# Aufgabenblatt 11

## **Aufgabe A** — Prädikatenlogische Formalisierung

*Formalisieren Sie die folgenden PL-Sätze!*

1. Karthago muss zerstört werden.
2. Romulus und Remus sind Wolfskinder.
3. Die Gründer von Rom sind Wolfskinder.
4. Alle roten Autos gehören Peter.
5. Alle roten Autos gehören jemandem.
6. Niemand mag die Gründer von Rom.
7. Peter reist nach Rom, Helsinki und Seoul.
8. Etwas ist eine Schildkröte genau dann, wenn es langsam ist und einen Panzer hat.
9. Peter ist in Alice oder Petra verliebt.
10. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist größer als jede ihrer Summanden.

## **Aufgabe B** — Einschränkungen der ∀-Einführung

*Nennen Sie die Einschränkungen der ∀-Einführung!*

## **Aufgabe C** — Einschränkungen der ∃-Beseitigung

*Nennen Sie die Einschränkungen der ∃-Beseitigung!*

## **Aufgabe D** — ∀-Einführung I

*Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. $\dfrac{\forall x Fx \land \forall x Hx}{\forall x(Fx \land Gx)}$

2. $\dfrac{\forall x(Ga \to Fx)}{Ga \to \forall x Fx}$

## **Aufgabe E** — ∀-Einführung II

*Formalisieren und beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. Alle Menschen sind sterblich.
   Niemand ist sterblich.
   Also: Also sind alle unmenschlich.

2. Wenn Alice glücklich ist, sind alle glücklich.
   Also: Für alle gilt, dass wenn Alice glücklich ist, sie glücklich sind.

## **Aufgabe F** — ∀-Einführung III

*Bringen Sie die folgenden Schlüsse in die Normalform, formalisieren und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. Wenn es einen gibt, der allen hilft, dann ist allen geholfen.
2. **To do:** Aufgabe

## **Aufgabe G** — ∃-Beseitigung I

*Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. $$\frac{\exists x(Gx \to Hx)}{\forall x Gx \to \exists x Hx}$$

2. $$\frac{\begin{array}{l}\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)\\ \exists x Fx\end{array}}{\exists x(Fx \land Gx)}$$

## **Aufgabe H** — ∃-Beseitigung II

*Formalisieren und beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. | | |
   |---|---|
   | | Alle Piraten sind Menschen. |
   | | Es gibt Säugetiere, die keine Menschen sind. |
   | Also: | Es gibt Säugetiere, die keine Piraten sind. |

2. **To do:** Aufgabe

## **Aufgabe I** — ∃-Beseitigung III

*Bringen Sie die folgenden Schlüsse in die Normalform, formalisieren und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. **To do:** Aufgabe
2. Die Philosophie setzt sich häufig mit Begriffsklärungen auseinander. Zum Beispiel könnte man vorschlagen, dass der Begriff „Besonnenheit“ heißt, seine Lüste beherrschen zu können. Seine Lüste beherrschen zu können, heißt sich selbst zu beherrschen. Aber es gibt ein Gegenargument dagegen: Wenn jemand über etwas herrscht, hat der Herrscher mehr Macht als der Beherrschte. Und wenn einer mehr Macht hat als ein anderer, hat der andere nicht mehr Macht als der eine. Also gibt es keine Selbstbeherrschung.[1]

## **Aufgabe J** — Lose Sammlung prädikatenlogischer Schlüsse

[1] Also beherrscht niemand sich selbst.

*Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens.*

1. $$\frac{\forall x Fx \qquad \forall x(Fx \to Gx)}{\forall x Gx}$$
2. $$\frac{\neg Ga \qquad \forall x(Fx \to Gx)}{\neg Fa}$$
3. $$\frac{\forall x(Gx \to Fx) \qquad \exists x(Hx \land Gx)}{\exists x(Hx \land Fx)}$$
4. $$\frac{\forall x \neg Gx \qquad \forall y(Hy \to Gy)}{\exists x \neg Hx}$$
5. $$\frac{\forall x(Fx \to Gx)}{\forall x Fx \to \forall x Gx}$$
6. $$\frac{\exists x(Fx \to Gx)}{\forall x Fx \to \exists x Gx}$$
7. $$\frac{\forall x Fx \to \exists x Gx}{\exists x(Fx \to Gx)}$$
8. $$\frac{\neg \exists x(Fx \to Gx)}{\neg \exists x(\neg Fx \lor Gx)}$$
9. $$\frac{\neg \exists (Fx \to Gx)}{\forall x \neg Gx}$$

## **Knobelei 1** — Zählen in der Prädikatenlogik

*Formalisieren Sie den folgenden Satz:*

Es gibt genau zwei Menschen.[2]

[2] Zur Formalisierung benötigen Sie das Identitätszeichen „=“. Wenn $a = b$ gilt, dann sprechen $a$ und $b$ von demselben Objekt, also von einem einzigen. „$a = b$“ ist eine Aussage in PL und darf auch so behandelt werden. Man könnte „=“ als das Prädikat „… ist mit … identisch.“ bestimmen. Aus Gewohnheit schreiben wir es aber zwischen zwei Individuen und nicht wie große Buchstaben davor.

