Capitolo 1

Curve

1.1 Curve parametriche

Definizione 1. Si dice **curva** una funzione continua $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ con $I \subseteq \mathbb{R}$.

Il parametro di tali funzioni è convenzionalmente t. Esse possono essere rappresentate come:

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \text{ con } \varphi_i : I \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

Analogamente, è possibile utilizzare le **equazioni parametriche della curva**, cioè:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

Osservazione Con **continua** si intende dire che φ sia continua componente per componente, cioè che:

$$\varphi \text{ continua in } t_0 \in I \iff \lim_{t \to t_0} \varphi_i(t) = \varphi_i(t_0) \ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Osservazione Sia $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}$ e sia t_0 un punto di accumulazione per il dominio di φ. Allora,

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = l \iff \lim_{t \to t_0} \varphi_i(t) = l_i \ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Osservazione Il discorso appena visto vale anche per quanto riguarda la derivabilità di φ. Infatti φ è derivabile in t_0 se e solo se φ_i è derivabile in t_0 $\forall i = 1, \ldots, n$. Di conseguenza: $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t))$.

Definizione 2. Si dice **sostegno della curva** l'immagine $\varphi(I) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Esempio 1. Si consideri la retta di equazioni $r : \underline{x}_0 + t\underline{v}$ con $t \in \mathbb{R}$. Il suo sostegno sarà una retta. Si parametrizzi di seguito un segmento di estremi x_0, x_1.
Si trovi t tale che x_0 e x_1 appartengano ad r. Dopodiché si valuti l'intervallo I tale che $\varphi(I)$ sia il sostegno.

$$r = \underline{x}_0 \iff t = 0$$

$$r = \underline{x}_1 \iff t\underline{v} + \underline{x}_0 = \underline{x}_1 \iff t\underline{v} = \underline{x}_1 - \underline{x}_0$$

$$\text{Dunque } t|\underline{v}|\underline{u}_v = |\underline{x}_1 - \underline{x}_0|\underline{u}_v \iff t = \frac{|\underline{x}_1 - \underline{x}_0|}{|\underline{v}|}$$

Allora, $\underline{x}_0 + t\underline{v}$ è un segmento di estremi $x_0, x_1 \iff t \in \left[0, \frac{|\underline{x}_1 - \underline{x}_0|}{|\underline{v}|}\right]$.
Un metodo alternativo per la parametrizzazione di tale segmento è l'utilizzo di una combinazione convessa $(1-t)x_0 + tx_1$ con $t \in [0, 1]$.

Esempio 2. Si consideri ora la seguente curva: $\varphi(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$. Dipendentemente da I il sostegno è diverso. Infatti:

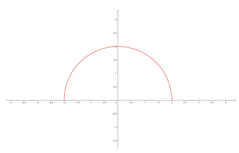

Figura 1.1: Sostegno di $\varphi(t)$ con $R = 2$ e $t \in [0, \pi]$

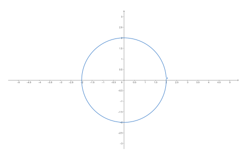

Figura 1.2: Sostegno di $\varphi(t)$ con $R = 2$ e $t \in [0, 2\pi]$

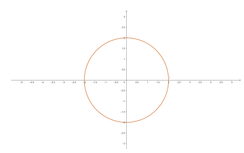

Figura 1.3: Sostegno di $\varphi(t)$ con $R = 2$ e $t \in [0, 3\pi]$

Da ciò si può osservare come, *in primis*, la definizione di I sia fondamentale nel tracciare il sostegno e, *in secundis*, come, d'altra parte, il sostegno non identifichi la curva. A tal proposito infatti occorre notare che, benché le curve associate ai sostegni delle figure 1.2 e 1.3 siano diverse, i loro sostegni sono uguali.

Esempio 3. Un'altra casistica è quella rappresentata dalla curva di equazione $\varphi(t) = (R\cos(-t), R\sin(-t))$. Il suo sostegno, infatti, rimane la circonferenza (o l'arco) di raggio R, percorso tuttavia in senso orario.

