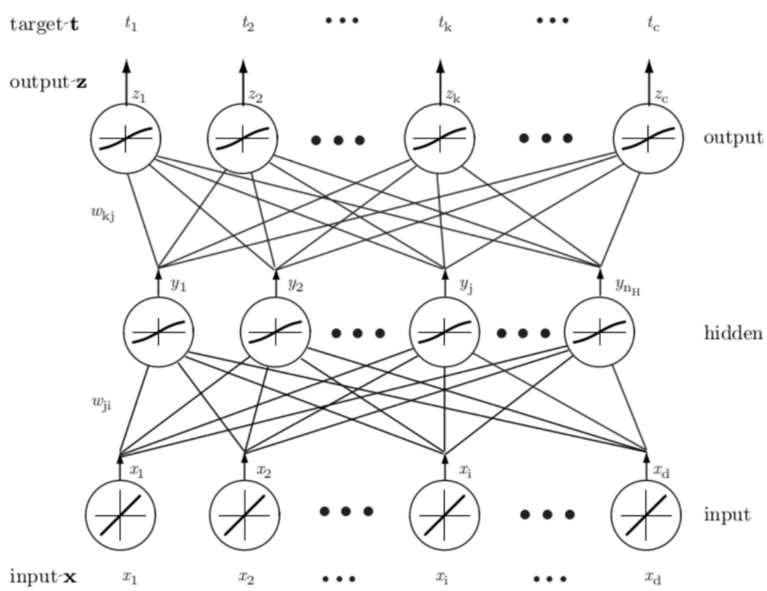
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Informática - Curso de Ciência da Computação
Disciplina: Processamento e Análise de Imagens
Prof. Alexei Machado

Lista de Exercícios No. 2

1. Uma MLP possui 10 unidades de entrada, 50 unidades na camada escondida e 10 unidades na camada de saída (sem contar o bias). Deseja-se substituir a camada escondida por 2, cada uma com n unidades, sem aumentar o número total de pesos da rede original. Qual o valor máximo de n?

2. Considere uma rede padrão de 3 camadas cuja entrada x possui dimensão dx1, a primeira camada da rede possui d unidades de entrada e possui somente uma ativação linear do tipo f(x)=x, a camada escondida possui n_H unidades escondidas e a camada final possui c unidades de saída e o bias. Qual o número total de pesos que existem na rede?

Se fosse outro?



não tem Bias?

3. Dado uma imagem de 300×300 pixels colorida (RGB) como entrada para alguns modelos, responda às questões abaixo.

   a) Modelo 1: Suponha que você não esteja usando uma rede convolucional. Se a primeira camada oculta tiver 100 neurônios, cada um deles totalmente conectado à entrada, quantos parâmetros essa camada oculta possui (incluindo os parâmetros do bias)?

   b) Modelo 2: Suponha agora que você use uma camada convolucional com 100 filtros de 5 × 5 cada. Quantos parâmetros essa camada oculta possui (incluindo os parâmetros de bias)?

1) Nº de pesos originalmente: $10 \times 50 \times 50 \times 10 = 1000$

$10 \times n + n \times n + n \times 10 = 1000 \rightarrow 10n + n^2 + 10n = 1000 \rightarrow 20n + n^2 = 1000$

$n^2 + 20n - 1000 = 0 \rightarrow \Delta = 20^2 - 4.1.-1000 \rightarrow \Delta = 400 + 4000 \rightarrow \Delta = 4400$

$$\frac{-20 \pm \sqrt{4400}}{2.1} = \frac{-20 \pm 66}{2} \begin{cases} \frac{46}{2} = 23 \\ \frac{-86}{2} = -43 \end{cases}$$

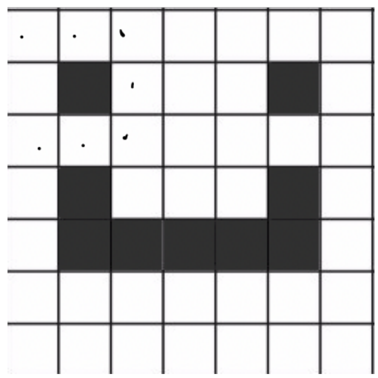
2) $d.n_H + n_H.C + n_H + C \rightarrow n_H(1 + d + c) + C$

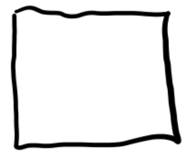
3) a) $300 \times 300 \times \underbrace{3}_{RGB} \times 100 + 100 = 27000100 \rightarrow$ Muitos parâmetros para só 1 camada, por isso vieram as redes convolucionais.

b) Cada filtro tem $5 \times 5 \times \underbrace{3}_{RGB}$ pesos $= 75$ pesos

Total: $75 \times 100 + 100 = 7600$

4. Dado a imagem 7×7 abaixo, aplique um filtro que seja capaz de detectar somente os olhos dessa representação (quase perfeita) do rosto humano. Você deve pensar nos valores e no tamanho do filtro que irá utilizar, além de aplicá-lo à imagem e mostrar o resultado obtido. Assuma que os pixels brancos possuem valor igual a 0 e os pixels pretos possuem valor igual a 1.





5. Dado uma imagem em preto e branco de tamanho 8×8 pixels e um filtro de tamanho 3×3, indique as dimensões da matriz resultante da convolução e o tamanho do padding que deverá ser utilizado em cada um dos casos:

   a) Valid padding

   b) Same padding

6. Suponha uma entrada de tamanho $63 \times 63 \times 16$. Ao aplicar uma convolução nessa entrada com 32 filtros de tamanho 7×7, usando stride igual a 2 e sem padding. Qual será o volume de saída?

7. Suponha uma entrada de tamanho $15 \times 15 \times 8$. Usando a operação de padding com p=2, qual é a dimensão do dado de saída após o padding?

