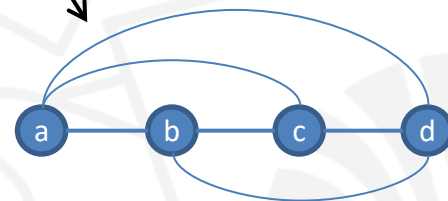
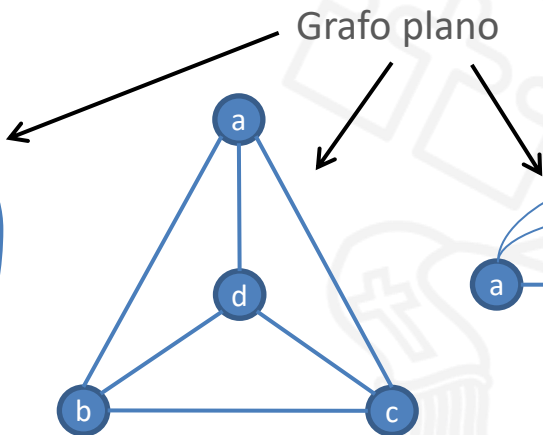
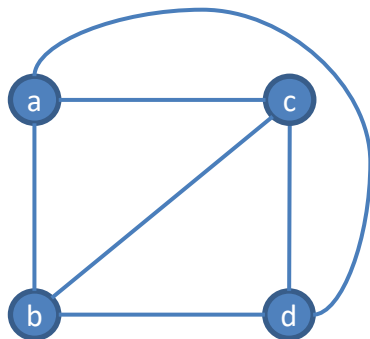
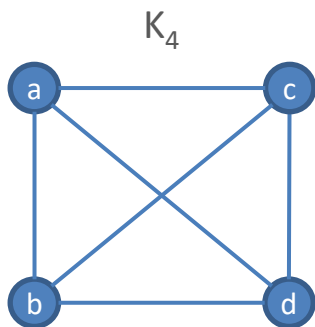


Planaridade em Grafos

Zenilton Patrocínio

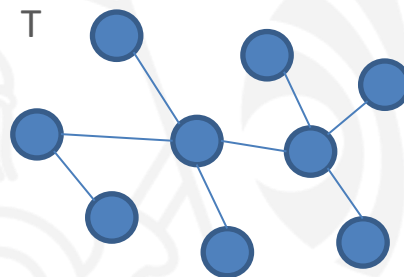
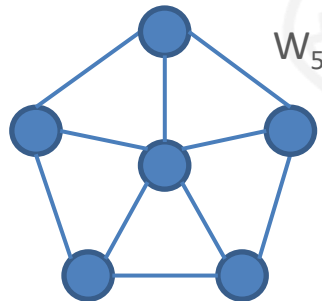
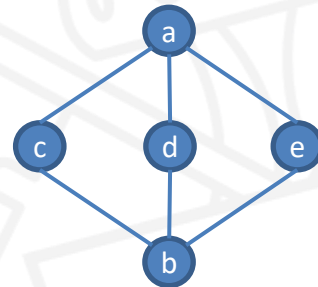
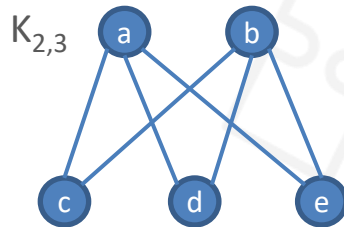
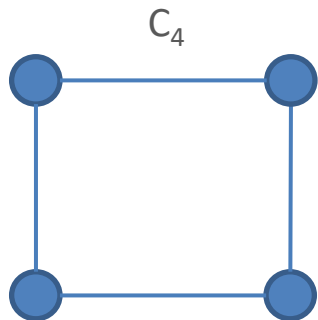
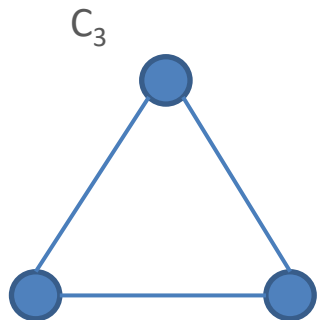
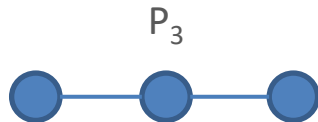
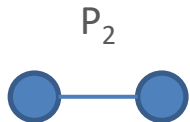
Grafo Planar

