Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera
Libro de Nagle, Saff y Snider

Grupo 2

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática

Mayo 2024

8. Una cochera sin calefacción ni aire acondicionado tiene una constante de tiempo de 2 horas. Si la temperatura exterior varía como una onda senoidal con un mínimo de 50°F a las 2:00 A.M. y un máximo de 80°F a las 2:00 P.M., determine los instantes en que el edificio alcanza sus temperaturas máxima y mínima, suponiendo que el término exponencial se extingue

Solution

La función de onda senoidal :

$$M(t) = M_o - B\cos(\omega t) \tag{1}$$

Ley de enfriamiento de Newton :

$$\frac{dT}{dt} = k\Big(M(t) - T(t)\Big) + H(t) + U(t) \tag{2}$$

Se tiene la temperatura máxima y mínima:

$$M_o = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} \tag{3}$$

Solution

Reemplazando los datos en (3)

$$M_o = \frac{80+50}{2}$$

$$M_o = \frac{80+50}{2} = 65^{\circ}\mathrm{F} \tag{4}$$

Reemplazando (4) en (1)

$$M(t) = M_o - B\cos(\omega t)$$

$$M(t) = 65 - B\cos(\omega t)$$

Para un t(0)

$$\begin{aligned} 50 &= 65 - B\cos(\omega 0) \\ B &= 15 \end{aligned}$$

$$M(t) = 65 - 15\cos(\omega t) \tag{5}$$

Solution

La frencuencia angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \tag{6}$$

Reemplazando (6) en (5)

$$M(t) = 65 - 15\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) \tag{7}$$

Luego H(t) = U(t) = 0, reemplazando (7) en (2),

$$\frac{dT}{dt} = k\Big(M(t) - T(t)\Big) + H(t) + U(t)$$

$$\frac{dT}{dt} = k\left(65 - 15\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - T(t)\right)$$

$$\frac{dT}{dt} + kT(t) = k\left(65 - 15\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right) \tag{8}$$

Solution

Luego, el factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int k dt}$$

$$\mu(t) = e^{kt} \tag{9}$$

Multiplicamos el factor integrante (9) en (8)

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT(t) = e^{kt}k\left(65 - 15\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right) \tag{10}$$

Agrupamos los terminos

$$\frac{d}{dt}\left[e^{kt}T(t)\right] = e^{kt}k\left(65 - 15\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right) \tag{11}$$

Integramos

$$e^{kt}T(t) = k\int e^{kt}\left(65 - 15\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right)dt + C \tag{12}$$

Solution

Se tiene

$$T(t) = e^{-kt} \int e^{kt} k \left[65 - 15 \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) \right] dt + Ce^{-kt} \tag{13}$$

La ecucación seria

$$T(t) = 65 - 15 e^{-kt} \int e^{kt} k \left[\cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) \right] dt + Ce^{-kt} \tag{14}$$

Luego resolvemos la integral

$$e^{kt} cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) + \frac{\pi}{12k} e^{kt} \sin\left(\frac{\pi}{12} t\right) - \frac{\pi^2}{144k^2} \int e^{kt} k \left[\cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) \right] dt \tag{15}$$

$$= \int e^{kt} k \left[\cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) \right] dt \tag{16}$$

La integral seria

$$\frac{144k^2}{144k^2 + \pi^2} \left[e^{kt} cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) + \frac{\pi}{12k} e^{kt} \sin\left(\frac{\pi}{12} t\right) \right] \tag{17}$$

Solution

La ecuación general seria:

$$T(t) = 65 - \frac{2160k^2}{144k^2 + \pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{180\pi k}{144k^2 + \pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + Ce^{-kt} \tag{18}$$

Reemplazamos $k = \dfrac{1}{2}$

$$T(t) = 65 - \frac{540}{36 + \pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{90\pi}{36 + \pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + Ce^{-\frac{t}{2}} \tag{19}$$

El término exponencial se extingue.

$$T(t) = 65 - \frac{540}{36 + \pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \frac{90\pi}{36 + \pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \tag{20}$$

Solution

Para hallar el mínimo y el máximo derivamos

$$\frac{dT}{dt} = \pi \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - 6\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 0 \tag{21}$$

Se tiene

$$t = \frac{12}{\pi}\arctan\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}84 \tag{22}$$

El tiempo de la temperatura máxima y mínimo son

$$T_{\text{min}} = 1{,}84 \text{ horas}$$
$$T_{\text{max}} = t_{\text{min}} + 12 = 13{,}84 \text{ horas}$$

Reemplazamos en (20), por lo tanto la temperatura mínima de $T(min) \approx 51{,}7^\circ F$, se alcanzará 1.84 horas después de las 2:00 A.M. es decir a las 3:50 A.M.
Y para la temperatura máxima de $T(max) \approx 78{,}3^\circ F$, se alcanzará 12 horas después es decir a las 3:50 P.M.

