Cálculo de Probabilidades

Thomas Bayes (pronuncia-se: ˈbeɪz) (1702? - 17 de Abril de 1761) foi um matemático e pastor presbiteriano inglês (pertencente à minoria calvinista em Inglaterra), conhecido por ter formulado o caso especial do teorema de Bayes. Bayes foi eleito membro da Royal Society em 1742.
Thomas Bayes nasceu em Londres por volta de 1702. Filho mais velho de Joshua Bayes, um dos primeiros seis ministros "Nonconformist" ordenados em Inglaterra, foi pastor da igreja presbiteriana e matemático.
Em 1719 ingressou, para estudar teologia e lógica, na Universidade de Edimburgo. No entanto os seus estudos continuariam numa universidade escocesa, pois na época os "Nonconformist" foram proibidos de frequentar Oxford e Cambridge.
Utilizou a probabilidade de forma intuitiva e estabeleceu as bases para a inferência estatística tornando-se conhecido por ter formulado o famoso teorema de Bayes.
Apesar de não ter obras de matemática publicadas, Bayes foi eleito membro da Royal Society em 1742.
Morreu a 17 de Abril de 1761 em Tunbridge Wells, Kent e cepultado em Bunhill Fields Cemetery na cidade de Londres.
Já após a sua morte, em 1763, Richard Price, amigo pessoal de Bayes publica a obra do Rev. Thomas Bayes intitulada de "*An essay Towards Solving a problem in the Doctrine of Chances*". Com ela foi lançada a semente para a abordagem bayesiana, hoje largamente usada nas mais diversas áreas, como a medicina e a informática.
FONTE:http://pt.wikipedia.org/wiki/Brasil

- Introdução
- Experimento Aleatório, Espaço Amostral e Eventos
- Eventos Complementares, Mutuamente Excludentes e Coletivamente Exaustivos
- Definição de Probabilidade e Axiomas
- Principais Teoremas
- Probabilidades Finitas dos Espaços Amostrais Finitos
- Espaços Amostrais Finitos Equiprováveis
- Probabilidade Condicional e Teorema do Produto
- Independência Estatística
- Teorema de Bayes

6 - CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

6.1 - INTRODUÇÃO

Empregamos mais comumente o termo ***Probabilidade*** quando estamos diante de certa observação contínua do comportamento de um fenômeno qualquer e, este, leva-nos à formulação de sua teoria sobre as variações deste comportamento, ou mesmo quando estamos com certo grau de incerteza naquilo que pode ocorrer ou que ocorreu no presente, passo ou futuro.

Em termos matemáticos, classificamos como um modelo ***Não-Determinístico***, ou simplesmente ***Probabilístico***. Isto porque, estes modelos, quando existem, não nos permitem estabelecer *a priori* os resultados de uma experiência, mas fornece-nos condições de prever, com certo grau de segurança, seus possíveis resultados.
Conceitos

6.2 - EXPERIMENTO ALEATÓRIO, ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS

Um ***Experimento Aleatório***, simbolizado por E, é o processo de coleta de dados relativos a um fenômeno que acusa variabilidade em seus resultados. Basicamente, é definido por três características, que são:

- Repetição indefinida do experimento, desde que sob as mesmas condições;
- Pode-se descrever todas as probabilidades de resultado, porém não se pode definir este resultado *a priori*;
- Quando o experimento é repetido um grande número de vezes surgirá uma estabilidade na fração

$$f = \frac{s}{n}$$

  dita *frequência relativa*, onde “n” é o número de repetições ou o número de vezes que o experimento foi realizado e “s” é o número de vezes que ocorreu o sucesso na observação de um particular resultado previamente estabelecido.

Espaço Amostral, denotado por S, é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento. Quando o Espaço Amostral consiste de um número finito de resultados é dito Espaço Amostral Discreto; se consiste de todos os números reais de um determinado intervalo dado é dito Espaço Amostral Contínuo.

Um ***Evento*** é um subconjunto do Espaço Amostral, isto é, é um conjunto formado por resultados possíveis ao experimento. Os Eventos são simbolizados por quaisquer letras maiúsculas, exceto “E” e “S”.

Existem três Eventos especiais, que são:

- Evento Certo $\Leftrightarrow A = S$
- Evento Impossível $\Leftrightarrow A = \varnothing$
- Evento Simples $\Leftrightarrow$ evento composto por um único resultado de S.

Exemplo 6.1 - *Seja o experimento E: lançar um dado. Seu Espaço Amostral é:*

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Deste Espaço Amostral podemos formar vários Eventos, como por exemplo:

A = { números pares } = { 2, 4, 6 }
B = { números maiores que 4 } = { 5, 6 }
C = { números múltiplos de 3 } = { 3, 6 }

