PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Campus Lourdes – Inst. de Ciências Exatas e Informática – Ciência da Computação

Fundamentos Téoricos da Computação

Lista de Exercícios N.02 (Valor: 02 pontos)
Entrega: Quarta-feira, 22 de outubro de 2025 às 23:59

1. Forneça um autômato de pilha (AP) e uma gramática livre de contexto (GLC) para cada uma das seguintes linguagens sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:

   (a) Todas as sentenças não vazias que iniciam e terminam com o mesmo símbolo.

   (b) Todas as sentenças que contém mais 1s do que 0s.

   (c) Todos os palíndromos (um palíndromo representa uma sentença pode ler da esquerda para a direita ou vice-versa).

2. Forneça uma descrição sucinta da linguagem gerada por cada uma das seguintes GLCs.

   (a)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Z1Z1Z1A \\
Z &\rightarrow Z0 \mid \lambda \\
A &\rightarrow A0 \mid A1 \mid \lambda
\end{aligned}
$$

$S \Rightarrow Z1Z1Z1A \Rightarrow 111$ $\qquad A = (0 \cup 1)^*$

$Z1Z1Z1A \Rightarrow 0111$

$0^a 1 0^a 1 0^* 1 (0 \cup 1)^*$

   (b)

$$
S \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1
$$

   (c)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow DC \mid AE \\
A &\rightarrow Aa \mid \lambda \\
C &\rightarrow Cc \mid \lambda \\
D &\rightarrow aDb \mid \lambda \\
E &\rightarrow bEc \mid \lambda
\end{aligned}
$$

3. Considere a seguinte GLC:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow AED \mid F \\
A &\rightarrow Aa \mid a \\
B &\rightarrow Bb \mid b \\
C &\rightarrow Cc \mid c \\
D &\rightarrow Dd \mid d \\
E &\rightarrow bEc \mid bc \\
F &\rightarrow aFd \mid BC
\end{aligned}
$$

(a) Qual é a linguagem gerada por esta gramática?

(b) Mostre que esta gramática é ambígua fornecendo uma sentença que pode ser derivada de duas formas diferentes. Desenhe as duas árvores de derivação.

(c) Forneça uma gramática não ambígua que seja capaz de gerar a mesma linguagem da gramática acima.

4. Use o lema do bombeamento para mostrar que as seguintes linguagens não são livres de contexto:

(a) $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ $:= L_1$

(b) $\{a^n b^{2n} c^n \mid n \geq 0\}$ $:= L_2$

(c) $\{a^n b^k c^n d^k \mid n, k \geq 0\}$ $:= L_3$

5. Considere que $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ é múltiplo de } 5\}$ e que $n_s(w)$ representa o número de símbolos s na palavra w. Mostre, para cada linguagem a seguir, que ela é ou não LLC:

automato reconhece,
gramatica gera,
conjunto descreve

(a) $\overline{L_1}$

(b) $L1 \cap L2$

(c) $L1 \cap \overline{L2}$

(d) $\{w \in \{a,b,c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$

(e) $\{w \in \{a,b,c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) \text{ ou } n_a(w) = n_c(w)\}$

(f) $\{w \in \{a,b,c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$ $:= L_6$

6. Prove que a afirmativa

$$\text{se } L \text{ é uma LLC, então } (L - X) \cup (X - L) \text{ é uma LLC}$$

é ou não verdadeira, considerando os casos em que:

(a) X é finita = Regular | $L \cap \overline{R}$ = LLC ∪ LLC = LLC, é verdadeira

(b) X é regular

$(R \cap \overline{L})$ = finito = LLC

→ $(L - X) = (L \cap \overline{X})$ = LLC ∪ LLC = LLC, é verdadeiro

$(X \cap \overline{L})$ é finito

1)a) G: $S \to 0P0 \mid 1P1 \mid 0 \mid 1$

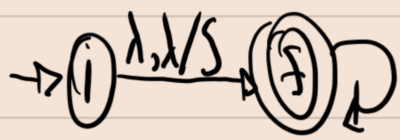
$P \to 0P \mid 1P \mid \lambda$

$\lambda, S/0P0$
$\lambda, S/1P1$
$\lambda, S/0$
$\lambda, S/1$
$\lambda, P/0P$
$\lambda, P/1P$
$\lambda, P/\lambda$
$0, \lambda/\lambda$
$1, \lambda/\lambda$