Um grafo $G = (V, E)$ é dito **planar** quando existir uma representação gráfica de G sem cruzamento de arestas.

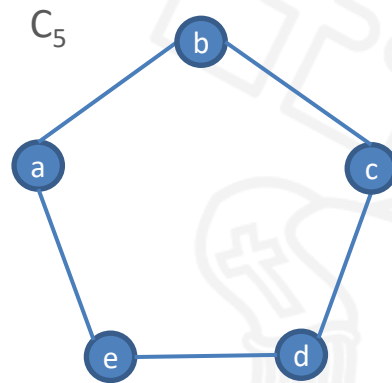
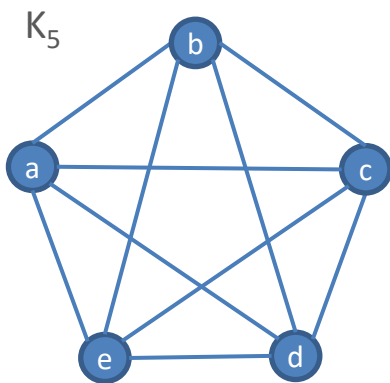


Costuma-se usar o termo grafo plano para se referir a representação planar de um grafo planar.

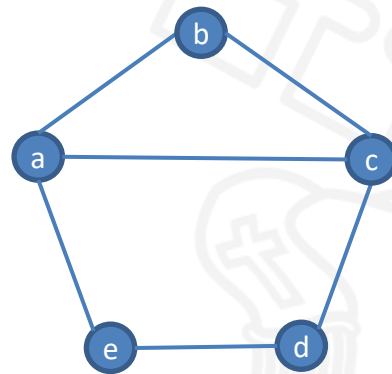
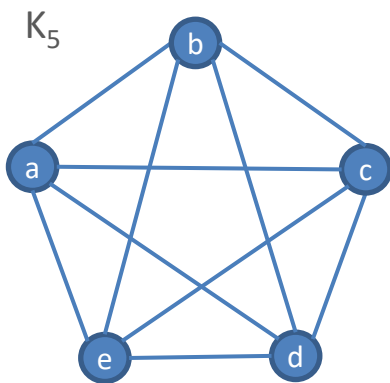
Grafo Planar – Exemplos



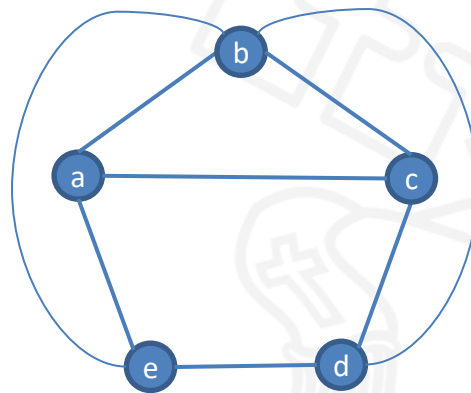
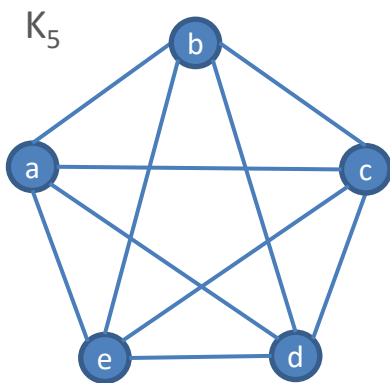
Grafo Não Planar – Exemplos



