

# Fundamentos Teóricos da Computação

## – Autômatos de Pilha (Parte 02) –

Zenilton Kleber Gonçalves do Patrocínio Jr.

Ciência da Computação – PUC Minas  
Belo Horizonte, Brasil

2025



# Sumário

## 1 Forma Normal de GLC

- Introdução
- Forma Normal de Chomsky

## 2 Lema do Bombeamento

- Lema do Bombeamento para LLCs
- Prova Usando o Lema do Bombeamento para LLCs

## 3 Propriedades de Fechamento em LLCs

- Fechamento de Operações

# Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há  $\lambda$ -produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC  $G = (V, \Sigma, P, S)$  tal que  $\lambda \in L(G)$ , então é necessário incluir a regra  $S \rightarrow \lambda$  em  $G$ . Porém, não há necessidade de nenhuma outra  $\lambda$ -produção.

Toda GLC sem regra  $\lambda$ -produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky** (FNC) ou na **Forma Normal de Greibach** (FNG).

Uma  $G = (V, \Sigma, P, S)$  é fita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$ , se  $\lambda \in L(G)$ ;
- $X \rightarrow Y Z$ , em que  $X, Y, Z \in V$ ; ou
- $X \rightarrow a$ , em que  $x \in V, a \in \Sigma$

# Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há  $\lambda$ -produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC  $G = (V, \Sigma, P, S)$  tal que  $\lambda \in L(G)$ , então é necessário incluir a regra  $S \rightarrow \lambda$  em  $G$ . Porém, não há necessidade de nenhuma outra  $\lambda$ -produção.

Toda GLC sem regra  $\lambda$ -produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky** (FNC) ou na **Forma Normal de Greibach** (FNG).

Uma  $G = (V, \Sigma, P, S)$  é fita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$ , se  $\lambda \in L(G)$ ;
- $X \rightarrow Y Z$ , em que  $X, Y, Z \in V$ ; ou
- $X \rightarrow a$ , em que  $x \in V, a \in \Sigma$

# Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há  $\lambda$ -produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC  $G = (V, \Sigma, P, S)$  tal que  $\lambda \in L(G)$ , então é necessário incluir a regra  $S \rightarrow \lambda$  em  $G$ . Porém, não há necessidade de nenhuma outra  $\lambda$ -produção.

Toda GLC sem regra  $\lambda$ -produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky** (FNC) ou na **Forma Normal de Greibach** (FNG).

Uma  $G = (V, \Sigma, P, S)$  é fita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$ , se  $\lambda \in L(G)$ ;
- $X \rightarrow Y Z$ , em que  $X, Y, Z \in V$ ; ou
- $X \rightarrow a$ , em que  $x \in V, a \in \Sigma$

# Forma Normal de GLC

Toda GLC que não gera a sentença vazia pode ser transformada em uma gramática na qual não há  $\lambda$ -produção (isto é, não existe regra que tem a sentença vazia como produto).

Seja uma GLC  $G = (V, \Sigma, P, S)$  tal que  $\lambda \in L(G)$ , então é necessário incluir a regra  $S \rightarrow \lambda$  em  $G$ . Porém, não há necessidade de nenhuma outra  $\lambda$ -produção.

Toda GLC sem regra  $\lambda$ -produção pode ser colocada na **Forma Normal de Chomsky** (FNC) ou na **Forma Normal de Greibach** (FNG).

Uma  $G = (V, \Sigma, P, S)$  é fita estar na FNC se todas as suas regras são da forma:

- $S \rightarrow \lambda$ , se  $\lambda \in L(G)$ ;
- $X \rightarrow Y Z$ , em que  $X, Y, Z \in V$ ; ou
- $X \rightarrow a$ , em que  $x \in V, a \in \Sigma$

# Forma Normal de Chomsky

## Obtenção da FNC

- 1 Introduzir nova variável de partida
- 2 Remover  $\lambda$ -produções
- 3 Remover produções unitárias
- 4 Converte regras remanescentes

## Exercício

Obtenha da FNC da seguinte GLC:

$$G: S \rightarrow A S A \mid a B$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b \mid \lambda$$