$L_m = \{w \in \Sigma(0,1) \mid m_1(w) > m_0(w)\}$

b) G_2: $S \to P1P$

$P \to P0P1P \mid P1P0P \mid 1P \mid \lambda$



$\lambda, S/P1P$
$\lambda, P/P0P1P$
$\lambda, P/P1P0P$
$\lambda, P/1P$
$\lambda, P/\lambda$

1011001

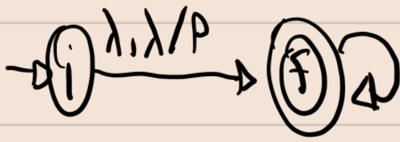
$P1P \Rightarrow 1P \Rightarrow 1P0P1P \Rightarrow 1P0P1P0PP1P \Rightarrow 1P0P1P1P0P0PP1P$

$\overset{P:=\lambda}{\Rightarrow} 1011001$

c) 01011010 | 1101001011 | 0110110110 | 010 | 00100

01110   0101010

G_3: $P \to 1P1 \mid 0P0 \mid 1 \mid 0 \mid \lambda$



$\lambda, P/1P1$ $1, \lambda/\lambda$
$\lambda, P/0P0$ $0, \lambda/\lambda$
$\lambda, P/1$
$\lambda, P/0$
$\lambda, P/\lambda$

c) A linguagem gera: $\{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\} \cup \{a^x b^x c^y \mid x, y \geq 0\}$

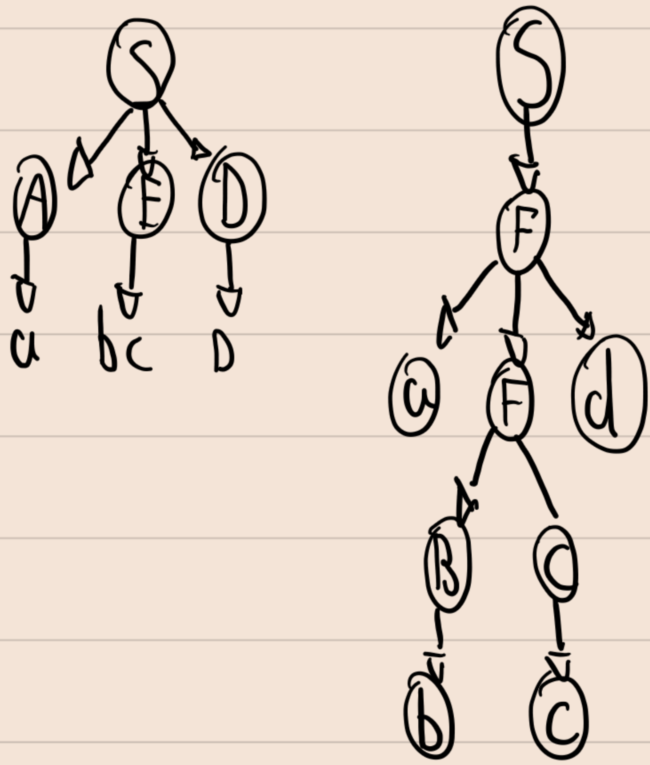
2) a)

b) A linguagem produz todas as sentenças de tamanho ímpar

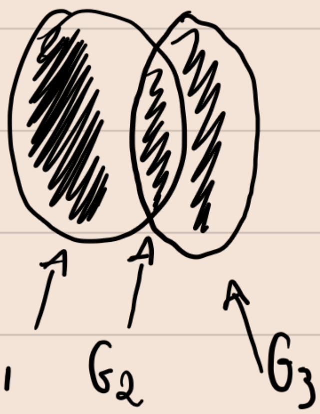
c) A linguagem gera todas as sentenças ~~de~~ com o mesmo número de a's e b's ou mesmo número de b's e c's.