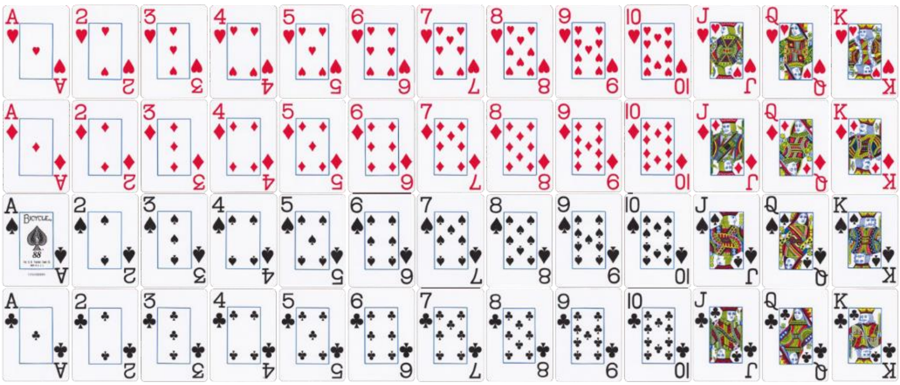
Exemplo 6.2 - *Seja o experimento E: lançar dois dados simultaneamente. Seu Espaço Amostral é:*

$$S = \begin{Bmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{Bmatrix}$$

Deste podemos formar Eventos tais como:

$$A = \{(x,y)/\,x+y=6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2)(5,1)\}$$
$$B = \{(x,y)/\,x-y>2\} = \{(4,1),(5,1)(5,2),(6,1),(6,2),(6,3)\}$$

Exemplo 6.3 - *Considerando um baralho de 52 cartas (Sem os Coringas) faça E: retirar uma carta do baralho. O Espaço Amostral é:*



Como o Espaço Amostral e os eventos são conjuntos podemos aplicar certas operações da teoria de conjuntos para criar novos eventos.

$A \cup B \Rightarrow$ e' o evento que ocorre se A ou B ou ambos ocorrem
$A \cap B \Rightarrow$ e' o evento que ocorre se A e B ocorrerem simultaneamente
$\bar{A} \Rightarrow$ e' o evento que ocorre se A NÄO ocorrer

Os cálculos consideram a maneira como os eventos de interesse se relacionam. Algumas destas relações podem ser descritas pelas expressões *"Complemento"*, *"Mutuamente Excludentes"* e *"Coletivamente Exaustivos"*.

6.3 - Eventos Complementares, Mutuamente Excludentes e Coletivamente Exaustivos

O ***Complemento*** de um evento A (simbolizado por $\bar{A}$ ou por A^c) consiste de todos os resultados (elementos) do Espaço Amostral S que não pertencem ao evento A. Logo podemos concluir que:

$$A \cap \bar{A} = \varnothing$$
$$A \cup \bar{A} = S$$

Exemplo 6.4 - *Seja um Espaço Amostral* $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ *e sejam os eventos* $A = \{2,5,7,8\}$ *e* $B = \{2,3,5,8,10,12\}$. *Os eventos complementares de A e B são:*

$\bar{A} = \{1,3,4,6,9,10,11,12\}$ *e* $\bar{B} = \{1,4,6,7,9,11\}$

Dois ou mais eventos são ditos ***Mutuamente Excludentes*** se a ocorrência de um deles "exclui" qualquer possibilidade de ocorrência do outro. Para que isso ocorra **NÃO** pode existir interseção entre eles.

Exemplo 6.5 - *Seja um Espaço Amostral* $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ *e sejam os eventos* $A = \{1,3,5,8,11\}$, $B = \{2,6,9,12\}$ *e* $C = \{2,4,7,8,10,12\}$. *Podemos concluir que:*

- *A e B são Mutuamente Excludentes, pois* $A \cap B = \varnothing$
- *A e C NÃO são Mutuamente Excludentes, pois* $A \cap C = \{8\}$
- *B e C NÃO são Mutuamente Excludentes, pois* $B \cap C = \{2,12\}$

Dois ou mais eventos são ditos ***Coletivamente Exaustivos*** se pelo menos um deles tiver que ocorrer durante um dado experimento, isto é, se a união dos eventos for igual ao Espaço Amostral.

Exemplo 6.6 - *Seja um Espaço Amostral* $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ *e sejam os eventos* $A = \{3,4,6,8\}$, $B = \{1,7,8,11,12\}$, $C = \{1,2,5,6,11,12\}$ *e* $D = \{2,4,6,9,10,11\}$.

Os eventos A, B, C e D são Coletivamente Exaustivos, pois $A \cup B \cup C \cup D = S$

6.4 - Definição de Probabilidade e Axiomas

Define-se a probabilidade de ocorrência de um evento A, simbolizada por P(A), como sendo uma função, definida num Espaço Amostral S dado, que associa a cada evento um número real, satisfazendo os seguintes axiomas:

$a.1)$ $0 \le P(A) \le 1$

$a.2)$ $P(S) = 1$

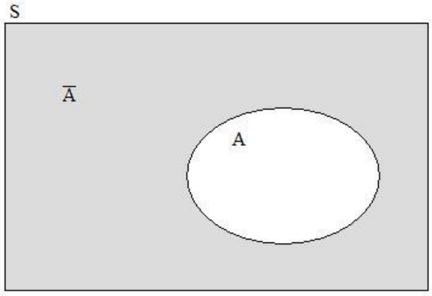
$a.3)$ Se A e B são eventos Mutuamente Excludentes, então
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6.5 - Principais Teoremas

