

Modelos de Distribuição Contínua



Augustus De Morgan (Madura, Índia, 27 de junho de 1806 — Londres, 18 de março de 1871) foi um matemático e lógico britânico. Formulou as Leis de De Morgan e foi o primeiro a introduzir o termo e tornar rigorosa a idéia da indução matemática.

Augustus De Morgan foi educado no Trinity College, em Cambridge, e em 1828 tornou-se professor de matemática na então recém-criada Universidade, em Londres. Foi o primeiro presidente da London Mathematical Society, fundada em 1866. Um de seus primeiros trabalhos, *Elementos de aritmética*, de 1831, distinguiu-se pelo tratamento filosófico das idéias de número e magnitude. Além disso, contribuiu para o simbolismo matemático propondo o uso do *solidus* (traço inclinado) para a impressão das frações. O renascimento dos estudos de lógica que começaram na primeira metade do século XIX deveu-se quase que inteiramente aos trabalhos de De Morgan e Boole, outro matemático inglês. As realizações mais importantes de De Morgan foram o lançamento das fundações de relações e a preparação do caminho para o nascimento da lógica simbólica (ou matemática).

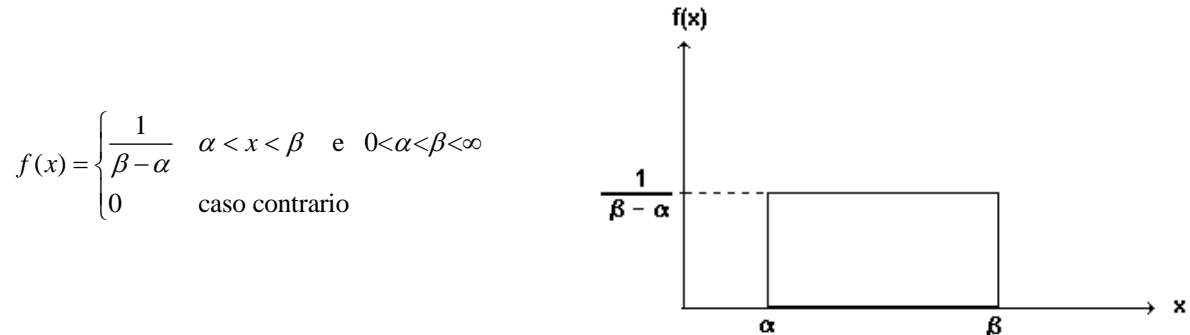
FONTE: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Brasil>

- ⇒ Distribuição Uniforme ou Distribuição Contínua
- ⇒ Distribuição Exponencial
- ⇒ Distribuição Normal

9 - MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE PROBABILIDADES

9.1 - DISTRIBUIÇÃO UNIFORME OU DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA

Uma Variável Aleatória X tem Distribuição Uniforme $U(\alpha, \beta)$ se sua função Densidade de Probabilidade for da forma:



Uma variável com Distribuição Uniforme representada matematicamente por:

$$X \stackrel{d}{=} U(\alpha; \beta)$$

9.1.1 - ESPERANÇA MATEMÁTICA DA DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

$$\mu_x = \frac{\beta + \alpha}{2}$$

9.1.2 - VARIÂNCIA DA DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

$$VAR(x) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Exemplo 9.1 - O grau de eficiência de certo componente eletrônico varia entre os níveis 0 e 100. A experiência tem demonstrado que essa variação se processa uniformemente. Qual a probabilidade de um componente, tomado ao acaso, possuir eficiência:

- a) entre 60 e 75?
- b) acima de 90?

Solução

$$a) P(60 \leq x \leq 75) = \frac{75 - 60}{100} = 0,15$$

$$b) P(x > 90) = \frac{100 - 90}{100} = 0,10$$

9.2 - EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9.2.1) Um ponto é escolhido ao acaso no seguimento de reta $[1,4]$. Calcular:

- a) probabilidade de que o ponto escolhido esteja entre 2 e 3;
- b) entre 0,5 e 2,5;
- c) seja exatamente o 2;
- d) a média dessa distribuição;
- e) a variância dessa distribuição.

9.2.2) Suponha que X seja uniformemente distribuído entre $[-\alpha, \alpha]$, e que $\alpha > 0$. Quando possível, calcular α de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas:

- a) $P(X > 1) = \frac{1}{3}$
- b) $P(X > 1) = \frac{1}{2}$
- c) $P(X < \frac{1}{2}) = 0,7$
- d) $P(X < \frac{1}{2}) = 0,3$

9.3 - DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

A distribuição Exponencial envolve probabilidades ao longo do tempo ou da distância entre ocorrências num intervalo contínuo. Por exemplo, a exponencial é usada como modelo do tempo entre falhas de equipamento elétrico, tempo entre a chegada de clientes a um supermercado, tempo entre chamadas telefônicas, etc. Há estreita relação entre a distribuição de Poisson e a distribuição Exponencial. Na verdade, se um processo de Poisson tem média de λ ocorrências durante um intervalo, o espaço (ou tempo, etc.) entre ocorrências naquele intervalo é de $1/\lambda$.

Uma v.a. X tem distribuição exponencial se sua função densidade de probabilidade é da forma

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Em que λ é o parâmetro da distribuição.

A média e a variância da distribuição exponencial são:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

A determinação de probabilidade para distribuição exponencial envolve o cálculo da áreas sob a curva de densidade, o que pode ser resolvido com técnicas de integração (Integração por Partes).