8. Dado uma entrada de dimensão $63 \times 63 \times 16$ e uma convolução com 32 filtros de dimensão 7×7 cada e um stride igual a 1, qual deverá ser o tamanho do padding utilizado para que você obtenha uma saída com o mesmo tamanho da entrada (same padding)?

4) O filtro deve ser 3x3 preenchido de -1 s, apenas o pixel do meio seria 8. Isso faz com que o resultado máximo seja 8, o olho.

C laplace

Se o resultado fosse um número negativo, seria passado para o próximo camada e a função de ativação (RELU) ia transformar em 0.

5) a) padding = 0 $8-3+1 \times 8-3+1 \rightarrow 6 \times 6, \; p=0$

b) padding = 1 $10-3+1 \times 10-3+1 \rightarrow 8 \times 8, \; p=1$

6) $\frac{63-7+2.0+1}{2+1} \times \frac{63-7+2.0+1}{2+1} \times 32 \rightarrow \frac{57}{3} \times \frac{57}{3} \times 32 \rightarrow 29 \times 29 \times 32$

7) $19 \times 19 \times 8$

8) $\frac{63-7+2p}{1}+1=63 \rightarrow 57+2p=63 \rightarrow 2p=6 \rightarrow p=3$

9. Considere um volume de entrada 65×65×3 e um filtro 11×11×3. Quantas operações de multiplicação serão feitas em cada um dos casos:

   $65-11+1+2p=65 \to 55+2p=65 \quad p=5$

   a) Valid padding e stride = 1 $p=0, s=1$

   b) Valid padding e stride = 3 $p=0, s=3$

   $\frac{65-11+2p}{3}+1=65 \to \frac{65-11+2p}{3}=64$

   c) Same padding e stride = 1 $p=5, s=1$

   d) Same padding e stride = 3 $p=69, s=3$

   $54+2p=192 \to p=69$

10. Suponha uma entrada de tamanho 32 × 32 × 16. Seja a aplicação do max pooling com stride e tamanho de filtro iguais a 2. Quais são as dimensões da saída?

11. Suponha uma entrada de tamanho 6 × 6 × 3. Seja a aplicação de um pooling (average ou max) com stride e tamanho de filtro iguais a 2. Responda:

    a) Quais são as dimensões da saída?

    b) Assumindo que os valores do primeiro canal estão mostrados na matriz abaixo, mostre o resultado obtido ao aplicar o seguinte Max pooling e Average pooling

    [[4 9 2 5 8 3] [5 6 2 4 0 3] [2 4 5 4 5 2] [5 6 5 4 7 8] [5 7 7 9 2 1] [5 8 5 3 8 4]]

12. Suponha que a entrada para uma rede neural de convolução seja uma imagem colorida (RGB) 32 × 32. A primeira camada contém oito filtros 5 × 5 com três canais, utilizando Valid padding e stride = 2. Qual o formato da saída dessa camada? $32 \times 32 \times 3$

    $224 \times 224 \times 3$

13. Dado uma imagem de dimensão 224 × 224 com 3 canais (RGB), desenhe a rede convolucional, incluindo as dimensões das matrizes de entrada e saída, de acordo com as operações descritas abaixo.

    a) Aplique uma convolução com "Valid padding" com 96 filtros de tamanho 7 e stride igual a 2. Em seguida, aplique um max pooling com filtro de tamanho 3 e stride igual a 2. A saída dessa camada será chamada de $A^{[1]}$.
    b) Aplique uma convolução com "Valid padding" com 256 filtros de tamanho 5 e stride igual a 2. Em seguida, aplique um max pooling com filtro de tamanho 3 e stride igual a 2. A saída dessa camada será chamada de $A^{[2]}$.
    c) Aplique uma convolução com "Same padding" com 384 filtros de tamanho 3 e stride igual a 1. A saída dessa camada será chamada de $A^{[3]}$.
    d) Aplique uma convolução com "Same padding" com 384 filtros de tamanho 3 e stride igual a 1. A saída dessa camada será chamada de $A^{[4]}$.

9) a) $65-11+1=55 \rightarrow \#mult: 55 \times 55 \times 11 \times 11 \times 3 = 1.098.075$

b) $\frac{65-11}{3}+1=19 \rightarrow \#mult: 19 \times 19 \times 11 \times 11 \times 3 = 131.043$

c) $65-11+10+1=65 \rightarrow \#mult: 65 \times 65 \times 11 \times 11 \times 3 = 1.533.675$

d) $\frac{65-11+138}{3}+1=65 \rightarrow \#mult: 65 \times 65 \times 11 \times 11 \times 3 = 1.533.675$

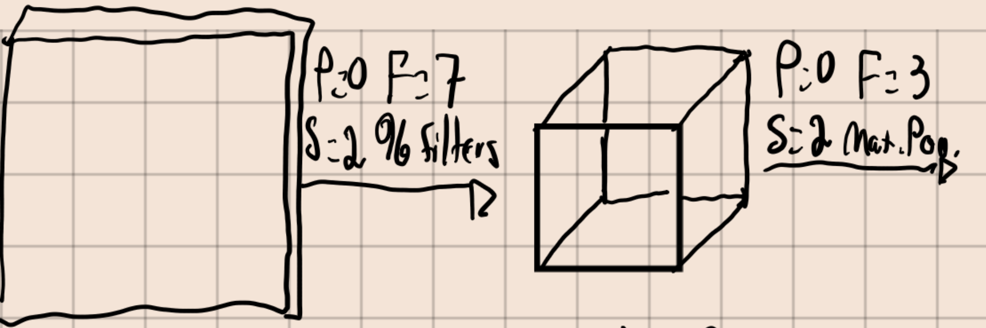
10) $\frac{32-2}{2}+1 = 16 \times 16 \times 16$