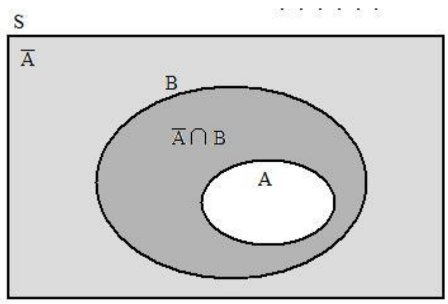
***T*.1)** A probabilidade do conjunto vazio é ZERO → $P(\varnothing) = 0$

***T*.2)** Se $\bar{A}$ é o complemento do evento A então $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Podemos escrever $S = A \cup \bar{A}$.
Porém $A \cap \bar{A} = \varnothing$ *(São Mutuamente Excludentes)*
$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$
$P(S) = P(A) + P(\bar{A})$
$1 = P(A) + P(\bar{A})$ *pelo Axioma a.2*
Logo:
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



T.3) Se $A \subset B$ então $P(B) \geq P(A)$



Podemos escrever $B = A \cup (\bar{A} \cap B)$.

Porém $A \cap (\bar{A} \cap B) = \varnothing$ *(São Mutuamente Excludentes)*

$P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

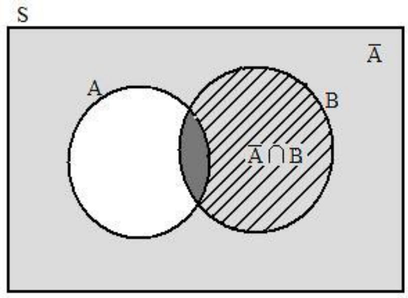
$P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A)$

Como $P(\bar{A} \cap B) \geq 0$ *pelo Axioma a1 temos que*

$P(B) - P(A) \geq 0$ *e, portanto* $P(B) \geq P(A)$

T.4) Se A e B são dois eventos quaisquer então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Duas Situações:

a) *Se A e B são Mutuamente Excludentes* $(P(A \cap B) = 0)$ *recaímos no Axioma a3.*
b) *Se* $A \cap B \neq \varnothing$
   Os eventos A e $(\bar{A} \cap B)$ *são Mutuamente Excludentes. Logo, pelo Axioma a3 temos*

$P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$ *Mas* $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$*, assim*

$P[A \cup B] = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

Temos, também, que $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ *e* $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \varnothing$*, assim* $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ *ou*

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Substituindo na expressão anterior

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6.6 - Probabilidades Finitas dos Espaços Amostrais Finitos

Seja S um Espaço Amostral Finito $s = \{a_1; a_2; a_3; ...; a_n\}$. Consideremos o evento formado por um resultado simples $A = \{a_i\}$. A cada evento simples $\{a_i\}$ associamos um número p_i denominado Probabilidade de $\{a_i\}$, satisfazendo as seguintes condições:

c1) $p_i > 0$; i=1,2,3,.....,n

c2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$

A probabilidade $P(A)$ de cada evento composto, isto é, de cada evento formado pela união de alguns eventos simples, é então definida pela soma das probabilidades dos eventos simples pertencentes ao evento composto A.

Exemplo 6.7 - *Três atiradores, A, B e C participam de uma competição de tiro ao alvo. O Atirador A têm três vezes mais chance de acertar a "mosca" do que o atirador B. Este por sua vez tem duas vezes mais chance de acertar a "mosca" que o atirador C. Quais as probabilidades de vitória de cada um dos atiradores?*

Solução:

Sendo P(A), P(B) e P(C) as probabilidades, respectivamente, dos atiradores A, B e C, temos:

$$P(A)+P(B)+P(C)=1$$

mas $P(B)=2\times P(A)$ *e* $P(A)=3\times P(B)=3\times 2\times P(C)=6\times P(C)$

Substituindo fica:

$$6\times P(C)+2\times P(C)+P(C)=1$$
$$9\times P(C)=1$$

Portanto $P(C)=\frac{1}{9}$

Consequentemente $P(A)=\frac{6}{9}$ *e* $P(B)=\frac{2}{9}$.

6.7 - Espaços Amostrais Finitos Equiprováveis

Um Espaço Amostral é dito ***equiprovável*** ou ***uniforme*** quando a cada resultado pertencente a este espaço Amostral, está associada à mesma probabilidade. Portanto se S tem "n" resultados possíveis, a probabilidade de cada um deles será $\frac{1}{n}$.

Por outro lado, se um evento composto A contiver "r" resultados, então

$$P(A)=r\times\frac{1}{n}=\frac{r}{n}$$

ou ainda

$$P(A)=\frac{\text{Número de Casos Favoraveis ao Evento A}}{\text{Número Total de Casos}}=\frac{NCF(A)}{NTC}$$

Exemplo 6.8 - *Escolha, aleatoriamente, uma carta de um baralho de 52 cartas. Sejam:*

