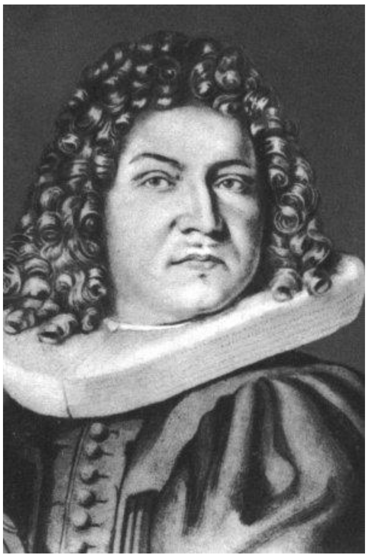
Modelos de Distribuição Discreta



Jakob Bernoulli, ou **Jacob**, ou **Jacques**, ou **Jacob I Bernoulli**, (Basiléia, 27 de Dezembro de 1654 — Basiléia, 16 de Agosto de 1705) foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas.

Publicou a primeira integração de uma equação diferencial; deu solução ao problema dos isoperímetros, que abriu caminho ao cálculo das variações de Euler e Lagrange e estendeu suas principais aplicações ao cálculo das probabilidades. É considerado o pai do cálculo exponencial. Foi professor de matemática em Basiléia, tendo sido importantíssima sua contribuição à geometria analítica, à teoria das probabilidades e ao cálculo de variações.

Em 1713, depois de sua morte, foi publicado seu grande tratado sobre a teoria das probabilidades Ars Conjectandi, que ainda oferece interesse prático na aplicação da teoria da probabilidade no seguro e na estatística.

FONTE:http://pt.wikipedia.org/wiki/Brasil

8 - MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS DE PROBABILIDADES

8.1 - DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Suponhamos um experimento E onde:

- As diversas provas se realizam sob condições idênticas;
- Cada prova apresenta somente dois resultados (Sucesso (S) ou Fracasso $(\bar{S})$), mutuamente excludentes $\Rightarrow P(S)+P(\bar{S})=1$;
- A probabilidade $p=P(S)$ é a mesma em cada prova, isto implica que $p+q=1$ onde $q=P(\bar{S})$;
- As provas são independentes umas das outras.

Um experimento nas condições acima define uma distribuição de Bernoulli, ou seja, temos uma variável aleatória X discreta em que:

X	P(x)
Fracasso	q
Sucesso	p
	1

Para efeito de cálculos foram designados os valores 0 e 1, respectivamente, para os resultados Fracasso e Sucesso, assim:

X	P(x)
0	q
1	p
	1

Uma Variável Aleatória com estas características apresenta uma Distribuição de Bernoulli.

8.1.1 - *ESPERANÇA DA DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI*

$$\mu_x = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i\, p(x_i)$$
$$\mu_x = 0\times q + 1\times p$$
$$\mu_x = p$$

8.1.2 - *VARIÂNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI*

$$\sigma^2(x) = E\left[\left(x_i-\mu_x\right)^2\right] = E\left[x_i^2\right]-\mu_x^2$$
$$mas$$
$$E\left[x_i^2\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i^2\, p(x_i) = 0^2\times q + 1^2\times p = p$$
$$\text{logo,}$$
$$\sigma^2(x) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

8.2 - Distribuição Binomial

Seja um experimento que consiste de um número “n” fixo de provas de Bernoulli, com probabilidade p (constante) de sucesso para cada prova.

A distribuição de probabilidade da Variável Aleatória X é chamada “*Distribuição Binomial com n provas e probabilidade p de sucesso*”.

A probabilidade de, ao realizarmos n provas, se obter x sucessos, e consequentemente (n - x) fracassos, numa ordem qualquer é:

$$p^x q^{n-x}$$

Como temos C_n^x disposições possíveis de ocorrências, a função Distribuição de Probabilidade Binomial da Variável Aleatória X fica:

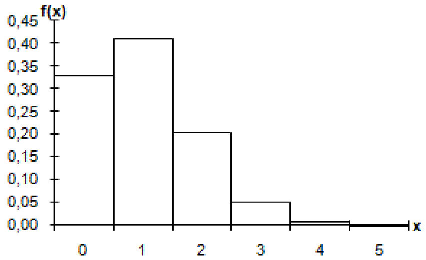
$$f(x) = P(X = x) = C_n^x \; p^x q^{n-x} \quad , 0 \le x \le n$$

Exemplo 8.1 - *Consideremos os seguintes casos:*

a) n=5 e p = 0,2

$P(X=0) = f(0) = 0,3277$
$P(X=1) = f(1) = 0,4096$
$P(X=2) = f(2) = 0,2048$
$P(X=3) = f(3) = 0,0512$
$P(X=4) = f(4) = 0,0064$
$P(X=5) = f(5) = 0,0003$

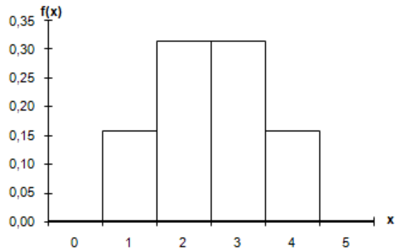
O Histograma desta distribuição fica:



b) n=5 e p = 0,5

$P(X=0) = f(0) = 0,0313$
$P(X=1) = f(1) = 0,1562$
$P(X=2) = f(2) = 0,3125$
$P(X=3) = f(3) = 0,3125$
$P(X=4) = f(4) = 0,1562$
$P(X=5) = f(5) = 0,0313$

