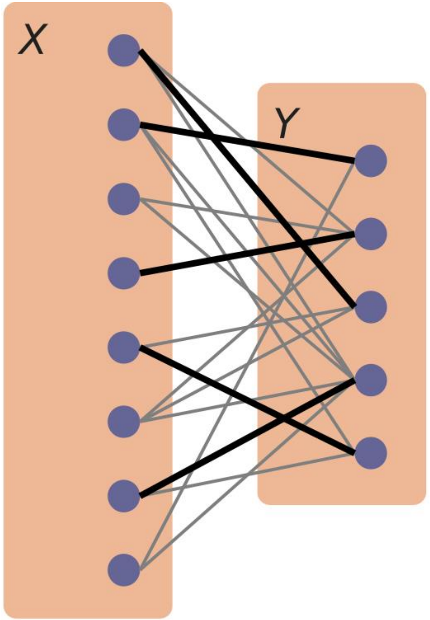
Atribuição Linear

Zenilton Patrocínio

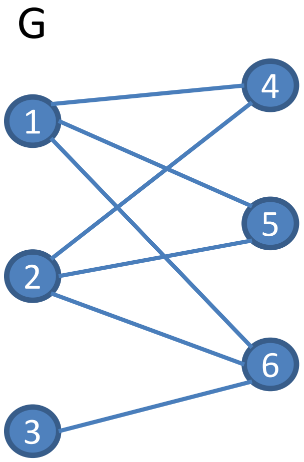
Emparelhamento em Grafo Bipartido



Seja G = (V, E) um grafo bipartido com uma partição (X, Y) dos vértices.

Dizemos que temos um casamento de X em Y quando o casamento satura Y (não necessariamente X).

Método para Grafo Bipartido Não Ponderado



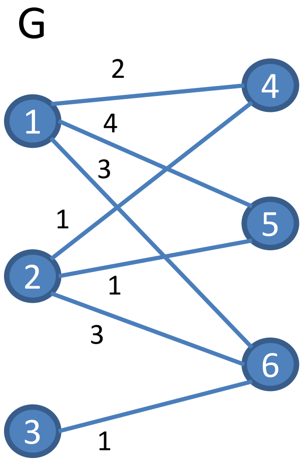
Método para Grafo Bipartido Não Ponderado

Método para obtenção de caminho M-aumentante em grafo bipartido

1. Dado um grafo não direcionado e bipartido $G = (V_1 \cup V_2, E)$ e um emparelhamento $M \subseteq E$, construir grafo direcionado $G' = (V_1 \cup V_2, E')$, em que, para $v \in V_1$ e $w \in V_2$, :
   a. se a aresta $\{v, w\} \notin M$ então $(v, w) \in E'$; ou
   b. se a aresta $\{v, w\} \in M$ então $(w, v) \in E'$.
2. Se existir um caminho P em G' de um vértice livre em V_1 para um vértice livre em V_2 então P corresponde a caminho M-aumentante

Método para Grafo Bipartido Não Ponderado

Método para Grafo Bipartido Ponderado



O que fazer na presença de pesos nas arestas?

Atribuição Linear

O problema da **atribuição linear** consiste em determinar a maneira ótima de se atribuir ***n*** tarefas à ***n*** agentes.

Essa designação deve ser feita de modo que nenhuma tarefa deixe de ser executada e que todos os agentes tenham uma tarefa atribuída a eles.

Em outras palavras, consistem em atribuir o “melhor agente” à “melhor tarefa”.

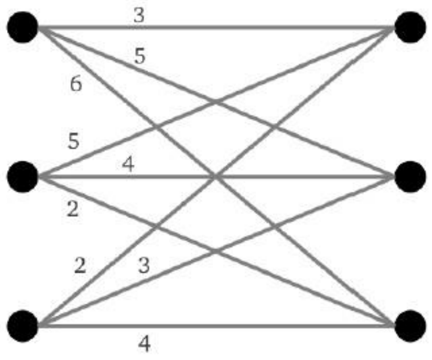
Atribuição Linear

Problema

Em uma fábrica temos 3 operários e 3 máquinas.
Pelo conhecimento e pelas características de cada operário o custo por hora é diferente.
Qual a atribuição de menor custo?

Operário\Máquina	1	2	3
1	3	5	6
2	5	4	2
3	2	3	4

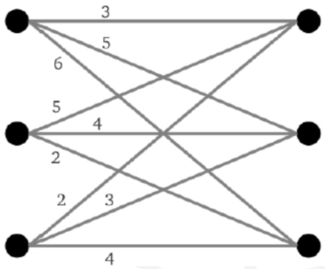
Modelo em grafo



Emparelhamento em grafo bipartido com o menor custo

Atribuição Linear

Operário\Máquina	1	2	3
1	3	5	6
2	5	4	2
3	2	3	4



Ao atribuir uma máquina para cada operário estamos tomando 3 elementos da matriz tal que:

- Cada elemento está em uma linha diferente e uma coluna diferente;
- Cada linha e coluna contém exatamente 1 elemento.

