Capitolo 1

Funzioni in più variabili

All'interno di questo capitolo si affronterà lo studio sistematico delle proprietà di funzioni in più variabili reali.
Nello specifico, si considereranno funzioni della forma:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

con $m = 1$, le cosiddette funzioni scalari, per poi passare al caso $m > 1$, cioè le funzioni a valori vettoriali.

1.1 Richiami di topologia in $\mathbb{R}^n$

Per poter trattare lo studio di funzioni in più variabili occorre prima studiare la topologia dello spazio in cui si lavora. In particolare, si può osservare che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale euclideo **normato**.

Definizione 1. Si dice che uno spazio $\mathbb{K}^n$ è **normato** se per ogni suo elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ la norma è ben definita. Nel caso di $\mathbb{R}^n$, si ha che:

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{1.2}$$

Tramite la definizione di norma si può ottenere la definizione di **distanza**, grazie alla quale $\mathbb{R}^n$ può essere definito anche come spazio metrico.

Definizione 2. Sia X un insieme e sia $d : X \times X \to [0, +\infty)$ una funzione che ad ogni coppia (x, y) di punti di X associa un numero reale $d(x, y) \geq 0$. Allora si dice che d è una **distanza** su X se sono verificate le seguenti condizioni:

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \ \forall\, x, y \in X \tag{1.3}$$

$$d(x, y) = d(y, x) \ \forall\, x, y \in X \tag{1.4}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \forall\, x, y, z \in X \tag{1.5}$$

In particolare in $\mathbb{R}^n$ si ha che:

$$d(x, y) = |x - y| \tag{1.6}$$

Definizione 3. Sia x_0 un elemento di $\mathbb{R}^n$ fissato e sia $\delta > 0$ un intero fissato. Si dice **intorno sferico** di x_0 di raggio δ la sfera aperta e non vuota di centro x_0 definita analiticamente come:

$$B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ d(x, x_0) < \delta\} \tag{1.7}$$

Osservazione Si noti che con *aperta* si intende dire che nell'intorno sferico non sono presenti elementi tali che $d(x, y) = \delta$.

Esempio 1. Un esempio di intorno sferico può essere la circonferenza in $\mathbb{R}^2$ di raggio $\delta = 1$ centrata in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ definita come:

$$B_1(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < 1\} \tag{1.8}$$

Definizione 4. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora x_0 è detto **punto interno** per E se

$$\exists\ \delta > 0 \text{ tale che } B_\delta(x_0) \subseteq E \tag{1.9}$$

Si indica poi l'insieme dei punti interni di E con $\mathring{E}$ oppure con int(E).

Definizione 5. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora x_0 è detto **punto esterno** per E se

$$\exists\ \delta > 0 \text{ tale che } B_\delta(x_0) \subseteq E^{\complement} = \mathbb{R}^n \setminus E \tag{1.10}$$

Si indica poi l'insieme dei punti esterni di E con ext(E).

Definizione 6. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora x_0 è detto **punto di frontiera** per E se

$$\forall\ \delta > 0 \text{ si ha che } B_\delta(x_0) \cap E \neq \emptyset \wedge B_\delta(x_0) \cap E^{\complement} \neq \emptyset \tag{1.11}$$

Si indica poi l'insieme dei punti di frontiera di E con ∂E.

Definizione 7. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora x_0 è detto **punto di accumulazione** per E se

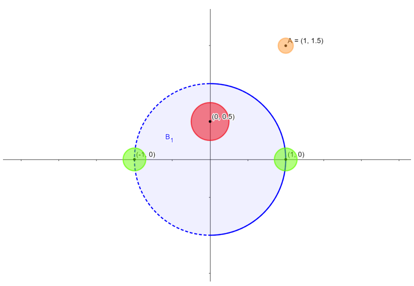
$$\forall\ \delta > 0 \text{ si ha che } B_\delta(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \tag{1.12}$$

Definizione 8. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora x_0 è detto **punto isolato** se esso appartiene alla frontiera di E ma non è di accumulazione.

Proposizione 1. L'insieme dei punti interni, esterni e di frontiera di $E \in \mathbb{R}^n$ è una partizione di $\mathbb{R}^n$.

Esempio 2. Sia E così definito:

$$E \subseteq \mathbb{R}^2 \mid E = B_1(0,0) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x > 0,\ x^2 + y^2 = 1\} \cup \left\{\left(1, \tfrac{3}{2}\right)\right\} \tag{1.13}$$



Si può dunque osservare che:

- $(0, \frac{1}{2})$ è *interno*.
- $(1, 0)$ è di *frontiera* e di *accumulazione*.
- $(-1, 0)$ è di *frontiera* e di *accumulazione*.
- $(0, \frac{3}{2})$ è di *frontiera* e *isolato*.

Definizione 9. Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **aperto** se

$$E = \mathring{E} \text{ oppure } E \cap \partial E = \emptyset \tag{1.14}$$

ovvero se non ha punti esterni.

Definizione 10. Si dice che un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è **chiuso** se

$$\partial E \subseteq E \tag{1.15}$$

ovvero se $E^{\complement}$ è aperto.
Si definisce poi **chiusura** di E l'insieme

$$\overline{E} = E \cap \partial E \tag{1.16}$$

Quindi un'altra definizione di insieme chiuso è:

$$E \text{ chiuso} \iff E = \overline{E} \tag{1.17}$$

Proposizione 2. Un insieme E è chiuso $\iff$ E contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Osservazione $E = \{x_0\}$ con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato è chiuso e $E = \partial E$.

Osservazione Dalla definizione, $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono entrambi contemporaneamente aperti e chiusi e sono gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ con tali proprietà.

Definizione 11. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E si dice **limitato** se

$$\exists R > 0 \text{ tale che } E \subseteq B_R(0) \tag{1.18}$$

Altrimenti esso è detto **illimitato**.

Definizione 12. Un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **connesso** se non esistono due aperti $A_1,\ A_2$ non triviali (cioè diversi da $\emptyset,\ \mathbb{R}^n,\ A$) e disgiunti tali che

$$A = A_1 \cup A_2 \tag{1.19}$$

Definizione 13. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora E si dice **connesso per archi** se per ogni $(x, y) \in E$ esiste una curva parametrica $\varphi : [0, 1] \to E$ tale che

$$\varphi(0) = x \wedge \varphi(1) = y \tag{1.20}$$

Definizione 14. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **dominio** (**connesso**) se è la chiusura di un aperto (connesso).

Definizione 15. Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se, definito $[x, y]$ il segmento di estremi $x,\ y$ si ha che

$$[x, y] \subseteq E \tag{1.21}$$

Osservazione Un insieme convesso è per definizione connesso per archi.

Definizione 16. Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **stellato** rispetto ad un punto x_0 di E se per ogni x di E si ha che

$$[x_0, x] \subseteq E \tag{1.22}$$