3) a) a) $\{a^m b^n c^n d^p \mid m,n,p \geq 0\} \cup \{a^x b^y c^z d^x \mid x,y,z \geq 0\}$

b) G é ambígua pois a sentença abcd possui 2 AD's



c)



$\{a^m b^c c^d d^p \mid m,c,d,p \geq 0, c \neq p$

G_1:

4) Suponha que L_1 seja LLC, então $\exists K > 0$, tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq K$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq K$
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$)
- $uv^i wx^i y \in L_1$, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_1 = a^{K^2} \in L_1$, como $|vwx| \leq K$, vx possui no máximo K a's e pelo menos um a.

Porém, $uv^2wx^2y = a^{K^2 + |vx|} \notin L_1$, $K^2 + 1 \leq K^2 + |vx| \leq K^2 + K$, pois o número de a's não será quadrado de um número natural, já que $(K+1)^2 = K^2 + 2K + 1$. Isto é absurdo, logo L_1 não é LLC

b) Suponha que L_2 seja LLC, então $\exists K \geq 0$, tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq K$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq K$
- $|vx| > 0$ $(vx \neq \lambda)$
- $uv^i wx^i y \in L_2$, $\forall i = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Considere $z_2 = a^K b^{2K} c^K \in L_2$, como $|vwx| \leq K$ e $|vx| > 0$, temos que considerar 3 opções:

$\overbrace{aaa...a}^{k}\overbrace{bbbb...b}^{2k}\overbrace{ccc...c}^{k}$

- vx possui pelo menos um a
- vx possui apenas b's
- vx possui pelo menos um c

1º caso) Se vx possui pelo menos um a, logo não possui c's. Então $v^2wx^2 \notin L_2$, pois o número de a's e c's é diferente.

2º caso) Se vx possui apenas b's. Então $v^2wx^2 \notin L_2$, pois o número de b's não seria mais o dobro do número de a's e c's.

3º caso) Se vx possui pelo menos um c, logo não possui a's. Então $v^2wx^2 \notin L_2$, pois o número de a's e c's é diferente

Isto é absurdo, logo L_2 não é LLC.

c) Suponha que L_3 é LLC, logo $\exists K' > 0$ tal que toda sentença $z \in L_3$, $|z| \geq K'$, pode ser reescrito como $z = uvwxy$, onde:

- $|vwx| \leq K'$
- $|vx| > 0$ $(vx \neq \lambda)$
- $uv^iwx^iy \in L_3, \forall i = 0,1,2,3,...$

Considere $z_3 = a^{K'}b^{K'}c^{K'}d^{K'} \in L_3$, como $|uvx| \leq K'$ e $vx \neq \lambda$, existem 4 possibilidades.

- vx possui pelo menos um a
- vx possui pelo menos um b
- vx possui pelo menos um c
- vx possui pelo menos um d

1ª opção) Se vx possui pelo menos um a, logo não possui c's. Então $v^2wx^2 \notin L_3$, pois o número de a's e c's é diferente

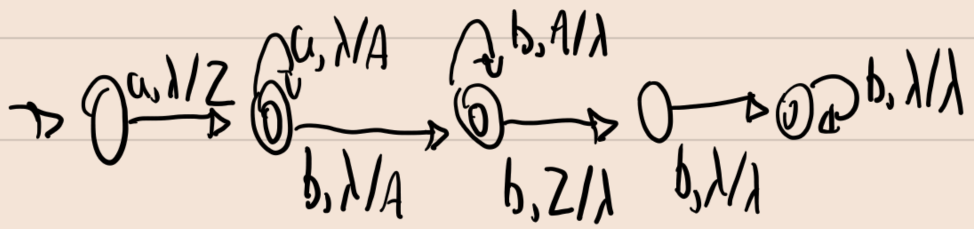
2ª opção) Se vx possui pelo menos um b, logo não possui d's. Então $v^2wx^2 \notin L_3$, pois o número de b's e d's é diferente

3ª opção) Se vx possui pelo menos um c, logo não possui a's. Então $v^2wx^2 \notin L_3$, pois o número de c's e a's é diferente

4ª opção) Se vx possui pelo menos um d, logo não possui b's. Então $v^2wx^2 \notin L_3$, pois o número de d's e b's é diferente