Definizione 3. Sia $\varphi : [I \to \mathbb{R}^n]$ una curva parametrica. Allora si dice che $P_1 = \varphi(t_1)$ **precede** $P_2 = \varphi(t_2)$ nel verso delle t crescenti se $t_1 < t_2$ con $t_1, t_2 \in I$.

1.1.1 Proprietà delle curve parametriche

Fatte tali premesse, si passi ad analizzare alcune proprietà delle curve.

Definizione 4. Una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si dice **chiusa** se $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Osservazione Si noti a tal proposito che la curva in figura 1.3 non è chiusa, mentre quella in figura 1.2 sì.

Definizione 5. Una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si dice **semplice** se, $\forall\ t_1, t_2 \in [a, b]$ distinti di cui almeno uno *interno* all'intervallo, risulta $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

Osservazione In altre parole, affinché φ sia semplice, essa non deve autointersecarsi, se non, al più, negli estremi.

Osservazione La curva in figura 1.2 è semplice.

Definizione 6. Una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si dice **regolare** se l'applicazione φ è di classe C^1 in $[a, b]$ e se, $\forall t \in (a, b)$ il vettore $\varphi'(t)$ è diverso dal vettore nullo.

A fronte di ciò, è possibile osservare che, se una curva è regolare, presi due valori distinti del parametro t, come t_0, t_1, è possibile tracciare la retta passante per $\varphi(t_0), \varphi(t_1)$. Allora, per $t_1 \to t_0$ si ottiene la **retta tangente** alla curva φ in $\varphi(t_0)$. Si definisce allora $\varphi'(t_0) = (\varphi'_1(t_0), \ldots, \varphi'_n(t_0))$ **vettore tangente** alla curva φ in $\varphi(t_0)$.

Definizione 7. Se φ è regolare, si definisce **versore tangente** il normalizzato del vettore tangente a φ in $\varphi(t_0)$, ovvero:

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \tag{1.5}$$

Osservazione Data questa informazione, può diventare utile valutare direttamente $|\varphi'(t)|$ per stabilire la regolarità di una curva. Tale quantità è talvolta definita **velocità scalare**.

Osservazione Una curva regolare è priva di cuspidi o punti angolosi.

Esempio 4. Si valuti ora la seguente curva: $\varphi(t) = (t^3, t^2)$ con $t \in [-1, 1]$. Rispetto alle proprietà elencate, si può affermare che:

- non è chiusa perché $\varphi(-1) = (-1, 1) \neq (1, 1) = \varphi(1)$;
- è semplice perché se fosse $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, allora si avrebbe: $\begin{cases} t_1^3 = t_2^3 \\ t_1^2 = t_2^2 \end{cases}$

  Ciò però significa che $t_1 = t_2$.
- non è regolare poiché la sua derivata $\varphi(t) = (3t^2, 2t)$ si annulla in entrambe le componenti per $t = 0$.

Può essere utile visualizzare tale curva riscrivendone le equazioni in forma cartesiana. Si ricava dalla prima componente che $x = t^3 \iff t = x^{\frac{1}{3}}$. Allora, sostituendo nella seconda componente, $y = t^2 \iff y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 \iff y = x^{\frac{2}{3}}$. Il grafico di tale funzione mostra, per l'appunto, la presenza di una cuspide in $t = 0$, come già osservato in precedenza.
Tuttavia si può anche osservare che la curva può essere vista come l'unione di due curve regolari φ_+ nel semiasse positivo e φ_- nel semiasse positivo negativo.

Definizione 8. Una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si dice **regolare a tratti** se esiste una suddivisione di $[a, b]$ in un numero *finito* di intervalli $[t_i, t_{i+1}]$ in cui φ sia regolare.

Curve cartesiane

Si studino ora le cosiddette curve **cartesiane**, definite come:

$$y = f(x) \text{ con } x \in [a, b] \tag{1.6}$$

cioè, in forma parametrica,

$$\begin{cases} x = t \text{ con } t \in [a, b] \\ y = f(t) \end{cases} \tag{1.7}$$

Di esse si può osservare che se, $f \in C^1$ allora la curva è regolare. Inoltre le curve cartesiane sono sempre semplici, giacché t è iniettiva, e non sono mai chiuse.

