Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Programa de Pós-graduação em Informática (Mestrado/Doutorado)
Disciplina: Fundamentos Teóricos da Computação
Professor : Zenilton Kleber Gonçalves do Patrocínio Júnior

Exercícios Extra (Lista N.01 – Graduação)

1. Construa **AFD**s para as seguintes linguagens:
   a) $\{ u\mathbf{a}v\mathbf{b}x\mathbf{c}y \mid u, v, x, y \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \}^* \}$.
   b) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \mid w$ começa com **a** e tem tamanho par $\}$.
   c) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \mid w$ nunca tem mais de dois **a**'s consecutivos $\}$.
   d) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \mid w$ tem número ímpar de **ab**'s $\}$.
   e) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \mid |w| \geq 2$ e os **a**'s (se houver) precedem os **b**'s (se houver) $\}$.
   f) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \}^* \mid$ os **a**'s (se houver) precedem os **b**'s (se houver) e os **c**'s (se houver) precedem os **d**'s (se houver) $\}$.
   g) $\{ x\mathbf{ba}^n \mid x \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^*, n \geq 0$ e x tem um número par de **a**'s $\}$. solução na sala
   h) $\{ x\mathbf{a}^m\mathbf{ba}^n \mid x \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^*, m + n$ é par e x não termina em **a** $\}$.
   i) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \mid$ toda subpalavra de w de tamanho 3 tem **a**'s e **b**'s $\}$.
   j) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \mid w$ tem no máximo uma ocorrência de **aa** e no máximo uma ocorrência de **bb**$\}$.

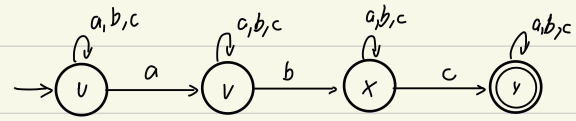
2. Construa **AFN**s para as seguintes linguagens:
   a) $\{ w \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1}\}^* \mid |w| \geq 4$ e o segundo e o penúltimo símbolos são ambos **1** $\}$.
   b) $\{ w \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1}\}^* \mid$ **00** não aparece nos 4 últimos símbolos de $w \}$.
   c) $\{ w \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1}\}^* \mid$ entre dois **1**'s de w há sempre um número par de **0**'s, exceto nos 4 últimos símbolos $\}$.
   d) $\{ w \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1}\}^* \mid w$ tem uma subpalavra constituída de dois **1**'s separados por um número par de símbolos$\}$.
   e) $\{ x\mathbf{0}^{3n} \mid x \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1}\}^*, \text{val}(x) \bmod 3 = 1$ e $n \geq 0 \}$, onde val(x) é o valor do número representado por x na base 2.

3. Construa **AFD**s para as seguintes linguagens:
   a) $L_1 = \{ w \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1}\}^* \mid |w|$ é divisível por 3 $\}$.
   b) $L_2 = \{ \mathbf{0}w\mathbf{0} \mid w \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1}\}^* \}$.
   c) $L_3 = L_1 \cup L_2$.
   d) $L_4 = L_1 \cap L_2$.
   e) $L_5 = \overline{L_1 \cap L_2}$.

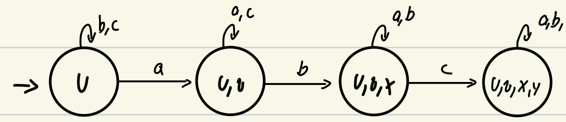
1. Construa **AFDs** para as seguintes linguagens:

a) $\{ u\mathbf{a}v\mathbf{b}x\mathbf{c}y \mid u, v, x, y \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \}^* \}$.

AFN



AFD



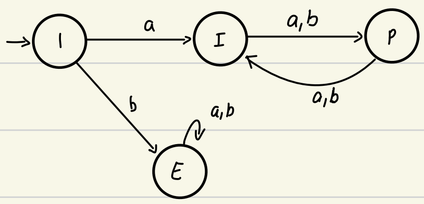
AFN

δ	a	b	c
u	u,v	u	u
v	v	v,x	v
x	x	x	x,y
y	y	y	y

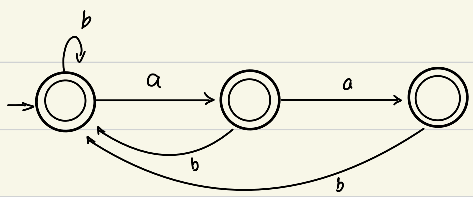
AFD

δ	a	b	c
u	u,v	u	u
u,v	u,v	u,v,x	u,v
u,v,x	u,v,x	u,v,x	u,v,x,y
u,v,x,y	u,v,x,y	u,v,x,y	u,v,x,y

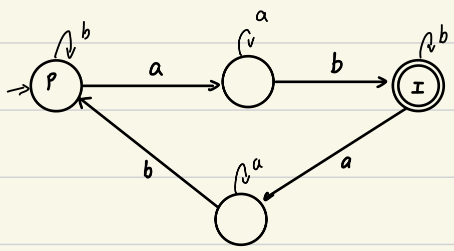
b) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \mid w$ começa com **a** e tem tamanho par $\}$.