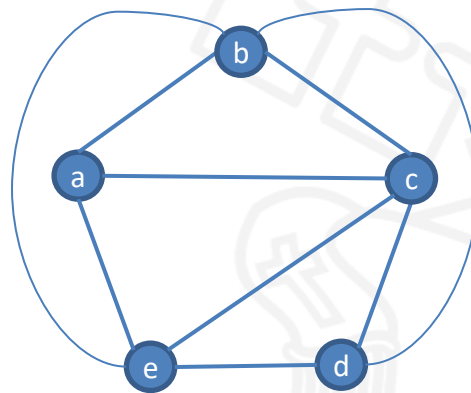
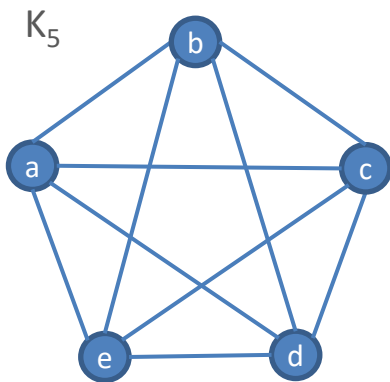
Grafo Não Planar – Exemplos



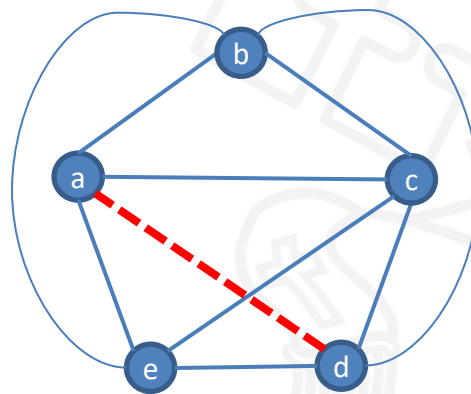
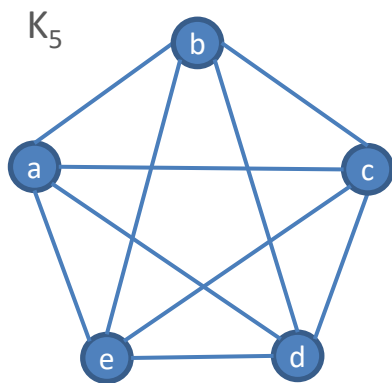
Grafo Não Planar – Exemplos



Grafo Não Planar – Exemplos



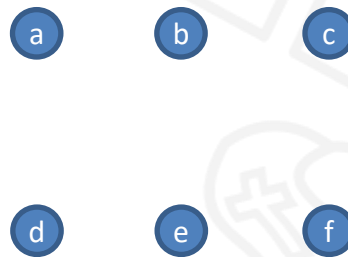
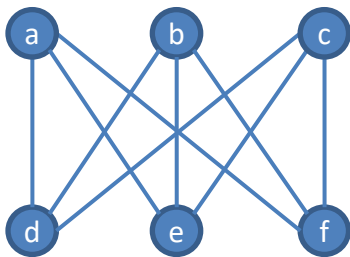
Grafo Não Planar – Exemplos



Não há forma de conectar
os vértices a e d sem
cruzamento de arestas

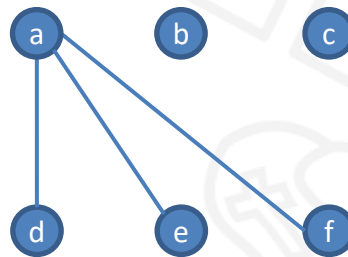
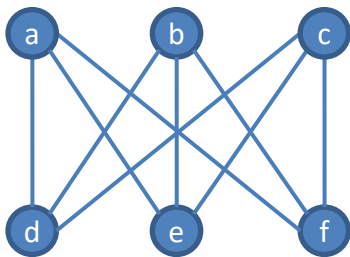
Grafo Não Planar – Exemplos