Se X tem distribuição exponencial com parâmetro λ , aplicando o método de Integração por Partes, temos

$$\begin{aligned} P(X > x) &= e^{-\lambda x} \\ P(X \geq x) &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Exemplo 9.2 - Se o tempo médio entre o pedido e o atendimento em um restaurante é uma v.a.a com distribuição exponencial de média igual a 10 minutos, determine:

- a) A probabilidade de espera superior a 10 minutos;
- b) A probabilidade de espera não superior a 3 minutos;

Solução:

Como $\mu = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10} = 0,1$

$$a) \quad P(X > 10) = e^{-(0,1)(10)} = e^{-1} = 0,368$$

$$b) \quad P(X < 3) = 1 - e^{-(0,1)(3)} = 1 - 0,741 = 0,259$$

9.4 - EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 9.4.1) Suponha que o tempo de falha, em anos, de certo componente eletrônico seja uma v.a. X distribuída exponencialmente com $\lambda = 1/5$. Instalados três desses componentes em diferentes sistemas, qual a probabilidade de ao menos dois estarem funcionando após 8 anos?
- 9.4.2) O tempo de espera para um freguês ser atendido em uma lanchonete é uma v.a. exponencial com média de 4 minutos. Qual a probabilidade de um freguês habitual se atendido em menos de 3 minutos em pelo menos quatro dos próximos seis dias?
- 9.4.3) O tempo de uma conversa telefônica tem distribuição exponencial com $\lambda = 1/5$. Se uma pessoa está com pressa de fazer uma ligação e outra pessoa chega antes dela à cabine, qual probabilidade de a primeira pessoa ter de esperar menos de 3 minutos para poder fazer sua ligação?
- 9.4.4) Um satélite de comunicação tem uma única fonte de energia. Determine a probabilidade de o satélite operar durante pelo menos 20.000 horas antes de se verificar uma falha de energia, se o tempo médio entre falhas ($1/\lambda$) é:
- 10.000
 - 20.000
 - 40.000

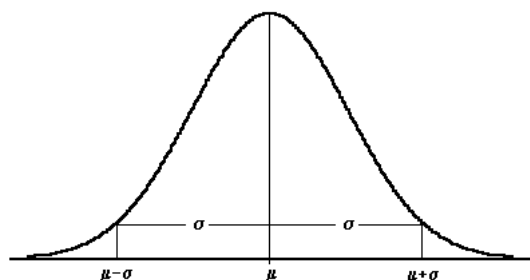
9.5 - DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Também conhecida como *Distribuição de Gauss* ou *Distribuição de Laplace* ou ainda *Distribuição Gauss-Laplace*.

É definida por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{para } -\infty < x < \infty$$

O gráfico desta função é:



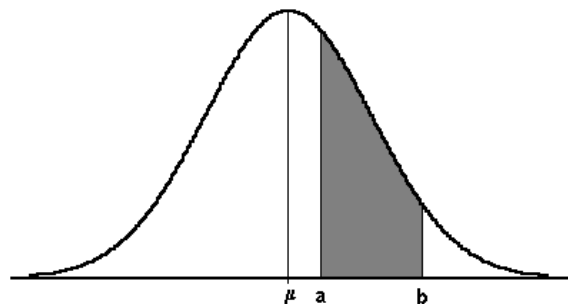
Principais Características da Curva Normal

- A curva apresenta Média μ e Desvio-Padrão σ ;
- A Moda e a Mediana ocorrem em $x = \mu$;
- A curva é simétrica em relação à reta $x = \mu$;
- A curva apresenta pontos de inflexão em $x = \mu - \sigma$ e $x = \mu + \sigma$;
- A curva é assintótica ao eixo X;
- A curva apresenta área total igual à unidade.

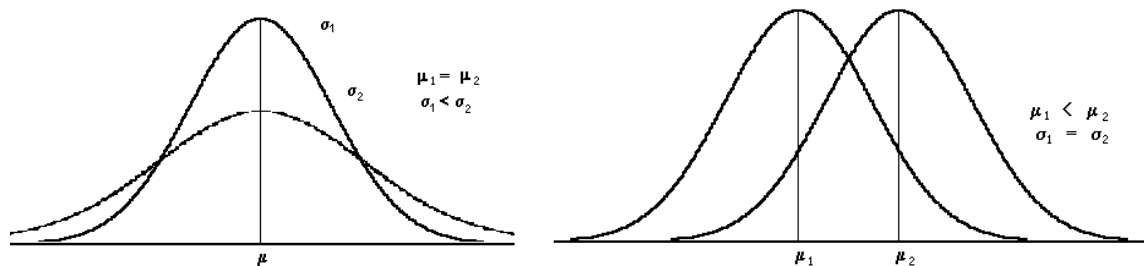
Representamos uma variável com Distribuição Normal por:

$$X \stackrel{d}{=} N(\mu; \sigma)$$

A probabilidade de uma Variável Aleatória X estar no intervalo $(a; b)$ é igual á área sob a curva delimitada pela reatas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, ou seja:



Para cada valor de μ e de σ existirá uma curva diferente, o que nos leva a uma infinidade de curvas, impossibilitando a tabulação da função Normal.



9.5.1 - VARIÁVEL NORMAL PADRONIZADA

Como cada distribuição apresenta um par de parâmetros $(\mu; \sigma)$ diferentes, recorreremos a uma mudança de variável transformando a Variável Aleatória X em uma Variável Aleatória Z, dita *Variável Aleatória Normal Padronizada* ou *Variável Aleatória Normal Reduzida*, definida por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

A Função Densidade de Probabilidade Normal em termos da Variável Aleatória Normal Padronizada é descrita por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{para } -\infty < z < \infty$$

Esta função tem média igual a ZERO e desvio-padrão igual a 1 – $Z \stackrel{d}{=} N(0;1)$.

Basta tabularmos esta função para obtermos as probabilidades das infinitas curvas Normais de diferentes parâmetros $(\mu; \sigma)$.

A tabela de probabilidades da Distribuição Normal nos fornece a probabilidade de uma Variável Aleatória Z ser menor ou igual a um valor dado, isto é, $P(Z \leq z_0)$ ou a probabilidade de uma Variável Aleatória Z ser maior ou igual a zero e menor ou igual a um valor dado, isto é, $P(0 \leq Z \leq z_0)$.