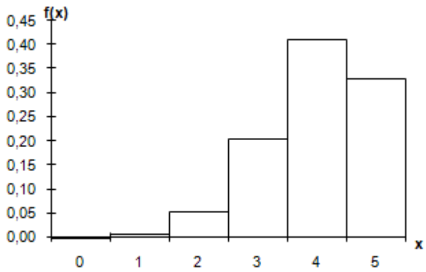
O Histograma desta distribuição fica:



c) n=5 e p = 0,8

$P(X=0) = f(0) = 0,0003$
$P(X=1) = f(1) = 0,0064$
$P(X=2) = f(2) = 0,0512$
$P(X=3) = f(3) = 0,2048$
$P(X=4) = f(4) = 0,4096$
$P(X=5) = f(5) = 0,3277$

O Histograma desta distribuição fica:



Podemos observar que para:

- *p = 0,5 a distribuição é SIMÉTRICA*
- *p < 0,5 a distribuição é ASSIMÉTRICA À ESQUERDA*
- *p > 0,5 a distribuição é ASSIMÉTRICA À DIREITA*

Matematicamente representamos uma variável com Distribuição Binomial por:

$$X \overset{d}{=} B(n; p)$$

8.2.2 - Esperança da Distribuição Binomial

Como a Distribuição Binomial consiste de "n" Distribuições de Bernoulli temos:

$$\mu_x = np$$

8.2.3 - Variância da Distribuição Binomial

De maneira análoga à Esperança a Variância da Distribuição Binomial será:

$$\sigma_x^2 = npq$$

Exemplo 8.2 - *Um estudo mostra que 70% dos pacientes que vão a uma clínica devem esperar no mínimo 15 minutos até serem atendidos. Determine a probabilidade de que para 8 pacientes:*

a) Nenhum paciente tenha que se sujeitar à espera;
b) Dois pacientes tenham que se sujeitar à espera;
c) Seis pacientes tenham que se sujeitar à espera.

<u>*Solução*</u>

A probabilidade de sucesso (o paciente ter que se sujeitar à espera) é de 70%, isto é, 0,7, logo a probabilidade de fracasso é de 0,3.

a)

$$P(X = x) = f(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$
$$P(X = 0) = f(0) = C_8^0 0,7^0 0,3^8$$
$$f(0) = 0,3^8$$
$$f(0) = 0,00007$$

b)

$$P(X = x) = f(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$
$$P(X = 2) = f(2) = C_8^2 0,7^2 0,3^6$$
$$f(0) = 28 \times 0,7^2 \times 0,3^6$$
$$f(0) = 0,00122$$

c)

$$P(X = x) = f(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$
$$P(X = 5) = f(5) = C_8^5 0,7^5 0,3^3$$
$$f(0) = 56 \times 0,7^5 \times 0,3^3$$
$$f(0) = 0,25412$$

Exemplo 8.3 - *Determine a probabilidade de um único "2" sair em 3 lançamentos de um dado:*

Solução

A probabilidade de sucesso (sair a face 2) é $^{1}\!/_{6}$ *, a probabilidade de fracasso (NÃO sair face 2) é* $^{5}\!/_{6}$ *, logo*

$$f(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$
$$f(1) = C_3^1 \left(\tfrac{1}{6}\right)^1 \left(\tfrac{5}{6}\right)^2$$
$$f(2) = 0,3472222$$

Exemplo 8.4 - *Seja X uma Variável com Distribuição Binomial com* $X \overset{d}{=} B(9;0,25)$ *. Determine:*

a) $P(X \leq 5)$

b) $P(3 \leq X \leq 7)$

Solução

Utilizaremos a Tabela da Distribuição Binomial para resolver este exemplo.

De acordo com os dados $n=9$ *e* $p=0,25$*.*

A tabela da Distribuição Binomial está estruturada de maneira que temos o valor de "n", os possíveis valores de "x" e a probabilidade de sucesso "p". devemos procurar uma página onde encontremos $n=9$ *e* $p=0,25$ *(veja figura 28 a seguir).*

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL ACUMULADA $P(X \leq x) = \sum_{0}^{x} (C$

n	x	p: 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
9	0	0,630249	0,387420	0,231617	0,134218	0,075085	0,040354	0,020712	0,010078	0,004605	0,001953
	1	0,928789	0,774841	0,599479	0,436208	0,300339	0,196003	0,121085	0,070544	0,038518	0,019531
	2	0,991639	0,947028	0,859147	0,738198	0,600677	0,462831	0,337273	0,231787	0,149503	0,089844
	3	0,999357	0,991669	0,966068	0,914358	0,834274	0,729659	0,608894	0,482610	0,361385	0,253906
	4	0,999967	0,999109	0,994371	0,980419	0,951073	0,901191	0,828281	0,733432	0,621421	0,500000
	5	0,999999	0,999936	0,999366	0,996934	0,990005	0,974705	0,946412	0,900647	0,834178	0,746094
	6	1,000000	0,999997	0,999954	0,999686	0,998657	0,995709	0,988818	0,974965	0,950227	0,910156
	7	1,000000	1,000000	0,999998	0,999981	0,999893	0,999567	0,998604	0,996199	0,990920	0,980469
	8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999996	0,999980	0,999921	0,999738	0,999243	0,998047
	9	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
10	0	0,598737	0,348678	0,196874	0,107374	0,056314	0,028248	0,013463	0,006047	0,002533	0,000977
	1	0,913862	0,736099	0,544300	0,375810	0,244025	0,149308	0,085954	0,046357	0,023257	0,010742
	2	0,988496	0,929809	0,820196	0,677800	0,525593	0,382783	0,261607	0,167290	0,099560	0,054688
	3	0,998972	0,987205	0,950030	0,879126	0,775875	0,649611	0,513827	0,382281	0,266038	0,171875
	4	0,999936	0,998365	0,990126	0,967207	0,921873	0,849732	0,751496	0,633103	0,504405	0,376953

