

Fundamentos Teóricos da Computação

– Autômatos de Pilha (Parte 02) –

Zenilton Kleber Gonçalves do Patrocínio Jr.

Ciência da Computação – PUC Minas

Belo Horizonte, Brasil

2025



Sumário

- 1 Forma Normal de GLC
 - Introdução
 - Forma Normal de Chomsky
- 2 Lema do Bombeamento
 - Lema do Bombeamento para LLCs
 - Prova Usando o Lema do Bombeamento para LLCs
- 3 Propriedades de Fechamento em LLCs
 - Fechamento de Operações

Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há λ -produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC $G = (V, \Sigma, P, S)$ tal que $\lambda \in L(G)$, então é necessário incluir a regra $S \rightarrow \lambda$ em G . Porém, não há necessidade de nenhuma outra λ -produção.

Toda GLC sem regra λ -produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky (FNC)** ou na **Forma Normal de Greibach (FNG)**.

Uma $G = (V, \Sigma, P, S)$ é dita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$;
- $X \rightarrow YZ$, em que $X, Y, Z \in V$; ou
- $X \rightarrow a$, em que $x \in V, a \in \Sigma$

Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há λ -produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC $G = (V, \Sigma, P, S)$ tal que $\lambda \in L(G)$, então é necessário incluir a regra $S \rightarrow \lambda$ em G . Porém, não há necessidade de nenhuma outra λ -produção.

Toda GLC sem regra λ -produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky (FNC)** ou na **Forma Normal de Greibach (FNG)**.

Uma $G = (V, \Sigma, P, S)$ é dita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$;
- $X \rightarrow YZ$, em que $X, Y, Z \in V$; ou
- $X \rightarrow a$, em que $x \in V, a \in \Sigma$

Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há λ -produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC $G = (V, \Sigma, P, S)$ tal que $\lambda \in L(G)$, então é necessário incluir a regra $S \rightarrow \lambda$ em G . Porém, não há necessidade de nenhuma outra λ -produção.

Toda GLC sem regra λ -produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky (FNC)** ou na **Forma Normal de Greibach (FNG)**.

Uma $G = (V, \Sigma, P, S)$ é dita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$;
- $X \rightarrow YZ$, em que $X, Y, Z \in V$; ou
- $X \rightarrow a$, em que $x \in V, a \in \Sigma$

Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há λ -produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC $G = (V, \Sigma, P, S)$ tal que $\lambda \in L(G)$, então é necessário incluir a regra $S \rightarrow \lambda$ em G . Porém, não há necessidade de nenhuma outra λ -produção.

Toda GLC sem regra λ -produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky** (FNC) ou na **Forma Normal de Greibach** (FNG).

Uma $G = (V, \Sigma, P, S)$ é dita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$;
- $X \rightarrow YZ$, em que $X, Y, Z \in V$; ou
- $X \rightarrow a$, em que $x \in V, a \in \Sigma$

Forma Normal de Chomsky

Obtenção da FNC

- 1 Introduzir nova variável de partida
- 2 Remover λ -produções
- 3 Remover produções unitárias
- 4 Converte regras remanescentes

Exercício

Obtenha da FNC da seguinte GLC:

$$G: S \rightarrow A S A \mid a B$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b \mid \lambda$$

Forma Normal de Chomsky

Obtenção da FNC

- 1 Introduzir nova variável de partida
- 2 Remover λ -produções
- 3 Remover produções unitárias
- 4 Converte regras remanescentes

Exercício

Obtenha da FNC da seguinte GLC:

$$G: S \rightarrow A S A \mid a B$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b \mid \lambda$$

Lema do Bombeamento para LLCs

Lema do Bombeamento (*Pumping lemma*)

Seja L uma LLC, então $\exists k > 0$, tal que toda sentença z de L de tamanho maior ou igual a k (isto é, $|z| \geq k$) pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^iwx^iy \in L, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considera $a_n = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $|vx| > 0$, logo deve ser possível escrever $a_n = uvwxy$ com $|vwx| \leq k$ e $|vx| > 0$.

Se v e w não contiverem o mesmo símbolo, então $uv^i wx^i y \notin L_1$ para $i \neq 1$.

Se v e w contiverem o mesmo símbolo, então $uv^i wx^i y \notin L_1$ para $i \neq 1$.

