Variáveis Aleatórias

Andrei Nikolaevich Kolmogorov (em russo: Андрей Николаевич Колмогоров) (Tambov, 25 de Abril de 1903 — Moscou, 20 de Outubro de 1987) foi um matemático soviético.
Kolmogorov participou das principais descobertas científicas do século XX nas áreas de probabilidade e estatística, e em teoria da informação. Foi ele o autor da principal teoria científica no campo das probabilidades: a teoria da medida, que revolucionou o cálculo de integrais, permitindo que as integrais fossem generalizadas para domínios "exóticos" (integral de Lebesgue).
Um de seus principais trabalhos publicados foi "*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*" ("Fundamentos de Teoria das Probabilidades"), em que ele lança as bases da axiomatização da teoria das probabilidades e esboça o que seria a teoria da medida.
Como grande cientista que era, Kolmogorov recebeu diversas honrarias ao longo de sua carreira. Em 1939 ele foi eleito para a Academia de Ciências da URSS. Ele recebeu um dos primeiros prêmios científicos dados pelo estado soviético em 1941, o prêmio Lenin de 1965, a Ordem de Lenin em seis ocasiões diferentes, a Medalha Lobachevsky em 1986, entre outros. Ele também foi eleito para inúmeras outras academias e sociedades científicas, como por exemplo a Sociedade Estatística Real de Londres em 1956.
Kolmogorov teve muitos interesses fora da matemática, em particular na forma e estrutura da poesia russa do autor Pushkin.
FONTE:http://pt.wikipedia.org/wiki/Brasil

- Introdução
- Função Distribuição de Probabilidades
- Probabilidades de Variáveis Aleatórias Contínuas
- Variáveis Aleatórias Bidimensionais
- Distribuições de Probabilidades Marginais
- Variáveis Aleatórias Independentes
- Medidas de Posição
- Medidas de Dispersão

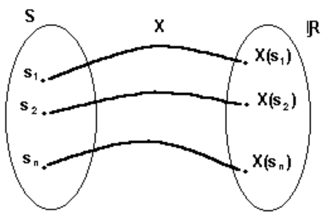
7 - VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

7.1 - INTRODUÇÃO

Muitos experimentos produzem resultados não numéricos. Antes de analisá-los é conveniente transformar seus resultados em números, o que é feito através da *Variável Aleatória*, que é uma regra de associação de um valor numérico a cada ponto do Espaço Amostral.

Definição

Sejam E um experimento e S o Espaço Amostral associado e este experimento. Uma Função X, que associe a cada elemento $s \in S$ um número real X(s), é denominada *Variável Aleatória*.



Na jogada de duas moedas o Espaço Amostral é: S = { KK, KC, CK, CC }. Seja X o número de caras (K). A cada evento simples de S podemos associar um número, conforme a seguir:

Evento	KK	KC	CK	CC
X	2	1	1	0

Portanto, teremos as probabilidades abaixo:

Número de Caras Obtidas X	P(x)
0	¼
1	½
2	¼

Uma Variável Aleatória X será *DISCRETA* se os valores que ela pode assumir forem INTEIROS e será *CONTÍNUA* se ela puder assumir qualquer valor real num intervalo dado.

Probabilidades de Variáveis Aleatórias Discretas

7.2 - FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

A Probabilidade de que uma Variável Aleatória X assuma o valor "x_o" é a Função de Probabilidade de X, representada por $P(X=x_o)$ ou simplesmente $P(x_o)$.

A Função de Probabilidade determina a Distribuição de Probabilidades da Variável Aleatória X, que pode ser representada por uma tabela, um gráfico ou uma fórmula.

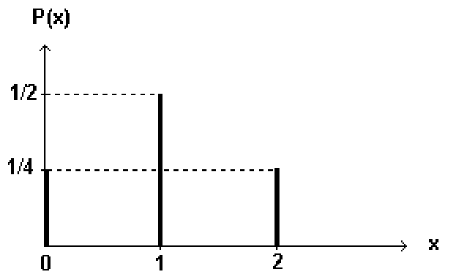
Exemplo 7.1 - *Seja E: lançar duas moedas e seja X: número de caras (K) obtidas. Representar P(x) através de uma tabela, um gráfico e uma fórmula.*

<u>*Solução:*</u>

Tabela

Número de Caras Obtidas X	P(x)
0	¼
1	½
2	¼

Gráfico



Fórmula

$$P(x) = \tfrac{1}{4} C_2^x \quad \textit{onde x = 0, 1, 2}$$

<u>*Observações:*</u>

1) Qualquer Função de uma Variável Aleatória é também uma Variável Aleatória, isto é, se X é uma Variável Aleatória então $y = ax + b$ ou $z = cx^2 - 3/x$ também são Variáveis Aleatórias.
2) Por ser uma função podemos representar a $P(X = x)$ por $P(x)$ ou por $f(x)$.