11) $\frac{6-2}{2}+1 = 3 \times 3 \times 3$

b) Max Pooling: [[9 5 8] [6 5 8] [8 9 8]]

Average Pooling [[6 3,25 3,5] [4,25 4,5 5,5] [6,25 6 3,75]]

12) $P=0.5=2 \rightarrow \frac{32-5}{2}+1 \rightarrow 14 \times 14 \times 8$



$= A^{[1]}$

$224 \times 224 \times 3$ $109 \times 109 \times 96$ $54 \times 54 \times 96$

$\frac{224-7}{2}+1=109$ $\frac{109-3}{2}+1 = 54 \times 54 \times 96$

b) $A^{[1]}$

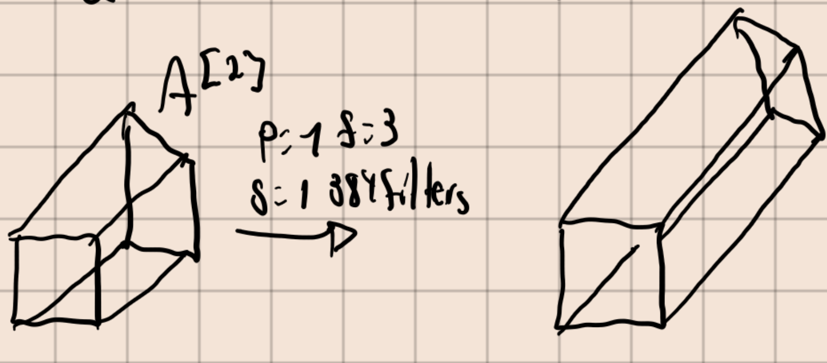
$A^{[2]}$

$54 \times 54 \times 96$ $25 \times 25 \times 256$ $12 \times 12 \times 256$

$\frac{54-5}{2}+1=25$ $\frac{25-3}{2}+1$

c)

$A^{[2]}$



$A^{[3]}$

$12 \times 12 \times 256$ $12 \times 12 \times 384$

$12-3+2p+1=12 \rightarrow 10+2p=12 \rightarrow p=1$

d)

$12 \times 12 \times 384$

$A^{[3]}$

$p = 1 \quad f = 3$

$s = 1 \quad$ 384 filters

$\longrightarrow$

$A^{[4]}$

$12 \times 12 \times 384$

As ope

- Filtros quantos? Perde info?

e) Aplique uma convolução com ”Same padding” com 256 filtros de tamanho 3 e stride igual a 1. Em seguida, aplique um max pooling com filtro de tamanho 3 e stride igual a 2. A saída dessa camada será chamada de $A^{[5]}$.

f) Aplique uma camada fully-connected com 4096 n´os. A saída dessa camada será chamada de $A^{[6]}$.

g) Aplique uma camada fully-connected com 4096 n´os. A saída dessa camada será chamada de $A^{[7]}$.

h) Por fim, aplique uma softmax (aqui não é necessário se preocupar com a dimensão da saída). A saída dessa camada será chamada de $A^{[8]}$.

Como já é um cosseno, basta a amplitude

14. Dada a função f(x)=cos ωx, definida no intervalo 0<=x<2: $w = \frac{2\pi}{\text{período}}$ período: 2 $\cos wt = \cos \frac{2\pi}{2} x$

a) Gere um vetor contendo a amostragem da função nos pontos x=0 e x=1.
b) Calcule a DFT sobre o vetor
c) Baseado nos coeficientes encontrados, desenhe os componentes da série e a função reconstituída.

w oscila 1 vez

15. Faça o mesmo procedimento do item anterior para a função f(x)=cos 2ωx, definida no intervalo 0<=x<4 e amostrada nos pontos x=0, 1, 2 e 3. Compare os resultados obtidos. 2w oscila 2 vezes

16. Dados os espectros de Fourier abaixo, determine a imagem correspondente.

A

0	1	2	-2	-1
3.0	-0.5 + 0.69i	-0.5 + 0.16i	-0.5 - 0.16i	-0.5 - 0.69i

au
bu

B

1.5	-0.25 - 0.25i	0	-0.25 + 0.25i

17. Dadas as imagens abaixo, calcule a DFT correspondente. Compare as imagens e comente os resultados à luz da propriedade da translação.