9.5.2 - USO DA TABELA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

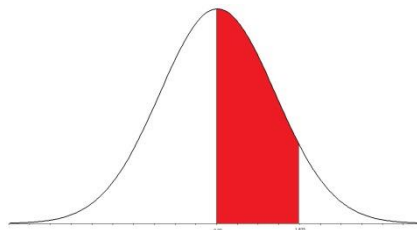
A tabela da Distribuição Normal utilizada aqui é conhecida como “Tabela Reduzida da Distribuição Normal”. Ela fornece a Probabilidade de que a variável Normal Padronizada Z esteja entre “0” e um ponto qualquer Z_α ($P(0 < Z < Z_\alpha)$) e, portanto, ela trabalha apenas com o lado positivo do eixo Z. Os valores negativos de Z são obtidos por simetria.

Exemplo 9.3 - Determine as probabilidades a seguir.

- a) $P(0 < Z < 1,825)$
- b) $P(Z > 1,330)$
- c) $P(Z < 1,165)$
- d) $P(0,845 < Z < 1,820)$
- e) $P(-1,445 < Z < 0)$
- f) $P(Z < -1,150)$
- g) $P(Z > -1,385)$
- h) $P(-2,020 < Z < -0,645)$
- i) $P(-1,175 < Z < 1,640)$
- j) $P(0 < Z < 2,237)$
- k) $P(0 < Z < 7,325)$

Solução

a) A situação desejada é a ilustrada a seguir.

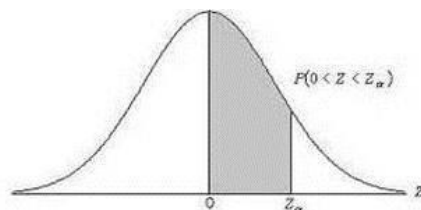


A probabilidade procurada é exatamente a probabilidade fornecida pela tabela, basta dividir o valor de Z em duas partes.

No caso $Z = 1,825 = 1,80 + 0,025$, assim

$$P(0 < Z < 1,825) = 0,465999$$

A figura a seguir mostra como buscar o valor na tabela.

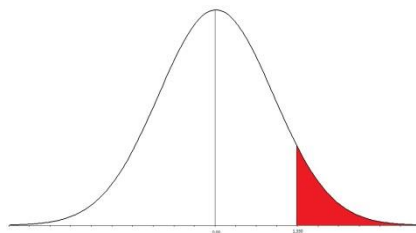


Distribuição

$$P(0 < Z < Z_{\alpha})$$

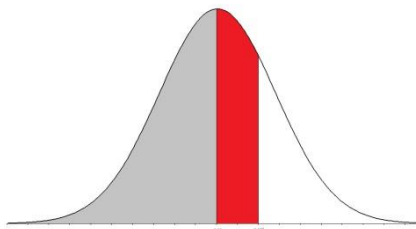
Z_{α}	0,000	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035
0,00	0,000000	0,001995	0,003989	0,005984	0,007978	0,009973	0,011966	0,013960
0,10	0,039828	0,041812	0,043795	0,045777	0,047758	0,049738	0,051717	0,053694
0,20	0,079260	0,081214	0,083166	0,085116	0,087064	0,089010	0,090954	0,092896
0,30	0,117911	0,119817	0,121720	0,123619	0,125516	0,127409	0,129300	0,131187
0,40	0,155422	0,157261	0,159097	0,160929	0,162757	0,164582	0,166402	0,168219
0,50	0,191462	0,193221	0,194974	0,196723	0,198468	0,200208	0,201944	0,203675
0,60	0,225747	0,227411	0,229069	0,230723	0,232371	0,234014	0,235653	0,237286
0,70	0,258036	0,259595	0,261148	0,262695	0,264238	0,265774	0,267305	0,268830
0,80	0,288145	0,289590	0,291030	0,292464	0,293892	0,295314	0,296731	0,298141
0,90	0,315940	0,317267	0,318589	0,319904	0,321214	0,322517	0,323814	0,325106
1,00	0,341345	0,342552	0,343752	0,344947	0,346136	0,347318	0,348495	0,349666
1,10	0,364334	0,365420	0,366500	0,367575	0,368643	0,369705	0,370762	0,371812
1,20	0,384930	0,385898	0,386861	0,387817	0,388768	0,389712	0,390651	0,391585
1,30	0,403200	0,404054	0,404902	0,405745	0,406582	0,407414	0,408241	0,409062
1,40	0,419243	0,419989	0,420730	0,421466	0,422196	0,422921	0,423641	0,424356
1,50	0,433193	0,433836	0,434478	0,435114	0,435745	0,436370	0,436992	0,437608
1,60	0,445201	0,445753	0,446301	0,446845	0,447384	0,447919	0,448448	0,448975
1,70	0,455435	0,455903	0,456367	0,456827	0,457284	0,457736	0,458185	0,458630
1,80	0,461779	0,462133	0,462483	0,462829	0,463171	0,463509	0,463845	0,464177
1,90	0,471283	0,471610	0,471933	0,472254	0,472571	0,472885	0,473197	0,473505
2,00	0,477250	0,477518	0,477784	0,478048	0,478308	0,478566	0,478822	0,479075
2,10	0,482136	0,482354	0,482571	0,482785	0,482997	0,483207	0,483414	0,483619
2,20	0,486097	0,486273	0,486447	0,486620	0,486791	0,486959	0,487126	0,487291

b) A situação desejada é a ilustrada a seguir.



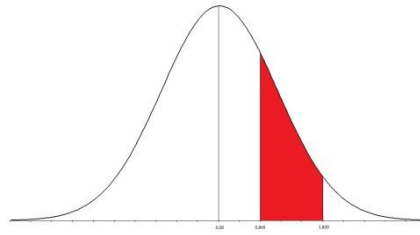
$$P(Z > 1,330) = 0,5 - P(0 < Z < 1,330) = 0,5 - 0,408241 = 0,091759$$

c) A situação desejada é a ilustrada a seguir.