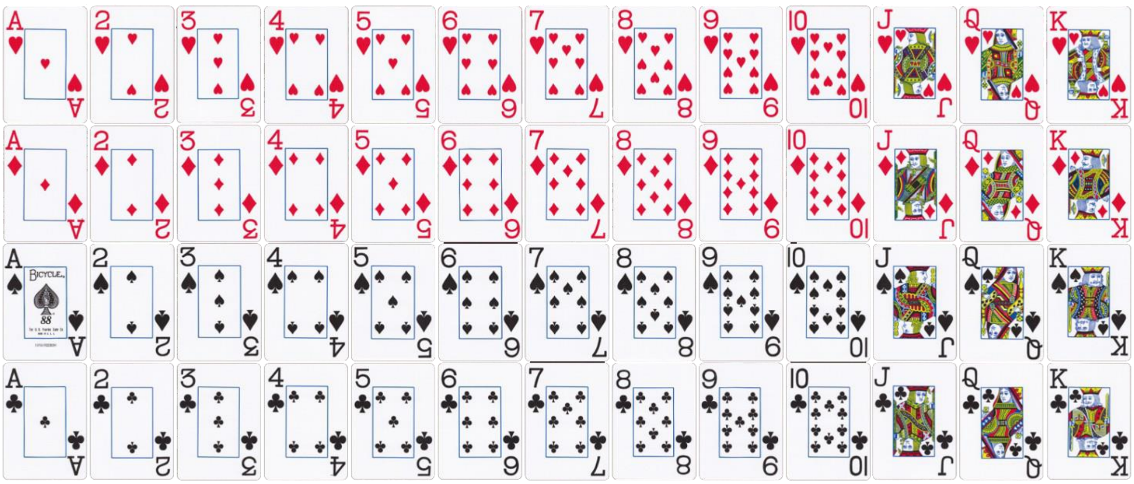
A = { a carta é de ouros }

B = { a carta é uma figura }

Determine as probabilidades P(A) e P(B).

Solução:

O Espaço Amostral é:



$$P(A)=\frac{NCF(A)}{NTC}=\frac{n^o \text{ de cartas de ouros}}{n^o \text{ total de cartas}}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=\frac{NCF(B)}{NTC}=\frac{n^o \text{ de figuras}}{n^o \text{ total de cartas}}=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$$

Exemplo 6.9 - *Num lote de 12 peças, onde 4 são defeituosas, duas peças são retiradas aleatoriamente. Calcule a probabilidade de:*

a) As duas peças serem defeituosas;
b) As duas peças serem boas;
c) Pelo menos uma peça ser defeituosa.

<u>*Solução:*</u>

a) Seja o evento A = { ambas serem defeituosas }

Não importa a ordem em que as peças serão extraídas, isto é, o importante é que as peças sejam defeituosas. Como serão extraídas apenas duas peças de um total de 12 e não haverá repetição, pois as peças serão retiradas simultaneamente, temos um caso de Combinação simples.

O número de casos que satisfazem ao evento A (número de pares que podemos formar com as 4 peças defeituosas) é:

$$NCF(A)=C_4^2=\frac{4!}{(4-2)!\times 2!}=6$$

O número total de pares de peças que podemos formar com os elementos do Espaço Amostral será:

$$NTC=C_{12}^2=\frac{12!}{(12-2)!2!}=66$$

Portanto a probabilidade procurada é:

$$P(A)=\frac{NCF(A)}{NTC}=\frac{6}{66}=\frac{1}{11}$$

b) Seja B = { ambas serem boas }

Analogamente à letra (a) temos:

$$NCF(B)=C_8^2=\frac{8!}{(8-2)!\times 2!}=28$$

Logo

$$P(B)=\frac{NCF(B)}{NTC}=\frac{28}{66}=\frac{14}{33}$$

c) Seja C = { pelo menos uma peça ser defeituosa }

Ao extrairmos duas peças podemos obter os seguintes resultados

i) { Boa, Boa }
ii) { Boa, Defeituosa }
iii) { Defeituosa, Defeituosa }

Observando os resultados acima notamos que as hipóteses (ii) e (iii) satisfazem ao evento C. Para determinarmos a probabilidade de ocorrer o evento C podemos proceder de duas maneiras distintas:

<u>1ª maneira</u>: O número de casos que satisfazem ao evento C é:

$$NCF(C) = \overbrace{(4\times 8)}^{(ii)} + \overbrace{C_4^2}^{(iii)} = 32 + \frac{4!}{(4-2)!\times 2!} = 32 + 6 = 38$$

A probabilidade P(C) será:

$$P(C) = \frac{NCF(C)}{NTC} = \frac{38}{66} = \frac{19}{33}$$

<u>2ª maneira:</u> O Espaço Amostral pode ser considerado como sendo o conjunto formado pelos resultados que satisfazem ao evento e os resultados que não o satisfazem. Sabemos também, da teoria de conjuntos que estes subconjuntos são Complementares, portanto podemos aplicar o teorema

$$P(C) = 1 - P(\bar{C})$$

Mas $\overline{C} = \{\text{ ambas serem boas }\}$ *cuja probabilidade já foi calculada na letra (b), logo*

$$P(C) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$$

6.8 - Probabilidade Condicional e Teorema do Produto

Seja o experimento E: lançar dois dados. Como já vimos existem 36 resultados (pares XY) possíveis. A probabilidade de ocorrer cada um destes resultados é $1/36$. Qual a probabilidade de que a soma dos dados seja 8 se sabemos que o que o resultado do primeiro dado é 3?

$$S = \begin{Bmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{Bmatrix}$$

A condição de que a face do primeiro dado é 3, restringiu o Espaço Amostral para apenas 6 resultados possíveis, dos quais somente um satisfaz ao desejado (a soma ser igual a 8), portanto a probabilidade procurada é $1/6$.