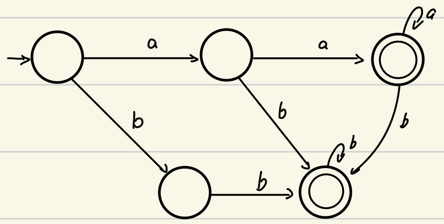
c) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \mid w$ nunca tem mais de dois **a**'s consecutivos $\}$.



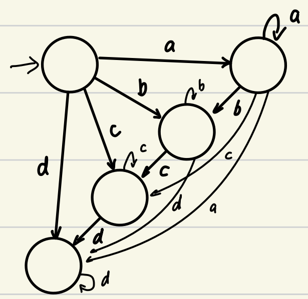
d) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \mid w$ tem número ímpar de **ab**'s $\}$.



e) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \mid |w| \geq 2$ e os **a**'s (se houver) precedem os **b**'s (se houver) $\}$.

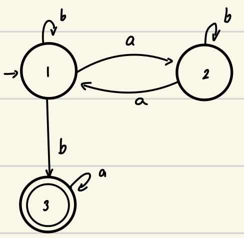


f) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \}^* \mid$ os **a**'s (se houver) precedem os **b**'s (se houver) e os **c**'s (se houver) precedem os **d**'s (se houver) $\}$.



$a^* b^* c^* d^*$

g) $\{ x\mathbf{ba}^n \mid x \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^*$, $n \geq 0$ e x tem um número par de **a**'s $\}$.



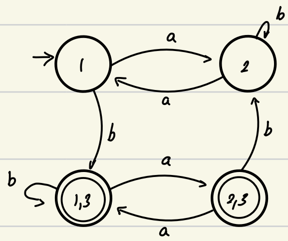
AFN

δ	a	b
1	2	1,3
2	1	2
3	3	∅

⇒

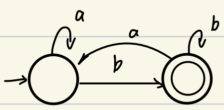
AFD

δ	a	b
1	2	1,3
2	1	2
1,3	2,3	1,3
2,3	1,3	2

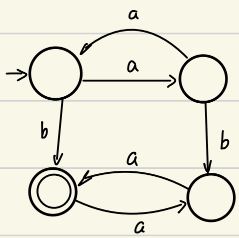


h) $\{ x\mathbf{a}^m\mathbf{ba}^n \mid x \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^*$, $m + n$ é par e x não termina em **a** $\}$.

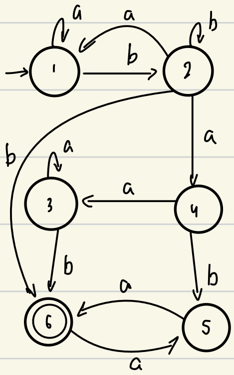
$\{x \mid x \in \{a,b\}^*, x$ não termina em $a\}$



