Laboratorio de Física I
Resonancia

J. Güémez, J. Piedra
Universidad de Cantabria

October 28, 2017

1 Oscilaciones

El movimiento unidimensional de una partícula en un pozo de potencial es periódico, es decir, se repite a iguales intervalos de tiempo. El intervalo de tiempo que tarda en volver a repetirse el movimiento se denomina período del movimiento. Si T es el período del movimiento, en los instantes t y $t+T$ la partícula se encuentra en la misma posición y posee la misma velocidad. La magnitud inversa del período es la frecuencia, o veces por unidad de tiempo que se repite el movimiento. La frecuencia se denota como ν, con

$$\nu = \frac{1}{T}\,.$$

Las funciones periódicas más sencillas son las trigonométricas seno y coseno. Por tanto, el movimiento periódico más simple será aquel en el que las coordenadas del punto material varíen según la ley

$$x(t) = A\,\cos\left(\omega t + \alpha\right),$$

donde A es la amplitud del movimiento, que va a depender de las condiciones iniciales de posición y velocidad, ω es la frecuencia angular, en radianes por segundo,

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}\,,$$

y α la fase inicial, que también depende de las condiciones iniciales. Para la velocidad de la partícula se tiene que

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega A \sin\left(\omega t + \alpha\right) = \omega A\,\cos\left(\omega t + \alpha + \pi/2\right).$$

La variación de la velocidad adelanta en fase a la variación de la posición. Conocidas las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$, se determinan A y α para el sistema dado. Para la aceleración de la partícula se tiene

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A\,\cos\left(\omega t + \alpha\right).$$

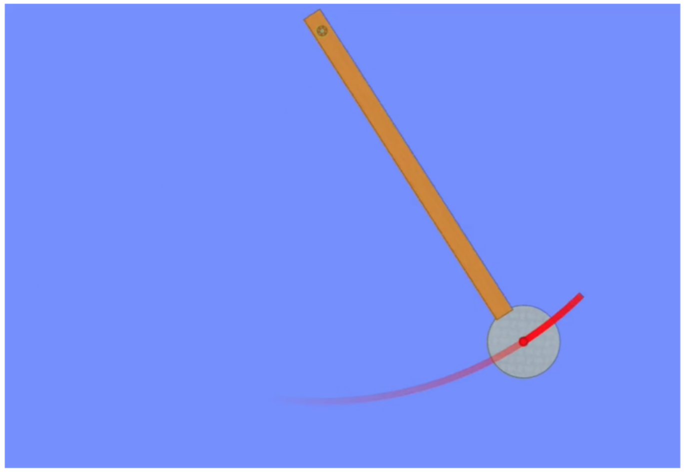

Figure 1: *Péndulo matemático*. Una bola pesada unida a una barra ligera oscila, aproximadamente, en forma armónica.

Multiplicando la aceleración por la masa, se tiene que

$$F(t) = ma(t) = -m\omega^2 x(t)\,.$$

Por tanto, para que la partícula realice oscilaciones armónicas, la fuerza que actúa sobre ella debe ser proporcional al desplazamiento de la partícula y debe estar dirigida en sentido opuesto a ese desplazamiento. Este tipo de fuerza se denomina *fuerza recuperadora* y es característica de los movimientos oscilatorios. La ecuación diferencial característica de una oscilación armónica es

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x(t) = 0\,.$$

Para una fuerza característica $F = -kx(t)$, se tendrá que $\omega^2 = k/m$. Las oscilaciones de un sistema que, después de recibir un impulso inicial[1], se abandona a sí mismo, se denominan *oscilaciones propias*.

Para la energía potencial de la partícula oscilante, se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{P}}(x)}{\mathrm{d}x} = -F = kx\,.$$

La energía potencial asociada a la oscilación viene dada por

$$E_{\mathrm{P}}(x) = \frac{1}{2}kx^2\,,$$

donde la energía potencial es mínima para la posición $x = 0$ – máxima velocidad –. Sumando las energías potencial y cinética de la partícula oscilante, se tiene

$$E = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{mA^2\omega^2}{2}\left[\sin^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha)\right] = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\,.$$

[1]Un impulso inicial incorporará cierta energía al sistema.

La energía total es proporcional al cuadrado de la amplitud. Y como la amplitud depende de las condiciones iniciales, también depende la energía total de la perturbación inicial y de la energía por ella introducida en el sistema.