Curve in coordinate polari

Altre curve da analizzare sono le curve **in forma polare** ovvero del tipo:

$$\varrho = \varrho(\theta) \tag{1.8}$$

oppure in forma parametrica come

$$\begin{cases} x = \varrho(\theta)\cos(\theta) \\ y = \varrho(\theta)\sin(\theta) \end{cases} \tag{1.9}$$

con $(x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$, $\varrho \in [0, +\infty]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.
Tale specifica rispetto alle caratteristiche della curva serve a sottolineare il fatto che una curva che si annulli in un qualche punto a causa di $\varrho = 0$ e θ conseguentemente non definito, non sia regolare.
Si noti che nel caso di una circonferenza il raggio $\varrho(t) = \text{cost}$.
Il tangente in questo caso è

$$(x'(\theta), y'(\theta)) = (\varrho'(\theta)\cos(\theta) - \varrho(\theta)\sin(\theta),\ \varrho'(\theta)\sin(\theta) + \varrho(\theta)\cos(\theta)) \tag{1.10}$$

Dunque la norma della curva è:

$$|(x'(\theta), y'(\theta))| = \sqrt{\varrho'^2(\theta) + \varrho^2(\theta)} \tag{1.11}$$

Ne consegue che, se la curva non ha zeri doppi in (θ_1, θ_2), allora è regolare in $[\theta_1, \theta_2]$.
Si prenda ora il caso specifico in cui φ è una curva in coordinate polari e $[a, b] \subseteq [0, 2\pi]$. Per quanto riguarda la proprietà di chiusura della curva, si presentano due scenari:

- Se $[\theta_0, \theta_1] \subsetneq [0, 2\pi]$ allora la curva è chiusa per $\varrho(\theta_0) = \varrho(\theta_1) = 0$;
- Se $[\theta_0, \theta_1] = [0, 2\pi]$ allora la curva è chiusa per $\varrho(0) = \varrho(2\pi)$

Rispetto alla proprietà di semplicità, si osserva:

- Se $[\theta_0, \theta_1] \subseteq [0, 2\pi]$ allora la curva è semplice se $\nexists\ \theta_i, \theta_j \in (0, 2\pi)$ tali che $\varrho(\theta_i) = \varrho(\theta_j) = 0$

1.2 Curve equivalenti

Definizione 9. Due curve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ e $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ si dicono **equivalenti** se $\exists$ $\eta : I \to J$ di classe $C^1(I)$ suriettiva e tale che $\eta'(t) \neq 0\ \forall\ t \in I$ per cui si abbia

$$\varphi(t) = \psi(\eta(t))\ \forall\ t \in I \tag{1.12}$$

Osservazione η è detta **cambio di parametro ammissibile**.
Osservazione Volendo studiare il segno delle curve, si ottiene:

$$\varphi'(t) = \psi'(\eta(t))\eta'(t)$$

Si noti che η' non turba la regolarità della curva poiché mantiene il proprio segno e non si annulla mai (per costruzione).

Osservazione η è per sua costruzione suriettiva e monotona, dunque è anche iniettiva. Pertanto η è biunivoca e invertibile. Sfruttando $\eta^{-1}(s)$ si ottiene:

$$\psi(s) = \varphi(\eta^{-1}(s)) \tag{1.13}$$

Osservazione Se φ e ψ sono equivalenti come descritto, allora

$$\varphi \sim \psi \tag{1.14}$$

Si tratta proprio di una relazione di equivalenza dal momento che:

$$\text{Per } \eta(t) = t,\ \varphi(t) = \varphi(\eta(t)) = \varphi(t),\ \text{cioè } \varphi \sim \varphi \tag{1.15}$$

Il risultato dell'osservazione precedente mostra che se $\varphi \sim \psi$ allora $\psi \sim \varphi$. Infine, prese φ, ψ, χ tali che $\varphi \sim \psi$ e $\psi \sim \chi$ allora: $\varphi = \psi(\eta(t))$ e $\psi(t) = \chi(\zeta(t))$. Allora

$$\varphi(t) = \psi(\eta(t)) = \chi(\zeta(\eta(t)))\ \text{cioè } \varphi \sim \chi \tag{1.16}$$

Definizione 10. L'applicazione η che permette di passare dalla rappresentazione parametrica di φ a quella di ψ è detta anche C^1 **diffeomorfismo**.