Para que uma função seja uma Distribuição de Probabilidades ela deve satisfazer as seguintes condições:

- $f(x) \geq 0$
- $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(x_i) = 1$

7.2.2 - Função Repartição – F(x)

A Função Repartição de uma Variável Aleatória X, no ponto $x = x_o$, é definida como sendo a probabilidade de X assumir um valor menor ou igual a x_o, isto é:

$$F(x_o) = P(X \leq x_o)$$

ou

$$F(x_o) = \sum_{x=-\infty}^{x_o} f(x)$$

7.2.2.1 - Propriedades da Função Repartição

$P.1)\ F(-\infty) = 0$

$P.2)\ F(+\infty) = 1$

$P.3)\ P(a < x \leq b) = F(b) - F(a) \quad onde\ b > a$

$P.4)\ P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$

$P.5)\ P(a < x < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$

$P.6)\ P(a \leq x < b) = F(b) - F(a) + P(X = a) - P(X = b)$

Exemplo 7.2 - *Suponha que uma Variável Aleatória X possa assumir apenas os valores 0, 1 e 2, com probabilidades* $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, *respectivamente. Determine sua função repartição e represente-a graficamente.*

<u>*Solução:*</u>

A Função Distribuição da Variável Aleatória X é:

X	*P(x)*
0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{2}$

A Função Repartição é a probabilidade de X assumir um valor menor ou igual a um "x" qualquer, assim devemos analisar a Função Distribuição para vários valores de X, cada um num determinado intervalo. Estes intervalos são: $x < 0$; $0 \leq x < 1$; $1 \leq x < 2$ e $x \geq 2$.

Quando $x < 0$ *não existem probabilidades e, portanto* $F(x) = 0$.

Quando "x" está no intervalo $0 \leq x < 1$, *ao somarmos todas as probabilidades desde* $-\infty$ *até o valor de "x" existe apenas* $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ *e, portanto* $F(x) = \frac{1}{3}$.

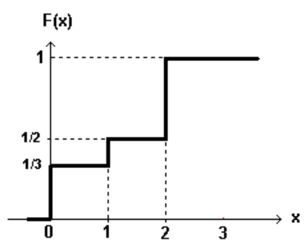
Quando "x" está no intervalo $1 \leq x < 2$, *ao somarmos todas as probabilidades desde* $-\infty$ *até o valor de "x" existem duas probabilidades,* $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ *e* $P(X = 1) = \frac{1}{6}$, *logo* $F(x) = \frac{1}{2}$.

Quando "x" está no intervalo $x \geq 2$, *ao somarmos todas as probabilidades desde* $-\infty$ *até o valor de "x" estaremos somando todas as probabilidades possíveis e assim* $F(x) = 1$.

A Distribuição Repartição da Variável Aleatória X será, então:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{1}{3} & , \ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & , \ 1 \leq x < 2 \\ 1 & , \ x \geq 2 \end{cases}$$

e seu gráfico fica:



7.3 - PROBABILIDADES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

7.3.1 - *FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE*

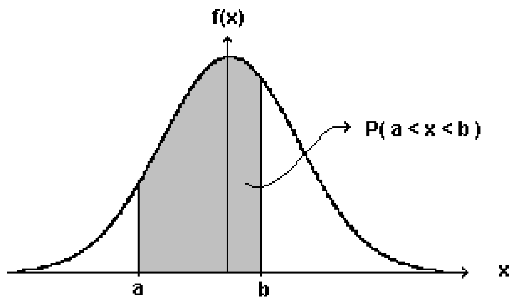
Seja X uma Variável Aleatória Contínua, isto é: X pode assumir qualquer Valor real num determinado intervalo dado.

A *Função Densidade de Probabilidade f(x)* é uma função que satisfaz as seguintes condições:

- $f(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in \Re_X$
- $\displaystyle\int_{\Re_X} f(x)\; dx = 1$

No caso de Variáveis Aleatórias Contínuas a probabilidade é dada pela área sob a curva de f(x) num intervalo dado, assim, não existe probabilidade no ponto e sim num intervalo. Esta probabilidade é definida por:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\; dx$$



Observações:

1ª) A probabilidade de X ser igual a um valor x_o , $P(X = x_O)$, é igual a ZERO, pois

$$P(X = x_O) = \int_{x_O}^{x_O} f(x)\; dx = 0$$

Isto também implica que:

$$P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a < x < b)$$

2ª) f(x) NÃO é probabilidade, mas quando integramos f(x) num determinado intervalo, (a,b), pertencente à $\Re_X$ obtêm-se uma probabilidade que é igual à área delimitada pela curva, o eixo dos X e as retas x=a e x=b.

7.3.2 - FUNÇÃO REPARTIÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

Assim como para Variáveis Aleatórias Discretas, a Função Repartição para Variáveis Aleatórias Contínuas é definida como sendo a probabilidade de que a Variável Aleatória X assuma um valor menor ou igual a um valor qualquer x_o, isto é $F(x_0) = P(X \le x_o)$, e pode ser obtida por:

$$F(x_o) = \int_{-\infty}^{x_o} f(x)\ dx$$

Exemplo 7.3 - *Seja* $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(1-x^2\right) & , \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \ \textit{caso contrário} \end{cases}$

Demonstre que a função dada é uma Função Densidade de Probabilidade, determine sua Função repartição e esboce seu gráfico.

<u>*Solução:*</u>

Para que a função dada seja uma Função Densidade de Probabilidades ela deve satisfazer as condições:

- $f(x) \ge 0 \ \ \forall\, x \in \Re_X$
- $\displaystyle\int_{\Re_X} f(x)\ dx = 1$

Varrendo todo o eixo dos X, isto é, desde $-\infty$ *até* $+\infty$*, verificamos que a função é sempre positiva ou* $f(x) \ge 0$*, satisfazendo-se a primeira condição. Para confirmar a segunda condição basta integrarmos a função no intervalo dado e verificar se a área delimitada pela curva é unitária.*

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\ dx$$

$$P = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{1} \tfrac{3}{2}\left(1\text{-}x^2\right)\ dx + \int_{1}^{+\infty} 0\ dx = \int_{0}^{1} \tfrac{3}{2}\left(1\text{-}x^2\right)\ dx$$

$$P = \tfrac{3}{2}\left[\int_{0}^{1} 1\ \ dx - \int_{0}^{1} x^2\ \ dx\right] = \tfrac{3}{2}\left\{x\Big|_0^1 - \tfrac{x^3}{3}\Big|_0^1\right\} = \tfrac{3}{2}\left\{[1-0] - \left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{0}{3}\right]\right\}$$

$$P = \tfrac{3}{2}\left\{1 - \tfrac{1}{3}\right\} = \tfrac{3}{2} \times \tfrac{2}{3} = 1$$

Portanto a função dada é uma Função Densidade de Probabilidade.