A

0	1	0	0	0

B

0	0	1	0	0

18. Dadas as imagens abaixo, considerando pontos externos como possuindo valor 0:

A

1	2	0	2	1

B

3	2	1	2	3

C

1	2
2	3

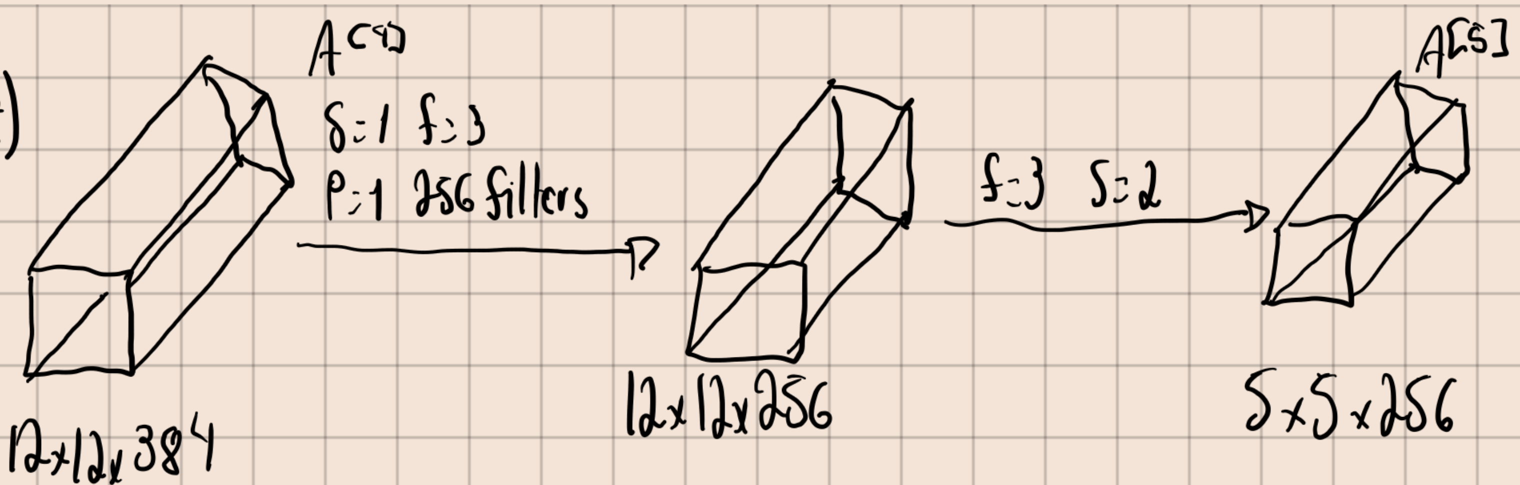
D

1	2	1
2	8	2
1	2	1

Se usar padding, convolução é comutativa, A * B = B * A

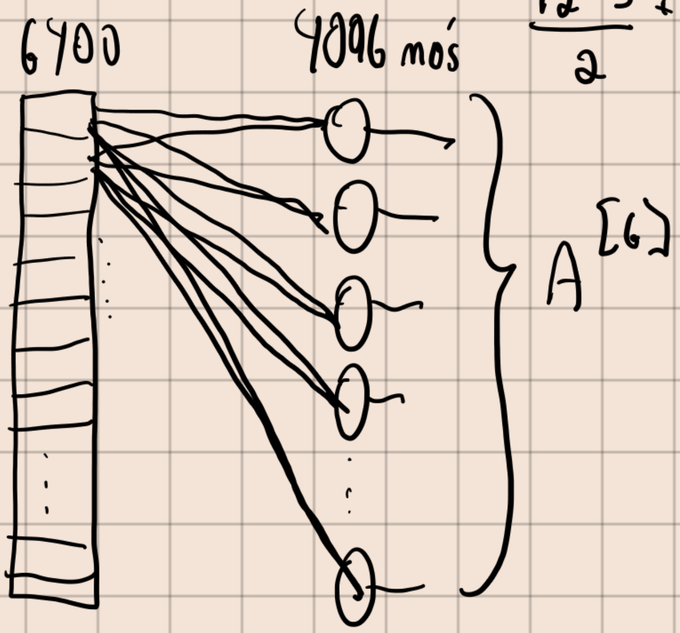
a) Calcule **A** * **B** → Convolução
b) Calcule **B** * **A**
c) Calcule **C** * **D**
d) Calcule **D** * **C**
e) Calcule a DFT para as imagens **A e B**. Calcule a DFT inversa sobre o resultado.

e)

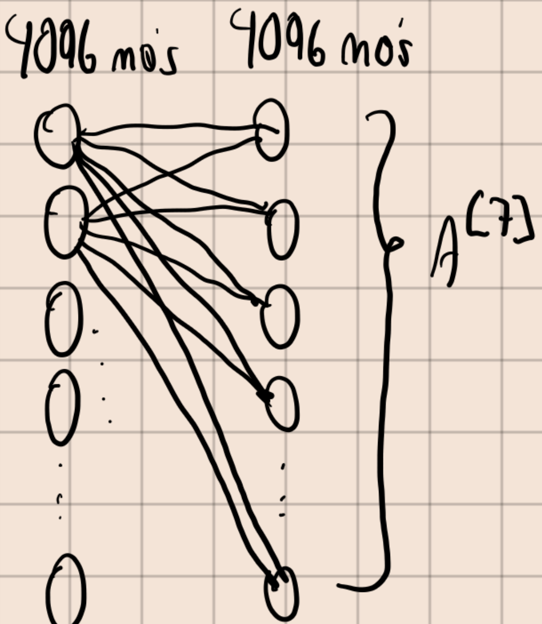


$$\frac{12-3}{2}+1=5$$

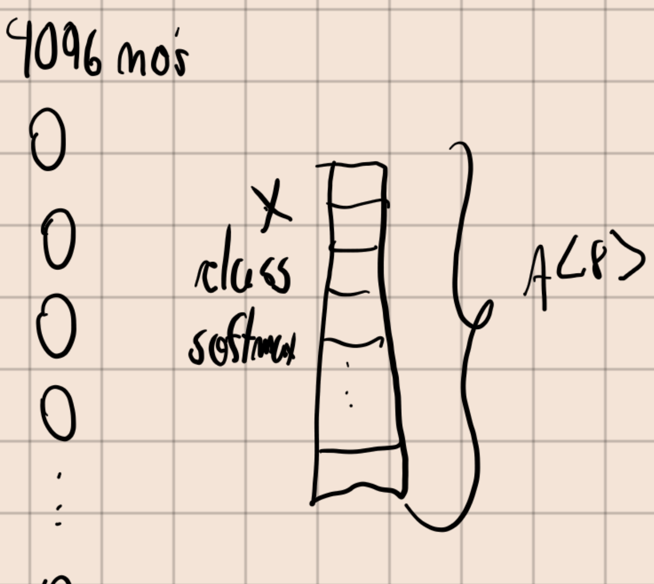
f)



g)



h)



$N = 4$ (nº de pixels)

$$f(x) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$
x: 0 1 2 3

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \left[\cos \frac{2\pi u x}{N} - i \,\text{sen} \frac{2\pi u x}{N} \right]$$