# Forma Normal de Chomsky

## Obtenção da FNC

- 1 Introduzir nova variável de partida
- 2 Remover  $\lambda$ -produções
- 3 Remover produções unitárias
- 4 Converte regras remanescentes

## Exercício

Obtenha da FNC da seguinte GLC:

$$G: S \rightarrow A S A \mid a B$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b \mid \lambda$$

# Lema do Bombeamento para LLCs

## Lema do Bombeamento (*Pumping lemma*)

Seja  $L$  uma LLC, então  $\exists k > 0$ , tal que toda sentença  $z$  de  $L$  de tamanho maior ou igual a  $k$  (isto é,  $|z| \geq k$ ) pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^iwx^i y \in L, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_1$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^iwx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Portanto, se  $z = uvwxy \in L_1$ , temos  $uv^iwx^i y \in L_1$  para todos os  $i \geq 0$ .

Assim, se  $z = a^n b^n c^n \in L_1$ , temos  $uv^iwx^i y \in L_1$  para todos os  $i \geq 0$ .

Portanto, se  $z = a^n b^n c^n \in L_1$ , temos  $uv^iwx^i y \in L_1$  para todos os  $i \geq 0$ .

Portanto, se  $z = a^n b^n c^n \in L_1$ , temos  $uv^iwx^i y \in L_1$  para todos os  $i \geq 0$ .

Portanto, se  $z = a^n b^n c^n \in L_1$ , temos  $uv^iwx^i y \in L_1$  para todos os  $i \geq 0$ .

Portanto, se  $z = a^n b^n c^n \in L_1$ , temos  $uv^iwx^i y \in L_1$  para todos os  $i \geq 0$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_1$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^iwx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_k = a^k b^k c^k \in L_1$ . Vamos provar que  $L_1$  não é LLC.

Como  $|z_k| \geq k$ , podemos escrever:

$$z_k = uvwxy$$

em que:

$u, v, w, x, y \in \{a, b, c\}^*$

$|vwx| \leq k$

$|vx| > 0$

$uv^iwx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_1$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^iwx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a;
- 2 vx possui pelo menos um c;
- 3 vx só possui bs;

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_1$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^iwx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a;
- 2 vx possui pelo menos um c;
- 3 vx só possui bs;

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_1$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^iwx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a;
- 2 vx possui pelo menos um c;
- 3 vx só possui bs;

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_1$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^iwx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- 1  $vx$  possui pelo menos um  $a$ ;
- 2  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ;
- 3  $vx$  só possui  $bs$ ;

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_1$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^iwx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ;
- ③  $vx$  só possui  $bs$ ;

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_1$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^i wx^i y \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_1 = a^k b^k c^k \in L_1$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 03 possibilidades:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ;
- ③  $vx$  só possui  $bs$ ;

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1.  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vxc$  não possui nenhum  $c$ .  
Portanto,  $vxc$  não é uma palavra válida da linguagem.
2.  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vxa$  não possui nenhum  $b$ .  
Portanto,  $vxa$  não é uma palavra válida da linguagem.
3.  $vx$  só possui  $bs$ ,  
então  $vxa$  só possui  $as$ .  
Portanto,  $vxa$  não é uma palavra válida da linguagem.

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ,
- ③  $vx$  só possui  $bs$ ,

então  $uv^2wx^2y \in L_1$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ,
- ③  $vx$  só possui  $bs$ ,

então  $uv^2wx^2y \in L_1$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ ;
- ③  $vx$  só possui  $bs$ ,

então  $vwx$  só possui  $bs$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ③  $vx$  só possui  $bs$ ,

então  $uv^2wx^2y \in L_1$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ③  $vx$  só possui  $bs$ ,

então  $uv^2wx^2y \in L_1$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ③  $vx$  só possui  $bs$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$  nem  $a$ .

(caso vazio)

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ③  $vx$  só possui  $bs$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$  (nem  $c$ ). Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $as$  (ou que o número de  $cs$ ).

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ③  $vx$  só possui  $bs$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$  (nem  $c$ ). Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $as$  (ou que o número de  $cs$ ).

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ③  $vx$  só possui  $bs$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$  (nem  $c$ ). Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $as$  (ou que o número de  $cs$ ).

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ③  $vx$  só possui  $bs$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$  (nem  $c$ ). Daí  $uv^2wx^2y \notin L_1$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $as$  (ou que o número de  $cs$ ).