Se v e w contiverem o mesmo símbolo, então $uv^i wx^i y \notin L_1$ para $i \neq 1$.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $x_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $|vx| > \lambda$, logo deve-se analisar 3 possibilidades:

1. v e w contém pelo menos uma a e uma b , e x contém pelo menos uma c .
2. v e w contém pelo menos uma a e uma c , e x contém pelo menos uma b .
3. v e w contém pelo menos uma b e uma c , e x contém pelo menos uma a .

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um c ;
- 3 vx só possui bs ;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um c ;
- 3 vx só possui bs ;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um c ;
- 3 vx só possui bs ;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um c ;
- 3 vx só possui bs ;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um c ;
- 3 vx só possui bs ;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um c ;
- 3 vx só possui bs ;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Dalí concluímos que, para algum $i \geq 0$, $a^i vxw$ não pertence a L_1 .
- 2 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Dalí concluímos que, para algum $i \geq 0$, $a^i vxw$ não pertence a L_1 .
- 3 vx só possui bs , então vwx não possui nenhum a (nem c). Dalí concluímos que, para algum $i \geq 0$, $a^i vxw$ não pertence a L_1 .

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de a s é maior que número de c s;
- 2 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de c s é maior que número de a s;
- 3 vx só possui bs , então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de a s é maior que número de c s (pois u possui a e y possui c).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de a s é maior que número de c s;
- 2 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de a s é menor que número de c s;
- 3 vx só possui bs , então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de a s é maior que o número de c s (pois uv^2wx^2y possui pelo menos um a).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vw^2x^2y não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de a s é maior que número de c s;
- 2 vx possui pelo menos um c , então vw^2x^2y não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de a s é menor que número de c s;
- 3 vx só possui bs , então vw^2x^2y possui apenas a e c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de a s é maior que o número de c s.

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ① vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs ;
- ② vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as ;
- ③ vx só possui bs , então vwx não possui nenhum a nem c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as e cs .

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 3 vx só possui bs , então vwx não possui nem a nem c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as e cs .

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 3 vx só possui bs , então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as e cs .

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 3 vx só possui bs , então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 3 vx só possui bs , então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 3 vx só possui bs , então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 3 vx só possui bs , então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Consideremos $z = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$, temos apenas as seguintes possibilidades:

1. z é formado pelas mesmas letras.

2. z é formado pelo menos uma a .

3. z é formado pelo menos uma b .

4. z é formado pelo menos uma c .

5. z é formado pelo menos uma d .

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $|vx| > 0$, logo, não se pode dividir z_2 da seguinte maneira:

1ª) $uvwx$ possui pelo menos uma a .

2ª) $uvwx$ possui pelo menos uma b .

3ª) $uvwx$ possui pelo menos uma c .

4ª) $uvwx$ possui pelo menos uma d .

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um b ;
- 3 vx possui pelo menos um c ;
- 4 vx possui pelo menos um d .

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um b ;
- 3 vx possui pelo menos um c ;
- 4 vx possui pelo menos um d .

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um b ;
- 3 vx possui pelo menos um c ;
- 4 vx possui pelo menos um d .

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um b ;
- 3 vx possui pelo menos um c ;
- 4 vx possui pelo menos um d .

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um b ;
- 3 vx possui pelo menos um c ;
- 4 vx possui pelo menos um d .

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um b ;
- 3 vx possui pelo menos um c ;
- 4 vx possui pelo menos um d .

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a ;
- 2 vx possui pelo menos um b ;
- 3 vx possui pelo menos um c ;
- 4 vx possui pelo menos um d .

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vx não possui nenhum c . Então vx não possui nenhum a e não possui nenhum c .
- 2 vx possui pelo menos um b , então vx não possui nenhum d . Então vx não possui nenhum b e não possui nenhum d .
- 3 vx possui pelo menos um c , então vx não possui nenhum a . Então vx não possui nenhum a e não possui nenhum c .
- 4 vx possui pelo menos um d , então vx não possui nenhum b . Então vx não possui nenhum b e não possui nenhum d .

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de as ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs .

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de as ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs .

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs ;

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs ;

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs ;

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs ;

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ① vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- ② vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- ③ vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- ④ vx possui pelo menos um d ,

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d ,

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b .

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs .

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs .

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- 1 vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- 2 vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- 3 vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- 4 vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs .

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ① vx possui pelo menos um a , então vwx não possui nenhum c . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs ;
- ② vx possui pelo menos um b , então vwx não possui nenhum d . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds ;
- ③ vx possui pelo menos um c , então vwx não possui nenhum a . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as ;
- ④ vx possui pelo menos um d , então vwx não possui nenhum b . Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs .

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2 , então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2 , então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2 , então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2 , então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2 , então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2 , então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.