PUC Minas

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

2^a Prova Cálculo II - 26 de outubro de 2023

Ciências da Computação - Praça da Liberdade

Nome: ______________________________

Questão 1. O valor da integral

$$\int_0^1 xe^{2x}dx$$

é aproximadamente:

a) 2,0973

b) 3,2525

c) 4,5746

d) 5,4136

e) 6,2789

$u = x$

$du = dx$

$dv = e^{2x}dx$

$v = \dfrac{e^{2x}}{2}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x e^{2x} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx$$

$$\int x e^{2x} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$$

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left(\frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{1 e^{2}}{2} - \frac{e^{2}}{4}\right) - \left(\frac{0 e^{2\cdot 0}}{2} - \frac{e^{2\cdot 0}}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{e^2+1}{4} \simeq 2,0973$$

Questão 2. A integral indefinida

$$\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)}dx$$

é igual a:

a) $\frac{1}{2}\ln|2x-1| + 3\ln|x+1| + C$

b) $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + \ln|x-1| + C$

c) $\ln|2x+1| + 2\ln|x-1| + C$

~~d)~~ $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + 2\ln|x-1| + C$

e) $\frac{3}{2}\ln|2x+1| + 3\ln|x-1| + C$

$$\frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$\frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A(x-1) + B(2x+1)}{(2x+1)(x-1)}$$

$$5x+1 = A(x-1) + B(2x+1)$$

$x = 1 \Rightarrow$

$$6 = 0 + 3B$$

$$\boxed{B = 2}$$

$x = 0$

$$1 = -A + B$$

$$1 = -A + 2$$

$$\boxed{A = 1}$$

$$\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)}dx = \int \frac{1}{(2x+1)}dx + \int \frac{2}{(x-1)}dx$$

$$\boxed{\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + 2\ln|x-1|}$$

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

2^a Prova Cálculo II - 26 de outubro de 2023

Ciências da Computação - Praça da Liberdade

2^a Prova

Respostas

1	●	b	c	d	e
2	~~a~~	~~b~~	~~c~~	●	~~e~~

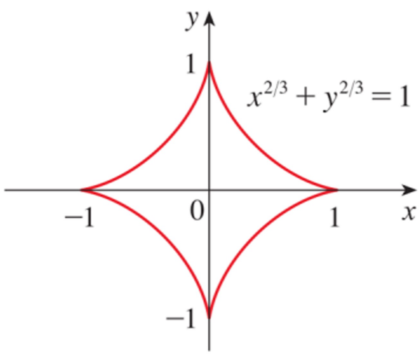
Segunda Prova

Respostas

1	a	b	●	d	e
2	~~a~~	~~b~~	~~c~~	~~d~~	~~e~~

Questão Aberta

Questão 3. Observe a figura



A curva representada na figura acima chama -se astroide e sua equação algébrica é dada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Calcule o comprimento da astroide.

Temos

$$y^{2/3} = 1 - x^{2/3}$$

$$y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$$

$$y' = \frac{3}{2}\left(1 - x^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = -\frac{\left(1 - x^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$y' = -\left(\frac{1 - x^{2/3}}{x^{2/3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Assim

$$L = 4\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

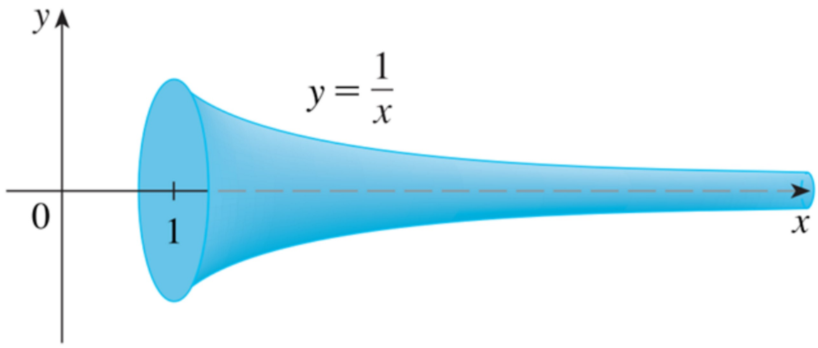
$$= 4\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1 - x^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{x^{-2/3}}\, dx$$