Definizione 11. Date due curve equivalenti φ e ψ, si dice che ψ è la riparametrizzazione di φ.

Si può osservare che due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno. Tuttavia tale condizione non è sufficiente siccome per l'equivalenza è necessario che il sostegno sia percorso nel medesimo numero di volte.
La nozione di equivalenza può essere rafforzata, come segue.

Definizione 12. Due curve equivalenti come sopra si dicono **equivalenti con lo stesso verso** se il loro sostegno è percorso nello stesso verso, cioè se: $\eta' > 0$

1.3 Lunghezza di una curva

Si consideri una curva continua $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. È possibile associare ad ogni *partizione*

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b \tag{1.17}$$

la poligonale $\mathcal{P}$ inscritta nella curva e di vertici $\varphi(a), \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_{N-1}), \varphi(b)$. La lunghezza di tale poligonale sarà pari a:

$$\ell(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \tag{1.18}$$

Tale valore è un'approssimazione della lunghezza effettiva della curva per difetto, il cui errore diminuisce in maniera proporzionale al numero di segmenti che compongono la poligonale.

Figura 1.4: In figura la stessa curva la cui lunghezza viene misurata con poligonali diverse.

Definizione 13. Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, allora si dice **lunghezza di un arco di curva** continua la quantità

$$L(\varphi) = \sup_{l}(\mathcal{P}) \tag{1.19}$$

dove $\mathcal{P} \in \Pi$ con $\Pi = \{\text{poligonali inscritte nella curva}\}$.

Definizione 14. Si dice che una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è **rettificabile** se

$$\sup_{\mathcal{P} \in \Pi} L(\varphi) < +\infty \tag{1.20}$$

Teorema 1 (Teorema di rettificabilità)**.** Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1. Allora essa è rettificabile e

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt \tag{1.21}$$

Osservazione La lunghezza di una curva C^1 è invariante per riparametrizzazione.
Osservazione Si osservi che vale: $\ell(\mathcal{P}) \leq \int_a^b |\varphi'(t)| dt$. Infatti:

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{N} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t)\, dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\varphi'(t)\right|\, dt = \int_a^b \left|\varphi'(t)\right|\, dt \end{aligned} \tag{1.22}$$

Esempio 5. Detta

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = 0 \\ x\sin(\frac{1}{x}) \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$$

allora una curva non rettificabile può essere

$$\varphi(t) = (t, f(t)) \text{ con } t \in [0,1]$$

1.4 Triedro di Frénet

Si desideri ora sviluppare un sistema di riferimento intrinseco ad una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare e tale che $\varphi'(t)$ ed il versore tangente T siano ben definiti su (a,b).

Definizione 15. Si definisce l'**ascissa curvilinea** o parametro d'arco $s = s(t)$ come

$$s(t) = \int_a^t |\varphi'(\tau)| \, d\tau$$

Osservazione $s : [a,b] \to [0, L(\varphi) = L]$ è una parametrizzazione della curva regolare φ. Inoltre, $s'(t) = |\varphi'(t)| \neq 0$ su (a,b).

Osservazione Riparametrizzando φ con ascissa curvilinea $s = s(t)$, si può dire che $\varphi \sim \psi$. Dunque, rinominata $t(s) = s^{-1}(t)$, vale $\psi(s) = \varphi(t(s))$. Derivando la riparametrizzazione, si ha che:

$$\psi'(s) = \varphi'(t(s)) \; t'(s) \overset{\substack{\text{Derivata}\\\text{inversa}}}{=} \frac{\varphi'(t(s))}{s'(t)} = \frac{\varphi'(t(s))}{|\varphi'(t(s))|} \tag{1.23}$$

Ciò mostra come il vettore tangente a ψ sia in ogni punto un versore tangente $T(s)$

Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ Siano $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ e $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ vettori di $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \tag{1.24}$$

Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ Siano $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Allora

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{1.25}$$

Lemma 1. Siano u, v definiti in $I \to \mathbb{R}^3$ e derivabili. Allora:

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), v(t) \rangle = \langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle \tag{1.26}$$

$$\frac{d}{dt}\left(u(t) \wedge v(t)\right) = u'(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge v'(t) \tag{1.27}$$

Proposizione 1. Sia $w : I \to \mathbb{R}^3$ derivabile e tale che $\exists\ c > 0$ per cui $|w(t)| = c$ $\forall\ t \in I$. Allora $w'(t) \perp w(t)$.