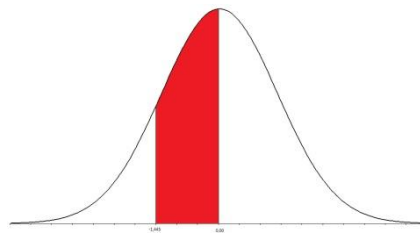
$$P(Z < 1,165) = 0,5 + P(0 < Z < 1,165) = 0,5 + 0,377991 = 0,877991$$

d) A situação desejada é a ilustrada a seguir.



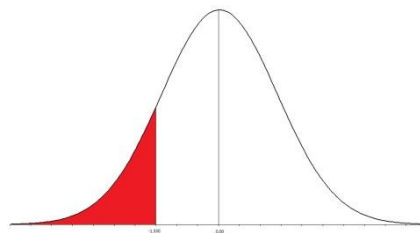
$$P(0,845 < Z < 1,820) = P(0 < Z < 1,820) - P(0 < Z < 0,845) = 0,465620 - 0,300945 = 0,164675$$

e) A situação desejada é a ilustrada a seguir.



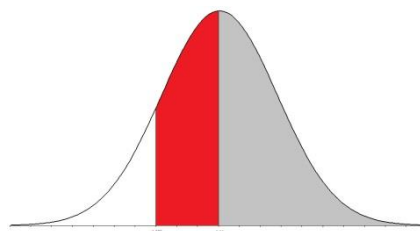
$$P(-1,445 < Z < 0) = P(0 < Z < 1,445) = 0,425771$$

f) A situação desejada é a ilustrada a seguir.



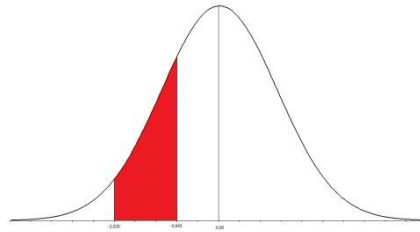
$$P(Z < -1,150) = P(Z > 1,150) = 0,5 - P(0 < Z < 1,150) = 0,5 - 0,374928 = 0,125072$$

g) A situação desejada é a ilustrada a seguir.



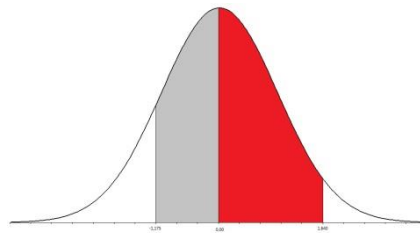
$$P(Z > -1,385) = P(Z < 1,385) = 0,5 + P(0 < Z < 1,385) = 0,5 + 0,416974 = 0,916974$$

h) A situação desejada é a ilustrada a seguir.

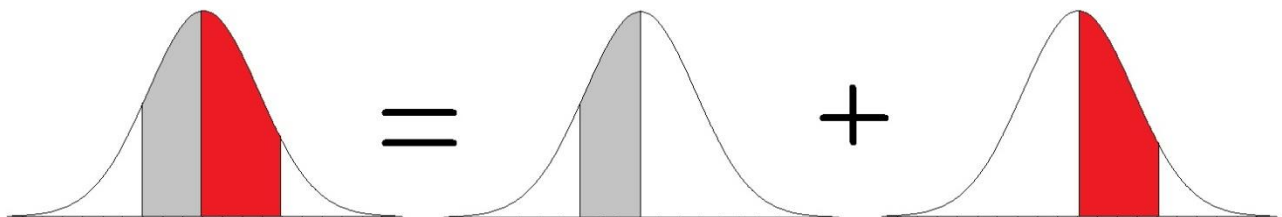


$$P(-2,020 < Z < -0,645) = P(0,645 < Z < 2,020) = P(0 < Z < 2,020) - P(0 < Z < 0,645) = 0,478308 - 0,240536 = 0,237772$$

i) A situação desejada é a ilustrada a seguir.



Para determinar a probabilidade vamos dividir o gráfico em dois de maneira que a soma das áreas seja igual à área desejada



$$P(-1,175 < Z < 1,640) = P(-1,175 < Z < 0) + P(0 < Z < 1,640) = P(0 < Z < 1,175) + P(0 < Z < 1,640)$$

$$P(-1,175 < Z < 1,640) = 0,380003 + 0,449497 = 0,859500$$

j) Neste caso o valor de Z não está na tabela. Para acharmos o valor desejado devemos APROXIMAR (e não arredondar) o valor de Z, assim

$$P(0 < Z < 2,237) = P(0 < Z < 2,235) = 0,487291$$

k) O valor de Z procurado extrapola a tabela. O maior valor de Z que consta na tabela é $Z = 4,095$. Nestes casos, todas as vezes que Z for maior que 4,095 vamos considerar que a probabilidade procurada seja igual a 0,5.

$$P(0 < Z < 7,325) \cong 0,5$$

Exemplo 9.4 - Seja X uma variável aleatória com distribuição $X \stackrel{d}{=} N(23;7)$. Determine:

- A probabilidade de um valor ser menor do que 20;
- Qual valor divide a distribuição em dois grupos de maneira a se ter os 80% menores e os 20% maiores?

Soluçãoa) $P(X < 20)$?

Primeiro devemos padronizar a variável, isto é, devemos achar o valor de Z correspondente ao valor $X = 20$

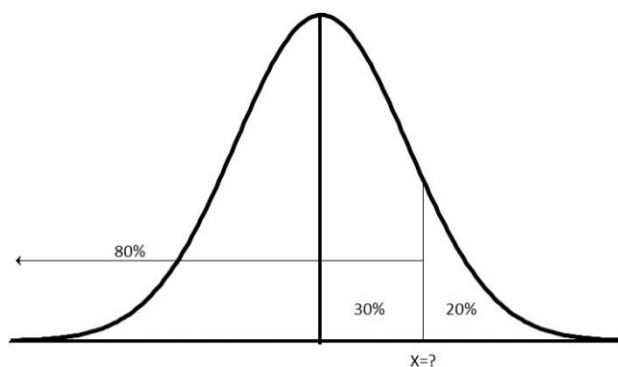
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{20 - 23}{7} = -0,42857 \cong -0,430$$

Assim

$$P(X < 20) = P(Z < -0,430) = P(Z > 0,430) = 0,5 - P(0 < Z < 0,430) = 0,5 - 0,166402 = 0,333598$$

b) $P(X < ?) = 0,8$

A situação é ilustrada na figura a seguir.