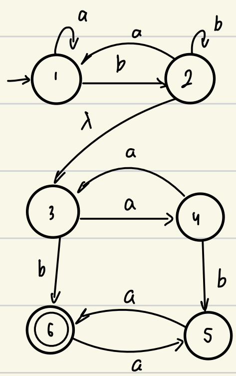
$\{a^m b a^n \mid m+n$ é par$\}$



AFN



AFN-λ



s	$f\lambda(s)$
1	{1}
2	{2,3}
3	{3}
4	{4}
5	{5}
6	{6}

δ	a	b
1	{1}	{2}
2	{1}	{2}
3	{4}	{6}
4	{3}	{5}
5	{6}	∅
6	{5}	∅

$\delta'(1,a) = \{1\}$

$\delta'(1,b) = \{2\}$

$\delta'(2,a) = f\lambda(\delta(2,a)) \cup f\lambda(\delta(3,a)) = \{1,4\}$

$\delta'(2,b) = f\lambda(\delta(2,b)) \cup f\lambda(\delta(3,b)) = \{2,6\}$

$\delta'(3,a) = \{4\}$

$\delta'(3,b) = \{6\}$

$\delta'(4,a) = \{3\}$

$\delta'(4,b) = \{5\}$

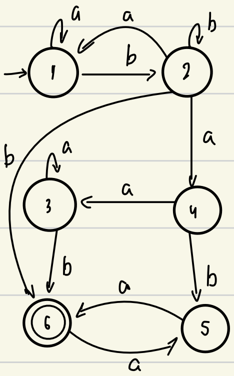
$\delta'(5,a) = \{6\}$

$\delta'(5,b) = \emptyset$

$\delta'(6,a) = \{5\}$

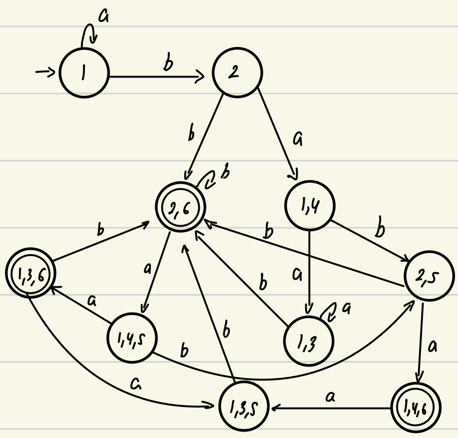
$\delta'(6,b) = \emptyset$

AFN



AFN

δ	a	b
1	$\{1\}$	$\{2\}$
2	$\{1,4\}$	$\{2,6\}$
3	$\{3\}$	$\{6\}$
4	$\{3\}$	$\{5\}$
5	$\{6\}$	$\emptyset$
6	$\{5\}$	$\emptyset$



4. Mostre que sim ou que não, justificando sua resposta:
   a) Para qualquer linguagem L (inclusive aquelas que não são regulares), existem linguagens regulares R_1 e R_2 tais que $R_1 \subseteq L \subseteq R_2$.
   b) Todos os subconjuntos de uma linguagem regular são também linguagens regulares.
   c) Há linguagens regulares que têm como subconjuntos linguagens que não são regulares.
   d) A união de duas linguagens que não são regulares pode ser ou não uma linguagem regular.
   e) A interseção de duas linguagens que não são regulares pode ser ou não uma linguagem regular.
   f) O complemento de uma linguagem que não é regular pode ser ou não uma linguagem regular.

5. Prove que os seguintes conjuntos não são linguagens regulares:
   a) $\{ \mathbf{0}^n \mathbf{1}^{n+10} \mid n \geq 0 \}$.
   b) $\{ \mathbf{0}^n y \mid y \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1} \}^* \text{ e } | y | \leq n \}$.
   c) $\{ \mathbf{0}^m \mathbf{1}^n \mid m \neq n \}$.
   d) $\{ \mathbf{a}^m \mathbf{b}^n \mathbf{c}^{m+n} \mid m, n > 0 \}$.
   e) $\{ \mathbf{a}^n \mathbf{b}^{n^2} \mid n \geq 0 \}$.
   f) $\{ \mathbf{a}^{n^3} \mid n \geq 0 \}$.
   g) $\{ \mathbf{a}^m \mathbf{b}^n \mid n \leq m \leq 2n \}$.
   h) $\{ xx \mid x \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \}^* \}$.
   i) $\{ u\bar{u} \mid u \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1} \}^* \}$, onde $\bar{u}$ é obtido de u substituindo-se **0** por **1** e **1** por **0**.
      Exemplo: $\overline{\mathbf{011}} = \mathbf{100}$.
   j) $\{ w \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1} \}^* \mid w \neq w^R \}$.
   k) $\{ w \in \{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \}^* \mid$ o número de **a**'s, **b**'s e **c**'s, em w, é o mesmo $\}$.
   l) $\{ w \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1} \}^* \mid$ o número de **0**'s em w é um cubo perfeito $\}$.
   m) $\{ \mathbf{0}^m \mathbf{1}^n \mid mdc(m, n) = 1 \}$.
   n) $\{ \mathbf{a}^k \mathbf{b}^m \mathbf{c}^n \mid k \neq m \text{ ou } m \neq n \}$.
   o) $\{ \mathbf{0}^m \mathbf{1}^n \mathbf{0}^n \mid m, n > 0 \}$.

6. Sejam L_1 e L_2 duas linguagens. Mostre que sim ou que não:
   a) se $L_1 \cup L_2$ é uma linguagem regular então L_1 é uma linguagem regular.
   b) se L_1L_2 é uma linguagem regular então L_1 é uma linguagem regular.
   c) se L_1^* é uma linguagem regular então L_1 é uma linguagem regular.
   d) se L_1 é uma linguagem regular então $\{ w \mid w$ é uma subpalavra de $L_1\}$ é uma linguagem regular.