Figura 28.- Tabela da Distribuição Binomial

a) $P(X \leq 5)$ *?*

A tabela já fornece o valor acumulado $(\leq)$*, assim temos que apenas buscar o valor correto. Para* $n=9$*,* $p=0,25$ *e* $x=5$*, temos (Veja figura 29 a seguir):*

$P(X \leq 5) = 0,990005$

b) $P(3 \le X \le 7)$ *?*

Para resolver esta probabilidade precisaremos de dois valores da tabela: $\left(P(X \le 7) \ \ e \ \ P(X \le 2)\right)$

$$P(3 \le X \le 7) = P(X \le 7) - P(X \le 2)$$
$$P(3 \le X \le 7) = 0{,}999893 - 0{,}600677$$
$$P(3 \le X \le 7) = 0{,}399216$$

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL ACUMULADA $P(X \le x) = \sum_{0}^{x} (C$

n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
9	0	0,630249	0,387420	0,231617	0,134218	0,075085	0,040354	0,020712	0,010078	0,004605	0,001953
	1	0,928789	0,774841	0,599479	0,436208	0,300339	0,196003	0,121085	0,070544	0,038518	0,019531
	2	0,991639	0,947028	0,859147	0,738198	0,600677	0,462831	0,337273	0,231787	0,149503	0,089844
	3	0,999357	0,991669	0,966068	0,914358	0,834274	0,729659	0,608894	0,482610	0,361385	0,253906
	4	0,999967	0,999109	0,994371	0,980419	0,951073	0,901191	0,828281	0,733432	0,621421	0,500000
	5	0,999999	0,999936	0,999366	0,996934	0,990005	0,974705	0,946412	0,900647	0,834178	0,746094
	6	1,000000	0,999997	0,999954	0,999686	0,998657	0,995709	0,988818	0,974965	0,950227	0,910156
	7	1,000000	1,000000	0,999998	0,999981	0,999893	0,999567	0,998604	0,996199	0,990920	0,980469
	8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999996	0,999980	0,999921	0,999738	0,999243	0,998047
	9	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
10	0	0,598737	0,348678	0,196874	0,107374	0,056314	0,028248	0,013463	0,006047	0,002533	0,000977
	1	0,913862	0,736099	0,544300	0,375810	0,244025	0,149308	0,085954	0,046357	0,023257	0,010742
	2	0,988496	0,929809	0,820196	0,677800	0,525593	0,382783	0,261607	0,167290	0,099560	0,054688
	3	0,998972	0,987205	0,950030	0,879126	0,775875	0,649611	0,513827	0,382281	0,266038	0,171875
	4	0,999936	0,998365	0,990126	0,967207	0,921873	0,849732	0,751496	0,633103	0,504405	0,376953

Figura 29.- Solução da letra (a) do exemplo

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL ACUMULADA $P(X \le x) = \sum_{0}^{x} (C$

n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
9	0	0,630249	0,387420	0,231617	0,134218	0,075085	0,040354	0,020712	0,010078	0,004605	0,001953
	1	0,928789	0,774841	0,599479	0,436208	0,300339	0,196003	0,121085	0,070544	0,038518	0,019531
	2	0,991639	0,947028	0,859147	0,738198	0,600677	0,462831	0,337273	0,231787	0,149503	0,089844
	3	0,999357	0,991669	0,966068	0,914358	0,834274	0,729659	0,608894	0,482610	0,361385	0,253906
	4	0,999967	0,999109	0,994371	0,980419	0,951073	0,901191	0,828281	0,733432	0,621421	0,500000
	5	0,999999	0,999936	0,999366	0,996934	0,990005	0,974705	0,946412	0,900647	0,834178	0,746094
	6	1,000000	0,999997	0,999954	0,999686	0,998657	0,995709	0,988818	0,974965	0,950227	0,910156
	7	1,000000	1,000000	0,999998	0,999981	0,999893	0,999567	0,998604	0,996199	0,990920	0,980469
	8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999996	0,999980	0,999921	0,999738	0,999243	0,998047
	9	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
10	0	0,598737	0,348678	0,196874	0,107374	0,056314	0,028248	0,013463	0,006047	0,002533	0,000977
	1	0,913862	0,736099	0,544300	0,375810	0,244025	0,149308	0,085954	0,046357	0,023257	0,010742
	2	0,988496	0,929809	0,820196	0,677800	0,525593	0,382783	0,261607	0,167290	0,099560	0,054688
	3	0,998972	0,987205	0,950030	0,879126	0,775875	0,649611	0,513827	0,382281	0,266038	0,171875
	4	0,999936	0,998365	0,990126	0,967207	0,921873	0,849732	0,751496	0,633103	0,504405	0,376953

Figura 30.- Solução da letra (b) do exemplo

8.3 - Exercícios Propostos

8.3.1) Uma moeda é jogada 10 vezes. Calcular as seguintes probabilidades:

a) de ocorrer 6 caras;
b) de dar pelo menos 2 caras;
c) de não dar nenhuma coroa;
d) de dar pelo menos uma coroa;
e) de não dar 5 caras e 5 coroas.

8.3.2) Admitindo-se que os nascimentos de meninas e meninos sejam iguais, calcular a probabilidade de um casal com 6 filhos ter 4 filhos homens e 2 mulheres.