Vamos agora determinar a Função Repartição. Como a função dada é contínua iremos achar uma equação para a Função Repartição. Isto é conseguido integrando a função dada em todos intervalos possíveis.

Para $x < 0$ *temos:*

$F(x) = 0$*, pois não existe área sob a curva de f(x).*

Para $0 \le x < 1$ *temos:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{x} f(x)\ dx = 0 + \int_{0}^{x} \tfrac{3}{2}\left(1 - x^2\right)\ dx$$

$$F(x) = \tfrac{3}{2}\int_{0}^{x}\left(1 - x^2\right)\ dx = \tfrac{3}{2}\left[x - \tfrac{x^3}{3}\right]_0^x$$

$$F(x) = \tfrac{3}{2}\left(x - \tfrac{x^3}{3}\right)$$

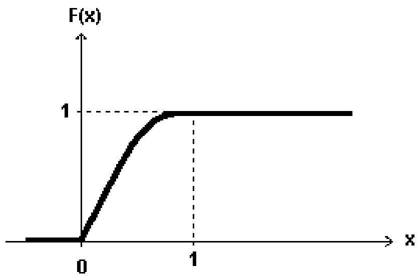
e, finalmente, para $x \ge 1$ *temos:*

$F(x) = 1$ *pois já teremos somado toda a área sob a curva.*

Logo a Função Repartição será:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,\ x < 0 \\ \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{x^3}{3}\right) & ,\ 0 \le x < 1 \\ 1 & ,\ x \ge 1 \end{cases}$$

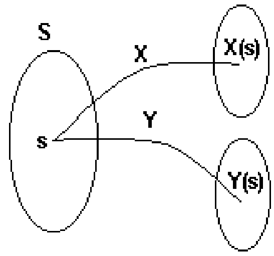
O gráfico de $F\left(x\right)$ *fica:*



7.4 - Variáveis Aleatórias Bidimensionais

Sejam E um Experimento Aleatório; S um Espaço Amostral associado à E e X = X(s) e Y = Y(s) duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$.

Definiremos o par coordenado (X,Y) como sendo uma Variável Aleatória Bidimensional.



7.4.1 - *Distribuição Conjunta de Duas Variáveis Aleatórias Discretas*

A Função de Probabilidade $f(x,y)$ é definida tal que a cada possível resultado (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ representado por $P(X = x_i; Y = y_j)$ satisfazendo as seguintes condições:

- $p(x_i, y_j) \geq 0$
- $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} p(x_i, y_j) = 1$

Exemplo 7.4 - *Considere E um Experimento onde são lançados dois dados. O par (X,Y) representam os pontos nos respectivos dados.*

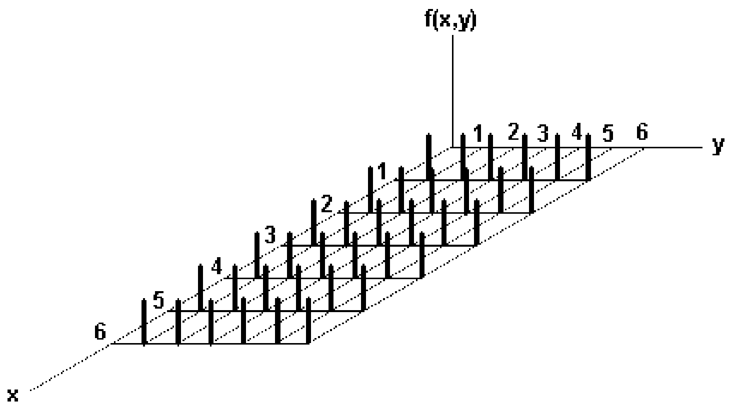
A tabela que representa as probabilidades de cada um dos resultados deste experimento é:

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
3	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$

a fórmula desta função é:

$$p(x_i, y_j) = \tfrac{1}{36} \quad , x = 1,2,3,4,5,6 \;\; e \;\; y = 1,2,3,4,5,6$$

e o gráfico que representa esta função é:



7.4.2 - FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE CONJUNTA

Uma função, $f(x,y)$, é dita *Função Densidade de Probabilidade Conjunta* de uma Variável Aleatória (X,Y) se satisfaz as seguintes condições:

$$f(x,y) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx\ dy = 1$$

7.4.3 - FUNÇÃO REPARTIÇÃO CONJUNTA

A Função Repartição Conjunta, $F(x,y)$, é definida como sendo a probabilidade de, simultaneamente, X ser menor ou igual a um valor “x” qualquer e Y ser menor ou igual a um valor “y” qualquer, isto é

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) .$$

Caso a Variável Aleatória (X,Y) seja discreta a Função Repartição será determinada por:

$$F(x_o, y_o) = \sum_{x=-\infty}^{x_o} \sum_{y=-\infty}^{y_0} p(x,y)$$

Se a Variável Aleatória (X,Y) for contínua a Função Repartição é dada por:

$$F(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{x_o} \int_{-\infty}^{y_o} f(x,y)\ \ dxdy$$

7.5 - DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES MARGINAIS

Seja (X,Y) uma Variável Aleatória Bidimensional. Podemos determinar a distribuição de X sem considerar Y e a distribuição de Y sem considerar X. Para isso devemos fixar uma das variáveis e variar a outra.