En esta descripción energética, y en ausencia de procesos de amortiguación, el proceso de oscilación está relacionado con el paso periódico de la energía potencial – máxima en los extremos – a cinética – máxima en el centro de la oscilación – y viceversa. El valor medio, por período de oscilación, de las energías potencial y cinética

$$\bar{K} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}mv^2(t)\mathrm{d}t\,;\ \bar{E}_\mathrm{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kx^2(t)\mathrm{d}t\,,$$

es el mismo[2] e igual cada uno de ellos a $\bar{K} = \bar{E}_\mathrm{P} = E/2$.

2 Equilibrios estable e inestable

El fenómeno de las oscilaciones de un cuerpo alrededor de un punto siempre se produce a partir de un sistema en *equilibrio estable* que es perturbado, es decir, apartado de su estado de equilibrio proporcionándole cierta energía, de tal manera que las fuerzas que aparecen son siempre de carácter *recuperador*, intentando devolver al sistema a su estado de equilibrio.

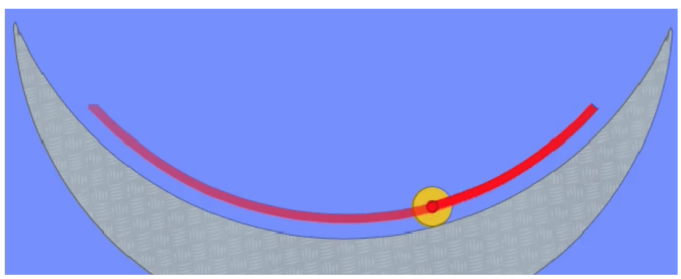

Figure 2: *Equilibrio estable.*

El sistema se encuentra en un mínimo de un potencial que puede aproximarse, en general, y cerca del centro, como una parábola[3]. Cuando se perturba el sistema se le proporciona energía, asciende en la parábola y oscila alrededor del centro, en ausencia de fricción, con dos puntos extremos.

En un equilibrio estable el sistema se sitúa en un mínimo de un potencial, por lo que su derivada primera en ese punto es cero. Desarrollando la curva en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio, se tiene que para un potencial de parábola cóncava hacia arriba:

$$E_\mathrm{P}(x) = +\frac{1}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{P}(x)}{\mathrm{d}^2x}\Big|_{x=x_\mathrm{e}}(x-x_\mathrm{e})^2 + \cdots\,.$$

[2]Este resultado se puede explicar utilizando el principio de equipartición de la energía: la energía mecánica no se acumula, en promedio, en ningun modo de forma especial y se reparte equitativamente entre todos los modos posibles.

[3]La fuerza correspondiente se puede aproximar, en ese caso, por una línea recta.

Con la segunda ley de Newton expresada como

$$m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{P}(x)}{\mathrm{d}x}\,,$$

se tiene la ecuación diferencial del movimiento

$$\frac{\mathrm{d}(x-x_\mathrm{e})^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2(x-x_\mathrm{e}) = 0\,;\ \omega^2 = m^{-1}\Big|\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{P}(x)}{\mathrm{d}^2x}\Big|_{x=x_\mathrm{e}}\,.$$

Una posible solución[4] de esta ecuación diferencial es de la forma

$$(x-x_\mathrm{e})(t) = A\,\sin\left(\omega t+\phi\right);\ (x-x_\mathrm{e})(t) = A\,\cos\left(\omega t+\phi'\right)$$

donde A – que depende de la energía inicial de la perturbación – es la amplitud de la oscilación, $\omega = 2\pi/T$ es su frecuencia angular – que dependerá de condiciones geométricas y físicas –, T es el período y ϕ la fase inicial.

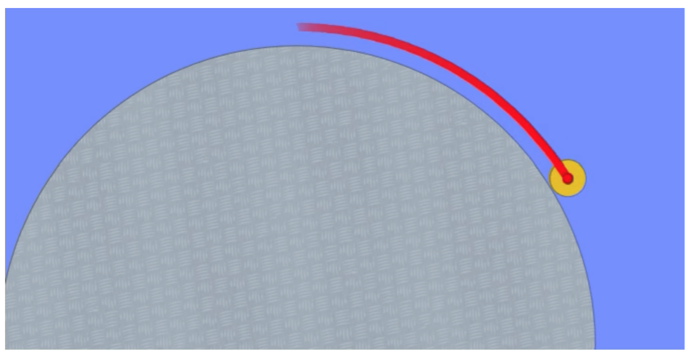

Figure 3: *Equilibrio inestable.*

En un equilibrio inestable el sistema se sitúa en un máximo de un potencial. Cuando el sistema se perturba las fuerzas son tales que alejan el sistema del equilibrio. Se tiene que para un potencial de parábola cóncava hacia abajo:

$$E_\mathrm{P}(x) = -\frac{1}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{P}(x)}{\mathrm{d}^2x}\Big|_{x=x_\mathrm{e}}(x-x_\mathrm{e})^2 + \cdots\,.$$

Con la Segunda Ley de Newton expresada como

$$m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{P}(x)}{\mathrm{d}x}\,,$$

se tiene

$$\frac{\mathrm{d}(x-x_\mathrm{e})^2}{\mathrm{d}t^2} - \omega^2(x-x_\mathrm{e}) = 0\,;\ \omega^2 = m^{-1}\Big|\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{P}(x)}{\mathrm{d}^2x}\Big|_{x=x_\mathrm{e}}\,.$$

[4] La función $f(x) = \sin x$ tiene la propiedad de que su segunda derivada es la misma función cambiada de signo $f''(x) = -f(x)$. La misma propiedad tiene la función $\cos x$.

La solución[5] de esta ecuación diferencial es:

$$(x - x_{\mathrm{e}})(t) = A \, \exp\left(\omega t + \phi\right).$$

El sistema se aleja del equilibrio una vez es perturbado.

Un movimiento oscilatorio se puede interpretar como la proyección sobre un cierto eje de un movimiento circular con velocidad angular constante. Con

$$x(t) = A \cos\,(\omega t + \phi)\;; y(t) = A \sin\,(\omega t)\;,$$

si este movimiento se proyecta sobre el eje X o el eje Y, se tendra un movimiento oscilatorio.

3 Demostraciones

3.1 Péndulos

Los diversos tipos de péndulos son paradigmas de sistemas oscilantes.

1. **Péndulo matemático**. Por ejemplo, una bola de plomo colgada de un hilo de pescar. La ecuación para un péndulo matemático (aproximación de ángulo pequeño) viene dada por

   $$\theta(t) = \theta_0 \, \sin\left(\omega t + \phi\right).$$

   Si a tiempo $t = 0$ el péndulo se encuentra en el ángulo $\theta = \theta_i$ y se mueve con velocidad angular $\omega = \omega_i$, se tienen las ecuaciones:

   $$\begin{aligned} \theta_i &= \theta_0 \, \sin\,\phi\,, \\ \omega_i &= \theta_0 \, \omega \, \cos\,\phi\,. \end{aligned}$$

   Con estas ecuaciones se calculan θ_0 y ϕ.

   Período de un péndulo matemático.

   $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

2. **Péndulo físico.** Período de un péndulo físico en forma de barra (momento de inercia respecto de un eje perpendicular que pasa por su centro, $I_0 = \frac{1}{12} m L^2$, y momento de inercia respecto de un eje perpendicular que pasa por uno de sus extremos, $I = \frac{1}{3} m L^2$):

   $$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2/3}{m(L/2)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}\,.$$

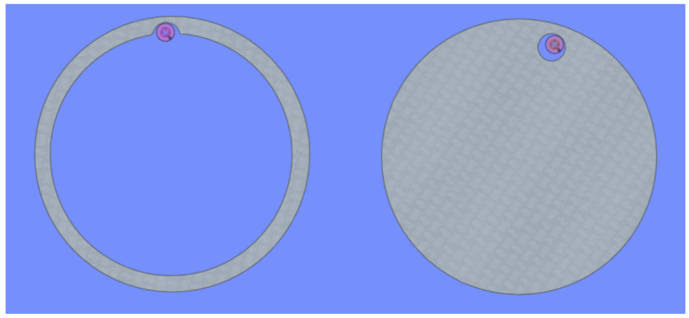

Figure 4: (Izquierda) Anillo que oscila sobre un soporte colocado en su parte superior interna. (Derecha) Disco con el mismo radio que el anillo.

(Demostrar que esta ecuación para T es dimensionalmente correcta). Tiene un período menor que el de un péndulo matemático de la misma longitud.