8.3.3) Em 320 famílias com 4 crianças cada uma, quantas se esperaria que tivessem:

a) nenhuma menina;
b) 3 meninos;
c) 4 meninos.

8.3.4) Um time X tem $\frac{2}{3}$ de probabilidade de vitória sempre que joga. Se X jogar 5 partidas, calcule a probabilidade de:

a) X vencer exatamente 3 partidas;
b) X vencer ao menos uma partida;
c) X vencer mais da metade das partidas.

8.3.5) A probabilidade de um atirador acertar o alvo é $1/3$. Se ele atirar 6 vezes, qual a probabilidade de:

a) acertar exatamente 2 tiros?
b) não acertar nenhum tiro?

8.3.6) Num teste do tipo certo - errado, com 100 perguntas, qual a probabilidade de um aluno respondendo as questões ao acaso, acertar 70% das perguntas ?

8.3.7) Se 5% das lâmpadas de certa marca são defeituosas, achar a probabilidade de que, numa amostra de 100 lâmpadas, escolhidas ao acaso, tenhamos:

a) nenhuma defeituosa;
b) 3 defeituosas;
c) mais do que 1 boa.

8.3.8) Estudos mostram que 30% dos pacientes atendidos por uma clínica não efetuam seus pagamentos corretamente, e as contas perdoadas. Supondo que 4 novos pacientes representem uma escolha aleatória entre o grande número de pacientes atendidos por uma clínica. Calcule a probabilidade de:

a) todas as suas contas serem perdoadas;
b) uma dessas contas ser perdoada;
c) nenhuma dessas contas ser perdoada.

8.3.9) Uma pesquisa feita em certo estado indicou que 9 entre 10 automóveis têm seguro. Se 4 autos sofrerem um acidente, qual a probabilidade de:

a) não mais de 2 terem seguro?
b) exatamente 2 terem seguro?

8.3.10) Sabe-se que 90% dos compradores de TV em cores não usam a garantia. Suponha que 20 consumidores adquiram TV em cores em certa loja. Qual é a probabilidade de pelo menos 2 desses 20 compradores utilizarem a garantia? E até 5 compradores utilizarem a garantia?

8.3.11) Um carregamento de 200 aparelhos portáteis de TV é recebido por um vendedor. Para evitar receber um carregamento "ruim", ele inspeciona 5 aparelhos e aceitará o grupo todo, se observar 0 ou 1 defeito. Suponha que haja, na verdade, 20 aparelhos defeituosos nesse carregamento de 200.

a) Qual é a probabilidade de o vendedor aceitar todo o carregamento?
b) Admitindo-se que o vendedor aceite o carregamento, qual é a probabilidade de ele ter observado somente 1 defeito?

8.3.12) Uma companhia aérea descobre que 5% das pessoas que fazem reservas para certo vôo não viajam. Se a linha aérea vender 160 passagens para um vôo de 155 lugares, qual é a probabilidade de haver lugar para todos os que fizeram reserva ?

8.3.13) Acredita-se que 20% dos moradores das proximidades de uma grande indústria siderúrgica têm alergia aos poluentes lançados ao ar. Admitindo que este percentual de alérgicos seja real (correto), calcule a probabilidade de que pelo menos 4 moradores tenham alergia entre 13 selecionados ao acaso.

8.3.14) Três em cada quatro alunos de uma universidade fizeram cursinho antes de prestar vestibular. Se 16 alunos são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que:

a) Pelo menos 12 tenham feito cursinho?
b) No máximo 13 tenham feito cursinho?
c) Exatamente 12 tenham feito cursinho?
d) Em um grupo de 80 alunos selecionados ao acaso, qual é o número esperado de alunos que fizeram cursinho? E a variância?

8.3.15) Admita que, respectivamente, 90% e 80% dos indivíduos das populações A e B sejam alfabetizados. Se 12 pessoas da população A e 10 da população B forem selecionadas ao acaso, qual é a probabilidade de que pelo menos uma não seja alfabetizada? Que suposições você fez para responder a esta questão?

8.3.16) Um agricultor cultiva laranjas e também produz mudas para vender. Após alguns meses a muda pode ser atacada por fungos com probabilidade 0,02 e, nesse caso, ela tem probabilidade 0,5 de ser recuperável. O custo de cada muda produzida é R$ 1,20, que será acrescido de mais R$ 0,50 se precisar ser recuperada. As irrecuperáveis são descartadas. Sabendo que cada muda é vendida a R$ 3,50, encontre a distribuição da variável aleatória "lucro por muda produzida".

a) Qual é o lucro médio por muda produzida?
b) Em uma plantação de 10000 mudas, qual é o lucro esperado?
c) Em um lote de 50 mudas, qual é a probabilidade de que pelo menos 45 sejam aproveitáveis?

8.3.17) Seis parafusos são escolhidos ao acaso da produção de certa máquina, que apresenta 10% de peças defeituosas. Qual a probabilidade de serem defeituosos dois deles?

8.3.18) Dos estudantes de um colégio, 41 % fumam cigarro. Escolhem-se seis ao acaso para darem uma opinião sobre o fumo. Determine a probabilidade de:

a) nenhum dos seis ser fumante
b) todos os seis fumarem
c) ao menos a metade dos seis ser fumante

8.3.19) 12% dos que reservam lugar em um vôo faltam ao embarque. O avião comporta 15 passageiros.

a) Determine a probabilidade de que todos os 15 que reservaram lugar compareçam ao embarque;
b) Se houve 16 pedidos de reserva, determine a probabilidade de uma pessoa ficar de fora;
c) Se houve 16 pedidos de reserva, determine a probabilidade do avião voar lotado.