$K_{3,3}$



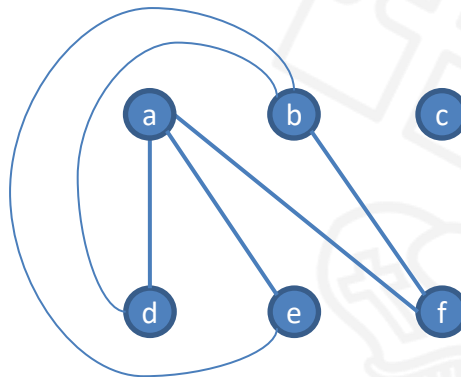
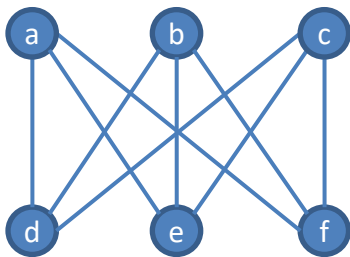
Grafo Não Planar – Exemplos

$K_{3,3}$



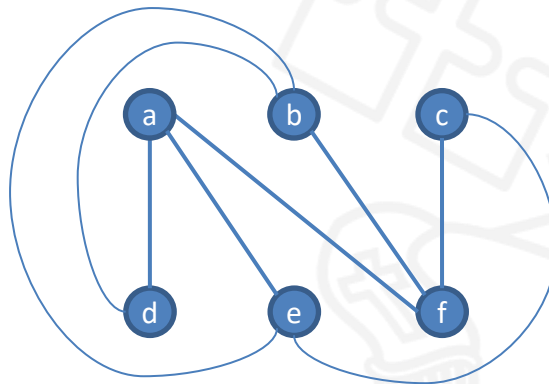
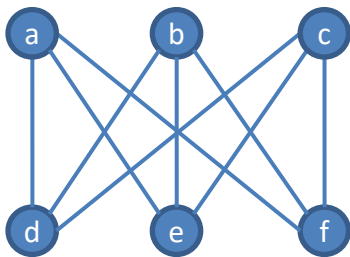
Grafo Não Planar – Exemplos

$K_{3,3}$



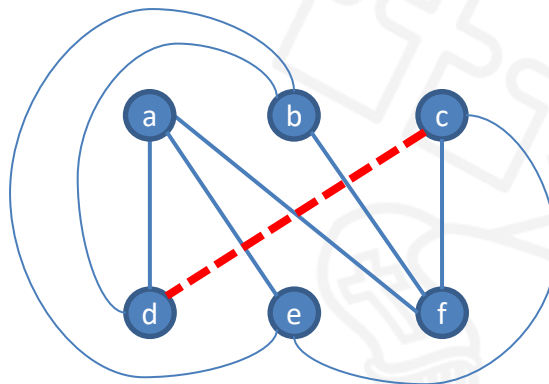
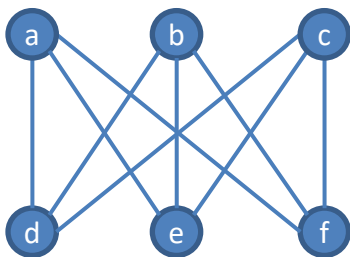
Grafo Não Planar – Exemplos