Como a tabela trabalha com probabilidades que vão de 0 (zero) até um ponto devemos procurar qual valor de Z apresenta uma probabilidade de 30%. Para tal procuraremos, na última coluna o primeiro valor de probabilidade que é maior do que 0,30.

	0,040	0,045	0,050	0,055	0,060	0,065	0,070	0,075	0,080	0,085	0,090	0,095	Z_{α}
35													
360	0,015953	0,017946	0,019939	0,021931	0,023922	0,025913	0,027903	0,029893	0,031881	0,033869	0,035856	0,037843	0,00
3694	0,035670	0,037665	0,039658	0,041649	0,043639	0,045628	0,047615	0,049601	0,051586	0,053569	0,055551	0,057532	0,10
3696	0,054835	0,056822	0,058806	0,060787	0,062766	0,064743	0,066718	0,068691	0,070661	0,072629	0,074594	0,076557	0,20
1187	0,133072	0,134953	0,136831	0,138705	0,140576	0,142444	0,144309	0,146170	0,148027	0,149881	0,151732	0,153579	0,30
3219	0,170031	0,171840	0,173645	0,175445	0,177242	0,179034	0,180822	0,182607	0,184386	0,186162	0,187933	0,189700	0,40
3675	0,215401	0,217123	0,218840	0,220553	0,222260	0,223963	0,225661	0,227354	0,229043	0,230726	0,232405	0,234078	0,50
7286	0,238914	0,240536	0,242154	0,243766	0,245373	0,246975	0,248571	0,250162	0,251748	0,253328	0,254903	0,256472	0,60
3630	0,270350	0,271864	0,273373	0,274876	0,276373	0,277864	0,279350	0,280830	0,282305	0,283773	0,285236	0,286693	0,70
3141	0,299546	0,300945	0,302337	0,303724	0,305105	0,306481	0,307850	0,309213	0,310570	0,311922	0,313267	0,314606	0,80
3106	0,326391	0,327671	0,328944	0,330211	0,331472	0,332728	0,333977	0,335220	0,336457	0,337688	0,338913	0,340132	0,90
3666	0,350830	0,351989	0,353141	0,354287	0,355428	0,356562	0,357690	0,358813	0,359929	0,361039	0,362143	0,363242	1,00
1812	0,372857	0,373895	0,374928	0,375955	0,376976	0,377991	0,379000	0,380003	0,381000	0,381991	0,382977	0,383956	1,10
1585	0,392512	0,393434	0,394350	0,395261	0,396165	0,397064	0,397958	0,398845	0,399727	0,400604	0,401475	0,402340	1,20

Acharemos o valor “0,314606” que está na linha de $Z=0,80$. Seguindo nesta linha para a esquerda encontraremos dois valores próximos de 0,30 (“0,299546” e “0,300945”). Entre estes dois valores o valor “0,299546” é o valor mais próximo do valor exato 0,30. Ele está na coluna de $Z=0,040$. Portanto o valor de Z será

$$Z = 0,80 + 0,040 = 0,840$$

Substituindo os valores na fórmula de Z , temos

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow 0,84 = \frac{X - 23}{7}$$

Isolando X

$$X = 7 \times 0,84 + 23 = 28,88$$

Isto é, 80% dos valores são menores do que 28,88 e, conseqüentemente, 20% serão maiores.

9.5.3 - A NORMAL COMO APROXIMAÇÃO DA BINOMIAL.

Quando n é grande e p não está próximo nem de 0 nem de 1 a Distribuição Normal constitui uma boa aproximação da Distribuição Binomial.

MEDIDA	DISTRIBUIÇÃO	
	Binomial	Normal
Esperança μ_x	np	μ
Desvio-Padrão σ_x	\sqrt{npq}	σ

Padronizaremos a Variável Aleatória Binomial X da seguinte maneira:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

Assim

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - 0,5 - np}{\sqrt{npq}} \leq z \leq \frac{b + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

onde a constante 0,5 é um fator de ajuste.

Exemplo 9.5 - Seja uma Variável Aleatória Binomial X com parâmetros $X \stackrel{d}{=} B(15; 0,4)$. A Probabilidade $P(7 \leq X \leq 10)$ é:

Solução

Através da Distribuição Binomial e utilizando a tabela temos:

$$P(7 \leq X \leq 10) = P(Z \leq 10) - P(Z \leq 6) = 0,9907 - 0,6098 = 0,3809$$

Utilizando a aproximação pela Distribuição Normal temos:

$$P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7 - 0,5 - (15 \times 0,4)}{\sqrt{15 \times 0,4 \times 0,6}} \leq z \leq \frac{10 + 0,5 - (15 \times 0,4)}{\sqrt{15 \times 0,4 \times 0,6}}\right) = P(0,2635 \leq z \leq 2,3717)$$

