PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE MINAS GERAIS
Campus Lourdes – Inst. de Ciências Exatas e Informática – Ciência da Computação

Fundamentos Téoricos da Computação

Lista de Exercícios N.02 (Valor: 02 pontos)
Entrega: Quarta-feira, 23 de outubro de 2024 às 23:59

1. Forneça um autômato de pilha (AP) e uma gramática livre de contexto (GLC) para cada uma das seguintes linguagens sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:

   (a) Todas as sentenças não vazias que iniciam e terminam com o mesmo símbolo.

   (b) Todas as sentenças que contém mais 1s do que 0s.

   (c) Todos os palíndromos (um palíndromo representa uma sentença pode ler da esquerda para a direita ou vice-versa).

2. Forneça uma descrição sucinta da linguagem gerada por cada uma das seguintes GLCs.

   $Z1Z1Z1A$

   (a)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Z1Z1Z1A \\
Z &\rightarrow Z0 \mid \lambda \\
A &\rightarrow A0 \mid A1 \mid \lambda
\end{aligned}
$$

$L_A = \{0^n 1 0^m 1 0^k 1 (0 \cup 1)^* \mid n, m, k \geq 0\}$

   (b)

$$
S \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1
$$

$L_b = \{w \in \{0,1\}^* \mid n_{(0)}(w) \neq n_{(1)}(w)\}$

$S \rightarrow 1S1 \rightarrow 11S01$

   (c)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow DC \mid AE \\
A &\rightarrow Aa \mid \lambda \\
C &\rightarrow Cc \mid \lambda \\
D &\rightarrow aDb \mid \lambda \\
E &\rightarrow bEc \mid \lambda
\end{aligned}
$$

$L_c = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\} \cup \{a^p b^q c^q \mid p, q \geq 0\}$

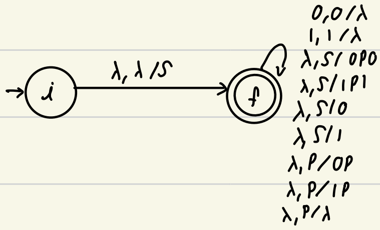
1. Forneça um autômato de pilha (AP) e uma gramática livre de contexto (GLC) para cada uma das seguintes linguagens sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:

(a) Todas as sentenças não vazias que iniciam e terminam com o mesmo símbolo.

GLC: $S \to 0P0 \mid 1P1 \mid 0 \mid 1$

$P \to 0P \mid 1P \mid \lambda$

AP:

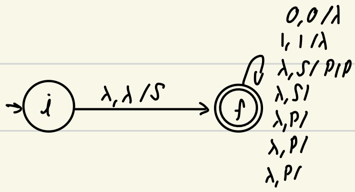


(b) Todas as sentenças que contém mais 1s do que 0s.

GLC: $S \to P1P \mid SS$

$P \to 0P1P \mid 1P0P \mid \lambda$

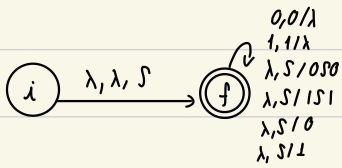
AP:



(c) Todos os palíndromos (um palíndromo representa uma sentença pode ler da esquerda para a direita ou vice-versa).

GLC: $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1$

AP:



3. Considere a seguinte GLC:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & AED \mid F \\
A & \rightarrow & Aa \mid a \\
B & \rightarrow & Bb \mid b \\
C & \rightarrow & Cc \mid c \\
D & \rightarrow & Dd \mid d \\
E & \rightarrow & bEc \mid bc \\
F & \rightarrow & aFd \mid BC
\end{array}
$$

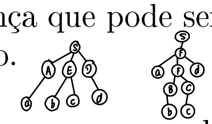
$S \rightarrow a^+(bc)^+d^+$

$AED \overset{*}{\Rightarrow} w \in \{a^n b^m c^m d^k \mid n, m, k \geq 1\}$

$F \overset{*}{\Rightarrow} w \in \{a^p b^q c^r d^p \mid p \geq 0, q, r \geq 1\}$

(a) Qual é a linguagem gerada por esta gramática? $L = \{a^n b^m c^m d^k \mid n, m, k \geq 1\} \cup \{a^p b^q c^r d^p \mid p \geq 0, q, r \geq 1\}$

(b) Mostre que esta gramática é ambígua fornecendo uma sentença que pode ser derivada de duas formas diferentes. Desenhe as duas árvores de derivação.