Oscilaciones de un anillo. Un anillo oscila con un período T dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\,,$$

donde $I = I_0 + mR^2 = 2mR^2$ y $d = R$. Se tiene

$$T_{\mathrm{A}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}\,.$$

Un anillo de radio R oscila con el mismo período que un péndulo matemático de longitud su diámetro, $L = 2R$.

Oscilaciones de un disco. Para un disco, $I = I_0 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$ y $d = R$.

$$T_{\mathrm{A}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R/2}{g}}\,.$$

Su período es menor, es decir, oscila más rapidamente, que el de un anillo con el mismo radio.

[5] La función $g(x) = \exp x$ tiene la propiedad de que su segunda derivada es la misma función $f''(x) = f(x)$.

3. **El tentetieso como un péndulo físico**.

   (a) Estudiar los períodos de los dos modos normales del tentetieso águila. Para la primera oscilación, la distancia al eje de giro es de unos $l_1 = 6,5$ cm. La distancia entre el punto de apoyo y el centro de gravedad se estima en $d = 1$ cm. Para la oscilación más rápida, la distancia al eje se estima en unos $l_2 = 2,5$ cm.
   Con estos datos
   $$T_1 = 2\pi \left(\frac{ml_1^2}{mgd}\right)^{1/2} \approx 1,2 \text{ s}.$$
   Para 10 períodos se esperan unos 12 s. Para la oscilación rápida,
   $$T_2 = 2\pi \left(\frac{ml_2^2}{mgd}\right)^{1/2} \approx 0,5 \text{ s}.$$

4. **Péndulo de gravedad variable.** Calcular y medir el período de un péndulo de gravedad variable:
   $$T(\alpha) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(\alpha)}}\,; g(\alpha) = g\cos\alpha$$
   Cuando $\alpha = 1,31$ rad (75 °), cos $\alpha = 0,25$ y el período debe ser el doble que cuando el péndulo se encuentra en vertical.

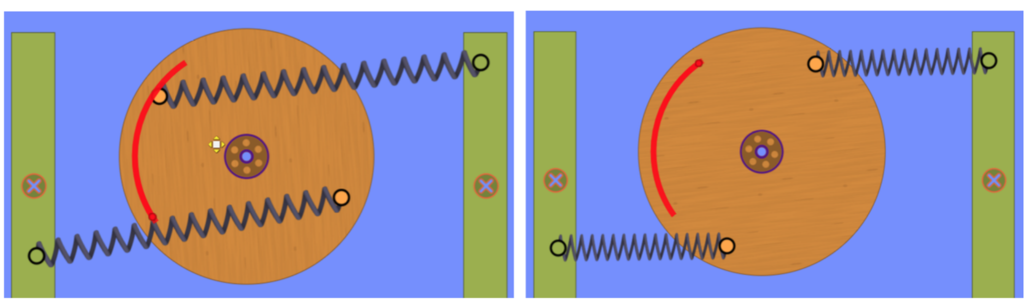

Figure 5: *Péndulo de torsión.*

5. **Péndulo de torsión.** Para un péndulo de torsión –un muelle unido a una plataforma–, el ángulo es proporcional al torque aplicado. $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k_{\mathrm{T}}}}; \theta = k_{\mathrm{T}}\tau$.

6. **Tubo oscilante en fluido.** Tubo lastrado con plomos que oscila en cubeta con agua. Oscilaciones amortiguadas.
   $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{A\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{\mathrm{S}}}{g}}\,,$$
   donde A es la sección del tubo, ρ es la densidad del líquido, m la masa del conjunto tubo más plomos, y L_{S} la longitud sumergida del tubo. (Probar que la ecuación es dimensionalmente correcta).

Puesto que el peso del tubo debe ser igual al peso del agua desalojada, $mg = h_{\mathrm{s}} A \rho g$, donde h_{s} es la longitud de tubo sumergido. Sustituyendo se obtiene que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h_{\mathrm{s}}}{g}}\,,$$

que vuelve a tener la forma del período para un péndulo matemático.

4 Ley de Hooke

1. **Péndulo de resorte**. Con muelles verticales. Se mide la constante elástica de un muelle con la ayuda de un dinamómetro (de $F = 2$ N) y de una regla (de $L = 1$ m). Se mide la longitud del muelle en ausencia de fuerzas y con la ayuda del dinamómetro y la regla se obtienen fuerza y elongación y de ahí la constante k del muelle. Esta constante se utiliza luego en diferentes experimentos.