Se (X,Y) é uma Variável Aleatória Bidimensional Discreta então:

Distribuição de X: $\begin{cases} P(X = x_i) = P(X = x_i; -\infty < Y < +\infty) \\ P(X = x_i) = \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{+\infty} p(x_i, y_j) \end{cases}$

Distribuição de Y: $\begin{cases} P(Y = y_j) = P(-\infty < X < +\infty, Y = y_j) \\ P(Y = y_j) = \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} p(x_i, y_j) \end{cases}$

Caso (X,Y) é uma Variável Aleatória Bidimensional Contínua, então:

Distribuição de X: $g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dy$

Distribuição de Y: $h(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx$

7.6 - Variáveis Aleatórias Independentes

Duas Variáveis Aleatórias, X e Y, são ditas Variáveis Aleatórias Independentes se a probabilidade conjunta de (X,Y) é igual ao produto das probabilidades marginais de X e de Y, isto é:

- Se (X,Y) é uma Variável Aleatória Discreta então as variáveis X e Y serão independentes se, e somente se $p(x_i,y_j)=p(x_i)\times p(y_j) \quad \forall\ i\ e\ j$
- Se (X,Y) é uma Variável Aleatória Contínua então as variáveis X e Y serão independentes se, e somente se $f(x,y)=g(x)\times h(y) \quad \forall\ x\ e\ y$

7.7 - Medidas de Posição

7.7.1 - *Esperança Matemática*

Também denominada "*Valor Esperado*" ou "*Média*" de uma Variável Aleatória, a Esperança Matemática é definida como sendo a soma de todos os produtos dos valores da Variável Aleatória pelas suas respectivas probabilidades, isto é:

- Se X é uma Variável Aleatória Discreta então $E[x]=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i \times p(x_i)$
- Se X é uma Variável Aleatória Contínua então $E[x]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\times f(x)\quad dx$

Em termos gerais podemos calcular a Esperança de uma função de uma Variável Aleatória, assim, se ϕ é uma função da Variável Aleatória X, $\phi(x)$, a Esperança desta função será obtida por:

- $E[\phi(x)]=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\phi(x_i)\times p(x_i)$ se X é uma Variável Aleatória Discreta
- $E[\phi(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\times f(x)\quad dx$ se X é uma Variável Aleatória Contínua

Exemplo 7.5 - *Seja* $\phi(x)=5x+3$, *a Variável Aleatória X pode assumir os valores –2, 1, 5, 6, e 7 com probabilidades 0,20, 0,15, 0,22, 0,35 e 0,08, respectivamente. Determine a Esperança da função* $\phi(x)$.

Solução:

$$E\left[\phi(x)\right]=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\phi(x_i)\times p(x_i)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(5x_i+3)\times p(x_i)$$
$$E\left[\phi(x)\right]=\left[5(-2)+3\right]\times 0,2+\left[5(1)+3\right]\times 0,15+\left[5(5)+3\right]\times 0,22+\left[5(6)+3\right]\times 0,35+\left[5(7)+3\right]\times 0,08$$
$$E\left[\phi(x)\right]=20,55$$

Observação:

Quando a função $\phi(x)$ é a Função Identidade, isto é: quando $\phi(x)=x$, representamos a Esperança de X - $E[x]$ - por μ_x. As duas simbologias representam a mesma média e qualquer uma das duas pode ser utilizada.

7.7.1.2 - Propriedades da Esperança Matemática

P.1 – A Esperança de uma Constante K é igual à própria constante.

$$E[K]=K$$

P.2 – A Esperança do produto de uma constante K por uma variável é igual ao produto desta constante pela Esperança da variável.

$$E\left[K\times\phi(x)\right]=K\times E\left[\phi(x)\right]$$

P.3 – A Esperança da soma algébrica de é igual à soma algébrica das Esperanças.

$$E\left[\phi(x)\pm\theta(x)\right]=E\left[\phi(x)\right]\pm E\left[\theta(x)\right]$$

P.4 – A Esperança dos desvios tomados em relação à Esperança de X é ZERO.

$$E\left[(x-\mu_x)\right]=0$$

P.5 – Se X e Y são Variáveis Aleatórias Independentes então a Esperança do produto é igual ao produto das Esperanças.

$$Se\ X\ e\ Y\ \text{ são independentes}\Leftrightarrow E[xy]=\mu_x\times\mu_y$$

7.7.2 - *MEDIANA – (MD)*

Mediana é o valor da Variável Aleatória X que divide a distribuição em duas partes iguais, cada uma contendo 50% dos valores, sendo assim, a Mediana pode, também, ser definida como sendo o valor cuja Função Repartição é igual a 0,5.