→ domínio de frequência

$$F(u) = \begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_u & \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{13}{4} \\ b_u & \emptyset & \frac{1}{4} & \emptyset & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}$$
u: 0 1 2 3

$-2 \; -1$

$=$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \left[\cos \frac{2\pi u x}{N} + i \,\text{sen} \frac{2\pi u x}{N} \right]$$

Início:

a_u: amplitude dos cossenos

b_u: amplitude dos senos

$$F(0) = \frac{1}{4} \Big[\underbrace{2}_{f(0)} \Big(\cos \frac{2\pi . 0 . 0}{4} - i \,\text{sen}\, \emptyset \Big) +$$
$$\underbrace{3}_{f(1)} \Big(\cos \frac{2\pi . 0 . 1}{4} - i \,\text{sen}\, \emptyset \Big) +$$
$$\underbrace{4}_{f(2)} \left(\cos \emptyset - i \,\text{sen}\, \emptyset \right)$$
$$\underbrace{4}_{f(3)} \left(\cos \emptyset - i \,\text{sen}\, \emptyset \right) \Big]$$

$F(0) \to u$

Por conta da periodicidade, só é necessário calcular metade dos valores

$$= \frac{1}{4} \left[2(1) + 3(1) + 4(1) + 4(1) \right]$$

$= \frac{13}{4}$ → média (só vale pra $u = 0$)

14) $\cos \omega x \to \cos \frac{2\pi x}{2} \to \cos \pi x$

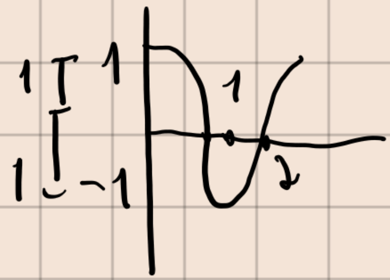
$t=0 \to \cos 0 = 1$

$t=1 \to \cos \pi = -1$

[1,-1]

b) [1,-1]

au	0	1
bu	0	0

c) 

	0	1	2	3
t	0	1	2	3

15) $y = \cos 2\omega x \to \cos \frac{\cancel{2}\,2\pi}{\cancel{4}} \quad \cos \pi x \to$

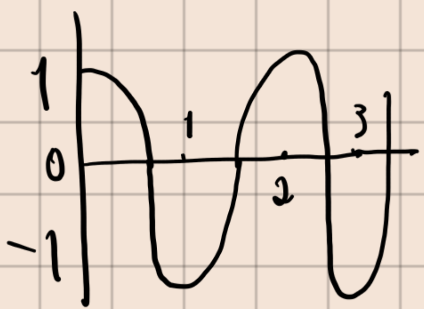
$t=0 \quad 1$

$t=1 \quad -1$

$t=2 \quad 1$

$t=3 \quad -1$

au	0	0	1	0
bu	0	0	0	0
	0	1	2	3

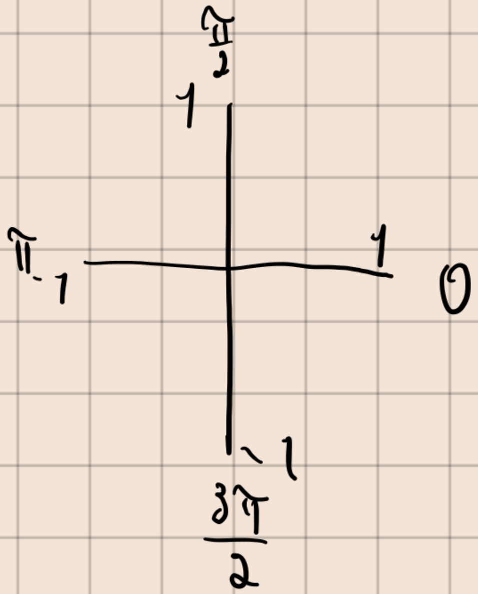


1b)

au	3.0	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5
bu	0	0.69i	0.16i	-0.16i	-0.69i
	0	1	2	3	4

f(x): 1 2

x 0 1 2 3 4



$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \left(\cos \frac{2\pi u x}{N} + i \operatorname{Sen} \frac{2\pi u x}{N}\right)$$

$$f(0) = \Big[\overset{u=0}{(3)\left(\cos \frac{2\pi.0.0}{5} + i \operatorname{Sen} \frac{2\pi.0.0}{5}\right)} +$$

$$\overset{u=1}{(-0,5+0,69i)\left(\cos \frac{2\pi 1.0}{5} + i \operatorname{Sen} \frac{2\pi\, 1.0}{5}\right)}$$

$$+ \overset{u=2}{(-0,5+0,16i)\left(\cos \frac{2\pi.2.0}{5} + i \operatorname{Sen} \frac{2\pi.2.0}{5}\right)}$$

$$\overset{u=3}{(-0,5-0,16i)\left(\cos \frac{2\pi.3.0}{5} + i \operatorname{Sen} \frac{2\pi\, 3.0}{5}\right)}$$

$$+ \overset{u=4}{(-0,5-0,69i)\left(\cos \frac{2\pi.4.0}{5}\right) + i \operatorname{Sen} \frac{2\pi.4.0}{5}\right)}$$

$$= (3)(1-0) + (-\cancel{0,5} + \cancel{0,69i})(1) + (-\cancel{0,5} + \cancel{0,16i}$$

$$+ (-\cancel{0,5} - \cancel{0,16i}) + (-\cancel{0,5} - \cancel{0,69i} =$$

$$3 - 2 = 1$$

$$f(1) = \Big[\overset{u=0}{3.\left(\cos \tfrac{2\pi.0.1}{5} + i\,\text{sen}\, \tfrac{2\pi.0.1}{5}\right)} + \overset{u=1}{(-0{,}5+0{,}69i)\left(\cos \tfrac{2\pi.1.1}{5} + i.\,\text{sen}\, \tfrac{2\pi.1.1}{5}\right)} +$$