Caso não tivéssemos a informação sobre a face do primeiro dado existiriam 5 resultados que satisfariam o experimento { (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) } e a probabilidade desejada seria igual a $5/36$.

Vemos, portanto, que a probabilidade de um evento A se modifica quando dispomos de informações sobre a ocorrência de outro evento B associado ao primeiro. A probabilidade de um evento A quando se sabe que outro evento B ocorreu é dita ***Probabilidade Condicional de A dado B***; e denotado por $P(A|B)$.

Definiremos a Probabilidade Condicional de dois Eventos A e B como:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ou ainda

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{NCF(A\cap B)}{NTC}}{\frac{NCF(B)}{NTC}} = \frac{NCF(A\cap B)}{NCF(B)}$$

Exemplo 6.10 - Consideremos o lançamento de dois dados, onde temos os seguintes eventos:

$$A = \{(x, y) / x + y = 10\}$$
$$B = \{(x, y) / x > y\}$$

Determinar as probabilidades P(A), P(B), P(A|B) e P(B|A).

Solução

O Espaço Amostral e os eventos A e B estão ilustrados a seguir.

$$S = \begin{Bmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{Bmatrix}$$

As probabilidades serão:

$$P(A) = \frac{NCF(A)}{NTC} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$
$$P(B) = \frac{NCF(B)}{NTC} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$
$$P(A \mid B) = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(B)} = \frac{1}{15}$$
$$P(B \mid A) = \frac{NCF(A \cap B)}{NCF(A)} = \frac{1}{3}$$

Através da equação da Probabilidade Condicional podemos determinar a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos $(A \cap B)$. Esta probabilidade é denotada ***Teorema do Produto***, e é definida por:

> *"A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos, A e B, do mesmo Espaço Amostral, é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro dado o primeiro."*

Em termos matemáticos

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

ou

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B)$$

Exemplo 6.11 - Tomemos o Exemplo 6.10, onde tínhamos o lançamento de dois dados e os eventos

$$A = \{(x, y) / x + y = 10\}$$
$$B = \{(x, y) / x > y\}$$

A probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos A e B será:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$$

ou

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{36}$$

6.9 - Independência Estatística

Dois eventos, A e B, são considerados independentes se a probabilidade de um deles é igual à probabilidade condicional do mesmo dado o outro, isto é

$$P(A) = P(A \mid B)$$

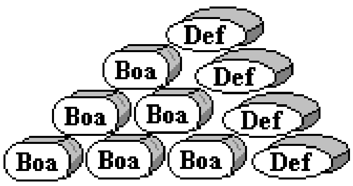
É evidente que se A independe de B então B independe de A e assim

$$P(B) = P(B \mid A)$$

Considerando o Teorema do Produto, podemos afirmar que se A e B são eventos independentes então:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exemplo 6.12 - Em uma caixa existem dez peças, das quais quatro são defeituosas. São retiradas duas peças, uma após a outra, com reposição. Calcular a probabilidade de ambas serem boas.



<u>*Solução:*</u>

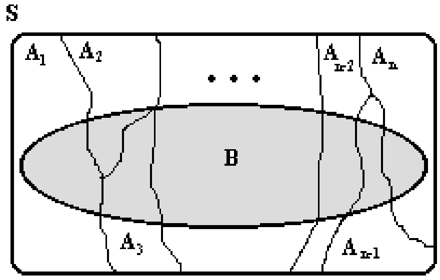
Os eventos a serem considerados são A = { a 1ª peça é Boa } e B = { a 2ª peça é Boa }. Estes eventos são independentes, pois a ocorrência de um não influencia na ocorrência do outro, isto é, não importa se a 1ª peça seja boa ou defeituosa, pois isto não altera o Espaço Amostral para a 2ª peça a ser retirada e, portanto as probabilidades para a mesma permanecem constantes. Assim

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{NCF(A)}{NTC} \times \frac{NCV(B)}{NTC} = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = 0,36$$

6.10 - Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, "n" eventos mutuamente excludente e coletivamente exaustivos, de um Espaço Amostral S, dos quais conhecemos todas as probabilidades $P(A_i)$. Seja, também, outro evento B, deste mesmo Espaço Amostral, em que conhecemos todas as probabilidades $P(B \mid A_i)$.

Sabemos que, para qualquer " i ", a probabilidade condicional de A_i dado B é definida como:



$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad ①$$

Da teoria de ocorrência simultânea temos

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P(B \mid A_i) \qquad ②$$

e observando o Espaço Amostral temos que

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$
$$P(B) = P(A_1) \times P(B \mid A_1) + P(A_2) \times P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n) \times P(B \mid A_n) \qquad ③$$

Substituindo ② e ③ em ① fica:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \times P(B \mid A_i)}{P(A_1) \times P(B \mid A_1) + P(A_2) \times P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n) \times P(B \mid A_n)}$$

Exemplo 6.13 - Sejam três urnas compostas como ilustrado a seguir:

Urna 1		Urna 2		Urna 3	
Pr	3	Pr	4	Pr	2
Br	1	Br	3	Br	3
Vr	5	Vr	2	Vr	3
	9		9		8

Escolhe-se uma urna ao acaso e dela é extraída uma bola aleatoriamente. Verificou-se que a bola extraída é BRANCA. Qual a probabilidade de que esta bola tenha sido extraída da Urna 2?