   Si se coloca un peso mg, y se hace oscilar, el período de oscilación viene dado por
   $$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

   El fabricante de los muelles proporciona los valores de $k_{\mathrm{R}} = 10$ N m^{-1} para el muelle rojo, $k_{\mathrm{A}} = 20$ N m^{-1} para el muelle azul, $k_{\mathrm{V}} = 40$ N m^{-1} para el muelle verde. Puesto que el soporte tiene $h = 0,5$ m de altura, se debe utilizar el verde. Con los datos proporcionados, con una peso de $m = 1$ kg el período de oscilación es de $T = 1$ s. Se esperan 10 s para la medida de 10 períodos.

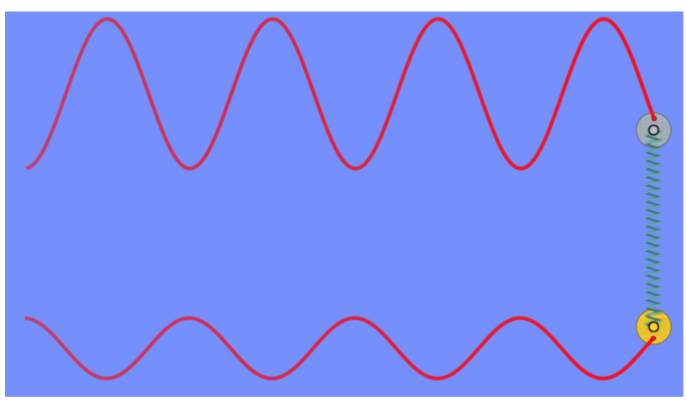

Figure 6: *Dos bolas que oscilan en los extremos de un muelle.* Cada bola ejecuta un movimiento armónico simple no amortiguado.

2. **Dos muelles horizontales en carril sin rozamiento.** El período de oscilación del carrito, masa 500 g, es de

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}\,.$$

La constante del muelle se estima considerando una longitud en reposo de $l_0 = 5,5$ cm, y que se estira hasta los $l = 34,5$ cm bajo la acción de una fuerza de 2 N, medida con el dinamómetro de 2 N. Se tiene entonces una $k \approx 7$ N m^{-1}. Con este dato, para un carrito de $m = 500$ g se espera un período de oscilación de $T = 1,2$ s y un tiempo de unos 6 s para 5 oscilaciones.

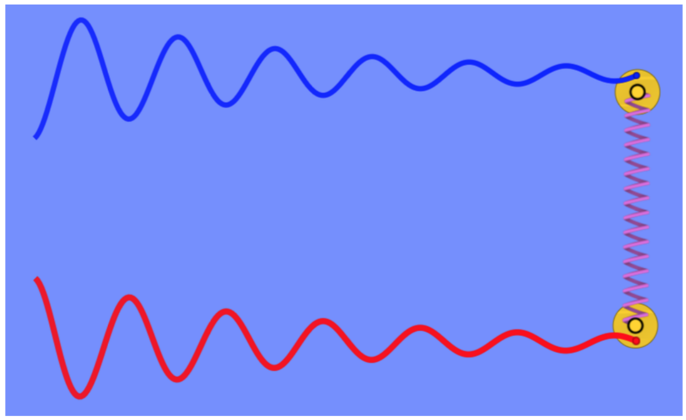

Figure 7: *Oscilaciones amortiguadas.* Dos bolas colocadas en los extremos de un resorte oscilan de forma amortiguada. Toda la energía elástica inicial del resorte se disipa.

5 Oscilaciones amortiguadas

En presencia de una fuerza de rozamiento, típicamente proporcional a la velocidad, $F_\mathrm{r} = -bv$, sobre un sistema oscilante, se tiene la segunda ley de Newton

$$-kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,,$$

donde b es una constante de amortiguación. Integrando esta ecuación diferencial, se tiene

$$x(t) = A\exp\left(-\frac{b}{2m}t\right)\cos(\omega t + \phi)\,,$$

donde

$$\omega = \left[\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]^{1/2} ; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,,$$

donde ω_0 es la frecuencia angular del sistema oscilante sin rozamiento o frecuencia natural del sistema.