$K_{3,3}$



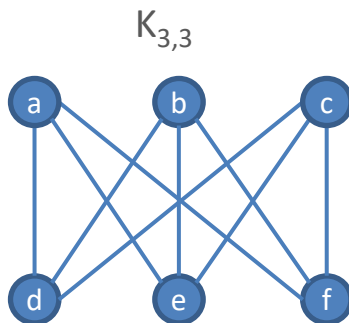
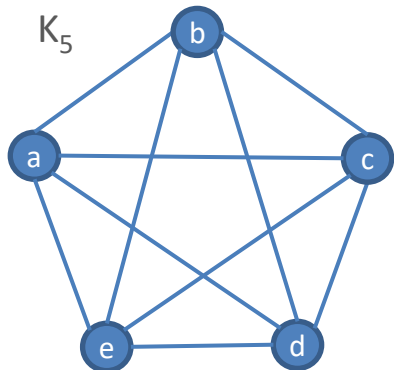
Grafo Não Planar – Exemplos

$K_{3,3}$



Não há forma de conectar
os vértices c e d sem
cruzamento de arestas

Grafo Não Planar – Exemplos



São conhecidos como grafos de Kuratowski.

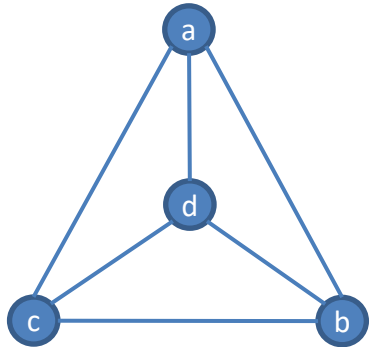
Ambos são regulares e não planares.

A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar.

K_5 é o grafo não planar com menor número de vértices e $K_{3,3}$ é o grafo não planar com menor número de arestas.

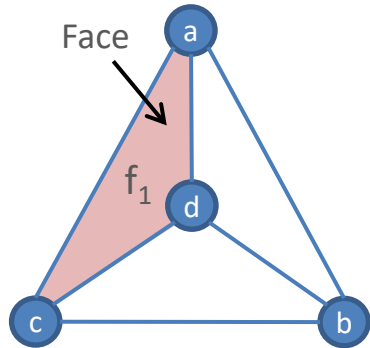
Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas **faces**.



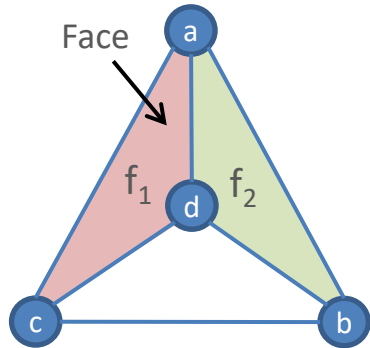
Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas **faces**.



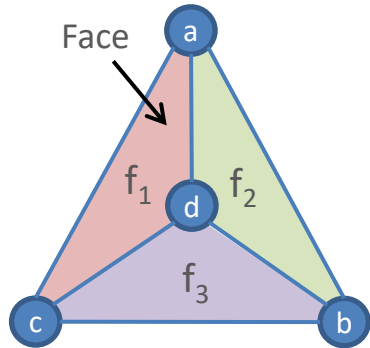
Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas **faces**.



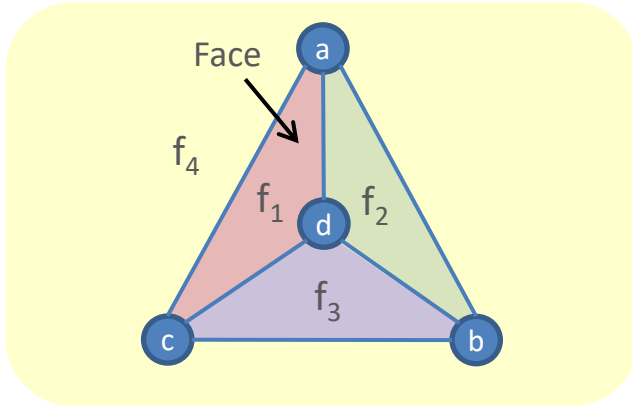
Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas **faces**.



