
$q_\pi(s,a)$ 的贝尔曼期望方程	Q-策略迭代	Sarsa
$q_\pi(s,a)$ 的贝尔曼最优方程	Q-价值迭代	Q-学习

全体后继更新 (DP)	样本更新 (TD)
迭代策略评估 $V(s) \leftarrow \mathbb{E}[R + \gamma V(s')\|s]$	TD 学习 $V(S) \xleftarrow{\alpha} R + \gamma V(S')$
Q-策略迭代 $Q(s,a) \leftarrow \mathbb{E}[R + \gamma Q(s',a')\|s,a]$	Sarsa $Q(S,A) \xleftarrow{\alpha} R + \gamma Q(S',A')$
Q-价值迭代 $Q(s,a) \leftarrow \mathbb{E}[R + \gamma \max_{a' \in A} Q(s',a')\|s,a]$	Q- 学习 $Q(S,A) \xleftarrow{\alpha} R + \gamma \max_{a' \in A} Q(S',a')$

其中，$x \xleftarrow{\alpha} y \equiv x \leftarrow x + \alpha(y - x)$

探索(exploration) 与利用(exploitation)

在线决策过程存在的一个关键问题是：

利用：根据当前的信息做出最佳的决策

探索：采样更多的信息

想要做出长期的最佳决策有时需要牺牲当前短期的部分利益

收集更多的信息从而做出整体最佳的决策

Q-学习

如果 Q-学习没有探索，即 ϵ = 0，学习结果容易陷入局部最优解，无法找到真正最优策略，如果 ϵ 很大也不好

1 状态，动作空间很大时，想要探索整个空间是费时费力的，对在线学习过程不利

2 随机的动作会降低智能体的实际回报

非均匀探索概率

ϵ-贪心策略除了最优动作，其它动作以等概率随机选择

假如：有两个动作看起来不错，而其它的动作完全不可行

那么比较合理的探索方式是选择那些看起来不错的动作，从不错的动作中选出最优的动作，而不是将精力浪费在看起来不可行的动作，**根据动作-价值决定动作被选中的概率**

波尔兹曼探索, Boltzmann exploration

$$\pi(a|s) = \frac{e^{Q(s,a)/T}}{\sum_{a' \in A} e^{Q(s,a')/T}}$$

a被选中的概率与$e^{Q(s,a)/T}$呈正比($Q(s,a) \geq 0$, ∀s, a)

温度系数 T > 0 决定了策略的随机性能

如果 T 很大，所有动作几乎以等概率选择(探索)

如果 T 很小，高价值的动作更容易被选中(利用)

极限情况 T → 0，只选择最优动作

求解非线性算子 max

动态规划：价值迭代/策略迭代

模型已知

预测(prediction)：蒙特卡洛方法，时间差分学习，TD(λ)

控制(control)：Sarsa, Sarsa(λ), Q-学习

算法	查表法	线性逼近	非线性逼近
MC 控制	✓	(✓)	×
Sarsa	✓	(✓)	×
Q 学习	✓	×	×
LSPI	✓	(✓)	-

(√)代表算法会在最优价值函数附近振荡

最小二乘策略迭代：

策略评估：使用最小二乘学习策略的 Q 函数

策略提升：贪心策略提升

在/离策略	算法	查表法	线性逼近	非线性逼近
在策略	MC	✓	✓	✓
	LSMC	✓	✓	-
	TD	✓	✓	×
	LSTD	✓	✓	-
离策略	MC	✓	✓	✓
	LSMC	✓	✓	-
	TD	✓	×	×
	LSTD	✓	✓	-

批处理强化学习, Batch RL：

梯度下降法简单，易实现，但是对样本的利用率不足

批处理的方法能够基于智能体的经验("训练数据")，试着找到最合适的价值函数

使用逼近器的好处

使用较少数量的参数就能表达复杂的函数(计算复杂度)

对一个权重的调整就可以影响到很多的点(泛化能力)

多种特征表示和逼近器结构(多样性)

可微的函数逼近器，例如：特征函数的线性组合，神经网络，决策树，最近邻，傅立叶/小波基函数