Solution

Graficando la ecuación T(t)

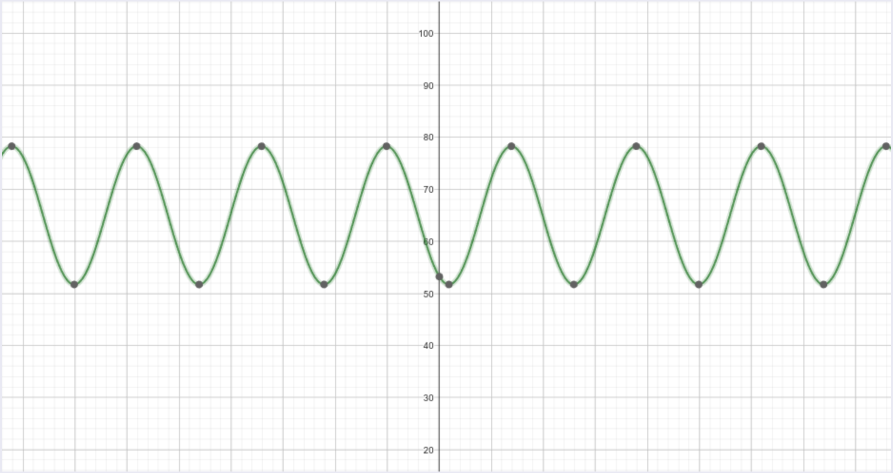

Figura: Grafica T(t)

3.3 Calentamiento y Enfriamiento de Edificios

12. Dos amigos se sientan a platicar y disfrutar una taza de café. Al servir el café, el amigo impaciente agrega de inmediato una cuchara de crema a su café. El amigo relajado espera 5 minutos antes de añadir una cuchara de crema (que se ha mantenido a temperatura constante). Es entonces cuando ambos comienzan a tomar el café. ¿Quién tiene el café más caliente? Suponga que la crema está más fría que el aire y use la ley de enfriamiento de Newton.

Solution

Ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k\Big(M(t) - T(t)\Big) + H(t) + U(t) \tag{1}$$

Supongamos que $T_1(t)$ y $T_2(t)$ son la temperatura del café del amigo impaciente y relajado respectivamente, donde t $= 0$ significa la hora en que sirvió el café. La temperatura del aire $M(t) = M_o$

$$T_k(t) = M_o + C_k e^{-kt}, \quad k = 1, 2 \tag{2}$$

Solution

Las constante C, dependen de las temperatura iniciales del café. Supongamos que la temperatura del café cuando se sirvió fue T_o, la cantidad de café pedida fue V_o, la temperatura de la crema era T_c y la cuchara tenía capacidad de V_c. Luego, tenemos las condicionales iniciales.

$$T_2(0) = T_o \quad , \quad T_1(0) = \frac{T_o V_o + T_c V_c}{V_o + V_c}$$

Reemplazamos en (2)

$$C_2 = T_o - M_o \quad , \quad C_1 = \frac{T_o V_o + T_c V_c}{V_o + V_c} - M_o$$

Se tiene

$$T_1(t) = M_o + \left(\frac{T_o V_o + T_c V_c}{V_o + V_c} - M_o \right) e^{-kt}$$
$$T_2(t) = M_o + (T_o - M_o) e^{-kt}$$

Solution

Después de 5 min

$$T_1(5) = M_o + \frac{(T_oV_o + T_cV_c) - M_o(V_o + V_c)}{V_o + V_c}e^{-k5}$$
$$T_2(5) = M_o + (T_o - M_o)e^{-5k}$$

En ese mismo instante, el amigo relajado había añadido una cucharadita crema reduciendo la temperatura de su café a

$$\widetilde{T}_2(5) = \frac{T_2(5)V_o + T_cV_c}{V_o + V_c} = \frac{[M_o + (T_o - M_o)e^{-5k}]V_o + T_cV_c}{V_o + V_c} \tag{3}$$

Ahora comparamos $T_1(5)$ y $\widetilde{T}_2(5)$

$$T_1(5) - \widetilde{T}_2(5) = (V_o + V_c)^{-1}V_c(M_o - T_c)(1 - e^{-5k}) > 0 \tag{4}$$

Como la crema es más fría que el aire, es decir $T_c < M_o$. Así, el amigo impaciente tomó el café más caliente.

6. Deduzca una ecuación de equilibrio de la potencia para los circuitos RL y RC. (Ver problema 5). Analice el significado de los signos de los tres términos de potencia.

Solution

Para un circuito RL tenemos

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \tag{1}$$

Multiplicamos (1) por I para

$$L\frac{dI}{dt}I + RI^2 = EI$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) + RI^2 = EI$$

La potencia generada por la fuente es igual a la potencia insertada en el inductor más la potencia disipada por la resistencia.

Solution

Para un circuito RC tenemos

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \tag{2}$$

Multiplicamos (2) por I para

$$RI\frac{dq}{dt} + I\frac{q}{C} = EI \tag{3}$$

Reemplazamos I por $\dfrac{dq}{dt}$ y q por CE_c en (3)

$$RI^2 + \frac{dq}{dt}CE_c = EI$$

$$RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CE_c^2\right) = EI$$

La potencia generada por la fuente de voltaje es igual a la potencia insertada en el capacitor más la potencia disipada por la resistencia.