$$\overset{u=2}{(-0{,}5+0{,}16i)\left(\cos \tfrac{2\pi.2.1}{5} + i\,\text{sen}\, \tfrac{2\pi.2.1}{5}\right)} + \overset{u=3}{(-0{,}5-0{,}16i)\left(\cos \tfrac{2\pi.3.1}{5} + i\,\text{sen}\, \tfrac{2\pi.3.1}{5}\right)}$$

$$\overset{u=4}{+ (-0{,}5-0{,}69i)\left(\cos \tfrac{2\pi.4.1}{5} + i\,\text{sen}\, \tfrac{2\pi.4.1}{5}\right)} = 3(1) + (-0{,}5+0{,}69i)(0{,}31+i0{,}95i)$$

$$+ (-0{,}5+0{,}16i)(-0{,}81+i0{,}59) + (-0{,}5-0{,}16i)(-0{,}81-0{,}59i) + (-0{,}5-0{,}69)(0{,}31 -$$

$$i0{,}95) = 3 + (-0{,}155 - 0{,}475i + 0{,}2139i - 0{,}6555 \quad) + (0{,}405 - 0{,}295i -$$

$$0{,}1296i - 0{,}0944 \quad) + (0{,}405 + 0{,}295i + 0{,}1296i - 0{,}0944 \quad) + (-0{,}155 + 0{,}475i$$

$$-0{,}2139i - 0{,}6555 \quad) = 3 - (0{,}8105 - \cancel{0{,}2611i}) + (0{,}3106 - \cancel{0{,}4296i}) + (0{,}3106$$

$$+ \cancel{0{,}4296i}) - (0{,}8105 + \cancel{0{,}2611i}) = 2 + 0 = 2$$

$$f(0) = 1{,}5(1) + (-0{,}25 - \cancel{0{,}25i})(1) + 0$$

$$+ (-0{,}25 + \cancel{0{,}25i})(1)$$ // parte imaginária sempre corta

$$= 1{,}5 - 0{,}25 - 0{,}25 = 1$$

$$f(1) = 1{,}5(1) + (-0{,}25 - 0{,}25i)\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\left(\cos\frac{2\pi u x}{N} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi u x}{N}\right)$$

17)

$f(x)$	0	1	0	0	0
x	0	1	2	3	4

$F(u)$					
a_u	1/5	0,062	-0,162	-0,162	0,062
b_u	0	-0,19i	-0,118i	0,118i	0,19i
u	0	1	2	3	4

$$F(0) = \frac{1}{5}\left(\overset{x=0}{0} + \overset{x=1}{\left(\cos\frac{2\pi.0.1}{5} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi.0.1}{5}\right)} + \overset{x=2}{0} + \overset{x=3}{0} + \overset{x=4}{0}\right)$$

$$F(0) = \frac{1}{5}(1) = \frac{1}{5}$$

$$F(1) = \frac{1}{5}\overset{x=1}{\left(\cos\frac{2\pi.1.1}{5} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi.1.1}{5}\right)} = \frac{1}{5}(0{,}31 - 0{,}95i)$$

$$F(2) = \frac{1}{5}\overset{x=1}{\left(\cos\frac{2\pi.2.1}{5} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi.2.1}{5}\right)} = \frac{1}{5}(-0{,}81 - i\,0{,}59)$$

$F(x)$

	0	0	1	6	0
	0	1	2	3	4

$F(u)$

au	1/5	-0,162	0,062	0,062	-0,162
bu	0	-0,118	0,19	-0,19	0,118
u	0	1	2	3	4

$$F(1) = \frac{1}{5}\left(0+0+\left(\cos\frac{2\pi.1.2}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi.1.2}{5}\right)+0+0\right) = \frac{1}{5}(-0{,}81 - i0{,}59)$$

$$F(2) = \frac{1}{5}\left(\cos\frac{2\pi.2.2}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi.2.2}{5}\right) = \frac{1}{5}(0{,}31 + 0{,}95i)$$

$$F(3) = \frac{1}{5}\left(\cos\frac{2\pi.3.2}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi.3.2}{5}\right) = \frac{1}{5}(0{,}31 - i0{,}95)$$

$$F(4)\ \frac{1}{5}\left(\cos\frac{2\pi.4.2}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi.4.2}{5}\right) = \frac{1}{5}(-0{,}81 + i0{,}59)$$

1,0

$F(u)$

au	1/5	0,062	-0,162	-0,162	0,062
bu	0	-0,19i	-0,118i	0,118i	0,19i

$F(u)$

au	1/5	-0,162	0,062	0,062	-0,162	
bu	0	-0,118	0,19	-0,19	0,118	. i
u	0	1	2	3	4	

As frequências estão em x.

18) A 1 2 0 2 1

3 2 1 2 3 >

B' = B espelhado

$$C' = \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

A * B: 1.3 = 3

1.2 + 2.3 = 8

1.1 + 2.2 + 3.0 = 5

1.2 + 2.1 + 2.0 + 3.2 = 10

1.3 + 2.2 + 0.1 + 2.2 + 1.3 = 14 = 3 8 5 10 14 10 5 8 3

3.2 + 2.0 + 1.2 + 2.1 = 10

3.0 + 2.2 + 1.1 = 5

3.2 + 2.1 = 8

3.1 = 3

b)

B * A = 3 8 5 10 14 10 5 8 3

c)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$C' = \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

2.1 + 1.2 = 4

2.2 + 3.1 + 8.1 + 2.2 =

19

3.2 + 2.1 + 2.8 + 1.2

3.2 + 2.8 + 2.1 + 1.2

6 + 16 + 2 + 2

3.8 + 2.2 + 2.2

+ 1.1 = 24 + 4 + 4 =

+ 1 =

$$C * D = \begin{matrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 19 & 26 & 7 \\ 5 & 26 & 33 & 8 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{matrix}$$

d) = 4

5)