Solução:

A probabilidade de se escolher uma determinada urna é:

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$$

As probabilidades de se extrair uma bola Branca de cada uma destas urnas são:

$$P(Br \mid U_1) = \frac{1}{9} \quad P(Br \mid U_2) = \frac{3}{9} \quad P(Br \mid U_3) = \frac{3}{8}$$

Aplicando o Teorema de Bayes temos:

$$P(U_2 \mid Br) = \frac{P(U_2) \times P(Br \mid U_2)}{P(U_1) \times P(Br \mid U_1) + P(U_2) \times P(Br \mid U_2) + P(U_3) \times P(Br \mid U_3)}$$

$$P(U_2 \mid Br) = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}} = \frac{24}{59}$$

6.11 - Exercícios propostos

6.11.1) Sejam A e B dois eventos mutuamente excludentes onde $P(A) = 1/2$ e $P(B) = 1/4$. Determine:

$a)\ P(\bar{A});\quad c)\ P(A \cup B);$

$b)\ P(\bar{B});\quad d)\ P(A \cap B).$

6.11.2) $P(A) = 1/2;\ P(B) = 1/3;\ P(A \cap B) = 1/4$. Calcular:

$a)\ P(A \cup B);\quad c)\ P(\bar{A} \cup \bar{B});$

$b)\ P(\bar{A} \cap \bar{B});\quad d)\ P(A \cup \bar{B}).$

6.11.3) Dado $P(A) = 0{,}35;\ P(B) = 0{,}40;\ P(A \cap B) = 0{,}07$. Calcular:

$a)\ P(\bar{A});\quad c)\ P(A \cup B);$

$b)\ P(\bar{B});\quad d)\ P(\bar{A} \cap \bar{B}).$

6.11.4) Determine a probabilidade de cada evento:

a) um número par aparecer no lançamento de um dado não viciado;
b) um rei aparece ao extrair uma carta de um baralho;
c) uma vogal seja escolhida dentre as letras do alfabeto;
d) uma pedra com o número 6 seja escolhida dentre as pedras de um dominó;
e) uma cara aparece no lançamento simultâneo de 3 moedas;
f) pelo menos uma cara aparece no lançamento simultâneo de 3 moedas;
g) pelo menos uma cara aparece no lançamento simultâneo de "n" moedas;
h) duas copas aparecem ao retirarem-se duas cartas de um baralho;
i) uma carta de copas e uma de ouros aparece ao extraírem-se duas cartas de um baralho.

6.11.5) Um número inteiro é escolhido aleatoriamente dentre os números 1,2,3,....,50. Qual a probabilidade de:

a) o número ser divisível por 5;
b) terminar em 3;
c) ser primo;
d) ser divisível por 6 ou por 8.

6.11.6) Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de:

a) a soma ser menor que 4;
b) a soma ser 9;
c) o primeiro resultado ser igual ao segundo;
d) o primeiro resultado seja metade do segundo;
e) o primeiro resultado seja igual ao segundo resultado mais 1.

6.11.7) Numa urna são misturadas 10 bolas numeradas de 1 até 10. Duas bolas são retiradas (a,b) sem reposição. Qual a probabilidade de a + b = 10?

6.11.8) Numa bolsa temos 5 moedas de R$ 1,00 e 4 de R$ 0,50. Qual a probabilidade de, ao retirarmos duas moedas, obtermos R$ 1,50?

6.11.9) As probabilidades de 3 jogadores marcarem um "pênalti" são respectivamente $2/3, 4/5$ e $7/10$. Se cada um "cobrar" uma única vez, qual a probabilidade de:

a) todos acertarem;
b) apenas um acertar;
c) todos errarem.

6.11.10) A probabilidade de uma mulher estar viva daqui a 30 anos é $3/4$ e de seu marido $3/5$. Calcular a probabilidade de:

a) apenas o homem estar vivo;
b) somente a mulher estar viva;
c) pelo um estar vivo;
d) ambos estarem vivos.

6.11.11) Um estudante é submetido a um teste de múltipla escolha, em que cada questão apresenta cinco respostas, apenas UMA sendo correta. Se o estudante "sabe" a questão, escolhe a resposta certa. Se não sabe, escolhe ao acaso uma das respostas. Suponha que ele saiba 70% das questões. Qual a probabilidade de ele acertar determinada questão?

6.11.12) Até quantos tiros devemos dar para ter 0,95 de probabilidade de destruir um alvo, se a probabilidade de acerta em cada tiro é 0,40?

6.11.13) Um aluno prestou vestibular em apenas duas Universidades. Suponha que, em uma delas, a probabilidade de que ele seja aprovado é de 30%, enquanto na outra, pelo fato de a prova ter sido mais fácil, a probabilidade de sua aprovação sobe para 40%. Nessas condições, a probabilidade deque esse aluno seja aprovado em pelo menos uma dessas Universidades é de:

6.11.14) Sabendo-se que a probabilidade de que um animal adquira certa enfermidade, no decurso de cada mês, é igual a 30%. Determine a probabilidade de que um animal sadio venha a contrair a doença só no 3° mês.

6.11.15) Um lote é formado por 10 peças boas, 4 com defeitos e 2 com defeitos graves. Uma peça é escolhida ao acaso. Calcule a probabilidade de:

a) a peça não ter defeitos graves;
b) a peça não ter nenhum tipo de defeito;
c) a peça ou seja boa ou tenha defeitos graves.