Seja $x_{i,j}$ indica a seleção do elemento da linha i e coluna j. Uma solução: $x_{1,1}$, $x_{2,2}$, $x_{3,3}$, com custo 11. Solução é ótima? **Não**

Atribuição Linear – Formulação Matemática

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j = 1, \dots, n$$

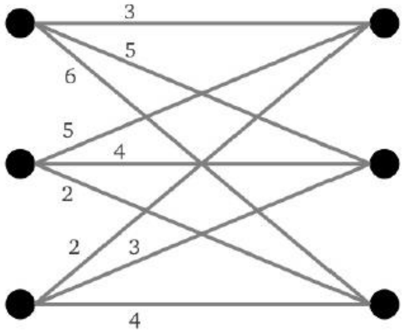
$$x_{ij} \geq 0, \forall i = 1, \dots, n, \\ \forall j = 1, \dots, n$$

Método Húngaro

Método de Húngaro

Origem em 1935, por Kuhn, porém, inventado em 1931, pelos húngaros Egerváry e König.

Resolve o problema de atribuição linear em tempo polinomial, normalmente, $O(n^3)$, utilizando transformações da matriz de custo.



$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Método de Húngaro – Transformação

Teorema: Se um número real é somado ou subtraído de todas as entradas de uma linha ou coluna, então uma alocação ótima para a matriz resultante é também uma alocação ótima para a matriz original.

Ao diminuir os valores nas linhas e colunas, estamos comparando-as com valores relativos.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0^* & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2^* \\ 2 & 3^* & 4 \end{vmatrix}$$

Método de Húngaro – Solução Viável

Teorema de König: Se o número mínimo de traços que atravessam todos os zeros for exatamente ***n***, temos uma alocação possível para cada linha ou coluna.

Interpretação: Se tivermos n traços, então haverá pelo menos n elementos zero distribuídos conforme necessário, e consequentemente, uma atribuição ótima.

$$\left|\begin{matrix}3 & 5 & 6\\ 5 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{matrix}\right|\begin{matrix}-3\\ -2\\ -2\end{matrix} \Rightarrow \begin{array}{c}\left|\begin{matrix}0 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{matrix}\right|\\ \begin{matrix} & -1 & \end{matrix}\end{array} \Rightarrow \left|\begin{matrix}0^* & 1 & 3\\ 3 & 1 & 0^*\\ 0 & 0^* & 2\end{matrix}\right|$$

Método de Húngaro – Solução Inviável

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{c} -2 \\ -3 \\ -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} & & -2 \end{array} \end{array} \Rightarrow$$

Solução inviável, mais zeros necessários.

Operação de viabilização: Identificamos o valor do menor elemento não riscado e o subtraímos em todos os elementos não riscados. Para elementos riscados duas vezes, adicionamos esse mesmo valor.

Método de Húngaro – Solução Inviável

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0* & 1 & 0 \\ 0 & 0* & 2 \\ 3 & 0 & 0* \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2* & 6 & 7 \\ 3 & 6* & 10 \\ 2 & 2 & 4* \end{vmatrix}$$

Matriz Original

Solução inviável, mais zeros necessários.

Operação de viabilização: Identificamos o valor do menor elemento não riscado e o subtraímos em todos os elementos não riscados. Para elementos riscados duas vezes, adicionamos esse mesmo valor.

Método de Húngaro – Algoritmo

1. Identificar o valor mínimo por linha e o subtrair dos elementos da linha
2. Identificar o valor mínimo por coluna e o subtrair dos elementos da coluna
3. Identificar o número mínimo de riscos para cobrir todos os zeros da matriz
4. <u>enquanto</u> (número mínimo de riscos < n) <u>efetuar</u> // Sem solução viável
   a. Identificar o valor mínimo α dos elementos não riscados
   b. Subtrair α dos elementos não riscados e adicionar α aos cobertos por dois riscos
   c. Identificar o número mínimo de riscos para cobrir todos os zeros
5. Identifique a solução ótima na solução viável encontrada

Método de Húngaro – Observações

O método Húngaro só resolve problemas de minimização em matrizes quadradas.

Porém, o algoritmo pode ser adaptado para problemas de maximização, bastando multiplicar a matriz de custos por -1.

Além disto, matrizes não quadradas podem se tornar quadradas pela inclusão de linhas/colunas zeradas.