Formas Normais

Forma Normal de Chomsky

Seja uma GLC G = (V, Σ, R, P), ela é dita estar na Forma Normal de Chomsky (FNC) se todas as regras são da forma:

$P \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$

$X \rightarrow Y\,Z$, para $Y, Z \in V$, $Y \neq P$, $Z \neq P$

$X \rightarrow a$, para $a \in \Sigma$

Forma Normal de Greibach

Seja uma GLC G = (V, Σ, R, P), ela é dita estar na Forma Normal de Greibach (FNG) se todas as regras são da forma:

$P \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$

$X \rightarrow a\,y$, para $a \in \Sigma$ e $y \in V^*$

Forma Normal de Chomsky

Obtenção de FNC

1. Introduzir nova variável inicial

2. Remover regras $X \rightarrow \lambda$

3. Remover regras unitárias

4. Converter regras remanescentes

Forma Normal de Chomsky

<u>Exemplo</u>

$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B$

$A \rightarrow B \mid S$

$B \rightarrow b \mid \lambda$

1. Introduzir nova variável inicial

$S_0 \rightarrow S$

$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B$

$A \rightarrow B \mid S$

$B \rightarrow b \mid \lambda$

Forma Normal de Chomsky

2. Remover regras da forma $X \rightarrow \lambda$: $B \rightarrow \lambda$

$$\begin{aligned}
S_0 &\rightarrow S \\
S &\rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \\
A &\rightarrow B \mid S \\
B &\rightarrow b \mid \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_0 &\rightarrow S \\
S &\rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \\
A &\rightarrow B \mid S \mid \lambda \\
B &\rightarrow b
\end{aligned}$$

Forma Normal de Chomsky

2. Remover regras da forma $X \rightarrow \lambda$: $A \rightarrow \lambda$

$S_0 \rightarrow S$

$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a$

$A \rightarrow B \mid S \mid \lambda$

$B \rightarrow b$

$S_0 \rightarrow S$

$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S \mid S$

$A \rightarrow B \mid S$

$B \rightarrow b$

Forma Normal de Chomsky

3. Remover regras unitárias: $S \rightarrow S$

$S_0 \rightarrow S$

$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S \mid S$

$A \rightarrow B \mid S$

$B \rightarrow b$

$S_0 \rightarrow S$

$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$A \rightarrow B \mid S$

$B \rightarrow b$

Forma Normal de Chomsky

3. Remover regras unitárias: $S_0 \rightarrow S$

$$S_0 \rightarrow S$$
$$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$$
$$A \rightarrow B \mid S$$
$$B \rightarrow b$$

$$S_0 \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$$
$$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$$
$$A \rightarrow B \mid S$$
$$B \rightarrow b$$

Forma Normal de Chomsky

3. Remover regras unitárias: $A \rightarrow B$

$$
\begin{aligned}
S_0 &\rightarrow A\,S\,A \mid a\,B \mid a \mid S\,A \mid A\,S \\
S &\rightarrow A\,S\,A \mid a\,B \mid a \mid S\,A \mid A\,S \\
A &\rightarrow B \mid S \\
B &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_0 &\rightarrow A\,S\,A \mid a\,B \mid a \mid S\,A \mid A\,S \\
S &\rightarrow A\,S\,A \mid a\,B \mid a \mid S\,A \mid A\,S \\
A &\rightarrow b \mid S \\
B &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

Forma Normal de Chomsky

3. Remover regras unitárias: $A \rightarrow S$

$S_0 \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$A \rightarrow b \mid S$

$B \rightarrow b$

$S_0 \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$A \rightarrow b \mid A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$B \rightarrow b$

Forma Normal de Chomsky

4. Converter regras remanescentes

$S_0 \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$S \rightarrow A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$A \rightarrow b \mid A\ S\ A \mid a\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$B \rightarrow b$

$S_0 \rightarrow A\ A_1 \mid U\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$S \rightarrow A\ A_1 \mid U\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$A \rightarrow b \mid A\ A_1 \mid U\ B \mid a \mid S\ A \mid A\ S$

$A_1 \rightarrow S\ A$

$U \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

Forma Normal de Chomsky

<u>Exercício</u>: Obter a FNC da seguinte GLC G

G = ({L, S, E}, {a, (,)}, R, L) em que R é dado por:

$L \rightarrow (\ S\ )$

$S \rightarrow S\ E \mid \lambda$

$E \rightarrow a \mid L$

Forma Normal de Chomsky

Solução

$L \rightarrow A\ X \mid A\ B$

$S \rightarrow S\ E \mid a \mid A\ X \mid A\ B$

$E \rightarrow a \mid A\ X \mid A\ B$

$X \rightarrow S\ B$

$A \rightarrow ($

$B \rightarrow)$

Lema do Bombeamento para LLC

Seja L uma LLC então existe constante $k > 0$ tal que para qualquer palavra $z \in L$, $|z| \geq k$, existem u, v, w, x, y que satisfazem as seguintes condições:

- $z = u\,v\,w\,x\,y$
- $|v\,w\,x| \leq k$
- $v\,x \neq \lambda$
- $u\,v^{\mathrm{i}}\,w\,x^{\mathrm{i}}\,y \in L$, para todo $\mathrm{i} \geq 0$

<u>Exemplos ("contra-exemplos")</u>

$L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

$L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$

Propriedades sobre para LLC

Considere duas LLCs L_1 e L_2, então:

a) $L_1 \cup L_2$ também é LLC

b) $L_1 L_2$ também é LLC

c) L_1^* também é LLC

<u>Prova.</u>

Seja $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, P_1)$ e $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, P_2)$, tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e $L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$. Construir $G_3 = (V_3, \Sigma_3, R_3, P_3)$ da seguinte forma:

(a) $L_3 = L(G_3) = L_1 \cup L_2$

$V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{ P_3 \}$, $P_3 \notin V_1 \cup V_2$

$\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$R_3 = R_1 \cup R_2 \cup \{ P_3 \rightarrow P_1 , P_3 \rightarrow P_2 \}$

Propriedades sobre para LLC

<u>Prova.</u>

Seja $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, P_1)$ e $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, P_2)$, tais que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ e $L_1 = L(G_1)$ e $L_2 = L(G_2)$. Construir $G_3 = (V_3, \Sigma_3, R_3, P_3)$ da seguinte forma:

(b) $L_3 = L(G_3) = L_1 L_2$

$V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{ P_3 \}$, $P_3 \notin V_1 \cup V_2$

$\Sigma_3 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$R_3 = R_1 \cup R_2 \cup \{ P_3 \rightarrow P_1 P_2 \}$

(c) $L_3 = L(G_3) = L_1^*$

$V_3 = V_1 \cup \{ P_3 \}$, $P_3 \notin V_1$

$\Sigma_3 = \Sigma_1$

$R_3 = R_1 \cup \{ P_3 \rightarrow P_1 P_3 , P_3 \rightarrow \lambda \}$

Propriedades sobre para LLC

OBS. Considere duas LLCs L_1 e L_2, então:

a) $L_1 \cap L_2$ não é necessariamente LLC

b) $\overline{L_1}$ não é necessariamente é LLC

Prova.

Considere duas LLCs $L_1 = \{a^n b^n c^k \mid n, k \geq 0\}$ e $L_2 = \{a^n b^k c^k \mid n, k \geq 0\}$.

Contudo $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ que não é LLC. Logo, conclui-se que as LLCs não são fechadas sob interseção (tendo em vista a existência de um contra-exemplo).

Por outro lado, $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ (De Morgan). Portanto, como as LLCs são fechadas sob união, se elas fossem fechadas sob complementação, também seriam fechadas sob interseção. Daí, conclui-se que as LLCs não são fechadas sob complementação.

Propriedades sobre para LLC

Seja uma LLC L e uma Ling.Regular R, então L $\cap$ R é LLC.

<u>Prova.</u>

Sejam APN $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma, \delta_1, i_1, F_1)$ e AFD $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, i_2, F_2)$, tais que $L = L(M_1)$ e $R = L(M_2)$. Construir APN $M_3 = (Q_3, \Sigma_3, \Gamma, \delta_3, i_3, F_3)$ da seguinte forma:

$Q_3 = Q_1 \times Q_2$

$\Sigma_3 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

$i_3 = [i_1, i_2]$

$F_3 = F_1 \times F_2$

$[[q_1', q_2'], z] \in \delta_3([q_1, q_2], a, A)$, $\forall$transições $[q_1', z] \in \delta_1(q_1, a, A)$ e $\delta_2(q_2, a) = q_2'$

$[[q_1', q_2], z] \in \delta_3([q_1, q_2], \lambda, A)$, $\forall$transições $[q_1', z] \in \delta_1(q_1, \lambda, A)$ e $\forall q_2 \in Q_2$

Propriedades sobre para LLC

Seja uma LLC L e uma Ling.Regular R, então L $\cap$ R é LLC.

Exemplo de Aplicação.

Mostrar que L = { $w \in \{a, b, c\}^*$ | w tem o mesmo número de **a**s, **b**s e **c**s} não é LLC.

Prova.

Suponha que L seja LLC.

Por outro lado, temos que R = L($a^*b^*c^*$) é uma Ling. Regular.

Dessa forma, teríamos que L $\cap$ R é LLC.

Contudo L $\cap$ R = $\{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$ que não é LLC. (o que é um absurdo)

Logo, **L não pode ser LLC.**