Exemplo 7.6 - *Considere a Função Distribuição de Probabilidades da Variável Aleatória X Discreta. Determine o valor mediano.*

X	f(x)	F(x)
1	0,15	0,15
4	0,20	0,35
7	0,20	0,55
8	0,30	0,85
12	0,15	1,00
	1,00	

Solução:

O valor Mediano é igual a 7, pois, para $x \le 4$ *a Função Repartição* $F(4) = 0,35$ *e como para* $x \le 7$ *a Função Repartição ultrapassa o valor 0,5* $\left(F(7) = 0,55\right)$, *assim a Mediana é um dos "7s" coletados.*

Exemplo 7.7 - *Dada a Função Densidade de Probabilidade a seguir, determine o valor mediano.*

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & ,0 \le x < 1 \\ 0 & ,\textit{caso contrário} \end{cases}$$

Solução:

Sua Função Repartição é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ x^3 & ,0 \le x \le 1 \\ 1 & ,x > 1 \end{cases}$$

A Mediana será:

$$\begin{aligned} &F(Md = x) = 0,5 \\ &x^3 = 0,5 \\ &x = \sqrt[3]{0,5} \\ &Md \cong 0,7937 \end{aligned}$$

7.7.3 - *Moda – (Mo)*

É o valor da Variável Aleatória X de maior probabilidade.

No caso de X ser uma Variável Aleatória Discreta basta observarmos o valor de X de maior probabilidade.

Se X é uma Variável Aleatória Contínua devemos analisar os pontos onde a Função Densidade de Probabilidade apresenta inclinação igual a zero e estudarmos seus limites à esquerda e à direita, a fim de determinarmos seus pontos de máximo.

Uma Distribuição de Probabilidades e mesmo uma Função Densidade de Probabilidades pode apresentar mais de um valor modal e neste caso a Distribuição (ou a Função) será dita *Bimodal*, *Trimodal* ou *Plurimodal* dependendo do número de valores encontrados.

7.8 - MEDIDAS DE DISPERSÃO

7.8.1 - *DESVIO PADRÃO* - $\left(\sigma(x) \;\; ou \;\; \sigma_x\right)$

É definido como sendo a raiz quadrada da Esperança do quadrado dos desvios tomados em relação à Esperança de X, isto é:

$$\sigma(x) = \sqrt{E\left[(x-\mu_x)^2\right]}$$

Observando a equação vemos que o Desvio Padrão é a distância Média Quadrática em que os valores se afastam (à esquerda e à direita) da Esperança de X (Média Aritmética).

7.8.2 - *VARIÂNCIA* - $\left(\sigma^2(x) \;\; ou \;\; \sigma_x^2\right)$

É definida como sendo o quadrado do Desvio Padrão, isto é:

$$\sigma^2(x) = E\left[(x-\mu_x)^2\right]$$

Se a Variável Aleatória X é Discretas temos:

$$\sigma^2(x) = E\left[(x-\mu_x)^2\right] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (x_i-\mu_x)^2 \times p(x_i)$$

Se a Variável Aleatória X é Contínua, então:

$$VAR(x) = E\left[(x-\mu_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(x-\mu_x)^2 \times f(x)\right] \; dx$$

A Variância pode também ser obtida pela expressão:

$$\sigma^2(x) = E\left[x^2\right] - (\mu_x)^2$$

7.8.2.1 - Propriedades da Variância

- P.1 – A Variância de uma constante é ZERO

$$\sigma^2(K) = 0$$

- P.2 – A Variância do produto de uma constante por uma variável é igual ao produto do quadrado desta constante pela Variância da variável.

$$\sigma^2(Kx) = k^2 \times \sigma^2(x)$$

- P.3 – A Variância da soma algébrica de uma variável por uma constante é igual à Variância da variável.

$$\sigma^2(x \pm K) = \sigma^2(x)$$

- P.4 – Se X e Y são duas Variáveis Aleatórias Independentes então a Variância da soma algébrica das variáveis X e Y é igual à soma algébrica das Variâncias de X e de Y.

$$\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$$

7.8.3 - Covariância e Coeficiente de Correlação

Dizemos que se duas ou mais variáveis expressam a relação de causa e efeito, ou se elas variam concomitantemente, são variáveis consideradas correlacionadas. O objetivo básico da Covariância e do Coeficiente de Correlação é medir o grau de relacionamento existente entre variáveis, que imaginamos estarem ligadas por uma relação causa efeito.

A Covariância de duas Variáveis Aleatórias X e Y, representada por COV_{xy} é obtida por:

$$COV_{xy} = E\left[(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]$$

ou, simplesmente, por:

$$COV_{xy} = E[xy] - \mu_x \times \mu_y$$

Já o Coeficiente de Correlação ρ_{xy} é definido como:

$$\rho_{xy} = \frac{COV_{xy}}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

onde $-1 \leq \rho_{xy} \leq +1$.

Observações:

1) Se as Variáveis Aleatórias X e Y são independentes então $\rho_{xy} = 0$ e diz-se que não há relação LINEAR entre as Variáveis Aleatórias;
2) Se $\rho_{xy} = 0$ então não existe uma relação LINEAR entres as Variáveis Aleatórias X e Y, porém não quer dizer que não possa existir algum tipo de relação Não Linear entre elas.

7.9 - Exercícios Propostos

7.9.1) No lançamento simultâneo de dois dados, consideremos as seguintes variáveis aleatórias:

X = número de pontos obtidos no primeiro dado;
Y = número de pontos obtidos no segundo dado.
Determinar a distribuição de Probabilidade através de uma tabela das Variáveis Aleatórias:

a) W = X - Y
b) A = 2Y
c) Z = XY

7.9.2) Uma variável aleatória discreta tem a Distribuição de Probabilidade dada por:

$$P(x) = \frac{k}{x} \quad \text{para } x = 1, 3, 5, 7$$

a) Calcular o valor de k;
b) P(X = 5).