(c) Forneça uma gramática não ambígua que seja capaz de gerar a mesma linguagem da gramática acima.

$S \rightarrow aS \mid D$

$B \rightarrow bBc \mid \lambda$

$D \rightarrow Dd \mid B \mid \lambda$

4. Use o lema do bombeamento para mostrar que as seguintes linguagens não são livres de contexto:

(a) $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$

(b) $\{a^n b^{2n} c^n \mid n \geq 0\}$

(c) $\{a^n b^k c^n d^k \mid n, k \geq 0\}$

5. Considere que $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ é múltiplo de } 5\}$ e que $n_s(w)$ representa o número de símbolos s na palavra w. Mostre, para cada linguagem a seguir, que ela é ou não LLC:

(a) $\overline{L_1}$

(b) $L1 \cap L2$

(c) $L1 \cap \overline{L2}$

(d) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$

(e) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) \text{ ou } n_a(w) = n_c(w)\}$

(f) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$

4. Use o lema do bombeamento para mostrar que as seguintes linguagens não são livres de contexto:

$L_1 =$ (a) $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$

Seja L_1 uma LLC, então $\exists K > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq K$, pode ser escrita da seguinte forma:

$z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq K$
- $|vx| > 0$
- $uv^iwx^iy \in L_1 \; \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_1 = a^{K^2} \in L_1$. Como $|vwx| \leq K$ e $|vx| > 0$, então vx possui pelo menos 1 a e no máximo K as.

Contudo, para $i = 2$, $uv^2wx^2y = a^{K^2 + |vx|} \notin L_1$ pois $K^2 + 1 \leq K^2 + |vx| \leq K^2 + K$, ou seja, o número de as em z não é um quadrado de um número natural. Isto é um absurdo, logo L_1 não é uma LLC.

$L_2 =$ (b) $\{a^n b^{2n} c^n \mid n \geq 0\}$

Seja L_2 uma LLC, então $\exists K > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq K$, pode ser escrita da seguinte forma:

$z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq K$
- $|vx| > 0$
- $uv^iwx^iy \in L_1 \; \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_2 = a^K b^{2K} c^K \in L_2$. Como $|vwx| \leq K$ e $|vx| > 0$, logo pode-se considerar as possibilidades:

1) vx possui pelo menos 1 a, mas nenhum c.

2) vx possui somente b.

3) vx possui pelo menos 1 c, mas nenhum a.

Prova 1: Para $i = 2$, temos $uv^2wx^2y \notin L_2$, já que o número de as é maior que o número de cs em z_2

Prova 2: Para $i = 2$, temos $uv^2wx^2y \notin L_2$, já que o número de bs é mais do que o dobro de número de as e cs em z_2.

Prova 3: Para $i = 3$, temos $uv^2wx^2y \notin L_2$, já que o número de cs é maior que o número de as em z_2

$L_3 =$ (c) $\{a^n b^k c^n d^k \mid n, k \geq 0\}$

Seja L_3 uma LLC, pelo Lema do Bombeamento $\exists P > 0$, tal que toda sentença $Z \in L_3$, $|Z| \geq P$, pode ser escrita da forma: $uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq P$
- $|vx| > 0$
- $uv^iwx^iy \in L \ \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere $Z_3 = a^P b^P c^P d^P \in L_3$. Como $|vwx| \leq P$ e $|vx| > 0$, deve-se analisar 4 possibilidades:

1) vx possui pelo menos um a
2) vx possui pelo menos um b
3) vx possui pelo menos um c
4) vx possui pelo menos um d

Prova 1: vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c.