8.3.20) Uma firma de pedidos pelo correio envia uma carta circular que terá uma taxa de respostas de 10%. Suponha que 20 cartas circulares são endereçadas a uma nova área geográfica como um teste de mercado. Supondo que na nova área é aplicável a taxa de respostas de 10%, determinar as probabilidades dos seguintes eventos:

a) ninguém responde;
b) exatamente duas pessoas respondem;
c) a maioria das pessoas responde;
d) respondem menos do que 20% das pessoas.

8.3.21) Durante um ano particular, 70% das ações ordinárias negociadas na Bolsa de Nova York tiveram aumentadas suas cotações, enquanto 30% tiveram suas cotações diminuídas ou estáveis. No começo do ano, um serviço de assessoria financeira escolhe 10 ações como sendo “especialmente recomendadas”. Se as 10 ações representam uma seleção aleatória, qual a probabilidade de que:

a) todas as 10 ações tivessem suas cotações aumentadas;
b) ao menos 8 ações tivessem suas cotações aumentadas;
c) menos do que quatro ações tivessem suas cotações aumentadas.

8.3.22) Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga muito grande de tubos que se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que:

a) não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos;
b) exatamente 3 tubos sejam defeituosos.

8.3.23) Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que:

a) 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis;
b) De 5 a 9 itens extraídos sejam aceitáveis;
c) No mínimo 3 itens extraídos sejam aceitáveis.

8.4 - Distribuição de Poisson

É aplicada nos casos em que o número de fracassos ou o número de provas são grandezas inumeráveis.

A probabilidade de uma Variável Aleatória Discreta X é dada, pela Distribuição de Poisson, por:

$$P(x,t)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$
$$onde$$
$$\lambda=\mu_x=VAR(x)$$

Matematicamente representamos uma variável com Distribuição de Poisson por:

$$X\overset{d}{=}P(\lambda)$$

Exemplo 8.5 - *Chegam, em média, 10 navios-tanque por dia a um porto, que tem capacidade para 15 destes navios. Qual a probabilidade de que, em determinado dia, um ou mais navios tenham que ficar "ao largo" aguardando uma vaga?*

<u>Solução</u>

Resolveremos este problema de duas maneiras. A primeira utilizando a fórmula e a segunda utilizando a tabela da Distribuição de Poisson

1ª maneira:

Se o porto tem uma capacidade de 15 navios, desejamos determinar a probabilidade de em determinado dia chegarem mais de 15 navios ao porto.

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15)$$

$$P(X > 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} P(x) = 1 - \sum_{x=0}^{15} \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

$\lambda = 10$*, assim*

$$P(X > 15) = 1 - \left\{ \frac{10^0}{0!} e^{-10} + \frac{10^1}{1!} e^{-10} + \frac{10^2}{2!} e^{-10} + \frac{10^3}{3!} e^{-10} + \ldots + \frac{10^{14}}{14!} e^{-10} + \frac{10^{15}}{15!} e^{-10} \right\}$$

$$P(X > 15) = 1 - 0{,}9513 = 0{,}0487$$

2ª maneira:

Já sabemos que a probabilidade desejada é:

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15)$$

A tabela de Probabilidades de Poisson, assim como as outras tabelas de probabilidades, é uma tabela de probabilidades acumuladas. Portanto ela nos fornece a $P(X \leq x_o)$.

Devemos, então, procurar na tabela onde temos $\lambda = 10$ *e x = 15. Para estes valores, encontramos na tabela o valor 0,9512 que é* $P(X \leq 15)$ *(Figura31). Portanto, temos:*

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - 0{,}9512 = 0{,}0488$$

Distribuição de Poisson Acumulada $P(X \leq x) = \sum_{x=0}^{x} \left(\frac{e^{-\lambda} (\lambda)^x}{x!} \right)$

	λ									
x	9,05	9,10	9,15	9,20	9,25	9,30	9,35	9,40	9,45	9,50
0	0,00012	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00007
1	0,00118	0,00113	0,00108	0,00103	0,00099	0,00094	0,00090	0,00086	0,00082	0,00079
2	0,00599	0,00575	0,00552	0,00531	0,00510	0,00490	0,00470	0,00452	0,00434	0,00416
3	0,02049	0,01978	0,01909	0,01842	0,01777	0,01715	0,01655	0,01597	0,01540	0,01486
4	0,05330	0,05168	0,05011	0,04858	0,04709	0,04565	0,04424	0,04288	0,04155	0,04026
5	0,11269	0,10975	0,10688	0,10407	0,10133	0,09865	0,09603	0,09347	0,09097	0,08853
6	0,20226	0,19782	0,19346	0,18917	0,18495	0,18080	0,17673	0,17273	0,16881	0,16495
7	0,31807	0,31232	0,30662	0,30100	0,29544	0,28995	0,28453	0,27917	0,27388	0,26866
8	0,44908	0,44255	0,43606	0,42961	0,42320	0,41683	0,41051	0,40424	0,39801	0,39182
9	0,58082	0,57424	0,56765	0,56108	0,55451	0,54795	0,54140	0,53486	0,52833	0,52183
10	0,70004	0,69407	0,68806	0,68203	0,67597	0,66988	0,66377	0,65764	0,65150	0,64533
11	0,79813	0,79320	0,78822	0,78318	0,77810	0,77297	0,76779	0,76257	0,75730	0,75199
12	0,87210	0,86838	0,86459	0,86074	0,85683	0,85287	0,84884	0,84476	0,84062	0,83643
13	0,92360	0,92100	0,91834	0,91562	0,91285	0,91002	0,90714	0,90419	0,90119	0,89814
14	0,95689	0,95520	0,95347	0,95169	0,94986	0,94799	0,94607	0,94410	0,94208	0,94001
15	0,97608	0,97506	0,97400	0,97381	0,97260	0,97153	0,97033	0,96910	0,96783	0,96653
16	0,98834	0,98776	0,98716	0,98653	0,98588	0,98521	0,98452	0,98379	0,98305	0,98227
17	0,99438	0,99408	0,99375	0,99342	0,99306	0,99270	0,99232	0,99192	0,99150	0,99107
18	0,99743	0,99727	0,99711	0,99693	0,99675	0,99656	0,99637	0,99616	0,99594	0,99572
19	0,99887	0,99880	0,99872	0,99864	0,99855	0,99846	0,99836	0,99826	0,99815	0,99804