La pérdida de energía del cuerpo que oscila será igual a la energía disipada por rozamiento

$$\mathrm{d}E = F_\mathrm{r}\mathrm{d}x = -bv^2\mathrm{d}t\,,$$

de donde

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -bv^2 = -\frac{2b}{m}\frac{mv^2}{2}\,.$$

Si la fuerza de rozamiento es pequeña, se puede aplicar que para un cuerpo que oscila la energía cinética promedio y la energía elástica promedio son iguales e iguales a la mitad de la energía total. Por tanto, se puede poner que

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -2\gamma E\,,$$

donde $\gamma = b/2m$. Escribiendo $\mathrm{d}\ln E = -2\gamma \mathrm{d}t$, se tiene que

$$E = E_0 \exp(-2\gamma t)\,,$$

donde E_0 es la energía inicial del sistema y E la energía mecánica disipada hasta el tiempo t. Para $t \to \infty$ toda la energía mecánica se disipa, típicamente, en forma de calor, y el cuerpo deja de oscilar.

Como la energía de un sistema oscilante es proporcional al cuadrado de la amplitud, se tiene que

$$A = A_0 \exp(-\gamma t)\,.$$

Puesto que

$$\gamma = -\frac{1}{T}\ln\frac{x([n+1]T)}{x([nT])}\,,$$

γ se relaciona con el intervalo de tiempo $\tau = \gamma^{-1}$ en el que la amplitud de la oscilación se ve dividida por e o que la energía total del sistema se ve dividida por e^2.

Como también se tiene que

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\,,$$

si $\gamma^2 \ll \omega^2$, el sistema perderá energía lentamente y se podría considerar la oscilación como no amortiguada, con $\omega_0 \approx \omega$.

Principio de mínimo de la energía potencial. En aquellos fenómenos oscilantes en los que intervienen fuerzas de rozamiento, el sistema alcanza una posición de equilibrio estable y ausencia de movimeinto. Si a lo largo de la oscilación se producen efectos de *rozamiento*, se disipa energía mecánica, la oscilación se amortigua y el sistema vuelve a su posición de equilibrio estable, alcanzando el mínimo del potencial. Este comportamiento se conoce como Principio del Mínimo de la Energía potencial[6]: el sistema alcanzará el mínimo de la energía potencial compatible con las condiciones del problema. Por ejemplo, sea un muelle, de ecuación $F = -k(L - L_0)$, del que cuelga una masa m. Si en la situación inicial de altura $h = 0$ y longitud

[6]En presencia de fuerzas de fricción, que actúa eliminando energía cinética, se disipa toda la energía mecánica posible, transfiriendo calor al entorno, que alcanza el máximo de entropía compatible con las condiciones del problema. es decir, Principio del Mínimo de la Energía potencial es el Principio de Máxima Entropía.

del muelle $L = L_0$ se deja libre el sistema, se produce una oscilación. Cuando la masa desciende una altura h, tiene una energía potencial $E_\mathrm{P}(h) = -mgh$, mientras que el muelle acumula energía potencial elástica como $E_\mathrm{P}(h) = kh^2/2$. La energía potencial total es

$$E_\mathrm{P} = \frac{1}{2}kh^2 - mgh\,.$$

La condición de equilibrio se obtiene imponiendo que:

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{P}(h)}{\mathrm{d}h} = 0\,,$$

de donde se obtiene que la longitud de equilibrio L_e es tal que

$$L_\mathrm{e} = L_0 + \frac{mg}{k}\,;h_\mathrm{e} = L_0 - L_\mathrm{e}\,.$$

En este equilibrio la energía potencial total es:

$$E_\mathrm{P}(L_\mathrm{e}) = -\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}\,.$$

La energía potencial inicial disminuye, al principio convertida en energía cinética, hasta que parte de la energía mecánica se disipa en forma de calor.

De acuerdo con el primer principio de la termodinámica, la energía mecánica disipada se intercambia, con el foco térmico que rodea el sistema, como calor. De acuerdo con el segundo principio de la termodinámica, esta energía intercambiada da lugar a un aumento de la entropía del universo, $\mathrm{d}eltaS_\mathrm{U} > 0$, lo que indica que el proceso disipativo es irreversible.

En la situación ideal de completa ausencia de rozamiento, el sistema oscilaría indefinidamente.

6 Resonancia

Todos los sistemas que oscilan pueden experimentar el fenómeno de la resonancia.

