Fundamentos Teóricos da Computação

– Autômatos de Pilha (Parte 02) –

Zenilton Kleber Gonçalves do Patrocínio Jr.

Ciência da Computação – PUC Minas

Belo Horizonte, Brasil

2025

PUC Minas

IM SCIENCE

Sumário

Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há λ-produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC $G = (V, \Sigma, P, S)$ tal que $\lambda \in L(G)$, então é necessário incluir a regra $S \rightarrow \lambda$ em G. Porém, não há necessidade de nenhuma outra λ-produção.

Toda GLC sem regra λ-produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky** (FNC) ou na **Forma Normal de Greibach** (FNG).

Uma $G = (V, \Sigma, P, S)$ é fita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$;
- $X \rightarrow Y\ Z$, em que $X, Y, Z \in V$; ou
- $X \rightarrow a$, em que $x \in V, a \in \Sigma$

Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há λ-produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC $G = (V, \Sigma, P, S)$ tal que $\lambda \in L(G)$, então é necessário incluir a regra $S \rightarrow \lambda$ em G. Porém, não há necessidade de nenhuma outra λ-produção.

Toda GLC sem regra λ-produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky** (FNC) ou na **Forma Normal de Greibach** (FNG).

Uma $G = (V, \Sigma, P, S)$ é fita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$;
- $X \rightarrow Y\ Z$, em que $X, Y, Z \in V$; ou
- $X \rightarrow a$, em que $x \in V, a \in \Sigma$

Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há λ-produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC $G = (V, \Sigma, P, S)$ tal que $\lambda \in L(G)$, então é necessário incluir a regra $S \to \lambda$ em G. Porém, não há necessidade de nenhuma outra λ-produção.

Toda GLC sem regra λ-produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky** (FNC) ou na **Forma Normal de Greibach** (FNG).

Uma $G = (V, \Sigma, P, S)$ é fita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \to \lambda$, se $\lambda \in L(G)$;
- $X \to Y\ Z$, em que $X, Y, Z \in V$; ou
- $X \to a$, em que $x \in V, a \in \Sigma$

Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há λ-produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC $G = (V, \Sigma, P, S)$ tal que $\lambda \in L(G)$, então é necessário incluir a regra $S \rightarrow \lambda$ em G. Porém, não há necessidade de nenhuma outra λ-produção.

Toda GLC sem regra λ-produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky** (FNC) ou na **Forma Normal de Greibach** (FNG).

Uma $G = (V, \Sigma, P, S)$ é fita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$, se $\lambda \in L(G)$;
- $X \rightarrow Y\ Z$, em que $X, Y, Z \in V$; ou
- $X \rightarrow a$, em que $x \in V$, $a \in \Sigma$

Forma Normal de Chomsky

Obtenção da FNC

1. Introduzir nova variável de partida
2. Remover λ-produções
3. Remover produções unitárias
4. Converte regras remanescentes

Exercício

Obtenha da FNC da seguinte GLC:

$$G: S \to A\ S\ A \mid a\ B$$
$$A \to B \mid S$$
$$B \to b \mid \lambda$$

Forma Normal de Chomsky

Obtenção da FNC

1. Introduzir nova variável de partida
2. Remover λ-produções
3. Remover produções unitárias
4. Converte regras remanescentes

Exercício

Obtenha da FNC da seguinte GLC:

$$
\begin{aligned}
G\colon\ S &\to A\ S\ A \mid a\ B \\
A &\to B \mid S \\
B &\to b \mid \lambda
\end{aligned}
$$

Lema do Bombeamento para LLCs

Lema do Bombeamento (*Pumping lemma*)

Seja L uma LLC, então $\exists k > 0$, tal que toda sentença z de L de tamanho maior ou igual a k (isto é, $|z| \geq k$) pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^iwx^iy \in L, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um c;
3. vx só possui bs;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um c;
3. vx só possui bs;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um c;
3. vx só possui bs;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um c;
3. vx só possui bs;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um c;
3. vx só possui bs;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um c;
3. vx só possui bs;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um c;
3. vx só possui bs;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova

Suponha que L_1 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_1$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 03 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um c;
3. vx só possui bs;

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c.
2. vx possui pelo menos um c,
3. vx só possui bs,

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um c,
3. vx só possui bs,

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as;
3. vx só possui bs, então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as;
3. vx só possui bs, então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as;
3. vx só possui bs, então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as;
3. vx só possui bs, então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as;
3. vx só possui bs, então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as;
3. vx só possui bs, então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as;
3. vx só possui bs, então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as;
3. vx só possui bs, então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Prove que L_1 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de cs é maior que número de as;
3. vx só possui bs, então vwx não possui nenhum a (nem c). Daí $uv^2wx^2y \notin L_1$, pois número de bs é maior que número de as (ou que o número de cs).

Isto é absurdo, portanto L_1 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um b;
3. vx possui pelo menos um c;
4. vx possui pelo menos um d.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um b;
3. vx possui pelo menos um c;
4. vx possui pelo menos um d.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um b;
3. vx possui pelo menos um c;
4. vx possui pelo menos um d.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um b;
3. vx possui pelo menos um c;
4. vx possui pelo menos um d.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um b;
3. vx possui pelo menos um c;
4. vx possui pelo menos um d.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um b;
3. vx possui pelo menos um c;
4. vx possui pelo menos um d.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um b;
3. vx possui pelo menos um c;
4. vx possui pelo menos um d.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um b;
3. vx possui pelo menos um c;
4. vx possui pelo menos um d.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova

Suponha que L_2 seja uma LLC, então $\exists k > 0$ tal que toda sentença $z \in L_2$, $|z| \geq k$, pode ser escrita da forma $z = uvwxy$, em que:

- $|vwx| \leq k$,
- $|vx| > 0$ (ou $vx \neq \lambda$),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$. Como $|vwx| \leq k$ e $vx \neq \lambda$, logo deve-se analisar 04 possibilidades:

1. vx possui pelo menos um a;
2. vx possui pelo menos um b;
3. vx possui pelo menos um c;
4. vx possui pelo menos um d.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs.
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds.
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as.
4. vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs.

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as;
4. vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs.

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b,
3. vx possui pelo menos um c,
4. vx possui pelo menos um d,

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d.
3. vx possui pelo menos um c,
4. vx possui pelo menos um d,

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as;
4. vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs.

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c,
4. vx possui pelo menos um d,

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as;
4. vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs;

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as;
4. vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs.

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as;
4. vx possui pelo menos um d,

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as;
4. vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b.

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as;
4. vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs.

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as;
4. vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs.

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as;
4. vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs.

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Prova Usando o Lema do Bombeamento

2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$. Prove que L_2 não é LLC.

Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1. vx possui pelo menos um a, então vwx não possui nenhum c. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de as é maior que número de cs;
2. vx possui pelo menos um b, então vwx não possui nenhum d. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de bs é maior que número de ds;
3. vx possui pelo menos um c, então vwx não possui nenhum a. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de cs é maior que número de as;
4. vx possui pelo menos um d, então vwx não possui nenhum b. Daí $uv^2wx^2y \notin L_2$, pois número de ds é maior que número de bs.

Isto é absurdo, portanto L_2 não é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2, então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2, então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2, então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2, então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2, então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.

Fechamento de Operações para LLCs

Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs L_1 e L_2, então:

- $L_1 \cup L_2$ também é LLC
- $L_1 L_2$ também é LLC
- L_1^* também é LLC

Não se garante que $L_1 \cap L_2$ ou $\overline{L_1}$ sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então $L \cap R$ também é LLC.