$f(t)$	1	2	0	2	1
t	0	1	2	3	4

$F(u)$						
a_u	6/5	.062	-.162	-.162	.062	
b_u	0	.096	-.998	.998	-.096	$\cdot i$
u	0	1	2	-2	-1	

$$F(1) = \frac{1}{5}\Big(\overset{t=0}{1}\Big(\cos\frac{2\pi\cdot 1\cdot 0}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi\cdot 1\cdot 0}{5}\Big) + \overset{t=1}{2}\Big(\cos\frac{2\pi\cdot 1\cdot 1}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi\cdot 1\cdot 1}{5}\Big) +$$

$$\overset{t=2}{0} + \overset{t=3}{2}\Big(\cos\frac{2\pi\cdot 1\cdot 3}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi\cdot 1\cdot 3}{5}\Big) + \overset{t=4}{1}\Big(\cos\frac{2\pi\cdot 1\cdot 4}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{8\pi}{5}\Big)$$

$$= \frac{1}{5}\Big(1 + 2\big[0{,}31 - \cancel{0{,}95i}\big] + 2\big[-0{,}81 + 0{,}59i\big] + \big[0{,}31 + \cancel{0{,}95i}\big]\Big)$$

$$= \frac{1}{5}\Big(\cancel{1} + \cancel{0{,}62} - 0{,}95i - \cancel{1{,}62} + 1{,}18i + 0{,}31\Big) = \boxed{\frac{1}{5}\big(0{,}23i + 0{,}31\big)}$$

$$F(2) = \frac{1}{5}\Big(\overset{t=0}{1}[1] + \overset{t=1}{2}\Big[\cos\frac{2\pi\cdot 2\cdot 1}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi\cdot 2\cdot 1}{5}\Big]\ \overset{t=2}{0} + \overset{t=3}{2}\Big[\cos\frac{2\pi\cdot 2\cdot 3}{5}$$

$$- i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi\cdot 2\cdot 3}{5}\Big]\ \overset{t=4}{1}\cdot\Big[\cos\frac{2\pi\cdot 2\cdot 4}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi\cdot 2\cdot 4}{5}\Big]\Big)$$

$$= \frac{1}{5}\Big(1 + 2\big[-0{,}81 - \cancel{0{,}59i}\big] + 0 + 2\big[0{,}31 - 0{,}95i\big] + \big[-0{,}81 + \cancel{0{,}59i}\big]\Big)$$

$$= \frac{1}{5}\Big(\cancel{1} + -\cancel{1{,}62} - 0{,}59i + \cancel{0{,}62} - 1{,}9i - 0{,}81\Big) = \boxed{\frac{1}{5}\big(-0{,}81 - 2{,}49i\big)}$$

$f(t)$

	3	2	1	2	3
t	0	1	2	3	4

$F(u)$

a_u	11/5	.424	-.024	-.024	.424
b_u	0	.308	.072	-.072	-.308
u	0	1	2	3	4
	0	1	2	-2	-1

$$F(1) = \frac{1}{5}\Big(\overset{t=0}{3} + \overset{t=1}{2}\left[\cos\frac{2\pi.1.1}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi.1.1}{5}\right] + \overset{t=2}{1}\left[\cos\frac{2\pi.1.2}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi.2}{5}\right]$$

$$\overset{t=3}{2}\left[\cos\frac{2\pi.1.3}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi.1.3}{5}\right] + \overset{t=4}{3}\left[\cos\frac{2\pi.1.4}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi.1.4}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\Big(3 + 2(0{,}31 - 0{,}95i) + (-0{,}81 - 0{,}59i) + 2(-0{,}81 + 0{,}59i) + 3(0{,}31 + 0{,}95i)\Big)$$

$$= \frac{1}{5}\Big(3 + 0{,}62 - 1{,}9i - 0{,}81 - 0{,}59i - 1{,}62 + 1{,}18i + 0{,}93 + 2{,}85i\Big)$$

$$= \frac{1}{5}\Big(2{,}12 + 1{,}57i\Big)$$

$$F(2) = \frac{1}{5}\Big(\overset{t=0}{3} + \overset{t=1}{2}\left[\cos\frac{2\pi.2.1}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi.2.1}{5}\right] + \overset{t=2}{}\left[\cos\frac{2\pi.2.2}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{8\pi}{5}\right]$$

$$+ \overset{t=3}{2}\left[\cos\frac{2\pi.2.3}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{2\pi.2.3}{5}\right] + \overset{t=4}{3}\left[\cos\frac{2\pi.2.4}{5} - i\,\text{Sen}\,\frac{16\pi}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\Big(3 + 2[-0{,}81 - 0{,}59i] + [0{,}31 + 0{,}95i] + 2[0{,}31 - 0{,}95i] + 3[-0{,}81$$

$$+ 0{,}59i]$$

$$= \frac{1}{5}\left(3 + 2\left[-0{,}81 - 0{,}59i\right] + \left[0{,}31 + 0{,}95i\right] + 2\left[0{,}31 - 0{,}95i\right] + 3\left[0{,}81 + 0{,}59i\right]\right.$$

$$= \frac{1}{5}\left(3 - 1{,}62 - 1{,}18i + 0{,}31 + 0{,}95i + 0{,}62 - 1{,}9i - 2{,}43 + 1{,}77i\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{5}\left(-0{,}12 + 0{,}36i\right)}$$

f) Aplique filtros passa-baixa nas imagens **A e B** com frequência de corte |u|<2.
g) Aplique filtros passa-alta nas imagens **A e B** com frequência de corte |u|>1.

