PUC Minas

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

2ª Lista de Exercícios de Cálculo II

Professor: Pedro Belchior

Questão 1.

a) Use a identidade $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$ para deduzir que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + x^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

b) Prove a fórmula do item a por indução

c) Use a fórmula do item a para calcular a integral $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx$ via soma de Rieamann

Questão 2. Seja A a área sob o gráfico de uma função contínua crescente f de a até b, e sejam L_n e R_n as aproximações para A com n retângulos construidos a partir dos n subintervalos de comprimentos iguais e cuja altura de cada um é calculada usando os pontos nas extremidades esquerdas e direitas, respectivamente. Prove que

a) $R_n - L_n = \dfrac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$

b) $R_n - A < \dfrac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$

Questão 3. Seja A_n a área de um polígono com n lados iguais inscrito num círculo com raio r. Dividindo o polígono em n triângulos congruentes com ângulo central de $2\pi/n$.

a) Mostre que

$$A_n = \frac{1}{2} n r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

b) Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$$

PUC Minas

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

2ª Lista de Cálculo II

Professor: Pedro Belchior

Questão 4. Calcule o limite, reconhecendo primeiro a soma como uma soma de Riemann para uma função definida em $[0, 1]$

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \sqrt{\frac{4}{n}} \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

Questão 5. Se f é contínua e g e h são funções deriváveis, encontre uma fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

Questão 6.

a) Mostre que $1 \leq \sqrt{1+x^3} \leq 1 + x^3$ para $x \geq 0$

b) Mostre que $1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}dx \leq 1,25$

Questão 7. Mostre que

$$0 \leq \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx \leq 0,1$$

sem resolver a integral

Questão 8. Considere

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } x < 0 \\ x & ,\text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & ,\text{se } 1 <\leq 2 \\ 0 & ,\text{se } x > 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

a) Ache uma expressão para $g(x)$ similar àquela para $f(x)$.

b) Esboce os gráficos de f e g.

c) Onde f é derivável ? Onde g é derivável ?

PUC Minas

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

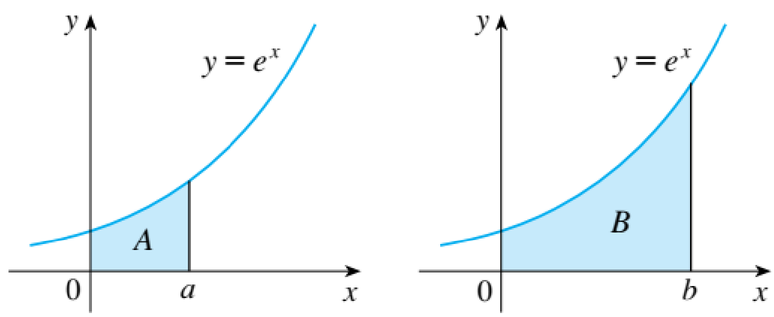
2ª Lista de Cálculo II

Professor: Pedro Belchior

Questão 9. Encontre uma função f e um número a tais que

$$6 + \int_a^t \frac{f(t)}{t} dt = 2\sqrt{x} \quad \text{para todo} \quad x > 0.$$

Questão 10. A área marcada B é três vezes a área marcada A. Determine b em função de a.



Questão 11. Uma empresa possui uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua $f = f(t)$, em que t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como a cada vez em que a máquina é recondicionada incorre-se em um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ideal t_0 (em meses) entre os recondicionamentos.

a) Explique por que $\int_0^t f(s)ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo t desde o último recondicionamento.

b) Seja $C = C(t)$ dado por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)ds.\right]$$

O que representa C e por que a empresa quer minimizar C?

c) Mostre que tem um valor mínimo nos números $t = t_0$ em que $C(t_0) = f(t_0)$.

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

2ª Lista de Cálculo II

Professor: Pedro Belchior

Questão 12. Uma empresa de tecnologia compra um novo sistema de computação cujo valor inicial é V. O sistema depreciará a uma taxa $f = f(t)$ e acumulará custos de manutenção a uma taxa $g = g(t)$, em que t é o tempo medido em meses. A companhia quer determinar o tempo ótimo para substituir o sistema.

a) Seja

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]ds$$

Mostre que os números críticos de ocorrem nos números t nos quais $C(t) = f(t) + g(t)$.

b) Suponha que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & ,\text{se } 0 < t \leq 30 \\ 0 & ,\text{se } t > 30 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{Vt^2}{12.900} \quad t > 0.$$

Determine o período de tempo t_0 para que a depreciação total $D(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ seja igual ao valor inicial V.

c) Determine o mínimo absoluto de C em $(0, t_0]$.

d) Esboce os gráficos de C e $f + g$ no mesmo sistema de coordenadas e verifique o resultado da parte (a) nesse caso.

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

2ª Lista de Cálculo II

Professor: Pedro Belchior

Respostas:

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

8)

9)

10)