Isto é absurdo, portanto  $L_1$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_2$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^iwx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Consideremos a sentença  $z = a^n b^p c^n d^p$  com  $n, p \geq 0$  e  $|z| \geq k$ . Segundo o Lema do Bombeamento, podemos escrever  $z = uvwxy$  de maneira que:  
1.  $|vwx| \leq k$ ;  
2.  $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ );  
3.  $uv^iwx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$ .

Como  $z \in L_2$ , temos que  $u, v, w, x, y$  devem ser compostas por símbolos  $a, b, c, d$ . Vamos considerar os seguintes casos para  $v$ :

- Caso 1:** Se  $v$  contiver apenas símbolos  $a$  ou  $b$ , então  $uv^iwx^i y$  terá o mesmo comprimento que  $z$  para todos os  $i \geq 1$ . Isso contradiz a hipótese de que  $|z| \geq k$ .
- Caso 2:** Se  $v$  contiver apenas símbolos  $c$  ou  $d$ , então  $uv^iwx^i y$  terá o mesmo comprimento que  $z$  para todos os  $i \geq 1$ . Isso contradiz a hipótese de que  $|z| \geq k$ .
- Caso 3:** Se  $v$  contiver símbolos  $a, b, c, d$ , então  $uv^iwx^i y$  terá um comprimento menor que  $z$  para  $i \geq 1$ . Isso contradiz a hipótese de que  $|z| \geq k$ .

Portanto, não é possível escrever  $z = uvwxy$  de acordo com as condições do Lema do Bombeamento, o que prova que  $L_2$  não é uma LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_2$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_0 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$ . Vamos provar que  $L_2$  não é LLC.

Como  $|z_0| = k$ , devemos ter  $v = \lambda$ .

Então  $u = a^{k-i}, w = b^i, x = c^i, y = d^i$ .

Portanto,  $uv^i wx^i y = a^{k-i} b^{i+i} c^{i+i} d^i = a^{k-i} b^{2i} c^{2i} d^i$ .

Porém,  $a^{k-i} b^{2i} c^{2i} d^i \notin L_2$  (porque  $k-i < k$ ).

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_2$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um  $a$ ;
- 2 vx possui pelo menos um  $b$ ;
- 3 vx possui pelo menos um  $c$ ;
- 4 vx possui pelo menos um  $d$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_2$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um  $a$ ;
- 2 vx possui pelo menos um  $b$ ;
- 3 vx possui pelo menos um  $c$ ;
- 4 vx possui pelo menos um  $d$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_2$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um  $a$ ;
- 2 vx possui pelo menos um  $b$ ;
- 3 vx possui pelo menos um  $c$ ;
- 4 vx possui pelo menos um  $d$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_2$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a;
- 2 vx possui pelo menos um b;
- 3 vx possui pelo menos um c;
- 4 vx possui pelo menos um d.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_2$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um a;
- 2 vx possui pelo menos um b;
- 3 vx possui pelo menos um c;
- 4 vx possui pelo menos um d.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_2$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1 vx possui pelo menos um  $a$ ;
- 2 vx possui pelo menos um  $b$ ;
- 3 vx possui pelo menos um  $c$ ;
- 4 vx possui pelo menos um  $d$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma LLC, então  $\exists k > 0$  tal que toda sentença  $z \in L_2$ ,  $|z| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $z = uvwxy$ , em que:

- $|vwx| \leq k$ ,
- $|vx| > 0$  (ou  $vx \neq \lambda$ ),
- $uv^i wx^i y \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $z_2 = a^k b^k c^k d^k \in L_2$ . Como  $|vwx| \leq k$  e  $vx \neq \lambda$ , logo deve-se analisar 04 possibilidades:

- 1  $vx$  possui pelo menos um  $a$ ;
- 2  $vx$  possui pelo menos um  $b$ ;
- 3  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ;
- 4  $vx$  possui pelo menos um  $d$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

1.  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ .
2.  $vx$  possui pelo menos um  $b$ ,
3.  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ,
4.  $vx$  possui pelo menos um  $d$ ,

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $a$ s é maior que número de  $c$ s;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ ,
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ,
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ ,

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $a$ s é maior que número de  $c$ s;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ ,
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ,
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ ,

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ➊  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ➋  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é menor que número de  $ds$ ;
- ➌  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é menor que número de  $as$ ;
- ➍  $vx$  possui pelo menos um  $d$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $b$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $bs$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $ds$ ;
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ,
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ ,

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $ds$ ;
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ ,
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ ,

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $ds$ ;
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $ds$ ;
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ , ...