6.11.16) Considere o mesmo lote do problema anterior. Retiram-se 2 peças ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) ambas as peças serem perfeitas;
b) pelo menos uma peça seja perfeita;
c) nenhuma peça tenha defeito grave;
d) nenhuma peça seja perfeita.

6.11.17) Urna contém 8 bolas brancas e 7 bolas pretas. Duas bolas são retiradas simultaneamente. Determine a probabilidade de:

a) as bolas sejam brancas;
b) as bolas sejam de cores diferentes.

6.11.18) Uma urna contém 5 bolas brancas e 6 pretas. Três bolas são retiradas. Calcular a probabilidade de:

a) todas as bolas sejam pretas;
b) exatamente uma bola seja branca;
c) ao menos uma bola seja preta.

6.11.19) Numa classe existem 5 alunos do 4º ano, 4 do 2º ano e 3 do 3º ano. Qual a probabilidade de serem sorteados 2 alunos do 2º ano, 3 do 4º ano e 2 do 3º ano?

6.11.20) Numa urna existem N bolas assim distribuídas: Nv (quantidades de bolas vermelhas); Na (quantidades de bolas azuis) e Np (número de bolas pretas). Qual a probabilidade de retirarmos "n" bolas; sendo nv (número de bolas vermelhas); na (número de bolas azuis) e np (número de bolas pretas)?

6.11.21) Uma urna contém 12 bolas: 5 brancas, 4 vermelhas e 3 pretas. Outra urna contém 18 bolas: 5 brancas, 6 vermelhas e 7 pretas. Uma bola é retirada de cada urna. Qual a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor?

6.11.22) A urna 1 contém "x" bolas brancas e "y" bolas vermelhas. A urna 2 contém "z" bolas brancas e "v" bolas vermelhas. Uma bola é escolhida ao acaso da urna 1 e posta na urna 2. A seguir uma bola é escolhida ao acaso da urna 2. Qual a probabilidade de que esta bola seja branca?

6.11.23) Uma urna contém 10 bolas pretas e 5 bolas vermelhas. São feitas retiradas aleatórias. Cada bola retirada é reposta, juntamente com 5 bolas da mesma cor.

a) Qual é a probabilidade de saírem nesta ordem: 1 preta, 1 preta, 1 vermelha e 1 vermelha?
b) E nesta ordem: 1 preta, 1 vermelha, 1 preta e 1 vermelha?
c) Dado que a primeira bola é preta, qual é a probabilidade de que a segunda seja preta?

6.11.24) Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 brancas. Uma bola é selecionada aleatoriamente da urna e abandonada e duas da outra cor são colocadas na urna. Uma segunda bola é então selecionada da urna. Encontre a probabilidade de que:

a) a segunda bola seja vermelha;
b) ambas as bolas sejam da mesma cor.

6.11.25) Uma urna contém x bolas brancas e y bolas pretas. Extraem-se todas elas. Qual a probabilidade de que saiam primeiro as brancas? E as pretas?

6.11.26) Tem-se duas urnas. A primeira contém 6 bolas bancas e 4 pretas. A segunda contém 5 bolas brancas e 7 pretas. Duas bolas são extraídas da primeira urna e uma bola é extraída da segunda urna. Determine a probabilidade de:

a) todas as bolas sejam brancas;
b) no mínimo uma bola preta esteja dentre as três bolas extraídas;
c) dentre as três bolas extraídas encontremos exatamente duas bolas brancas.

6.11.27) Numa sala encontram-se 15 pessoas, sendo 8 delas mulheres. Qual a probabilidade de formarmos uma comissão de 5 membros com 3 mulheres e 2 homens?

6.11.28) Considere as urnas a seguir:

U_A	
Br	9
Pr	11
Vr	4
	24

U_B	
Br	7
Pr	8
Vr	6
	21

Duas bolas são retiradas da Urna A e colocadas na Urna B. A seguir uma bola é retirada da urna B. Determine:

a) A probabilidade de que, dentre as três bolas, existam pelo menos duas cores;
b) A probabilidade de que, dentre as três bolas, existam 2 Brancas.
c) Se dentre as três bolas existem 2 Pretas, qual a probabilidade de que as bolas extraídas da urna A tenha sido Branca e Preta?

6.11.29) Uma urna contém 5 bolas pretas, 3 vermelhas e 2 brancas. Foram extraídas 3 bolas com reposição. Qual a probabilidade de terem sido duas pretas e uma vermelha?

6.11.30) A urna n.º 1 contém 1 bola vermelha e 2 brancas. A urna n.º 2 contém 2 bolas vermelhas e 1 branca. Tiramos aleatoriamente uma bola da urna n.º 1, colocamos na urna n.º 2 e misturamos. Em seguida tiramos aleatoriamente uma bola da urna n.º 2. Qual a probabilidade de tirarmos uma bola branca da urna n.º 2 ?

6.11.31) A urna "A" contém x bolas vermelhas e y bolas brancas e a urna "B" contém z bolas vermelhas e v bolas brancas.

a) Se uma urna é selecionada ao acaso e uma bola retirada, qual é a probabilidade de que a bola seja vermelha?
b) Se uma bola é retirada da urna "A" e colocada na urna "B", e uma bola é retirada da urna "B", qual a probabilidade de que a segunda bola seja vermelha?

