Exercícios Extra – Processamento e Análise de Imagens

Aluno: Henrique Oliveira da Cunha Franco
Código: ABCDEF = 805688

Dados iniciais

- $A = 8,\ B = 0,\ C = 5,\ D = 6,\ E = 8,\ F = 8.$
- Imagem 6×6:

$$I = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 & 6 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 6 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 6 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 6 & 5 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 6 & 5 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 6 & 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- Filtro 2×2 e bias $b = 1$:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = 1$$

1.a) Dimensões da saída com *padding* $= 1$ e *stride* $= 2$

A fórmula geral é:

$$O = \left\lfloor \frac{I + 2p - k}{s} \right\rfloor + 1$$

Substituindo $I = 6$, $k = 2$, $p = 1$, $s = 2$:

$$O = \left\lfloor \frac{6 + 2 - 2}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor 3 \rfloor + 1 = 4.$$

$$\boxed{O = 4 \Rightarrow \text{saída } 4 \times 4 \times 1.}$$

1.b) Número de multiplicações com *padding* $= 1$ e *stride* $= 1$

Com $p = 1$ e $s = 1$:

$$O = \left\lfloor \frac{6 + 2 - 2}{1} \right\rfloor + 1 = 7.$$

Logo, a saída possui $7 \times 7 = 49$ posições.
Cada posição usa $2 \times 2 = 4$ multiplicações. Portanto:

$$\boxed{49 \times 4 = 196 \text{ multiplicações.}}$$

1.c) Saída com *padding* = 0, *stride* = 2 e ativação ReLU

Com $p = 0$ e $s = 2$:

$$O = \left\lfloor \frac{6-2}{2} \right\rfloor + 1 = 3.$$

Portanto a saída tem dimensão 3×3.
Para cada *patch* 2×2, calculamos:

$$y = \sum (I_{patch} \cdot K) + b, \qquad \text{ReLU}(y) = \max(0, y).$$

A seguir, o desenvolvimento completo de cada *patch*:

1. $(0,0) : \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot K = 8 - 0 + 8 - 0 = 16 \Rightarrow y = 17 \Rightarrow \text{ReLU} = 17$
2. $(0,2) : \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot K = 5 - 6 + 5 - 6 = -2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \text{ReLU} = 0$
3. $(0,4) : \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \cdot K = 8 - 8 + 8 - 8 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{ReLU} = 1$
4. $(2,0) : \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \cdot K = 8 - 0 + 8 - 8 = 8 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow \text{ReLU} = 9$
5. $(2,2) : \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot K = 5 - 6 + 6 - 5 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{ReLU} = 1$
6. $(2,4) : \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot K = 8 - 8 + 5 - 0 = 5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \text{ReLU} = 6$
7. $(4,0) : \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \cdot K = 8 - 8 + 8 - 8 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{ReLU} = 1$
8. $(4,2) : \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot K = 6 - 5 + 6 - 5 = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \text{ReLU} = 3$
9. $(4,4) : \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot K = 0 - 8 + 0 - 8 = -16 \Rightarrow y = -15 \Rightarrow \text{ReLU} = 0$

Assim, a saída final é:

$$\boxed{Y = \begin{bmatrix} 17 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}$$

2) Espectro de Fourier da sequência $[C, D, E, F]$

Temos $C = 5,\ D = 6,\ E = 8,\ F = 8$. Considerando a DFT de tamanho $N = 4$:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Cálculo passo a passo

$$\begin{aligned}
X[0] &= 5 + 6 + 8 + 8 = 27 \\
X[1] &= 5 + 6e^{-j\pi/2} + 8e^{-j\pi} + 8e^{-j3\pi/2} = 5 - 6j - 8 + 8j = (-3) + 2j \\
X[2] &= 5 + 6e^{-j\pi} + 8e^{-j2\pi} + 8e^{-j3\pi} = 5 - 6 + 8 - 8 = -1 \\
X[3] &= 5 + 6e^{-j3\pi/2} + 8e^{-j3\pi} + 8e^{-j9\pi/2} = 5 + 6j - 8 - 8j = (-3) - 2j
\end{aligned}$$

$$\boxed{X = [\,27,\ -3 + 2j,\ -1,\ -3 - 2j\,]}$$

Módulos e fases

$$|X| = [27,\ \sqrt{13},\ 1,\ \sqrt{13}], \qquad \angle X = [0,\ \tan^{-1}\tfrac{2}{-3},\ \pi,\ -\tan^{-1}\tfrac{2}{3}].$$