7.9.3) Seja Z a variável aleatória correspondente ao número de pontos de uma peça de dominó.

a) Construa a tabela de P(Z);
b) Determinar F(Z);
c) Calcular $P(2 < Z < 6)$;
d) Calcular F(8).

7.9.4) Numa sala existem 30 pessoas. O quadro a seguir apresenta a lista de idades destas pessoas.

17	18	20	22	18	20
20	21	19	21	22	25
19	17	22	19	25	17
22	25	20	17	25	21
18	19	25	25	18	18

a) Construa a tabela de Distribuição de Probabilidade;
b) P(18<X<20);
c) P(X>19);

7.9.5) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes com as seguintes distribuições:

X	1	3
P(x)	0,6	0,4

Y	5	10	12
P(y)	0,3	0,5	0,2

a) Calcule E[x] e E[y];
b) Calcular σ_x e σ_y ;

7.9.6) Um jogo consiste em se atirar um dado; se der faces 2 ou 5, a pessoa ganha R$ 50,00 por ponto obtido; se der faces 1 ou 6, a pessoa ganha R$ 100,00 por ponto obtido; se der faces 3 ou 4, a pessoa ganha R$ 150,00 por ponto obtido.

a) O jogo é honesto?
b) Calcule o desvio - padrão da distribuição.

7.9.7) Em uma classe há 6 homens e 3 mulheres. Sorteados 3 alunos ao acaso e sem reposição, faça X: V.A. número de homens sorteados. Calcule a média, a moda e o desvio - padrão da distribuição.

7.9.8) Se uma variável aleatória x apresenta $\mu_x = 8$ e $\sigma_x = 2$, calcule:

$a)$ $\mathrm{E}(2X)$;
$b)$ $\sigma^2(2X)$;
$c)$ $\mathrm{E}(3X - 2)$;
$d)$ $\sigma(4X - 3)$.

7.9.9) Determinar a média e o desvio - padrão do peso líquido de um produto, sabendo-se que a média do peso bruto é 800 g, com desvio de 20 g e o peso médio da embalagem é 100 g, com desvio de 10 g.

7.9.10) Um processo de fabricação produz peças com peso médio de 30 g e desvio - padrão de 0,7 g. Essas peças são acondicionadas em pacotes de uma dezena cada. A embalagem pesa em média 40 g, com variância 2,25 g^2 . Qual a média e o desvio - padrão do peso total da distribuição?

7.9.11) O lucro unitário (L) de um produto é dado por: L = 1,2V - 0,8C - 3,5. Sabendo-se que o preço unitário de venda (V) tem média R$ 60,00 e desvio - padrão R$ 5,00, e que o preço do custo unitário (C.) tem distribuição de média R$ 50,00 e o desvio - padrão R$ 2,00, qual a média e o desvio - padrão do lucro unitário ?

7.9.12) Uma variável aleatória x assume os valores 2, 3 e 5, com probabilidade 0,30, 0,50 e 0,20, respectivamente. Calcule o valor esperado e o desvio - padrão da variável $y = 2x - 3$.

7.9.13) Dada a variável aleatória

x	-1	2	5	8
p(x)	0,2	0,3	0,4	0,1

Calcule a média e o desvio - padrão da variável $y = \frac{4}{3}x - 3$.

7.9.14) Uma confeitaria produz 5 bolos em determinado dia. As probabilidades de vender nenhum, 1, 2, 3, 4 ou 5 valem respectivamente 1%, 5%, 20%, 30%, 29% e 15%. O custo total de produção de cada bolo é R$10,00 e o preço unitário de venda é R$20,00. Calcule o lucro médio, a variância e o desvio - padrão.

7.9.15) Um negociante espera vender um automóvel até sexta-feira. A expectativa de que venda na segunda-feira é de 50%. Na terça-feira é de 30%, na quarta-feira é de 10%, na quinta-feira é de 5% e na sexta-feira é de 5%. Seu lucro é de 3.000 u.m. se vender na segunda-feira e diminui 40% a cada dia.

a) Calcule o valor esperado de lucro deste negociante nesta venda;
b) Calcule a variância;
c) Calcule o desvio - padrão.

7.9.16) Uma máquina fabrica placas de papelão que podem apresentar nenhum, 1, 2, 3 ou 4 defeitos, com probabilidade 90%, 5%, 3%, 1% e 1%, respectivamente. O preço de venda de uma placa perfeita é 10 u.m. e à medida que apresente defeitos, o preço cai 50% para cada defeito apresentado. Qual é o preço médio de venda destas placas?

7.9.17) Uma prensa de fraldas descartáveis produz 4 modelos, A, B, C e D. A tabela abaixo anota as proporções fabricadas, a expectativa de vendas de cada tipo, lucros correspondentes a peças vendidas. A peça não comercializada é reaproveitada com um custo adicional.

	A	B	C	D
Expectativa de venda	70%	80%	60%	60%
Lucro por unidade vendida	0,04	0,08	0,02	0,10
Custo adicional por unidade não vendida	0,02	0,05	0,01	0,04
Proporção na produção total	50%	30%	10%	10%

Qual é o retorno esperado, por unidade?

7.9.18) A fim de verificar a precisão de sua situação financeira, as companhias utilizam auditores, que verificam a escrita. Suponha que os empregados de uma companhia executem recebimentos errados 5% das vezes. Se um auditor examina, aleatoriamente, 3 recebimentos:

a) calcule a distribuição de x, o número de erros detectados pelo auditor;
b) calcule a probabilidade de o auditor detectar mais de 1 erro.