	λ									
x	9,55	9,60	9,65	9,70	9,75	9,80	9,85	9,90	9,95	10,00
0	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005
1	0,00075	0,00072	0,00069	0,00066	0,00063	0,00060	0,00057	0,00055	0,00052	0,00050
2	0,00400	0,00384	0,00369	0,00354	0,00340	0,00326	0,00313	0,00301	0,00289	0,00277
3	0,01433	0,01383	0,01334	0,01286	0,01240	0,01196	0,01153	0,01112	0,01072	0,01034
4	0,03901	0,03779	0,03661	0,03547	0,03435	0,03327	0,03222	0,03120	0,03021	0,02925
5	0,08614	0,08381	0,08154	0,07932	0,07716	0,07504	0,07298	0,07097	0,06900	0,06709
6	0,16116	0,15745	0,15380	0,15022	0,14671	0,14327	0,13989	0,13657	0,13333	0,13014
7	0,26351	0,25843	0,25341	0,24847	0,24359	0,23878	0,23404	0,22936	0,22476	0,22022
8	0,38569	0,37961	0,37357	0,36759	0,36166	0,35578	0,34996	0,34419	0,33848	0,33282
9	0,51533	0,50886	0,50241	0,49598	0,48957	0,48319	0,47683	0,47050	0,46420	0,45793
10	0,63915	0,63295	0,62674	0,62052	0,61428	0,60804	0,60180	0,59555	0,58929	0,58304
11	0,74664	0,74124	0,73581	0,73033	0,72483	0,71928	0,71370	0,70809	0,70245	0,69678
12	0,83218	0,82788	0,82352	0,81910	0,81464	0,81012	0,80556	0,80094	0,79627	0,79156
13	0,89502	0,89185	0,88862	0,88534	0,88200	0,87860	0,87515	0,87165	0,86808	0,86446
14	0,93789	0,93572	0,93350	0,93123	0,92891	0,92654	0,92412	0,92165	0,91912	0,91654
15	0,96518	0,96380	0,96237	0,96091	0,95941	0,95786	0,95627	0,95465	0,95297	0,95126
16	0,98147	0,98064	0,97979	0,97890	0,97799	0,97704	0,97607	0,97506	0,97403	0,97296
17	0,99062	0,99016	0,98967	0,98917	0,98864	0,98810	0,98754	0,98695	0,98635	0,98572
18	0,99548	0,99523	0,99497	0,99470	0,99442	0,99412	0,99382	0,99349	0,99316	0,99281
19	0,99792	0,99779	0,99766	0,99752	0,99738	0,99723	0,99707	0,99690	0,99673	0,99655

Figura 31.- Solução do exemplo de Poisson

8.4.2 - Distribuição de Poisson como uma aproximação da Distribuição Binomial

Uma Distribuição Binomial com um número de prova “n” grande e uma probabilidade de sucesso “p” pequena, de tal forma que np seja um número de grandeza moderada, pode ser aproximada pela Distribuição de Poisson.

Suponhamos uma Distribuição Binomial com n = 200 e p = 0,04. Suponha também que desejássemos a P(X=5).

- Pela Distribuição Binomial temos:

$$P(X=5)=C_{200}^{5}\times 0,04^{5}\times 0,96^{195}$$

- Pela Distribuição de Poisson temos:

A média da Distribuição Binomial é np e da Distribuição de Poisson é λ, assim

$$\lambda = np = 200\times 0,04 = 8$$

Portanto

$$P(X=5)=\frac{8^5}{5!}e^{-8}=0,191$$

8.5 - Exercícios Propostos

8.5.1) Uma fábrica de pneus verificou que ao testar seus pneus, havia em média um estouro de pneu a cada 5000 Km.

a) Qual a probabilidade que num teste de 3000 Km haja no máximo um pneu estourado?
b) Qual a probabilidade de que um carro ande 8000 Km sem estourar nenhum pneu?

8.5.2) Certo posto de bombeiros recebe em média 3 chamadas por dia. Calcular a probabilidade de:

a) receber exatamente 3 chamadas num dia;
b) receber 3 ou mais chamadas num dia.

8.5.3) A média de chamadas telefônicas numa hora é 3. Qual a probabilidade de:

a) receber exatamente 3 chamadas numa hora?
b) receber 4 ou mais chamadas em 90 minutos?

8.5.4) Na pintura de parede aparecem defeitos em média na proporção de 1 defeito por metro quadrado. Qual a probabilidade de aparecerem 3 defeitos numa parede de 2 x 2 m?

8.5.5) Suponha que haja em média 2 suicídios por ano numa população de 50.000. Em uma cidade de 100 000 habitantes, encontre a probabilidade de que um dado ano tenha havido:

a) 0;
b) 1;
c) 2;
d) 2 ou mais suicídios.