En presencia de una fuerza forzante aplicada con frecuencia angular $\tilde{\omega}$, sobre el sistema, y en ausencia de rozamiento, se tiene la segunda ley de Newton

$$F_0 \sin\tilde{\omega}t - kx = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Las soluciones de esta ecuación vienen dadas por

$$x(t) = A\cos(\tilde{\omega}t + \phi)\,,$$

con la amplitud A del estado estacionario dada por

$$A = \frac{F_0/m}{\tilde{\omega}^2 - \omega_0^2}\,.$$

La fuerza forzante termina por imponer, después de un transitorio, su frecuencia $\tilde{\omega}$ al sistema. Cuanto más próxima a la frecuencia natural ω_0 sea la frecuencia forzante $\tilde{\omega}$, mayor será la amplitud, y la energía, de la oscilación. Para $\tilde{\omega} = \omega_0$ el sistema entra en resonancia y absorbe toda la energía que le da la fuerza forzante, destruyéndose (experimento de la copa de vidrio).

Si la fuerza forzante se aplica sobre el sistema en presencia de fricción, se tiene la ecuación diferencial para la segunda ley de Newton

$$F_0 \sin \tilde{\omega} t - kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Las soluciones de esta ecuación vienen dadas por

$$x(t) = A\cos(\tilde{\omega} t + \phi)\,,$$

con la amplitud A del estado estacionario dada por

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\tilde{\omega}^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(b\tilde{\omega}/m\right)^2}}\,.$$

La fuerza forzante termina por imponer su frecuencia al sistema, pero, incluso para $\tilde{\omega} = \omega_0$, termina por alcanzarse una amplitud tal que la energía que cede la fuerza forzante al sistema se disipa por rozamiento (trabajo disipativo o calor) al exterior.

Péndulos resonantes débilmente acoplados. Tres péndulos matemáticos cuelgan de la misma barra. Dos tienen la misma longitud y el tercero no. Cuando oscila uno de los del par, ambos terminan por oscilar.

Péndulo de Wilbeforce. Péndulo de muelle y péndulo de torsión. Acoplamiento entre los modos de oscilación y los modos de torsión.

Resonancia en carrito con dos muelles. Si el carrito con los dos muelles se fuerza con una fuerza sinusoidal, si la frecuencia de la fuerza es la del carrito, entonces entra en resonancia, de tal forma que si no se interrumpe la fuerza externa, el sistema se destruye.

El movimiento oscilatorio del carrito forzado se puede amortiguar con un imán de neodimio, utilizando la Ley de Lenz.

6.1 Ondas sonoras

La velocidad de propagación del sonido en el seno de un cuerpo viene dada por

$$v_{\mathrm{S}} = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{1/2}\,,$$

donde se tiene el coeficiente

$$K = V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = -\frac{1}{\kappa_S}\,,$$

relacionado con el coeficiente de compresbilidad adiabática. En condiciones adiabáticas para un gas ideal $PV^\gamma = \mathrm{C}^{te}$ con $\gamma = 1,4$.

$$v_\mathrm{S} = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2} .$$

Densidad del aire $\rho = 1,25$ kg m^{-3}, $P = 1,013 \cdot 10^5$ Pa,

$$v = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2} \approx 340 \text{ ms}^{-1} .$$

Si en la laringe, longitud de unos $L = 15$ cm, se forma una onda estacionaria de longitud de onda $\lambda \approx 4L$, entonces la frecuencia es

$$\nu \approx \frac{340}{0,6} \approx 600 \text{ Hz} .$$

La voz humana se encuentra entre los 80 y los 1100 Hz.

Experimento con Helio. Cuando se toma algo de helio, es decir, cuando el aire de la garganta se sustituye por helio, la cavidad resonante, la laringe, sigue teniendo la misma longitud, por lo que la longitud de onda de las ondas estacionarias que se forman en dicha cavidad es la misma que con el aire, modificándose la velocidad de propagación de la onda, pues cambia la densidad y cambia γ, y, por tanto, su frecuencia. Para el aire, con $M \approx 30$ g mol^{-1}, y para el helio, con $M(\text{He}) \approx 4$ g mol^{-1}, la razón de sus densidades es de $1/8$, por lo que la relación de las velocidades de propagación es unas 3 veces mayor en el helio que en el aire. Puesto que ahora $\lambda\nu(\text{He}) \approx 3v_\text{s}$, la frecuencia $\nu(\text{He}) \approx 3\nu$, y el sonido emitido será más agudo que con aire.