Dimostrazione. Affinché i due vettori siano ortogonali, occorre che il loro prodotto scalare sia nullo. Pertanto, poiché per ipotesi $|w(t)| = c$

$$|w(t)|^2 = c^2 \iff \langle w(t), w(t)\rangle = c \tag{1.28}$$

Derivando rispetto a t e applicando l'equazione 1.26, si ha che:

$$\frac{d}{dt}\langle w(t), w(t)\rangle \overset{\substack{\text{Prop.}\\ \text{prod. scal.}}}{=} 2\langle w'(t), w(t)\rangle = \frac{dc^2}{dt} = 0 \tag{1.29}$$

□

Osservazione La curva $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ parametrizzata con ascissa curvilinea è tale che $|\psi'(s)| = 1$. Di conseguenza, per la proposizione, $\psi''(s) \perp \psi'(s)$ e, nella fattispecie, $T'(s) \perp T(s)$.

Definizione 16. Sia ψ una riparametrizzazione di φ biregolare nel suo intervallo di parametrizzazione, cioè sia tale che $\psi \in C^2([c, d])$ e $\psi''(s) \neq 0\ forall\ s \in [c, d]$. Allora si può definire il **versore normale** il normalizzato della derivata del versore tangente. Quindi:

$$N(s) = \frac{\psi''(s)}{|\psi''(s)|} = \frac{T'(s)}{|T'(s)|} \tag{1.30}$$

Definizione 17. Si dice **curvatura** di ψ in $\psi(s)$

$$k(s) = |\psi''(s)| \tag{1.31}$$

Definizione 18. Si dice **piano osculatore** per ψ in $\psi(s)$ il piano generato da

$$\{T(s), N(s)\} \tag{1.32}$$

È appena stato definito un nuovo versore N linearmente indipendente. È possibile ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ attraverso il prodotto esterno dei due versori.

Definizione 19. Si dice **versore binormale** il versore:

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) \tag{1.33}$$

Definizione 20. Si dice **piano normale** per ψ in $\psi(s)$ il piano generato da

$$\{N(s), B(s)\} \tag{1.34}$$

Definizione 21. Si dice **piano rettificato** per ψ in $\psi(s)$ il piano generato da

$$\{B(s), T(s)\} \tag{1.35}$$

Definizione 22. Si dice **triedro di Frénet** o **terna intrinseca** la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ positivamente orientata formata da

$$\{T(s), N(s), B(s)\} \tag{1.36}$$

Teorema 2 (Formule di Frénet)**.** Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, di classe $C^3(I)$ e parametrizzata con ascissa curvilinea. Allora, $\exists!\ k : I \to \mathbb{R}_+$, $\tau : I \to \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) - \tau(s)B(s) \\ B'(s) = \tau(s)N(s) \end{cases} \tag{1.37}$$

Dimostrazione. Si parta dalla prima equazione:

$$T'(s) = k(s)N(s). \tag{1.38}$$

Tale risultato discende dalla definizione stessa di T'. Si consideri infatti che $T'(s) \perp T(s)$ poiché $|T(s)| = 1\ \forall\ s$. Prendendo poi $k(s) = |T'(s)|$, si ottiene l'identità tra i due membri.
Si analizzi poi la terza equazione:

$$B'(s) = \tau(s)N(s) \tag{1.39}$$

Per definizione di B, esso discende dal prodotto vettoriale degli altri due versori. Se ne studi la derivata:

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N(s) \overset{T'(s) \| N(s)}{=} T(s) \wedge N'(s) \tag{1.40}$$