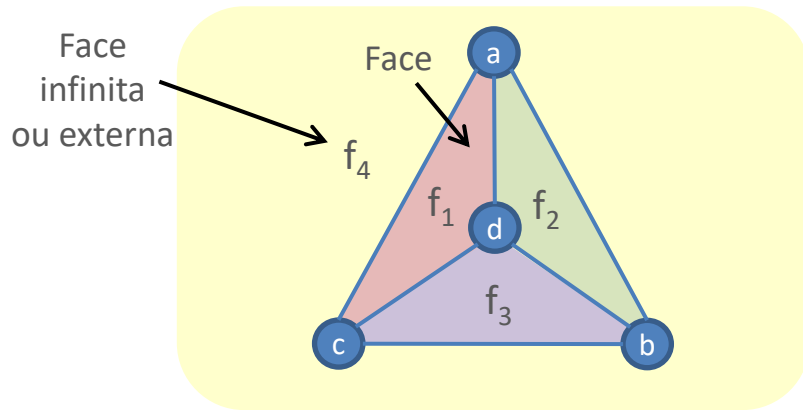
Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas **faces**.



Face

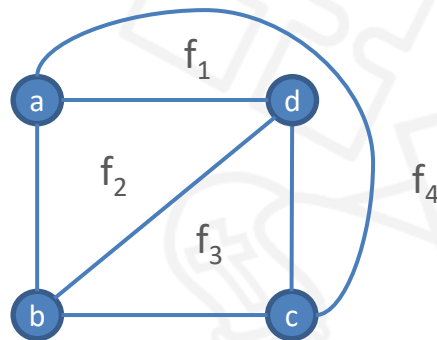
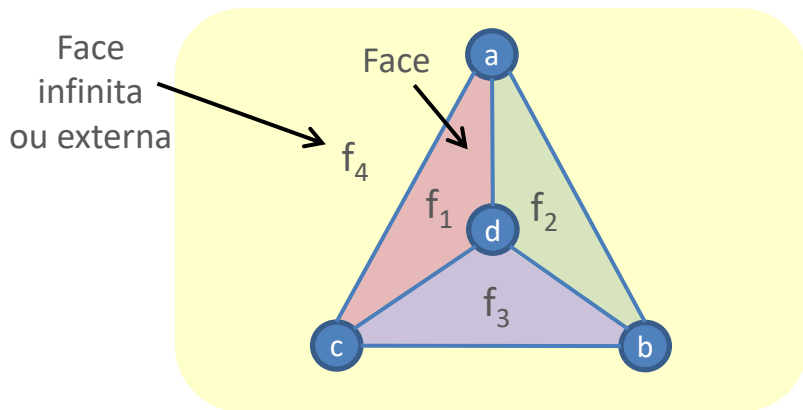
Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas **faces**.



Uma das faces é ilimitada e chamada de **face infinita** ou **externa**.

Face

Seja G um grafo planar, então uma representação planar de G divide o plano em regiões, denominadas **faces**.

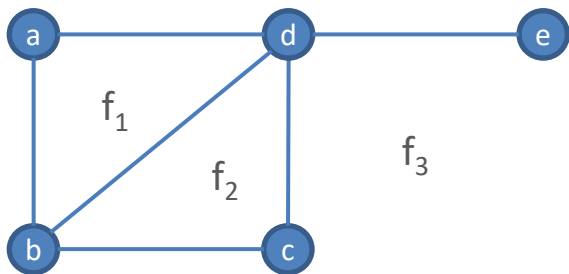


Número de faces de um grafo planar é constante para toda representação planar dele.

Uma das faces é ilimitada e chamada de **face infinita** ou **externa**.

Grau de Face


Seja G um grafo planar e f uma das faces de uma representação planar de G , o **grau da face** f é o número de arestas no passeio fechado que define a região correspondente a f .