5. Prove que os seguintes conjuntos não são linguagens regulares:

a) $\{ \mathbf{0}^n \mathbf{1}^{n+10} \mid n \geq 0 \}$.

Supondo que L seja regular, existe um AF de $K>0$ estados que aceita L. Toda sentença $w \in L$, $|w| \geq K$ pode ser escrita da forma $w = uvx$ em que:

$|uv| \leq K$

- $|v| > 0$
- $uv^ix \in L \ \forall i = 0, 1, 2, \ldots$

Considere $0^K 1^{K+10} \in L$. Como $|uv| \leq K$ e $|v| > 0$, v possui pelo menos um 0 e no máximo K 0s. Desta forma, para $i = 2$, $uv^2x = 0^{K+|v|} 1^{K+10} \notin L$, contradizendo o Lema do Bombeamento.

b) $\{ \mathbf{0}^n y \mid y \in \{ \mathbf{0}, \mathbf{1} \}^* \text{ e } |y| \leq n \}$.

Suponha que L é uma linguagem regular, existe um AF com $K>0$ estados que aceita L. Toda sentença $w \in L$, $|w| \geq K$, pode ser escrita da forma $w = uvx$, em que

-
-
-

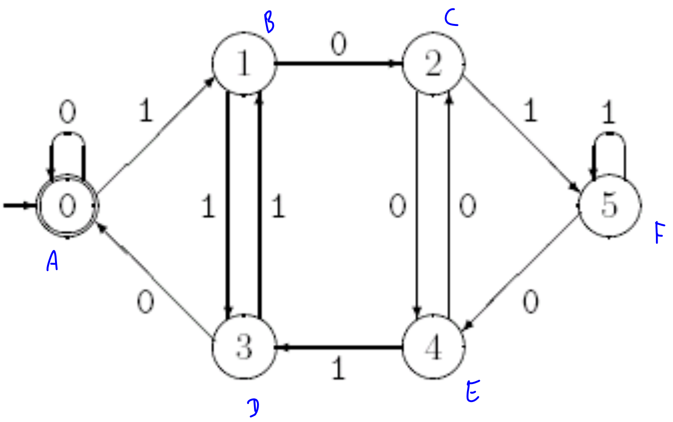
Considere $0^K 1^K \in L$

7. Mostre que a classe das linguagens regulares é fechada sob as seguintes operações:
   a) *pref* (L) = { x | $xy \in$ L } (os prefixos das palavras de L).
   b) *suf* (L) = { y | $xy \in$ L } (os sufixos das palavras de L).
   c) *rev* (L) = { w^R | $w \in$ L } (os reversos das palavras de L).
   d) *crev* (L) = { xy^R | $x, y \in$ L } (a concatenação das palavras de L com os reversos das palavras de L).

8. Determine expressões regulares e gramáticas regulares para as seguintes linguagens sob $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^*$:
   a) Conjunto das palavras em que 0's só podem ocorrer nas posições pares. $((0\cup)1)^*$
   b) Conjunto das palavras que não contêm **000**.
   c) Conjunto das palavras em que cada subpalavra de tamanho 4 contém pelo menos três **1**'s.
   d) Conjunto das palavras que não contêm **00** nos últimos 4 símbolos.
   e) Conjunto das palavras que não contêm **00**, a não ser nos últimos 4 símbolos (se tiver).

9. Determine uma expressão regular e uma gramática regular para o AFD cujo diagrama é representado pela figura abaixo:

GR: A → 0A | 1B | λ
B → 0C | 1D
C → 0E | 1F
D → 0A | 1B
E → 0C | 1D
F → 0E | 1F



10. Considere as seguintes ERs :

- $r_1 = (\mathbf{a} \cup \mathbf{b})^*(\mathbf{ab} \cup \mathbf{ba})(\mathbf{a} \cup \mathbf{b})^*$
- $r_2 = \mathbf{ab}^*$
- $r_3 = \mathbf{a}(\mathbf{b}^*\mathbf{ab}^*\mathbf{a})^*$
- $r_4 = (\mathbf{aa} \cup \mathbf{bb} \cup (\mathbf{ab} \cup \mathbf{ba})(\mathbf{aa} \cup \mathbf{bb})^*(\mathbf{ab} \cup \mathbf{ba}))^*$

Encontre ERs para:
   a) $\overline{L(r_1)}$;
   b) $\overline{L(r_2)}$;
   c) $\overline{L(r_3)}$;
   d) $\overline{L(r_4)}$;
   e) $L(r_1) \cap L(r_4)$;
   f) $L(r_1) - L(r_4)$.