Quindi, poiché $B'(s) \perp T(s)$ e $B'(s) \perp B(s)$, allora $B'(s) \parallel N(s)$. Definendo $\tau(s) = |B'(s)|$, l'equazione è soddisfatta.
Infine, si affronti la seconda equazione:

$$N'(s) = -k(s)T(s) - \tau(s)B(s) \tag{1.41}$$

Siccome $\{T(s), N(s), B(s)\}$ è positivamente orientata,

$$N(s) = B(s) \wedge T(s) \tag{1.42}$$

Derivando N, si ha che

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s) = \\ &\overset{\text{Frénet}}{=} \tau(s)N(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge k(s)N(s) \\ &\overset{\substack{N \wedge T = -B \\ B \wedge N = -T}}{=} -\tau(s)B(s) - k(s)T(s) \end{aligned} \tag{1.43}$$

□

Osservazione Risolvendo il sistema di equazioni differenziali, si potrebbe mostrare come valga anche l'implicazione inversa.

Osservazione Poiché $B(s)$ è ortogonale al piano osculatore, si può notare che se esso ha derivata nulla, il piano rimane costante.

Definizione 23. Si dice **torsione** di φ in $\varphi(s)$

$$\tau(s) = |B'(s)| \tag{1.44}$$

Definizione 24. Una curva si dice **piana** se la sua torsione è nulla, cioè se essa giace su un piano.

Definizione 25. Si dice **cerchio osculatore** per una curva $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ biregolare, il cerchio giacente nel piano osculatore, avente raggio $r = \frac{1}{k(t)}$ con $k(t)$ curvatura di $\varphi(t)$ e centro sul semiasse normale a $\varphi(t)$.

Definizione 26. Il raggio del cerchio osculatore è detto **raggio osculatore**.

Nel corso dell'ultimo capitolo si è cercato di trovare una parametrizzazione di una curva in $\mathbb{R}^3$ ed è stata proposta l'ascissa curvilinea, il cui calcolo non è però sempre comodo.
Pertanto è possibile osservare che se una generica $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva riparametrizzata con parametro qualunque, allora valgono su di essa le formule di Frénet generalizzate.

Teorema 3 (Formule di Frénet generalizzate)**.** Sia ψ una curva riparametrizzata con parametro qualunque su cui valgano le ipotesi del Teorema 2. Allora vale:

$$\begin{cases} T'(t) = |\psi'(t)|k(t)N(t) \\ N'(t) = -|\psi'(t)|k(t)T(t) - |\psi'(t)|\tau(t)B(t) \\ B'(t) = |\psi'(t)|\tau(t)N(t) \end{cases} \tag{1.45}$$

Dove:

$$T(t) = \frac{\psi'(t)}{|\psi'(t)|} \tag{1.46}$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} \tag{1.47}$$

$$B(t) = \frac{\psi'(t) \wedge \psi''(t)}{|\psi'(t) \wedge \psi''(t)|} \tag{1.48}$$

$$k(t) = \frac{|\psi'(t) \wedge \psi''(t)|}{|\psi'(t)|^3} \tag{1.49}$$

$$\tau(t) = \frac{\langle \psi'(t) \wedge \psi''(t), \psi'''(t) \rangle}{|\psi'(t) \wedge \psi''(t)|^2} \tag{1.50}$$

1.5 Integrale curvilineo

Definizione 27. Sia γ una curva regolare e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una sua rappresentazione parametrica. Sia poi $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione in più variabili tale che $\varphi([a, b]) \subseteq A$ e $f \circ \varphi$ sia continua su $[a, b]$.
Allora si può definire l'**integrale curvilineo di prima specie** di f su γ

$$\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt \tag{1.51}$$

Teorema 4 (Invarianza per equivalenza di curve)**.** L'integrale curvilineo di prima specie è invariante per equivalenza di curve.