7.9.19) Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade.

X	p(x)
0	$1/8$
1	$1/4$
2	$1/2$
3	$1/8$

Calcule o valor esperado e a variância de X.

7.9.20) Seja Y o número de vezes que uma dona de casa visita um bazar durante uma semana. Suponha que a distribuição de probabilidade de Y seja.

Y	p(y)
0	0,1
1	0,5
2	0,3
3	0,1

Calcule:

a) o valor esperado de Y;
b) seu desvio padrão.

7.9.21) Um vendedor de equipamento pesado tem possibilidade de manter contatos com um usuários ou dois usuários, por dia, com probabilidade de 1/3 e 2/3, respectivamente. Pode resultar "nenhuma venda" ou "venda de R$ 50 000", com probabilidades de 9/10 e 1/10, respectivamente. Qual é o valor esperado para vendas diárias?

7.9.22) A distribuição de probabilidade de X, número de automóveis novos vendidos diariamente por uma pequena concessionária, está indicado na tabela a seguir:

X	p(x)
0	0,10
1	0,20
2	0,40
3	0,15
4	0,10
5	0,03
6	0,01
7	0,01

a) Calcule o número esperado de vendas diárias.
b) Calcule a variância e o desvio - padrão
c) Qual a probabilidade de x pertencer ao intervalo $\mu \pm 2\sigma$?
d) Escolhendo-se 3 dias aleatoriamente, qual é a probabilidade de $X \geq 3$ para esses 3 dias?

7.9.23) Dados sobre acidentes automobilísticos levantados por uma companhia de seguros informam o seguinte: a probabilidade de que um motorista segurado sofra um acidente automobilístico é de 0,15. Se um acidente ocorrer, os danos com o veículo montam 20% do seu valor de mercado, com probabilidade de 0,8, enquanto a probabilidade de esses danos atingirem 60% do seu valor de mercado é de 0,12, e uma perda total tem probabilidade de 0,08. Que prêmio deve a companhia pagar a um automóvel com valor de R$ 4 000, a fim de que o lucro esperado da companhia seja nulo?

7.9.24) Um soprador de vidro faz três tipos de jarras. A primeira tem um peso médio de 1,2 Kg com desvio - padrão de 120 g. A segunda tem peso médio de 2,5 Kg com desvio - padrão de 200 g. A terceira tem peso médio de 3 Kg com desvio - padrão de 250 g. Um comprador fez um pedido de 5 jarras do primeiro tipo, 7 do segundo e 4 do terceiro. Sabendo-se que as jarras são embaladas individualmente em caixas com peso médio de 50 g com desvio - padrão de 5 g e que depois todas as embalagens serão embaladas numa única caixa com peso médio de 750 g com desvio - padrão de 50g, de quanto até quanto variará o custo com o transporte se a transportadora cobra R$ 2,50 por kg?

7.9.25) Os valores médios e os desvios dos custos da fabricação de uma unidade de determinado produto e listada abaixo.

Itens	Custo Médio Unitário (R$)	Desvio Padrão do Custo Unitário (R$)	Quantidade
Matéria Prima A	152,00	8,50	3 Kg
Matéria Prima B	85,00	3,20	7 Kg
Matéria Prima C	290,00	12,00	1,5 Kg
Mão de Obra	15,30	2,00	8 Horas

Se o fabricante quer ter um lucro médio de R$ 200,00 com um Desvio Padrão de R$ 15,00, qual deve ser o preço médio de venda e seu desvio padrão?

7.9.26) Seja a Distribuição Conjunta de X e Y a seguir:

X \ Y	-3	-1	1	2
3	0,15	0,08	0,12	0,03
5	0,12	0,03	0,05	0,07
6	0,13	0,15	0,02	0,05

Determine:

a) As Distribuições Marginais de X e de Y;
b) A Esperança de X;
c) A Esperança de Y;
d) A Esperança de X^2;
e) A Esperança de Y^2;
f) A Esperança Conjunta de XY;
g) A Variância de X;
h) A Variância de Y;
i) O Desvio Padrão de X;
j) O Desvio Padrão de Y;
k) A Covariância de XY;
l) O Coeficiente de Correlação de XY.

7.9.27) Determine o Coeficiente de Correlação de XY das Distribuições Conjuntas de Xe Y a seguir.

a)

X \ Y	6	7	9	11
0	0,07	0,04	0,11	0,07
1	0,08	0,07	0,07	0,03
3	0,03	0,03	0,04	0,1
5	0,06	0,05	0,13	0,02

b)

X \ Y	-3	-1	2	3	6
-1	0,04	0,02	0,01	0,1	0,01
2	0,05	0,06	0,03	0,03	0,02
5	0,07	0,04	0,04	0,04	0,05
7	0,06	0,05	0,07	0,02	0,04
8	0,02	0,03	0,02	0,05	0,03

c)

X \ Y	-4	-3	1	2
-1	0,015	0,2	0,085	0,04
3	0,18	0,12	0,004	0,002
5	0,11	0,08	0,13	0,034

d)

X \ Y	1	3	5	7
2	0,07	0,1	0,02	0,04
6	0,01	0,12	0,04	0,03
8	0,07	0,08	0,15	0,05
9	0,05	0,07	0,02	0,08

e)

X \ Y	-4	-3	-1	1
-2	0,002	0,009	0,11	0,14
1	0,005	0,003	0,139	0,003
2	0,018	0,135	0,03	0,005
3	0,27	0,12	0,009	0,002

f)

X \ Y	-4	-3	-1
-2	0,002	0,13	0,205
1	0,005	0,087	0,109
2	0,018	0,065	0,007
3	0,273	0,09	0,009

7.9.28) *Ache a função repartição e esboce o gráfico de* $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(1-x^2\right), \ 0 < x < 1 \\ 0, \text{ caso contrario} \end{cases}$

7.9.29) *Ache a função repartição e esboce o gráfico de* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{x}, \ 0 < x < 2 \\ 0, \text{ caso contrario} \end{cases}$

7.9.30) Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}\text{x+k}, \ 0 \le x \le 3 \\ 0, \text{ caso contrario} \end{cases}$

Pede - se:

a) o valor de K;
b) $P(1 \le x \le 2)$.