8.5.6) Suponha 400 erros de impressão distribuídos aleatoriamente em um livro de 500 páginas. Encontre a probabilidade de que uma dada página contenha:

a) nenhum erro;
b) exatamente 2 erros.

8.5.7) Uma loja atende em média 2 clientes por hora. Calcular a probabilidade de em uma hora:

a) atender exatamente 2 clientes;
b) atender 3 clientes.

8.5.8) Nos sinais de transmissor correm distorções aleatórias a uma taxa média de 1 por minuto. Para mensagens de 3 minutos, a taxa média de ocorrência de distorção é de 3 por mensagem. Qual a probabilidade de o número de distorções em uma mensagem de 3 minutos ser:

a) 2?
b) 1?
c) 3 ou mais?

8.5.9) A experiência mostra que 3 das chamadas recebidas por dia, por uma central telefônica provêm de discagem errada. Qual a probabilidade de:

a) a central receber até 5 chamadas erradas em 5 dias?
b) a central receber de 4 a 8 chamadas erradas em 15 dias?

8.5.10) Uma lavanderia recebe em média 3,5 reclamações por dia. Qual a probabilidade desta lavanderia receber 1 reclamação em determinado dia?

8.5.11) A entrega de mercadorias em um depósito é feita a razão de 2,8 caminhões por hora. Determine a probabilidade de chegarem 3 ou mais caminhões:

a) Num período de 30 minutos;
b) Num período de 1 hora; e
c) Num período de 2 horas.

8.5.12) A chegada de ônibus em um terminal acontece à razão de 3 por minuto. Supondo que tenha uma distribuição de Poisson, determine a probabilidade de:

a) chegarem 8 ônibus em 2 minutos;
b) chegarem 4 ônibus em 5 minutos.

8.5.13) Suponhamos que os navios cheguem a um porto à razão de 2 navios / hora e que essa razão seja bem aproximada a um processo de Poisson. Observando o processo durante um período de meia hora ($t = 0{,}5$), determine a probabilidade de:

a) não chegar nenhum navio
b) chegarem 3 navios;
c) chegarem mais de 3 navios em 2 horas.

8.5.14) Numa linha adutora de água, de 60 km de extensão, ocorrem 30 vazamentos no período de um mês. Qual a probabilidade de ocorrer, durante o mês, pelo menos 3 vazamentos num certo setor de 3 km de extensão?

8.5.15) Numa fita de som, há um defeito em cada 200 pés. Qual a probabilidade de que:

a) em 500 pés não aconteça defeito?
b) em 800 pés ocorram pelo menos 3 defeitos?

8.5.16) Uma firma recebe 720 mensagens em seu fax em 8 horas de funcionamento. Qual a probabilidade de que:

a) em 6 minutos receba pelo menos quatro mensagens?
b) em 4 minutos não receba nenhuma mensagem?

8.5.17) Uma fábrica de automóveis verificou que ao testar seus carros na pista de prova há, em média, um estouro de pneu em cada 300 km, e que o número de pneus estourados segue razoavelmente uma distribuição de Poisson. Qual a probabilidade de que:

a) num teste de 900 km haja no máximo um pneu estourado?
b) um carro ande 450 km na pista sem estourar nenhum pneu?

8.5.18) O RH de uma firma entrevista 150 candidatos a emprego por hora. Qual a probabilidade de entrevistar:

a) no máximo 3 candidatos em 2 minutos?
b) exatamente 8 candidatos em 4 minutos?

8.5.19) Uma companhia de seguros de automóveis determinou que o número médio de pedidos de cobertura é 0,6 no ano. Qual a probabilidade de que o segurado pedirá cobertura:

a) 1 vez no ano;
b) mais de 1 vez no ano.

8.5.20) Um departamento de polícia recebe em média 5 solicitações por hora. Qual a probabilidade de:

a) receber 2 solicitações numa hora selecionada aleatoriamente;
b) receber de 1 a 3 solicitações numa hora selecionada aleatoriamente;
c) receber no mínimo 6 solicitações em duas horas;
d) receber no máximo 7 ligações em 3 horas.

8.5.21) A experiência passada indica que um número médio de 6 clientes por hora param para colocar gasolina numa bomba.

a) Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem em qualquer hora?
b) Qual é a probabilidade de 3 clientes ou menos pararem em qualquer hora?
c) Qual é o valor esperado e o desvio padrão para esta distribuição?

8.5.22) Um processo de produção produz 10 itens defeituosos por hora. Encontre a probabilidade que:

a) 4 ou menos itens sejam defeituosos numa retirada aleatória por hora;
b) de 2 a 6 itens sejam defeituosos numa retirada aleatória por hora;
c) menos de 3 itens sejam defeituosos numa retirada aleatória por hora.

8.6 - Distribuição Multinomial

É uma generalização da Distribuição Binomial. Ao invés de apenas dois resultados possíveis, cada prova comporta k resultados, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, com probabilidades $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$. As probabilidades permanecem constantes durante a realização das provas e estas são independentes entre si.

Seja x_i o número de vezes que ocorre o resultado a_i (i = 1, 2, 3, ... , k), de maneira que $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n$, onde n é o número de vezes que as provas foram realizadas.

A Função de Distribuição de Probabilidades Multinomial é dada por:

$$P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = P_n^{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k} \times p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times \ldots \times p_k^{x_k}$$

Exemplo 8.6 - Uma caixa contém 4 bolas vermelhas, 3 bolas brancas e 3 bolas pretas. Retira-se uma bola aleatoriamente, anota-se a sua cor e devolve-se a bola para a caixa. Em 5 extrações realizadas desta maneira, qual a probabilidade de sair duas bolas vermelhas, uma branca e duas pretas?