Logo, para $i = 2$, $uv^2wx^2y \notin L_3$, pois o número de as é maior que o número de cs.

Prova 2: vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d.

Logo, para $i = 2$, $uv^2wx^2y \notin L_3$, pois o número de bs é maior que o número de ds.

Prova 3: vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a.

Logo, para $i = 2$, $uv^2wx^2y \notin L_3$, pois o número de cs é maior que o número de as.

Prova 4: vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b.

Logo, para $i = 2$, $uv^2wx^2y \notin L_3$, pois o número de ds é maior que o número de bs.

5. Considere que $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|$ é múltiplo de $5\}$ e que $n_s(w)$ representa o número de símbolos s na palavra w. Mostre, para cada linguagem a seguir, que ela é ou não LLC:

$\rightarrow (a \cup b)^* \, ba \, (a \cup b)^* ; n_a > n_b ; n_b > n_a$

(a) $\overline{L_1}$

GLC para $\overline{L_1}$: $S \rightarrow A \mid B \mid C$

$A \rightarrow aAlbA \mid Aa \mid Ab \mid ba$

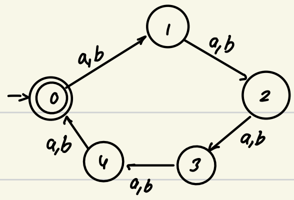
$B \rightarrow aBb \mid bB \mid b$

$C \rightarrow aCb \mid aC \mid a$

Como existe um GLC para $\overline{L_1}$, ela é LLC.

(b) $L1 \cap L2$

AF para L_2 :



Como L_1 é LLC e L_2 é regular, $L1 \cap L2$ é uma LLC

(c) $L1 \cap \overline{L2}$

Como L_2 é regular, $\overline{L2}$ é regular. Portanto $L1 \cap \overline{L2}$ é LLC.

(d) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$

GLC para a linguagem: $S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid Sc \mid \lambda$

Como existe uma GLC para a linguagem, ele é LLC.

(e) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)$ ou $n_a(w) = n_c(w)\}$

GLC para a linguagem:

$$S \rightarrow AB$$
$$A \rightarrow aAbA \mid bAaA \mid Ac \mid \lambda$$
$$B \rightarrow aBcB \mid cBaB \mid bB \mid \lambda$$

Como existe uma GLC para a linguagem, ele é LLC.

(f) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$

Seja $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)$. Supondo que L é uma LLC e sabendo que $L \cap \{a\}^*\{b\}^*\{c\}^* = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.

Como LLCs são fechadas sob interceção com linguagens regulares, e $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ não é uma LLC, a linguagem L não é LLC.

6. Prove que a afirmativa

$$\text{se } L \text{ é uma LLC, então } \overset{\text{parte 1}}{(L - X)} \cup \overset{\text{parte 2}}{(X - L)} \text{ é uma LLC}$$

é ou não verdadeira, considerando os casos em que:

(a) X é finita

(b) X é regular

a) parte 1: Como X é finita, X é regular. Portanto $\bar{X}$ é regular e $L - X$ é o mesmo que $L \cap \bar{X}$, que é uma LLC.

parte 2: Como X é finita, $X - L$ é finito, e portanto, regular e LLC.

Como a união de duas partes onde ambas são LLC é uma LLC, a afirmativa é verdadeira.

b) parte 1: Como X é regular, $\bar{X}$ é regular, e $L - X$ é o mesmo que $L \cap \bar{X}$, que é uma LLC.

parte 2: Como não é possível determinar se L é regular, nem se $\bar{L}$ é regular, não é possível dizer que $X - L$ ou $X \cap \bar{L}$ é uma LLC.

A afirmativa não é verdadeira.