$$= 4\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\, dx$$

$$= 4\, x^{2/3} \cdot \frac{3}{2} \Big|_0^1 = 6$$

Questão 4. Observe a figura



Essa figura é conhecida como a trombeta de Gabriel. Ela é obtida fazendo um giro em torno do eixo x da função $y = \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$.

a) Calcule o volume do sólido no interior da trombeta de Gabriel

$$\text{Vol } S = \int_1^{\infty} \pi f(x)^2 \, dx = \int_1^{\infty} \pi \frac{1}{x^2} \, dx = \pi \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} x^{-2} \, dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) \Bigg|_1^{t} = \pi \lim_{t \to \infty} \left(\cancel{-\frac{1}{t}}^{\to 0} + 1 \right) = \pi$$

b) Prove que a área lateral da corneta de Gabriel é infinita.

$$A = \int_1^{\infty} 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} \, dx$$

$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \, dx$$

$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, dx$$

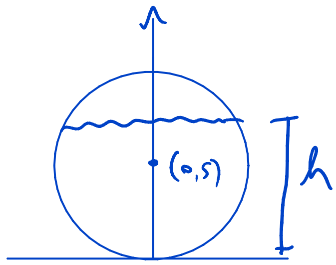
Observe que $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1} \Rightarrow x < \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \frac{x}{x^2} < \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx < \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, dx.$$

Como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \infty$ então $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, dx = \infty$.

Portanto $A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, dx = \infty$.

Questão 5. Um tanque de armazenamento de água tem a forma de um cilindro com diâmetro de 10 m. Ele está montado de forma que as secções transversais circulares são verticais. Se a profundidade da água é 7 m, qual a porcentagem da capacidade total usada?



$$x^2 + (y-5)^2 = 25$$

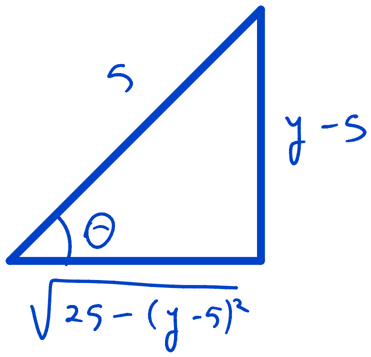
$$x = \sqrt{25-(y-5)^2}$$

$$V = 2L \int_0^h \sqrt{25-(y-5)^2}\, dy$$

Faça

$$y - 5 = 5 \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dy = 5\cos\theta\, d\theta$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{y-5}{5}}$$



$$V = 2L \int 25 \cdot \cos^2\theta\, d\theta$$

$$V = 50L \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$V = 50L \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} \right)$$

$$V = 50L \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{2} \right)$$

$$V = 50L\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{y-5}{5}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{(y-5)}{5}\cdot\frac{\sqrt{25-(y-5)^2}}{5}\right)\Bigg|_0^k$$

$$V = 50L\left[\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{7-5}{5}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{(7-5)}{5}\cdot\frac{\sqrt{25-(7-5)^2}}{5}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$V = 50L\left[\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{\sqrt{21}}{25}\right) + \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{Taxa} = \frac{V}{V_T} = \frac{50\cancel{L}\left[\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{\sqrt{21}}{25}\right) + \frac{\pi}{4}\right]}{\pi\cdot 25\cdot\cancel{L}}$$

$$= \frac{2\left(0{,}5\arcsin(2/5) + \frac{\sqrt{21}}{25} + \frac{\pi}{4}\right)}{\pi}$$

$$= 74{,}76\,\%$$