Resonancia en diapasones. Resonancia acústica. Dos diapasones, con sus correspondientes cajas de resonancia, entran en resonancia, a través de las ondas sonoras producidas en una caja y enviadas a la otra, cuando su frecuencia de vibración es la misma. Una diferencia de 1 Hz en sus frecuencias de vibración y ya no resuenan.

Barra cantante. Si se utiliza una barra de aluminio, de longitud $L \approx 50$ cm, para producir ondas sonoras estacionarias, se tiene que si se toma por el medio con un dedo, la longitud de onda de la onda estacionaria es $\lambda = 2L$. El sonido se transmite en el aluminio con una velocidad de $v_\text{s} \approx 5100$ m s^{-1}, por lo que se obtienen frecuencias de:

$$\nu \approx 5000 \text{ Hz} .$$

7 Resonancia paramétrica

Las oscilaciones no amortiguadas pueden excitarse no sólo por una fuerza periódica externa, sino también por la variación periódica de los parámetros del sistema oscilatorio. Esta excitación de las oscilaciones se denomina resonancia paramétrica.

Como ejemplos se pueden citar el balanceo automantenido en un columpio o el botafumiero de la catedral de Santiago de Compostela.

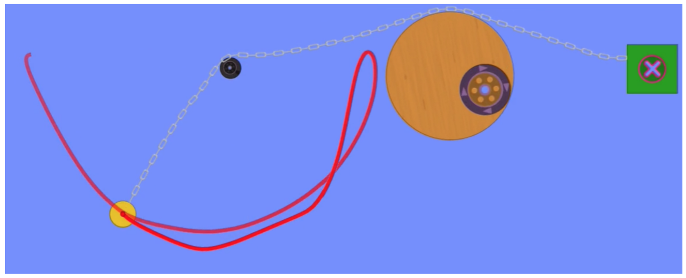

Figure 8: *Resonancia paramétrica.* Un péndulo oscila al final de una cadena que cada cierto tiempo es acortada. Si el período de acortamiento de la cadena y el período propio del péndulo se sincronizan, el péndulo entrará en resonancia.

En un columpio, la persona que oscila puede mantener, e incluso aumentar, la amplitud de su oscilación si cuando alcanza la mínima altura recoge las piernas bajo el asiento. Con este movimiento, la persona hace que se eleve su centro de gravedad disminuyendo su momento de inercia. Puesto que en ese punto se conserva el momento angular, aumenta su velocidad angular y su energía cinética de rotación, incorporando energía al sistema y haciendo que aumente la amplitud de la oscilación. Esta energía cinética adicional proviene, por supuesto, del trabajo que realizan sus músculos contra la gravedad para elevar las piernas[7].

En el caso del botafumeiro, cada vez que el péndulo pasa por la vertical, en su posición más baja, se le da un pequeño impulso que lo hace elevarse una altura a y se deja ir la cuerda en $a \cos \phi_0$ cuando llega a su posición más alta. En cada ciclo de elevación y descenso se realiza un trabajo ($\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$)

$$mga(1 - \cos \phi_0) \approx \frac{1}{2} mga\phi_0^2 \,.$$

Como la fuerza centrípeta es $F_c = mv_0^2/L$, donde v_0 es la máxima velocidad, el trabajo total por oscilación es

$$W = 2\left(\frac{1}{2} mga\phi_0^2 + \frac{mv_0^2}{L} a\right) \,.$$

Como $v_0 = L\phi_0\omega$,

$$W = 6 \frac{a}{L} \frac{mv_0^2}{2} \,.$$

El trabajo realizado por la fuerza externa del péndulo es positivo y proporcional a la energía de éste.

La variación periódica de los parámetros de un sistema oscilatorio (de frecuencia doble que la del propio sistema) implica un aumento sistemático de la energía media

[7] Si la persona está de pie sobre el asiento del columpio, debe elevarse en la posición baja y agacharse en las posiciones altas.

E, siendo proporcional a E la velocidad del aumento

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2\kappa E\,,$$

donde κ es una constante (pequeña). Esta relación es de la misma clase que la de las oscilaciones amortiguadas, pero con la diferencia de que la derivada es positivo, y no, negativa. Esto significa que la energía (y con ella la amplitud) de las oscilaciones aumenta exponencialmente con el tiempo.