PUC Minas

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Cálculo II

Professor: Pedro Belchior

5.5 Exercícios

1–6 Calcule a integral fazendo a substituição dada.

1. $\int \cos 3x \, dx, \quad u = 3x$

2. $\int x(4 + x^2)^{10} \, dx, \quad u = 4 + x^2$

3. $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \dfrac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta \ \text{sen}\,\theta \, d\theta, \ \theta = \cos\theta$

6. $\int \dfrac{\sec^2(1/x)}{x^2} \, dx, \quad u = 1/x$

7–48 Calcule a integral indefinida.

7. $\int x \,\text{sen}(x^2) \, dx$

8. $\int x^2 e^{x^3} dx$

9. $\int (3x - 2)^{20} \, dx$

10. $\int (3t + 2)^{2,4} \, dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2} \, dx$

12. $\int \sec^2 2\theta \, d\theta$

13. $\int \dfrac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int u\sqrt{1 - u^2} \, du$

15. $\int \text{sen}\,\pi t \, dt$

16. $\int e^x \,\text{sen}(e^x) \, dx$

17. $\int \dfrac{e^u}{(1 - e^u)^2} \, du$

18. $\int \dfrac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

19. $\int \dfrac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} \, dx$

20. $\int \dfrac{z^2}{z^3 + 1} \, dz$

21. $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

22. $\int \cos^4\theta \ \text{sen}\,\theta \, d\theta$

23. $\int \sec^2\theta \ \text{tg}^3\theta \, d\theta$

24. $\int \sqrt{x} \ \text{sen}(1 + x^{3/2}) \, dx$

25. $\int e^x \sqrt{1 + e^x} \, dx$

26. $\int \dfrac{dx}{ax + b} \quad (a \neq 0)$

27. $\int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4 \, dx$

28. $\int e^{\cos t} \,\text{sen}\, t \, dt$

29. $\int 5^t \,\text{sen}(5^t) \, dt$

30. $\int \dfrac{\text{tg}^{-1} x}{1 + x^2} \, dx$

31. $\int e^{\text{tg}\, x} \sec^2 x \, dx$

32. $\int \dfrac{\text{sen}(\ln x)}{x} \, dx$

33. $\int \dfrac{\cos x}{\text{sen}^2 x} \, dx$

34. $\int \dfrac{\cos(\pi/x)}{x^2} \, dx$

35. $\int \sqrt{\text{cotg}\, x} \ \text{cossec}^2 x \, dx$

36. $\int \dfrac{2^t}{2^t + 3} \, dt$

37. $\int \text{senh}^2 x \cosh x \, dx$

38. $\int \dfrac{dt}{\cos^2 t \sqrt{1 + \text{tg}\, t}}$

39. $\int \dfrac{\text{sen}\, 2x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

40. $\int \dfrac{\text{sen}\, x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

41. $\int \text{cotg}\, x \, dx$

42. $\int \text{sen}\, t \sec^2(\cos t) \, dt$

43. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \ \text{sen}^{-1} x}$

44. $\int \dfrac{x}{1 + x^4} \, dx$

45. $\int \dfrac{1 + x}{1 + x^2} \, dx$

46. $\int x^2 \sqrt{2 + x} \, dx$

47. $\int x(2x + 5)^8 \, dx$

48. $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$

49–52 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

49. $\int x(x^2 - 1)^3 \, dx$

50. $\int \text{tg}^2\theta \ \sec^2\theta \, d\theta$

51. $\int e^{\cos x} \,\text{sen}\, x \, dx$

52. $\int \text{sen}\, x \cos^4 x \, dx$

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

3ª Lista de Exercícios de Cálculo II

Professor: Pedro Belchior

53–73 Avalie a integral definida.

53. $\int_0^1 \cos(\pi t/2)\, dt$

54. $\int_0^1 (3t - 1)^{50}\, dt$

55. $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x}\, dx$

56. $\int_0^3 \frac{dx}{5x + 1}$

57. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\, dt$

58. $\int_{1/6}^{1/2} \operatorname{cossec} \pi t \, \operatorname{cotg} \pi t\, dt$

59. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

60. $\int_0^1 x e^{-x^2}\, dx$

61. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \operatorname{tg} x)\, dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\, dx$

63. $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \operatorname{sen} x\, dx$

67. $\int_1^2 x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

73. $\int_0^1 \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4}$

---

74. Verifique que $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}$ é uma função ímpar e use este fato para mostrar que

$$0 \leqslant \int_{-2}^{3} \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}\, dx \leqslant 1.$$

75–76 Use um gráfico para dar uma estimativa grosseira da área da região que está sob a curva dada. Encontre a seguir a área exata.

75. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

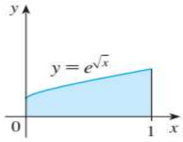
76. $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

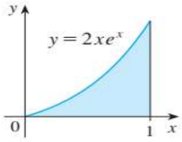
---

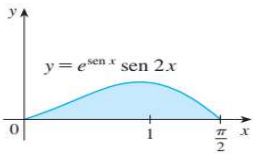
77. Calcule $\int_{-2}^{2} (x + 3)\sqrt{4 - x^2}\, dx$ escrevendo-a como uma soma de duas integrais e interpretando uma dessas integrais em termos de uma área.

78. Calcule $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4}\, dx$ fazendo uma substituição e interpretando a integral resultante em termos de uma área.

79. Quais das seguintes áreas são iguais? Por quê?







80. Um modelo para a taxa de metabolismo basal, em kcal/h, de um homem jovem é $R(t) = 85 - 0{,}18 \cos(\pi t/12)$, em que t é o tempo em horas medido a partir de 5 horas da manhã. Qual é o metabolismo basal total deste homem, $\int_0^{24} R(t)\, dt$, em um período de 24 horas?

81. Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $r(t) = 100e^{-0{,}01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

82. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $r(t) = (450{,}268)e^{1{,}12567t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias existirão após 3 horas?

83. A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de 5 s. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em partes, porque a função $f(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi t/5)$ tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

84. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é

$$\frac{dx}{dt} = 5\,000\left(1 - \frac{100}{(t + 10)^2}\right) \text{ calculadoras}/\textit{semana}.$$

(Observe que a produção tende a 5 000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores não estão familiarizados com as novas técnicas.) Encontre o número de calculadoras produzidas no começo da terceira semana até o fim da quarta semana.

85. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x)\, dx = 10$, calcule $\int_0^2 f(2x)\, dx$.

86. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\, dx = 4$, calcule $\int_0^3 x f(x^2)\, dx$.

87. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $0 < a < b$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

88. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(x + c)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

89. Se a e b forem números positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^a(1 - x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1 - x)^a\, dx.$$

90. Se f é contínua em $[0, \pi]$, use a substituição $u = \pi - x$ para demonstrar que

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

91. Use o Exercício 90 para calcular a integral

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

92. (a) Se f é contínua, mostre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.