$$P(7 \leq X \leq 10) = P(Z \geq 2,3717) - P(Z \leq 0,2635)$$

$$P(7 \leq X \leq 10) = 0,988089 - 0,602568 = 0,385521$$

9.7 - EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 9.7.1) Suponha que o tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico siga uma distribuição normal de média de 8 minutos e desvio padrão de 2 minutos.
- a) Qual é a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos?
 - b) E mais do que 9,5 minutos?
 - c) E entre 7 e 10 minutos?
 - d) 75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos quanto tempo de atendimento?
- 9.7.2) A distribuição dos pesos de coelhos criados numa granja pode muito bem ser representada por uma distribuição Normal, com média 5 kg e desvio padrão 0,9 kg. Um abatedouro comprará 5000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso do seguinte modo: 15% dos mais leves como pequenos, os 50% seguintes como médios, os 20% seguintes como grandes e os 15% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classificação?
- 9.7.3) Os resultados de um exame nacional para estudantes recém-formados apresentarem uma média $m = 500$ com o desvio padrão $s = 100$. Os resultados têm uma distribuição aproximadamente normal. Qual a probabilidade de que o grau de um indivíduo escolhido aleatoriamente esteja:
- a) entre 500 e 650?
 - b) entre 450 e 600?
 - c) inferior a 300?
 - d) superior a 650?
- 9.7.4) A vida útil de uma certa marca de pneus radiais tem uma distribuição normal com $\mu = 38.000$ Km e $\sigma = 3.000$ Km.
- a) Qual a probabilidade de que um pneu escolhido aleatoriamente tenha uma vida útil de no mínimo 35.000 km?
 - b) Qual a probabilidade de que ele dure mais do que 45.000 km?
- 9.7.5) Sabendo que o tempo gasto pelos indivíduos para resolver um teste é normalmente distribuído com média de 20 minutos e desvio-padrão de 4 minutos, determine a probabilidade de que uma pessoa gaste para resolver um teste:
- a) entre 16 e 22 minutos;
 - b) entre 22 e 25 minutos;
 - c) mais do que 23 minutos;
 - d) menos que 16 minutos.
- 9.7.6) O número de pessoas que almoçam num restaurante suburbano é aproximadamente normal com média de 250 e desvio padrão de 20 pessoas, por dia. Determine a probabilidade de que, em um dia qualquer, sejam atendidas:
- a) menos de 200 pessoas
 - b) entre 225 e 275 pessoas
- 9.7.7) As notas de Estatística dos alunos de uma Universidade distribuem-se normalmente com média de 6,4 e desvio-padrão de 0,8. Em uma classe de 80 alunos, quantos terão nota:
- a) menor do que 5,0;
 - b) entre 5,0 e 7,5?
 - c) maior que 7,5;

- 9.7.8) Numa pesquisa salarial, verificou-se que o salário de determinada categoria segue uma distribuição normal com média de 15.000 u.m. e desvio-padrão de 2.000 u.m. Determine:
- a) a probabilidade de que um empregado tenha salário entre 17.000 u.m. e 18.000 u.m.
 - b) quantos empregados entre 1.000, tem salário superior a 18.000 u.m.?
- 9.7.9) Um adulto americano médio tem 1,75m de altura. Assuma que o desvio-padrão seja de 8 cm. Responda:
- a) Qual é a probabilidade de que um homem adulto tenha mais de 1,83m?
 - b) Qual é a probabilidade de que um homem adulto tenha menos de 1,52m?
 - c) Qual é a probabilidade de que um homem adulto esteja entre 1,68 e 1,78m?
 - d) Qual é a probabilidade de que um homem adulto não tenha mais de 1,83?
- 9.7.10) Os diretores de Faculdade recebem em média uma provisão de moradia de US\$ 26.234 anualmente. Considere que se aplique uma distribuição normal e que o desvio-padrão seja de US\$ 5.000.
- a) Que porcentagem de diretores de faculdade recebe uma provisão de moradia que excede US\$ 35.000 por ano?
 - b) Que porcentagem de diretores de faculdade recebe uma provisão de moradia abaixo de US\$ 20.000 por ano?
 - c) De quanto precisa ser a provisão para colocar um diretor de faculdade entre os 10% que mais recebem?
- 9.7.11) O volume de comercialização na bolsa de valores de Nova York tem crescido nos últimos anos. Para as duas primeiras semanas de janeiro de 1998, o volume médio diário foi de 646 milhões de ações. A distribuição de probabilidade do volume diário é aproximadamente normal com um desvio-padrão de cerca de 100 milhões de ações.
- a) Qual é a probabilidade de que o volume de comercialização será menor do que 400 milhões de ações?
 - b) Durante que porcentagem de tempo o volume de comercialização excedeu 800 milhões de ações?
 - c) Se a Bolsa quer emitir um *press release* sobre os 5% de dias de comercialização de pico, qual volume acionará um *release*?
- 9.7.12) Os motoristas que são membros do Sindicato dos Motoristas de Carretas ganham uma média de US\$ 17 por hora. Considere que os dados disponíveis indicam que os salários são distribuídos normalmente com desvio-padrão de US\$ 2,25.
- a) Qual é a probabilidade de que os salários estejam entre US\$ 15,00 e US\$ 20,00?
 - b) Qual é o salário-hora dos 15% dos motoristas mais bem pagos do Sindicato?
 - c) Qual é a probabilidade de que os salários sejam menores do que US\$ 12,00 por hora?
- 9.7.13) O tempo necessário para se completar um exame final em um curso de faculdade particular é distribuído normalmente com uma média de 80 minutos e um desvio-padrão de 10 minutos. Responda:
- a) Qual é a probabilidade de se completar o exame em uma hora ou menos?
 - b) Qual é a probabilidade de que um estudante completará o exame em mais de 60 minutos, porém em menos de 75 minutos?
 - c) Considere que a classe tenha 60 estudantes e que o período de exame seja de 90 minutos de duração. Quantos estudantes você espera serão incapazes de completar o exame no tempo determinado?