Dimostrazione. Si ricordino innanzitutto le ipotesi:
$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ regolare, parametrizzazione di γ.
$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $\varphi([a, b]) \subseteq A$
$\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ regolare, parametrizzazione di $\hat{\gamma}$ e $\varphi \sim \psi$.
La tesi da mostrare è:

$$\int_\gamma f ds = \int_{\hat{\gamma}} f ds \tag{1.52}$$

Per definizione dell'integrale curvilineo di prima specie si ha:

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt \tag{1.53}$$

Ponendo, $s = \eta(t)$ si ha che

$$\varphi(t) = \psi(\eta(t)) \iff \varphi(\eta^{-1}(s)) = \psi(s) \tag{1.54}$$

e

$$\psi'(s) = \varphi'(\eta^{-1}(s))(\eta^{-1})'(s) \tag{1.55}$$

Perciò, risolvendo l'integrale con la seguente sostituzione

$$\begin{aligned} &s = \eta(t) \\ &t = \eta^{-1}(s) \\ &dt = (\eta^{-1})'(s)ds \end{aligned} \tag{1.56}$$

si ha che

$$\begin{aligned} &\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \ |\varphi'(t)| \ dt \\ &\overset{\text{sub}}{=} \int_{\eta(a)}^{\eta(b)} f(\varphi(\eta^{-1}(s))) \ |\varphi(\eta^{-1}(s))| \ (\eta^{-1})'(s) \ ds \end{aligned} \tag{1.57}$$

Ora, dipendentemente dalla monotonia di η si avrà:
$\eta^{-1} > 0 \Rightarrow \ \eta(a) = c, \ \eta(b) = d, \ (\eta^{-1})'(s) > 0$

$$\begin{aligned} &\int_{\eta(a)}^{\eta(b)} f(\varphi(\eta^{-1}(s))) \ |\varphi'(\eta^{-1}(s))| \ (\eta^{-1})'(s) \ ds = \\ &\int_c^d f(\psi(s)) \ |\psi'(s)| \ ds = \int_{\hat{\gamma}} f \ ds \end{aligned} \tag{1.58}$$

$\eta^{-1} < 0 \Rightarrow \eta(a) = d, \ \eta(b) = c, \ (\eta^{-1})'(s) < 0$

$$\begin{aligned} &\int_{\eta(a)}^{\eta(b)} f(\varphi(\eta^{-1}(s))) \ |\varphi'(\eta^{-1}(s))| \ (\eta^{-1})'(s) \ ds = \\ &\int_d^c f(\psi(s)) \ (-|\psi'(s)|) \ ds = \int_c^d f(\psi(s)) \ |\psi'(s)| \ ds = \int_{\hat{\gamma}} f \ ds \end{aligned} \tag{1.59}$$

□

Osservazione La distinzione finale discende dal fatto che, presa l'equazione 1.55 e applicatovi il modulo, se η è crescente, si ha

$$\begin{aligned} |\psi'(s)| = |\varphi'(\eta^{-1}(s))(\eta^{-1})'(s)| &\overset{\substack{\text{Prop.}\\\text{Norma}}}{=} |(\eta^{-1})(s)|\ |\varphi'(\eta^{-1}(s)) = \\ &\overset{\eta'\geq 0}{=} (\eta^{-1})'(s)\ |\varphi'(\eta^{-1})(s)| \end{aligned} \tag{1.60}$$

se η è decrescente,

$$\begin{aligned} |\psi'(s)| = |\varphi'(\eta^{-1}(s))(\eta^{-1})'(s)| &\overset{\substack{\text{Prop.}\\\text{Norma}}}{=} |(\eta^{-1})(s)|\ |\varphi'(\eta^{-1}(s)) = \\ &\overset{\eta'\leq 0}{=} -(\eta^{-1})'(s)\ |\varphi'(\eta^{-1})(s)| \end{aligned} \tag{1.61}$$

Corollario 1. La lunghezza di una curva regolare a tratti è invariante per equivalenza.

Dimostrazione. La dimostrazione del corollario discende dalla dimostrazione precedente, in cui $f \equiv 1$. Infatti si avrebbe:

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\ dt = \int_c^d |\psi'(s)|\ ds = L(\psi) \tag{1.62}$$

□

Osservazione Sia φ una parametrizzazione della curva γ mediante ascissa curvilinea. Allora,

$$\int_\gamma f\ ds = \int_0^L f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\ dt \overset{\substack{|\varphi'(t)|\equiv 1\\ \text{per param.}}}{=} \int_0^L f(\varphi(t))\ dt \tag{1.63}$$

è proprio l'area sottesa da $f\Big|_\gamma$