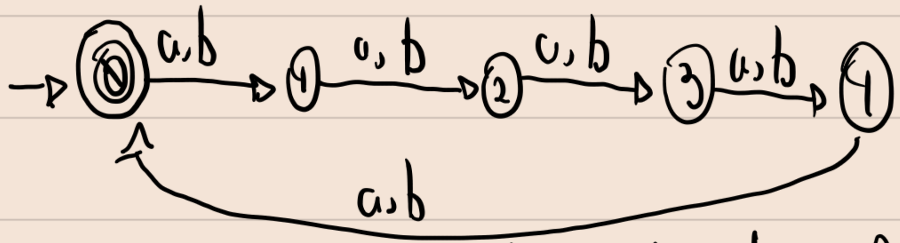
Isto é absurdo, logo L_3 não é LLC.

5) $\overline{L_1} = \{a^p b^q \mid p,q \geq 0, p \neq q\} \cup \overline{(a \cup b)^* ba (a \cup b)^*}$ → pelo menos um b antes de a



LLC ∪ Reg. = LLC, logo $\overline{L_1}$ = LLC

b) L_2 =



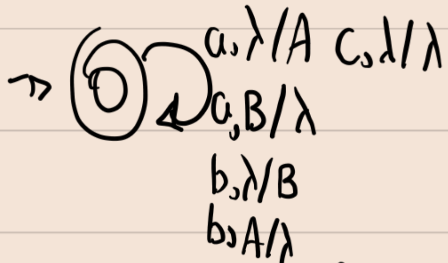
Por existir um AF que reconhece L_2, L_2 é Regular.

L_1: G: $S \rightarrow aSb \mid \lambda$

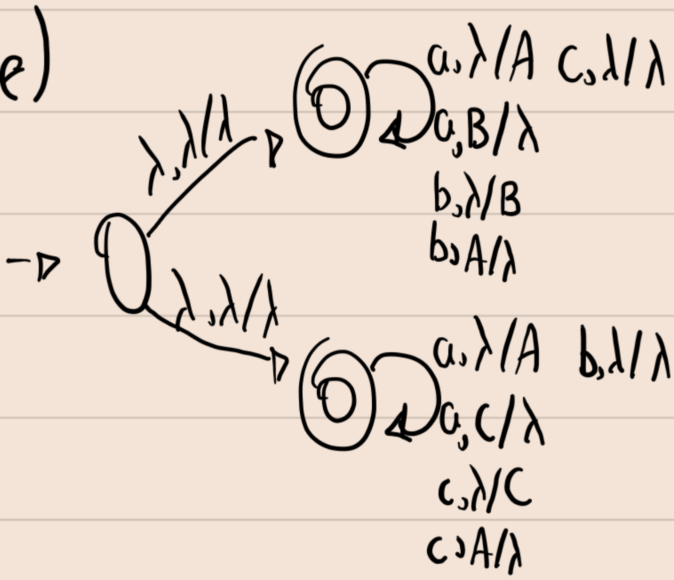
Por existir uma GLC que gera L_1, L_1 é LC.

Pelo lema do fechamento, uma LLC ∩ Regular é uma LLC.

c) Como L_2 é regular, e o complemento de qualquer linguagem regular, é L. reg e por L_1 ser LLC, $L_1 \cap \overline{L_2}$ é LLC.

d) 

Por exis-ir um AP que reconhece a linguagem, ela é LLC.

e) 

Por existir um autômato AP que reconhece a linguagem, ela é LLC

f) Suponha que L_c é LLC. $L_c \cap a^*b^*c^*$ deve ser LLC. Porém, $L_c \cap a^*b^*c^* = a^nb^nc^n \mid n \geq 0$ que não é LLC. Isto é absurdo, logo L_c não é LLC

b) $L - X = L \cap \overline{X} = \text{LLC} \rightarrow \text{LLC} \cup (X \cap \overline{L})$

como não podemos dizer que $\overline{L}$ é LLC, logo $X \cap \overline{L}$ não é necessariamente LLC. Logo $(L-X) \cup (X-L)$ não é necessariamente LLC.