Solução

As probabilidades de extrair uma bola vermelha ou branca ou preta são:

$$p_v = 0,4$$
$$p_b = 0,3$$
$$p_p = 0,3$$

A probabilidade pedida será:

$$P(2,1,2) = P_5^{2,1,2} \times p_v^2 \times p_b^1 \times p_p^2$$

$$P(2,1,2) = \frac{5!}{2! \times 1! \times 2!} \times 0,4^2 \times 0,3^1 \times 0,3^2 = 0,1296$$

8.7 - Exercícios Propostos

8.7.1) Uma urna tem 6 bolas brancas, 4 pretas e 5 azuis. Retiram-se 8 bolas com reposição. Qual a probabilidade de sair 4 bolas brancas, 2 pretas e 2 azuis?

8.7.2) Um dado é lançado 10 vezes. Qual a probabilidade de terem aparecido duas vezes a face 2, duas vezes a face 5, três vezes a face 1 e uma vez os demais resultados?

8.7.3) Um administrador toma conhecimento de que 80% da produção de uma máquina é aceitável, 15% necessita de algum reparo e 5% é imprestável. Numa amostra de 10 itens, qual é a probabilidade de obter 8 itens bons, 2 que necessitam de reparo e nenhum imprestável?

8.8 - Distribuição Hipergeométrica

Quando a probabilidade de sucesso se mantem constante em todas as prova do experimento a distribuição que se aplica é a distribuição Binomial. Ou, de outra maneira, a Binomial corresponde ao esquema de extrações com reposição.

No caso onde as extrações são sem reposição aplica-se a Distribuição Hipergeométrica. De modo geral, na distribuição hipergeométrica, estamos interessados na probabilidade de obter x sucessos entre k itens considerados como sucesso, e $n-x$ fracassos entre $N-k$ itens considerados fracassos.

Se X é o número de sucessos em uma amostra de tamanho n extraídas de uma população de N itens, dos quais k são considerados sucessos e $N-k$ fracassos, a distribuição de X é dada por

$$P(X = x) = \frac{C_k^x \times C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}$$

Dizemos que $X \overset{d}{=} H(N,n,k)$.

Os cálculos diretos em geral são longos. Mas, quando n é pequeno em relação a N, não há diferença prática entre extração sem reposição e extração com reposição. Então, a distribuição hipergeométrica pode ser aproximada pela binomial, com $p = k/N$ e $q = 1-p$

A média e a variância de uma v.a. com distribuição hipergeométrica são:

$$\mu = \frac{nk}{N} \quad e \quad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1}$$

Exemplo 8.7 - Lotes de 40 peças são considerados aceitáveis se contêm, no máximo, três peças defeituosas. O processo de amostragem consiste em extrair aleatoriamente cinco peças de cada lote e rejeitá-lo se for encontrada pelo menos uma peça defeituosa nas cinco peças extraídas. Qual a probabilidade de se encontrar exatamente uma peça defeituosa, se há três peças defeituosas em todo lote?

Solução:

$N = 40 \quad n = 5 \quad k = 3 \quad x = 1$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_{37}^4}{C_{40}^5} = \frac{3 \times 66045}{658008} = 0,301113$$

8.9 - Exercícios Propostos

8.9.1) Em problemas de controle de qualidade, lotes com N itens são examinados. O número de itens com defeito (atributo A), r, é desconhecido, colhemos uma amostra de n itens e determinamos k. Somente para ilustrar, suponha que num lote de N=100 peças, r=10 sejam defeituosas. Escolhendo n=5 peças sem reposição, a probabilidade de não se obter peças defeituosas é:?

8.9.2) Pequenos motores são guardados em caixas de 50 unidades. Um inspetor de qualidade examina cada caixa, antes da posterior remessa, testando 5 motores. Se nenhum motor for defeituoso, a caixa é aceita. Se pelo menos um motor for defeituoso, todos os 50 motores são testados. Há 6 motores defeituosos numa caixa. Qual a probabilidade de que seja necessário examinar todos os motores dessa caixa?

8.9.3) Cartões de circuito integrado são verificados em um teste funcional. Um lote contém 140 cartões e 20 são selecionados sem reposição para o teste funcional.

a) Se 20 cartões forem defeituosos, qual será probabilidade de que no mínimo um cartão defeituoso esteja na amostra?
b) Se 5 cartões forem defeituosos, qual será a probabilidade de que no mínimo um cartão defeituoso apareça na amostra?

8.9.4) Um lote contém 100 partes de um fornecedor brasileiro e 200 partes de um fornecedor chinês. Se quatro partes são selecionadas aleatoriamente, sem reposição, qual é a probabilidade de que sejam todas elas de um fornecedor brasileiro? Qual a probabilidade de que duas ou mais partes na amostra sejam de um fornecedor brasileiro? Qual a probabilidade de que pelo menos uma parte seja de um fornecedor brasileiro?

8.9.5) Um estado tem uma loteria em que seis números são selecionados aleatoriamente de 40, sem reposição. Um jogador escolhe seis números antes do sorteio acontecer.

a) Qual é a probabilidade de que os seis números escolhidos pelo jogador coincidam com todos os seis números escolhidos pelo jogador coincidam com todos os seis números sorteados?
b) Qual é a probabilidade de que cinco dos seis números escolhidos pelo jogador apareçam entre os números sorteados?
c) Qual é a probabilidade de que quatro dos seis números escolhidos pelo jogador apareçam entre os números sorteados?
d) Qual é a probabilidade de que no máximo cinco dos seis números escolhidos pelo jogador apareçam entre os números sorteados?