19. Para cada imagem abaixo, considerando pontos externos como indefinidos:

A

3	5	2	1	1
1	4	6	2	1
1	1	5	6	2
1	1	1	1	1
1	2	2	2	1

B

5	1	2	1	8
6	6	5	6	1
2	1	8	7	7
6	1	2	8	8
7	8	2	1	1

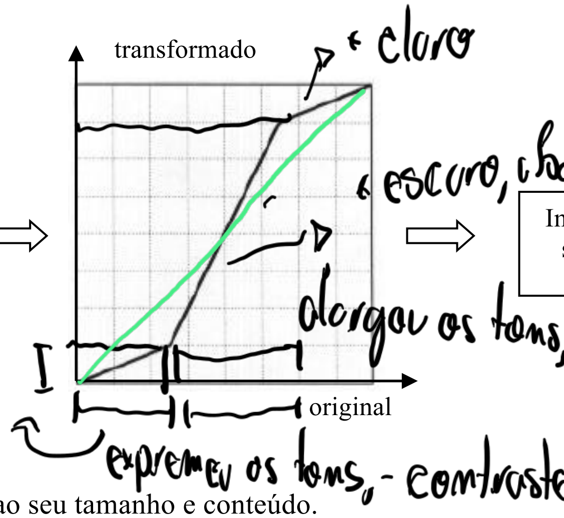
C

1	1	9	1	1
1	1	9	8	7
9	9	9	2	1
1	1	2	8	8
1	2	2	8	9

a) Determine o histograma de freqüências
b) Aplique um filtro de suavização 3x3 pela média
c) Aplique um filtro de suavização 3x3 pela mediana
d) Altere o contraste da imagem através da equalização do histograma. As novas intensidades devem variar entre 0 e 255.
e) Realce as bordas da imagem, através de filtros de Sobel.

20. O gráfico abaixo representa a função de transformação de histograma aplicada à imagem A.

A



+ escuro, abaixo da identidade

Imagem saída

a) Caracterize a imagem de saída quanto ao seu tamanho e conteúdo.
b) Para que são usadas as funções de transformação de histograma?
c) É possível aplicar uma transformação de histograma na qual 2 pixels de tons de cinza diferentes da imagem de entrada passem a ter o mesmo valor após a transformação? Justifique. → binarização

Podemos querer perder contraste para segmentar

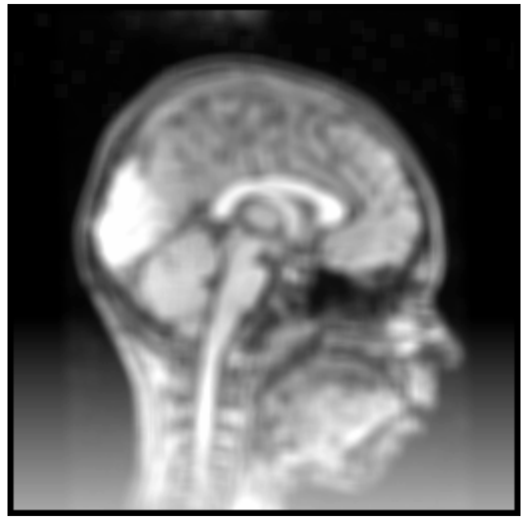
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Instituto de Informática - Curso de Ciência da Computação
Disciplina: Processamento e Análise de Imagens
Prof. Alexei Machado

a) Fundo

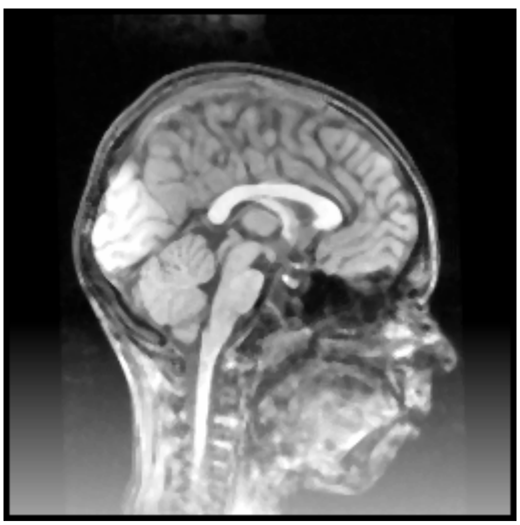
b)

21. Considere a imagem original A e as imagens B, C e D obtidas a partir de A:

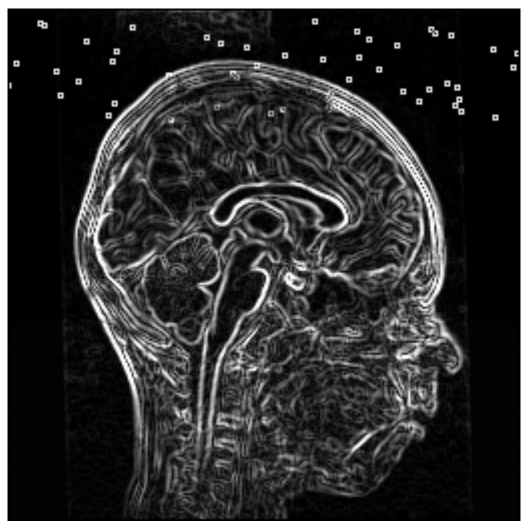
A



B



C



D

a) Indique os elementos de baixa freqüência presentes na imagem original A. alteração suave
b) Indique os elementos de alta freqüência presentes na imagem original A. alteração íngreme
c) Descreva o processo aplicado a A para se obter B. Justifique a resposta.
d) Descreva o processo aplicado a A para se obter C. Justifique a resposta.
e) Descreva o processo aplicado a A para se obter D. Justifique a resposta.

→ Sobel

→ passa baixa no domínio do espaço, por conta da moldura preta, perdeu colunas e linhas

→ filtro de mediana, passou altas freq e baixas, tirou ruído