- 9.7.14) As despesas mensais com a alimentação em uma família de quatro pessoas numa cidade grande giram em torno de \$420 com um desvio-padrão de \$80. Supondo que as despesas mensais com alimentação são distribuídas normalmente,
- Que percentagem dessas despesas é menor que \$ 350?
 - Que percentagem dessas despesas está entre \$ 250 e \$ 350?
 - Que percentagem dessas despesas está entre \$ 250 e \$ 450?
 - Que percentagem dessas despesas é menor que \$ 250 ou maior que \$ 450?
 - Determine Q_1 e Q_3 a partir da distribuição normal?
- 9.7.15) Uma Companhia de Transportes determinou que, em termos anuais, a distância percorrida por caminhão se distribui de modo normal com uma média aritmética de 50,0 mil milhas e um desvio-padrão de 12,0 mil milhas.
- Que proporção desses caminhões espera-se que percorra entre 34,0 e 50,0 mil milhas por ano?
 - Qual é a probabilidade de que um caminhão, escolhido aleatoriamente, percorra entre 34,0 e 38,0 mil milhas por ano?
 - Que percentagem de caminhões pode-se esperar que percorra ou abaixo de 30,0 ou acima de 60,0 mil milhas por ano?
 - Quanto dos 1.000 caminhões da frota espera-se que percorram entre 30,0 e 60,0 mil milhas por ano?
 - Quantas milhas podem ser percorridas por pelo menos 80% dos caminhões?
- 9.7.16) Usa-se um aparelho de radar para medir a velocidade dos carros numa rodovia na hora de pico. As velocidades dos carros têm distribuição normal, com média de 79 Km/h. Determinar:
- o desvio-padrão das velocidades, se 3% dos carros ultrapassam 90 Km/h;
 - considerando o desvio-padrão calculado na letra anterior, qual a porcentagem dos carros que trafegam a menos de 75 Km/h.
- 9.7.17) Os tempos em que os funcionários de uma linha de produção de uma empresa levam para confeccionar um determinado produto são normalmente distribuídos. Sabe-se que 10% dos produtos são confeccionados com menos de 2 horas e 17% com mais de 2 horas e 47 minutos. Determine:
- o tempo médio para confecção de um produto;
 - o desvio-padrão da distribuição dos tempos;
 - Considerando os parâmetros determinados anteriormente, qual a probabilidade de que um produto seja confeccionado em menos de 2 horas e 30 minutos?
- 9.7.18) Os valores dos depósitos efetuados numa agência bancária, em um mês, são distribuídos de forma normal. Os registros indicam que 14% dos depósitos são inferiores a \$ 350 e que os depósitos superiores a \$ 3.800 atingem um percentual de 23%. Determine:
- O valor médio dos depósitos;
 - O desvio-padrão da distribuição dos valores dos depósitos;
 - Qual a probabilidade de um cliente efetuar um depósito cujo valor esteja situado entre \$ 1.200 e \$ 2.300.
- 9.7.19) Um sub fornecedor da IBM foi contratado para fabricar substratos de cerâmica, utilizados para transmitir sinais entre chips de silício para computadores. As especificações exigem uma resistência entre 1,500 ohms e 2,500 ohms, mas a população dos substratos de cerâmica tem resistências distribuídas normalmente com média de 1,978 ohms e desvio – padrão de 0,172 ohms. Que percentagem dos substratos de cerâmica foge às especificações do fabricante? Esse processo de fabricação parece estar funcionando bem?

- 9.7.20) A duração de certo componente eletrônico tem média 850 dias e desvio - padrão de 45 dias. Calcular a probabilidade desse componente durar:
- entre 700 e 1000 dias;
 - mais de 800 dias;
 - menos que 750 dias;
 - exatamente 1000 dias.
 - Qual deve ser o número de dias necessários para que tenhamos de repor no máximo 5% dos componentes?
- 9.7.21) Os pesos de 600 estudantes são normalmente distribuídos com média 65,3 kg e desvio - padrão 5,5 Kg. Encontre o número de alunos que pesam:
- entre 60 e 70 kg;
 - mais que 63,2 KG.
- 9.7.22) Suponha que as notas de uma prova sejam normalmente distribuídas com média 73 e desvio - padrão 15. 15% dos alunos mais adiantados recebem a nota A e 12% dos mais atrasados recebem nota F. Encontre o mínimo para receber A e o mínimo para passar, não receber F.
- 9.7.23) Uma fábrica de pneumáticos fez um teste para medir o desgaste de seus pneus e verificou que ele obedecia a uma distribuição normal, de média 48 000 km e desvio - padrão 2 000 Km. Calcular a probabilidade de um pneu escolhido ao acaso:
- dure mais que 46 000 km;
 - dure entre 45 000 e 50 000 Km.
- 9.7.24) X é uma variável aleatória contínua, tal que $X \stackrel{d}{=} N(12;5)$. Qual a probabilidade de uma observação ao acaso:
- ser menor do que -3 ;
 - cair entre -1 e 15 .
- 9.7.25) Os salários semanais dos operários industriais são distribuídos normalmente em torno de uma média de R\$ 180,00 com desvio - padrão de R\$ 25,00. Pede-se:
- encontrar a probabilidade de um operário ter salário semanal situado entre R\$ 150,00 e R\$ 178,00;
 - dentro de que desvios de ambos os lados da média, cairão 96% dos salários?
- 9.7.26) Certo produto tem peso médio de 10 g e desvio - padrão 0,5 g. É embalado em caixas de 120 unidades que pesam em média 150 g e desvio - padrão 8 g.
- Qual a probabilidade de que uma caixa cheia pese mais de 1 370 g?
- 9.7.27) Determinada máquina enche latas baseadas no peso bruto com média 1 kg e desvio - padrão 25 g. As latas têm peso médio de 90 g com desvio - padrão 8 g. Pede-se:
- a probabilidade de uma lata conter menos de 870 g de peso líquido;
 - a probabilidade de uma lata conter mais de 900 g de peso líquido.
- 9.7.28) Um avião de turismo de 4 lugares pode levar uma carga útil de 350 Kg. Supondo que os passageiros têm peso médio de 70 kg com distribuição normal de peso e desvio - padrão de 20 kg, e que a bagagem de cada passageiro pese em média 12 kg, com desvio - padrão 5 kg e distribuição normal do peso. Calcular a probabilidade de haver sobrecarga se o piloto não pesar os 4 passageiros e respectivas bagagens.

