Résumé

Le résumé (abstract en anglais) de mon article.

$$\frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

Résolution par la méthode de séparation des variables.
On pose : $w(x,t)=X(x)T(t)$. L'équation (1) devient

$$\mu^2\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}=-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}=\omega^2 \qquad \text{avec} \quad \mu=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2}$$

Ce qui permet de poser deux équations séparées. L'équation pour la fonction dépendant du temps.

$$\ddot{T}(t)+\omega^2 T(t)=0 \tag{3}$$

Ce qui conduit à

$$T(t)=asin(\omega t)+bcos(\omega t) \tag{4}$$

Et pour la fonction dépendant de la position

$$X^{(4)}-\beta^4 X(x)=0 \qquad \text{avec} \quad \beta^4=\frac{\omega^2}{\mu^2}=\frac{\rho A\omega^2}{EI} \tag{5}$$

Ce qui, si on suppose des solutions de la forme De^{sx}, avec s et d des constantes à déterminer, donne

$$s^4-\beta^4=0 \tag{6}$$

soit

$$s_{1,2}^2=\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} s_1= & \beta \\ s_2= & -\beta \end{cases} \qquad \text{et} \quad s_{3,4}^2=-\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} s_3= & j\beta \\ s_4= & -j\beta \end{cases}$$

D'où la solution

$$X(x)=D_1e^{\beta x}+D_2e^{-\beta x}+D_3e^{j\beta x}+D_4e^{-j\beta x} \tag{7}$$

Ou, sous une forme alternative

$$X(x)=C_1sin\beta x+C_2cos\beta x+C_3sinh\beta x+C_4cosh\beta x \tag{8}$$

Utilisation des conditions aux limites pour déterminer les constantes D_1 à D_4 ou C_1 à C_4
Pour la poutre de longueur L encastrée en $x=L$ et libre en $x=0$, les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} X(L)= & 0 \Rightarrow D_1e^{\beta L}+D_2e^{-\beta L}+D_3e^{j\beta L}+D_4e^{-j\beta L}=0 \\ X'(L)= & 0 \Rightarrow \beta(D_1e^{\beta L}-D_2e^{-\beta L}+jD_3e^{j\beta L}-jD_4e^{-j\beta L})=0 \\ X''(0)= & 0 \Rightarrow \beta^2(D_1+D_2-D_3-D_4)=0 \\ X^{(3)}= & 0 \Rightarrow \beta^3(D_1-D_2-jD_3+jD_4)=0 \end{cases} \tag{9}$$

Ces équations se mettent sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} e^{\beta L} & e^{-\beta L} & e^{j\beta L} & e^{-j\beta L} \\ e^{\beta L} & -e^{-\beta L} & je^{j\beta L} & -je^{-j\beta L} \\ \beta^2 & \beta^2 & -\beta^2 & -\beta^2 \\ \beta^3 & -\beta^3 & -j\beta^3 & j\beta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A.D=0 \tag{10}$$

Ce système admet une solution non triviale, si et seulement si $det(A)=0$. Ce qui conduit à

$$det(A)=-2j\beta^6e^{-\beta L(1+2j)}[e^{j\beta L}+e^{3j\beta L}+4e^{\beta L(1+2j)}+e^{\beta L(2+j)}+e^{\beta L(2+3j)}]=0 \tag{11}$$

$$\iff e^{\beta L(1+2j)}[e^{\beta L(-1-j)}+e^{\beta L(-1+j)}+4+e^{\beta L(1-j)}+e^{\beta L(1+j)}]=0 \tag{12}$$

$$\iff (e^{j\beta L}+e^{-j\beta L})*(e^{\beta L}+e^{-\beta L})+4=0 \tag{13}$$

Ce qui conduit à

$$cos\beta L * cosh\beta L = -1 \tag{14}$$

Pour l'autre forme de X(x), c'est à dire l'équation (8*), les conditions aux limites s'écrivent, pour une poutre encastrée en $x = 0$ et libre en $x = L$

$$\begin{cases} X(L) = & 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \\ X'(L) = & 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = 0 \\ X''(0) = & 0 \Rightarrow \beta^2(-C_1 sin(\beta L) - C_2 cos(\beta L) + C_3 sinh(\beta L) + C_4 cosh(\beta L)) = 0 \\ X^{(3)} = & 0 \Rightarrow \beta^3(-C_1 cos(\beta L) + C_2 sin(\beta L) + C_3 cosh(\beta L) + C_4 sinh(\beta L)) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Ces équations se mettent sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta L) & -cos(\beta L) & sinh(\beta L) & cosh(\beta L) \\ -cos(\beta L) & sin(\beta L) & cosh(\beta L) & sinh(\beta L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A.C = 0 \tag{16}$$

De la même manière, ce système n'admet une solution non triviale, si et seulement si $det(A) = 0$. Ce qui conduit à

$$det(A) = cosh^2 + 2cos.cosh - cos^2 - sinh^2 + sin^2 = 0 \tag{17}$$

$$\Longleftrightarrow \; 2cos.cosh = (sinh^2 - cosh^2) - (cos^2 + sin^2) \tag{18}$$

Ce qui conduit à

$$cos\beta L * cosh\beta L = -1 \tag{19}$$

Les 2 formes de $X(x) = D_1 e^{\beta x} + D_2 e^{-\beta x} + D_3 e^{j\beta x} + D_4 e^{-j\beta x} = C_1 sin\beta x + C_2 cos\beta x + C_3 sinh\beta x + C_4 cosh\beta x$ conduisent bien à la même condition sur β_n.

Cette équation (19*) est vérifiée par une infinité de valeurs β_n que l'on calcule numériquement.

n	β_n
1	1.87510407
2	4.69409113
3	7.85475744
4	10.99554073
5	14.13716839

Pour des n grand, $n > 5$, le $cosh$ deveint très grand, et l'équation (14*) ne peut être vérifiée que si le cos est très proche de 0. On utilise donc comme approximation

$$\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \qquad \text{avec} \quad n > 5 \tag{20}$$

A partir de la quantification de de β_n et de l'équation (5), on obtient les pulsations naturelles

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{\mu^2} \Rightarrow \omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \qquad \text{avec} \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{21}$$

Pour obtenir les **déformées modales**, on utilise les relations entre les coefficients C_1 à C_4 du système (15*). Ce qui conduit à $C_1 = -C_3$ et $C_2 = -C_4$. D'où

$$C_3 sin(\beta_n L) + C_4 cos(\beta_n L) + C_3 sinh(\beta_n L) + C_4 cosh(\beta_n L) = 0 \tag{22}$$

$$\Longleftrightarrow \; C_3(sin + sinh) + C_4(cos + cosh) = 0 \tag{23}$$

$$\Longleftrightarrow \; C3 = -\frac{cos + cosh}{sin + sinh} C_4 \tag{24}$$

$$\Longleftrightarrow \; \boxed{C3 = -\sigma_n C_4} \qquad \text{avec} \quad \sigma_n = \frac{cos(\beta_n L) + cosh(\beta_n L)}{sin(\beta_n L) + sinh(\beta_n L)} \tag{25}$$

La fonction de variable x peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} X_n(x) &= C_n[(sin(\beta_n x) + sinh(\beta_n x)) - \sigma_n(cos(\beta_n x) + cosh(\beta_n x))] \\ &= C_n \phi_n(x) \end{aligned} \tag{26}$$

En conclusion, l'équation du déplacement est (équation (4*) et (26*)

$$\boxed{w(x,t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x)[a\sin(\omega_n t) + b\cos(\omega_n t)]} \tag{27}$$