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $ds$ ;
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ ,

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $ds$ ;
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $b$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $ds$ ;
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $b$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $ds$  é maior que número de  $bs$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $ds$ ;
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $b$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $ds$  é maior que número de  $bs$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $ds$ ;
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $b$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $ds$  é maior que número de  $bs$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LLCs

Seja  $L_2 = \{a^n b^p c^n d^p \mid n, p \geq 0\}$ . Prove que  $L_2$  não é LLC.

### Prova (cont.)

Tem-se que, se:

- ①  $vx$  possui pelo menos um  $a$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $c$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $as$  é maior que número de  $cs$ ;
- ②  $vx$  possui pelo menos um  $b$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $d$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $bs$  é maior que número de  $ds$ ;
- ③  $vx$  possui pelo menos um  $c$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $a$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $cs$  é maior que número de  $as$ ;
- ④  $vx$  possui pelo menos um  $d$ , então  $vwx$  não possui nenhum  $b$ . Daí  $uv^2wx^2y \notin L_2$ , pois número de  $ds$  é maior que número de  $bs$ .

Isto é absurdo, portanto  $L_2$  não é LLC.

# Fechamento de Operações para LLCs

## Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs  $L_1$  e  $L_2$ , então:

- $L_1 \cup L_2$  também é LLC
- $L_1 L_2$  também é LLC
- $L_1^*$  também é LLC

Não se garante que  $L_1 \cap L_2$  ou  $\overline{L_1}$  sejam LLCs.

Porém, se  $R$  for LReg. e  $L$  uma LLC, então  $L \cap R$  também é LLC.

# Fechamento de Operações para LLCs

## Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs  $L_1$  e  $L_2$ , então:

- $L_1 \cup L_2$  também é LLC
- $L_1 L_2$  também é LLC
- $L_1^*$  também é LLC

Não se garante que  $L_1 \cap L_2$  ou  $\overline{L_1}$  sejam LLCs.

Porém, se  $R$  for LReg. e  $L$  uma LLC, então  $L \cap R$  também é LLC.

# Fechamento de Operações para LLCs

## Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs  $L_1$  e  $L_2$ , então:

- $L_1 \cup L_2$  também é LLC
- $L_1 L_2$  também é LLC
- $L_1^*$  também é LLC

Não se garante que  $L_1 \cap L_2$  ou  $\overline{L_1}$  sejam LLCs.

Porém, se  $R$  for LReg. e  $L$  uma LLC, então  $L \cap R$  também é LLC.

# Fechamento de Operações para LLCs

## Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs  $L_1$  e  $L_2$ , então:

- $L_1 \cup L_2$  também é LLC
- $L_1 L_2$  também é LLC
- $L_1^*$  também é LLC

Não se garante que  $L_1 \cap L_2$  ou  $\overline{L_1}$  sejam LLCs.

Porém, se  $R$  for LReg. e  $L$  uma LLC, então  $L \cap R$  também é LLC.

# Fechamento de Operações para LLCs

## Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs  $L_1$  e  $L_2$ , então:

- $L_1 \cup L_2$  também é LLC
- $L_1 L_2$  também é LLC
- $L_1^*$  também é LLC

Não se garante que  $L_1 \cap L_2$  ou  $\overline{L_1}$  sejam LLCs.

Porém, se  $R$  for LReg. e  $L$  uma LLC, então  $L \cap R$  também é LLC.

# Fechamento de Operações para LLCs

## Propriedades de Fechamento

Considere duas LLCs  $L_1$  e  $L_2$ , então:

- $L_1 \cup L_2$  também é LLC
- $L_1 L_2$  também é LLC
- $L_1^*$  também é LLC

Não se garante que  $L_1 \cap L_2$  ou  $\overline{L_1}$  sejam LLCs.

Porém, se R for LReg. e L uma LLC, então  $L \cap R$  também é LLC.