Face $f_1 \rightarrow a \ b \ d \ a \rightarrow d(f_1) = 3$

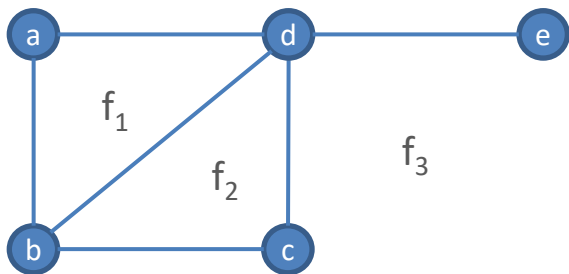
Face $f_2 \rightarrow b \ c \ d \ b \rightarrow d(f_2) = 3$

Face $f_3 \rightarrow a \ b \ c \ d \ e \ d \ a \rightarrow d(f_3) = 6$


Aresta $\{d, e\}$ é
contada duas vezes

Grau de Face

Seja G um grafo planar e f uma das faces de uma representação planar de G , o **grau da face** f é o número de arestas no passeio fechado que define a região correspondente a f .



Face $f_1 \rightarrow a \ b \ d \ a \rightarrow d(f_1) = 3$

Face $f_2 \rightarrow b \ c \ d \ b \rightarrow d(f_2) = 3$

Face $f_3 \rightarrow a \ b \ c \ d \ e \ d \ a \rightarrow d(f_3) = 6$

A soma dos graus de todas as faces é sempre par e igual ao dobro do número de arestas.

Fórmula de Euler

Para um grafo conexo planar G com m arestas, n vértices e f faces, a seguinte relação é sempre válida

$$n - m + f = 2$$

Dessa forma, para um grafo conexo planar G com m arestas e n vértices, então qualquer representação planar de G possui $f = m - n + 2$ faces.

Isso reforça o caráter invariante do número de faces visto que os número de vértices e de arestas de um grafo não mudam.

Coloração de Faces

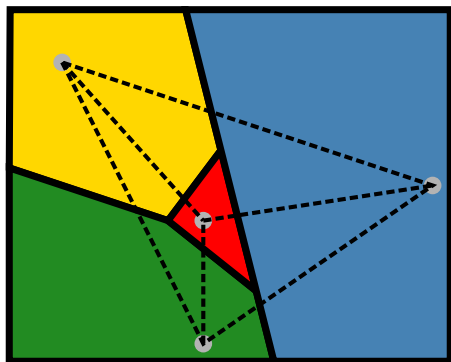
Seja G um grafo planar, uma coloração de faces consiste em atribuir cores as faces de G de maneira que regiões adjacentes possuam cores diferentes.



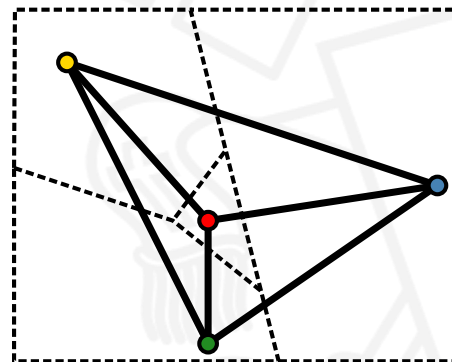
O uso de cores se origina de colorir os países em um mapa, onde cada região (correspondendo a uma face) é literalmente colorida. Daí pode se generalizar para se colorir as faces de um grafo planar qualquer.

Dualidade Geométrica

Um grafo dual de um grafo planar G é aquele em que um vértice corresponde a uma região de G e toda aresta relaciona vértices que representam regiões adjacentes em G .



Coloração de faces



Coloração de vértices

Teorema das 04 Cores

Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.

Apesar de se ter prova da suficiência de cinco cores desde 1800, o teorema das quatro cores foi provado apenas em 1976 por Appel e Haken.

Para dissipar quaisquer dúvidas remanescentes sobre a prova Appel-Haken, uma prova mais simples usando as mesmas idéias e ainda contando com computadores foi publicada em 1997 por Robertson, Sanders, Seymour e Thomas.