7.9.31) Uma variável aleatória contínua X tem a seguinte densidade de probabilidade:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ k, & 0\le x<2\\ k(x-1), & 2\le x<4\\ 0, & x\ge 4\end{cases}$$

Pede - se:

a) O valor de K;
b) Encontre F(x) e esboce o gráfico.

7.9.32) A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X é proporcional a x(1-x) para 0 < x < 1, e é zero para outros valores de x. Pede - se:

a) Mostre que $f(x)=6x(1-x)$ *para 0 < x < 1;*
b) Calcule a Função Repartição F(x);
c) Calcule $P(x\le 1/2)$.

7.9.33) Seja X uma variável aleatória contínua tal que:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{para } x<0\\ Ax & \text{para } 0\le x<500\\ A(1000-x) & \text{para } 500\le x<1000\\ 0 & \text{para } x\ge 1000\end{cases}$$

Determinar:

a) O valor da constante A;
b) $P(250\le x\le 750)$.

7.9.34) Dada a Função Repartição

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{para } x<-1\\ \dfrac{x+1}{2} & \text{para } -1\le x<1\\ 1 & \text{para } x\ge 1\end{cases}$$

Esboce o gráfico de $f(x)$ *e calcule:*

$a)$ $P\left(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}\right)$;
$b)$ $P(x=0)$;
$c)$ $P(2<x\le 3)$.

7.9.35) Dada a função densidade conjunta de (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} 3x^2y+3xy^2 & para \begin{cases} 0 \le \mathrm{x} \le 1 \\ 0 \le \mathrm{y} \le 1 \end{cases} \\ 0 & para\ outros\ valores \end{cases}$$

a) Determine a funções densidade marginais de X e Y;
b) Calcular $E(x)$ e $E(y)$ *;*
c) Calcular $VAR(x)$ e $VAR(y)$ *;*
d) Calcular $P(0{,}5 \le x \le 0{,}75)$ *;*
e) Calcular o coeficiente de correlação de X e Y.

7.9.36) Suponha que (X,Y) tenha a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & para \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \\ 0 & casa\ contrario \end{cases}$$

a) Calcule as distribuições marginais de X e Y;
b) Calcule as esperanças de X e de Y;
c) Calcule a Covariância de X e Y.

7.9.37) Uma variável aleatória X tem uma densidade de probabilidade dada por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x} & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{caso contraio} \end{cases}$$

Determine:

a) K;
b) $\mu_{(x)}$*;*
c) Md_x*;*
d) Mo_x*;*
e) VAR(x).`

7.9.38) X é uma variável aleatória contínua, tal que $f(x) = Kx^2 - kx^3$ para $0 \le x \le 1$ e $f(x) = 0$ para outros valores de x. Determine:

a) K;
b) E[x];
c) $Md_{(x)}$*;*
d) VAR(x).

7.9.39) X é uma variável aleatória contínua tal que a função repartição é dada por:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,x<0 \\ x^3 & ,0\le x<1 \\ 1 & ,x\le 1 \end{cases}$$

a) Calcule a média;
b) Determine a mediana;
c) Calcule a variância.

7.9.40) (X,Y) é uma variável bidimensional contínua com a função densidade conjunta:

$$f(x,y)=\begin{cases} c(x^2+y^2) & ,\ 0\le \mathrm{x}\le 1 \text{ e } 0\le \mathrm{y}\le 1 \\ 0 & ,\ \text{caso contrario} \end{cases}$$

Determine:

a) A constante c;
b) P(X < ½, Y > ½);
c) P(¼ < x < ¾);
d) P(Y < ½);
e) Se X e Y são independentes;
f) A Covariância de X e Y;
g) O coeficiente de Correlação de X e Y.

7.9.41) Considere a função dada por:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ;\ x<1,5 \\ x & ;\ 1,5\le x\le 2 \\ 0,25 & ;\ 2\le x\le 2,5 \\ 0 & ;\ x>2,5 \end{cases}$$

a) Mostre que f é uma Função Densidade de Probabilidades;
b) Qual a probabilidade de $1,3<x<2$

7.9.42) A função f dada por:

$$f(x)=\begin{cases} 0,2+3x & ;\ a\le x\le b \\ 0 & ;\ caso\ contrário \end{cases}$$

é uma função Densidade de Probabilidade, com $b-a=0,5.$

a) Calcule a e b;
b) Calcule a $P\left(x<\frac{a+b}{2}\right).$

7.9.43) Determine o Coeficiente de Correlação de XY da função Densidade de Probabilidade Conjunta de X e Y.

$$f(x,y)=\begin{cases} k\left(3x^2+3y^2\right) & \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 1 \end{cases} \\ 0 & Caso\ contrario \end{cases}$$