

Résumé

Le résumé (abstract en anglais) de mon article.

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Résolution par la méthode de séparation des variables.

On pose : $w(x, t) = X(x)T(t)$. L'équation (1) devient

$$\mu^2 \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad \text{avec} \quad \mu = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2)$$

Ce qui permet de poser deux équations séparées. L'équation pour la fonction dépendant du temps.

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3)$$

Ce qui conduit à

$$T(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \quad (4)$$

Et pour la fonction dépendant de la position

$$X^{(4)} - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \beta^4 = \frac{\omega^2}{\mu^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (5)$$

Ce qui, si on suppose des solutions de la forme De^{sx} , avec s et d des constantes à déterminer, donne

$$s^4 - \beta^4 = 0 \quad (6)$$

soit

$$s_{1,2}^2 = \beta^2 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \beta \\ s_2 = -\beta \end{cases} \quad \text{et} \quad s_{3,4}^2 = -\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} s_3 = j\beta \\ s_4 = -j\beta \end{cases}$$

D'où la solution

$$X(x) = D_1 e^{\beta x} + D_2 e^{-\beta x} + D_3 e^{j\beta x} + D_4 e^{-j\beta x} \quad (7)$$

Ou, sous une forme alternative

$$X(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (8)$$

Utilisation des conditions aux limites pour déterminer les constantes D_1 à D_4 ou C_1 à C_4
Pour la poutre de longueur L encastrée en $x = L$ et libre en $x = 0$, les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} X(L) = 0 \Rightarrow D_1 e^{\beta L} + D_2 e^{-\beta L} + D_3 e^{j\beta L} + D_4 e^{-j\beta L} = 0 \\ X'(L) = 0 \Rightarrow \beta(D_1 e^{\beta L} - D_2 e^{-\beta L} + jD_3 e^{j\beta L} - jD_4 e^{-j\beta L}) = 0 \\ X''(0) = 0 \Rightarrow \beta^2(D_1 + D_2 - D_3 - D_4) = 0 \\ X^{(3)}(0) = 0 \Rightarrow \beta^3(D_1 - D_2 - jD_3 + jD_4) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Ces équations se mettent sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} e^{\beta L} & e^{-\beta L} & e^{j\beta L} & e^{-j\beta L} \\ e^{\beta L} & -e^{-\beta L} & j e^{j\beta L} & -j e^{-j\beta L} \\ \beta^2 & \beta^2 & -\beta^2 & -\beta^2 \\ \beta^3 & -\beta^3 & -j\beta^3 & j\beta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A.D = 0 \quad (10)$$

Ce système admet une solution non triviale, si et seulement si $\det(A) = 0$. Ce qui conduit à

$$\det(A) = -2j\beta^6 e^{-\beta L(1+2j)} [e^{j\beta L} + e^{3j\beta L} + 4e^{\beta L(1+2j)} + e^{\beta L(2+j)} + e^{\beta L(2+3j)}] = 0 \quad (11)$$

$$\iff e^{\beta L(1+2j)} [e^{\beta L(-1-j)} + e^{\beta L(-1+j)} + 4 + e^{\beta L(1-j)} + e^{\beta L(1+j)}] = 0 \quad (12)$$

$$\iff (e^{j\beta L} + e^{-j\beta L}) * (e^{\beta L} + e^{-\beta L}) + 4 = 0 \quad (13)$$

Ce qui conduit à

$$\cos\beta L * \cosh\beta L = -1 \quad (14)$$

Pour l'autre forme de $X(x)$, c'est à dire l'équation (8*), les conditions aux limites s'écrivent, pour une poutre encastree en $x = 0$ et libre en $x = L$

$$\begin{cases} X(L) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \\ X'(L) = 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = 0 \\ X''(0) = 0 \Rightarrow \beta^2(-C_1 \sin(\beta L) - C_2 \cos(\beta L) + C_3 \sinh(\beta L) + C_4 \cosh(\beta L)) = 0 \\ X^{(3)}(0) = 0 \Rightarrow \beta^3(-C_1 \cos(\beta L) + C_2 \sin(\beta L) + C_3 \cosh(\beta L) + C_4 \sinh(\beta L)) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Ces équations se mettent sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta L) & -\cos(\beta L) & \sinh(\beta L) & \cosh(\beta L) \\ -\cos(\beta L) & \sin(\beta L) & \cosh(\beta L) & \sinh(\beta L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A.C = 0 \quad (16)$$

De la même manière, ce système n'admet une solution non triviale, si et seulement si $\det(A) = 0$. Ce qui conduit à

$$\det(A) = \cosh^2 + 2\cos.\cosh - \cos^2 - \sinh^2 + \sin^2 = 0 \quad (17)$$

$$\iff 2\cos.\cosh = (\sinh^2 - \cosh^2) - (\cos^2 + \sin^2) \quad (18)$$

Ce qui conduit à

$$\cos\beta L * \cosh\beta L = -1 \quad (19)$$

Les 2 formes de $X(x) = D_1 e^{\beta x} + D_2 e^{-\beta x} + D_3 e^{j\beta x} + D_4 e^{-j\beta x} = C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x + C_3 \sinh\beta x + C_4 \cosh\beta x$ conduisent bien à la même condition sur β_n .

Cette équation (19*) est vérifiée par une infinité de valeurs β_n que l'on calcule numériquement.

n	β_n
1	1.87510407
2	4.69409113
3	7.85475744
4	10.99554073
5	14.13716839

Pour des n grand, $n > 5$, le \cosh devient très grand, et l'équation (14*) ne peut être vérifiée que si le \cos est très proche de 0. On utilise donc comme approximation

$$\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad \text{avec } n > 5 \quad (20)$$

A partir de la quantification de β_n et de l'équation (5), on obtient les pulsations naturelles

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{\mu^2} \Rightarrow \omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad \text{avec } n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Pour obtenir les **déformées modales**, on utilise les relations entre les coefficients C_1 à C_4 du système (15*). Ce qui conduit à $C_1 = -C_3$ (15b*) et $C_2 = -C_4$ (15a*). D'où

$$(15c*) \iff C_3 \sin(\beta_n L) + C_4 \cos(\beta_n L) + C_3 \sinh(\beta_n L) + C_4 \cosh(\beta_n L) = 0 \quad (22)$$

$$\iff C_3(\sin + \sinh) + C_4(\cos + \cosh) = 0 \quad (23)$$

$$\iff C_3 = -\frac{\cos + \cosh}{\sin + \sinh} C_4 \quad (24)$$

$$\iff \boxed{C_3 = -\sigma_n C_4} \quad \text{avec } \sigma_n = \frac{\cos(\beta_n L) + \cosh(\beta_n L)}{\sin(\beta_n L) + \sinh(\beta_n L)} \quad (25)$$

La fonction de variable x peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} X_n(x) &= C_n[(\cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)) - \sigma_n(\sinh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x))] \\ &= C_n \phi_n(x) \end{aligned} \tag{26}$$

s

En conclusion, l'équation du déplacement est (équation (4*) et (26*))

$$\boxed{w(x, t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x) [a \sin(\omega_n t) + b \cos(\omega_n t)]} \tag{27}$$