6.11.32) Seja E: lançar dois dados, e

$A=\{(x,y)/x+y=8\}$ $\quad B=\{(x,y)/x=y\}$

$C=\{(x,y)/x+y=10\}$ $\quad D=\{(x,y)/x>y\}$

$F=\{(x,y)/x=2y\}$

Calcular:

$a)\ P(A|B)$ $\quad b)\ P(C|D)$ $\quad c)\ P(D|F)$ $\quad d)\ P(A|C)$

$e)\ P(C|F)$ $\quad f)\ P(C|A)$ $\quad g)\ P(A|D)$ $\quad h)\ P(B|C)$

$i)\ P(A|F)$ $\quad j)\ P(B|F)$ $\quad k)\ P[A|(B\cap C)]$ $\quad l)\ P[(A\cap B)|(C\cap D)]$

6.11.33) Dado $P(A)=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{1}{3};\ P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Calcular:

$a)\ P(A\cup B);$ $\quad d)\ P[(A\cup B)|B];$

$b)\ P(A|B);$ $\quad e)\ P\left(\bar{A}|\bar{B}\right)$

$c)\ P(B|A);$ $\quad f)\ P\left(\bar{B}|\bar{A}\right)$

6.11.34) Uma caixa A contém 8 peças, das quais 3 são defeituosas e uma caixa B contém 5 peças, das quais 2 são defeituosas. Uma peça é retirada aleatoriamente de cada caixa.

a) Qual a probabilidade p de que ambas as peças não sejam defeituosas?
b) Qual a probabilidade p de que uma peça seja defeituosa e a outra não?
c) Se uma peça é defeituosa e a outra não, qual é a probabilidade p de que a peça defeituosa venha da caixa A?

6.11.35) Uma urna "A" contém 4 bolas: 2 brancas e 2 pretas. Uma urna "B" contém 5 bolas: 3 brancas e 2 pretas. Uma bola é transferida de "A" para "B". Uma bola é retirada de "B" e verificada ser branca. Qual é a probabilidade de que a bola transferida tenha sido branca?

6.11.36) Temos duas caixas: na primeira há 3 bolas brancas e 7 pretas e na segunda, 1 bola branca e 5 pretas. De uma caixa escolhida ao acaso, seleciona-se uma bola e verifica-se que é preta.

a) Qual a probabilidade de que a caixa de onde foi extraída a bola seja a primeira?
b) E a segunda?

6.11.37) A probabilidade de um indivíduo da classe A comprar um carro é $3/4$, de B é $1/6$ e de C é $1/20$. A probabilidade de um indivíduo da classe A comprar um carro da marca D é $1/10$; de B comprar um carro da marca D é $3/5$ e de C $3/10$. Em certa loja comprou-se um carro da marca D. Qual a probabilidade de um indivíduo da classe B o tenha comprado?

6.11.38) Três máquinas, A, B e C produzem respectivamente 40%, 50% e 10% do total de peças de uma fábrica. As porcentagens de peças defeituosas nas respectivas máquinas são 3%, 5% e 2%. Uma peça é selecionada ao acaso e verifica-se que é defeituosa. Qual a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina B?

6.11.39) Apenas uma, em cada dez pessoas de uma população, têm tuberculose. Das pessoas que têm tuberculose 80% reagem positivamente ao teste Y, enquanto 30% dos que não têm tuberculose reagem positivamente. Uma pessoa da população é selecionada ao acaso e o teste Y é aplicado. Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha tuberculose se reagiu positivamente ao teste Y?

6.11.40) São dadas duas urnas "A" e "B". A urna "A" contém três bolas pretas e quatro vermelhas. A urna "B" contém duas bolas pretas e três vermelhas. Duas bolas são escolhidas ao acaso da urna "A" e colocadas na urna "B". Uma bola é então extraída, ao acaso, da urna "B". Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade de que as bolas retiradas sejam da mesma cor?
b) Qual a probabilidade de que as primeiras bolas sejam vermelhas, sabendo-se que a terceira foi preta?

6.11.41) Sabe-se que um soro da verdade, quando ministrado a um suspeito, é 90% eficaz quando a pessoa é culpada e 99% eficaz quando é inocente. Em outras palavras, 10% dos culpados são julgados inocentes, e 1% dos inocentes é julgado culpado. Se o suspeito foi retirado de um grupo em que 95% jamais cometeram qualquer crime, e o soro indica culpado, qual a probabilidade de o suspeito ser inocente?

6.11.42) Em uma indústria de enlatados, as linhas de produção I, II e III respondem por 50%, 30%, 20% da produção, respectivamente. As proporções de latas com defeito de produção nas linhas I, II e III são 0,4%, 0,6% e 1,2%. Qual a probabilidade de uma lata defeituosa (descoberta ao final da inspeção do produto acabado) provir da linha I?

6.11.43) Em certo colégio 5% dos homens e 2% das mulheres têm mais de 1,80 m de altura. Por outro lado, 60% dos estudantes são homens. Se um estudante é selecionado aleatoriamente e tem mais de 1,80 m de altura, qual a probabilidade de que o estudante seja mulher?