- 9.7.29) Em uma amostra de 300 alturas (em cm), observou-se que a altura média foi 175cm com desvio padrão de 10cm. Considerando-se que essa distribuição é aproximadamente Normal, pergunta-se:
- Quantas pessoas estão acima de 160 cm?
 - Quantas pessoas estão abaixo de 165 cm?
 - Quantas pessoas estão entre 170 cm e 180 cm?
 - Qual a taxa percentual de pessoas entre 180 cm e 195 cm?
 - Desejando-se selecionar 10% das pessoas mais altas, qual deve ser a altura mínima que essa pessoa deve ter?
 - Desejando-se selecionar 25% das pessoas mais baixas, qual deve ser a maior altura que essa pessoa deve ter?
- 9.7.30) Uma empresa deseja contratar funcionários. Para tanto é feito um teste de QI para avaliar os candidatos. Considerando-se que 200 candidatos fizeram essa avaliação e que o QI médio obtido foi 95, com desvio-padrão igual a 9, pergunta-se:
- Quanto candidatos têm QI entre 80 e 95?
 - Qual a taxa percentual de candidatos na questão anterior?
 - Para rejeitar 60% dos piores candidatos, qual deve ser o menor QI para o candidato ser aceito?
 - Se a empresa deseja eliminar 40% dos piores candidatos, bem como 5% dos melhores, qual deve ser a faixa de valores de QI que essa empresa deve considerar?
- 9.7.31) Um professor resolveu dar os seguintes conceitos aos seus alunos:

Conceito	Taxa Percentual
A+	10%
A	20%
B+	40%
B	15%
C	15%

Se a distribuição de notas foi aproximadamente normal, a média da população 80 e o desvio-padrão 10, quais as notas limites entre os grupos de conceito?

- 9.7.32) Se μ é a média e σ o desvio padrão de um conjunto de medidas normalmente distribuídas, qual a taxa percentual das mesmas:
- Dentro do intervalo $\mu \pm \sigma$;
 - Dentro do intervalo $\mu \pm 2\sigma$;
 - Dentro do intervalo $\mu \pm 3\sigma$.
- 9.7.33) Os produtos embalados por uma máquina sofrem variações de peso com desvio padrão de 17,5g.
- Em quanto deve ser regulado o peso médio do pacote para que apenas 10,38% tenham menos que 350g?
 - Qual é a probabilidade de um pacote sair com mais de 400g?
- 9.7.34) Se o diâmetro médio de um lote de esferas para rolamentos produzidos por uma fábrica é de 0,30 polegadas e o desvio padrão de 0,01 polegadas. Uma esfera é considerada defeituosa se seu diâmetro é maior que 0,32 polegadas ou menor que 0,27 polegadas.
- Encontre a porcentagem de parafusos defeituosos.
 - Quais as medidas mínima e máxima para que tenhamos um aproveitamento de 98,9% do lote?

- 9.7.35) Um lote de uma lâmpada especial tem uma vida útil, obedecendo a uma distribuição aproximadamente normal, com vida média de 720 dias e desvio-padrão 38 dias. Calcular a probabilidade de uma lâmpada durar:
- Entre 600 e 820 dias;
 - Mais que 700 dias;
 - Menos que 650 dias;
 - Em quantos dias devemos repor no máximo 3% das lâmpadas?
- 9.7.36) Os Pesos das mulheres americanas têm distribuição normal com média 63,6 kg e desvio padrão 2,5 kg. Seleccionada aleatoriamente uma mulher, determine a probabilidade de:
- o seu peso estar entre 63,6 e 68,6 kg.
 - O seu peso estar entre 62,8 e 65 kg;
 - Os pesos das dançarinas de dança do ventre devem estar entre 65,5kg e 68 kg. Escolhida aleatoriamente uma mulher, determine a probabilidade de que ela possa ser uma dançarina de dança do ventre.
- 9.7.37) Os prazos de substituição de aparelhos de TV têm distribuição normal com média de 8,2 anos e desvio padrão de 1,1 anos. Determine a probabilidade de um aparelho de TV selecionado aleatoriamente acusar um tempo de substituição inferior a 7,0 anos.
- 9.7.38) Supondo que os pesos do papel descartado semanalmente pelas residências tenham distribuição normal com média de 9,4 kg e desvio padrão de 4,2 kg. Determine a probabilidade de escolher aleatoriamente uma residência que descarte entre 5,0 kg e 8,0 kg de papel em uma semana.
- 9.7.39) Os prazos da gravidez têm distribuição normal com média de 268 dias e desvio padrão de 15 dias.
- Com base nessa informação, determine a probabilidade de uma gravidez durar 308 dias ou mais. Que é que o resultado sugere?
 - Definido como prematura uma criança nascida com três semanas de antecipação, qual a porcentagem de crianças nascidas prematuramente?
- 9.7.40) Uma pesquisa apontou que os homens gastam em média 11,4 minutos no chuveiro. Suponha que esses tempos tenham distribuição normal com desvio padrão de 1,8 min. Escolhido um homem aleatoriamente, determine a probabilidade de ele gastar ao menos 10 minutos no chuveiro.
- 9.7.41) Os escores de QI têm distribuição normal com média 100 e desvio padrão 15. A admissão na empresa X exige um QI superior a 131,5.
- escolhida aleatoriamente uma pessoa, determine a probabilidade de ela satisfazer aquela exigência da empresa.
 - em uma região de 70.000 habitantes, quantos serão candidatos a uma vaga na empresa?
- 9.7.42) Os níveis de colesterol em homens entre 18 e 24 anos de idade têm distribuição normal com média de 178,1 e desvio padrão de 40,7. Escolhido aleatoriamente um homem entre 18 e 24 anos de idade, determine a probabilidade de seu nível de colesterol estar entre 200 e 250.
- 9.7.43) O corpo de fuzileiro navais da Marinha dos EUA exige homens com peso entre 64 e 78 kg. Determine a porcentagem dos homens que satisfazem essa exigência. Considere que os pesos dos homens têm distribuição normal com média de 69,0 kg e desvio padrão 2,8 kg.