# Lösungvorschläge – Aufgabenblatt 11

## **Lösungvorschlag A**Prädikatenlogische Formalisierung

*Formalisieren Sie die folgenden PL-Sätze!*

1. Karthago muss zerstört werden.
2. Romulus und Remus sind Wolfskinder.
3. Die Gründer von Rom sind Wolfskinder.
4. Alle roten Autos gehören Peter.
5. Alle roten Autos gehören jemandem.
6. Niemand mag die Gründer von Rom.
7. Peter reist nach Rom, Helsinki und Seoul.
8. Etwas ist eine Schildkröte genau dann, wenn es langsam ist und einen Panzer hat.
9. Peter ist in Alice oder Petra verliebt.
10. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist größer als jede ihrer Summanden.

**Lösungsvorschlag**

1. $Zx$: $x$ muss zerstört werden.

   $a$: Karthago

   $Za$

2. $Wx$: $x$ ist ein Wolfskind.

   $a$: Romulus
   $b$: Remus

   $Wa \land Wb$

3. $Gxy$: $x$ ist ein Gründer von $y$.
   $Wx$: $x$ ist ein Wolfskind.

   $a$: Rom

   $\forall x(Gxa \to Wx)$

4. $Ax$: $x$ ist ein Auto.
   $Rx$: $x$ ist rot.
   $Gxy$: $x$ gehört $y$.

   $a$: Peter

   $\forall x((Ax \land Rx) \to Gxa)$

5. $Ax$: $x$ ist ein Auto.
   $Rx$: $x$ ist rot.
   $Gxy$: $x$ gehört $y$.

   $\forall x((Ax \land Rx) \to \exists y Gxy)$

6. $Mxy$: $x$ mag $y$.
   $Gxy$: $x$ ist Gründer von $y$.

   $a$: Rom

   $\forall x(Gxa \rightarrow \neg\exists y(Myx))$

7. $Rxy$: $x$ reist nach $y$.

   $a$: Peter
   $b$: Rom
   $c$: Helsinki
   $d$: Seoul

   $Rab \wedge Rac \wedge Rad$

8. $Sx$: $x$ ist eine Schildkröte.
   $Lx$: $x$ ist langsam.
   $Px$: $x$ hat einen Panzer.

   $\forall x(Sx \leftrightarrow (Lx \wedge Px))$

9. $Vxy$: $x$ ist in $y$ verliebt.

   $a$: Peter
   $b$: Alice
   $c$: Petra

   $Vab \wedge Vac$

10. $Nx$: $x$ ist eine natürliche Zahl.
    $Sxyz$: $x$ ist die Summe von $y$ und $z$.
    $Mxy$: $x$ ist ein Summand von $y$.
    $Gxy$: $x$ ist größer als $y$.

    $\forall x \forall y \forall z((Nx \wedge Ny \wedge Sxyz) \rightarrow (Gxy \wedge Gxz))$

## **Lösungvorschlag B**Einschränkungen der ∀-Einführung

*Nennen Sie die Einschränkungen der ∀-Einführung!*

**Lösungsvorschlag**

1. Die generalisierte Variable darf nicht in den Annahmen oder der Konklusion vorkommen.
2. Die generalisierte Variable darf nicht aus einer Existenzquantorbeseitigung stammen.

## **Lösungvorschlag C**Einschränkungen der ∃-Beseitigung

*Nennen Sie die Einschränkungen der ∃-Beseitigung!*

**Lösungsvorschlag**

1. Die spezialisierte Variable darf nicht in den Annahmen oder der Konklusion vorkommen.
2. Die spezialisierte Variable darf nicht bereits einer Existenzquantorbeseitigung eingeführt worden sein.
3. Die spezialisierte Variable darf nicht bereits in dem Satz auftauchen, auf den die ∃-Beseitigung angewendet wurde.

## **Lösungvorschlag D**∀-Einführung I

*Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. $\dfrac{\forall x Fx \land \forall x Hx}{\forall x(Fx \land Gx)}$
2. $\dfrac{\forall x(Ga \to Fx)}{Ga \to \forall x Fx}$

**Lösungsvorschlag**

Die anschließend Überprüfung der Regeln muss nicht so ausführlich wie hier stattfinden. Es dient aber zum Verständnis der Regeln, diese jeweils ausführlich zu begründen.

1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\forall x Fx \land \forall x Gx$ | | Ann. |
| (2) | $\forall x Fx$ | *1* | ∧-Bes. |
| (3) | $\forall x Gx$ | *1* | ∧-Bes. |
| (4) | $Fa$ | *2* | ∀-Bes. |
| (5) | $Ga$ | *3* | ∀-Bes. |
| (6) | $Fa \land Ga$ | *4, 5* | ∧-Einf. |
| (7) | $\forall x(Fx \land Gx)$ | *6* | ∀-Einf. |

Da die ∀-*Einführung* angewandt wurde, muss geprüft werden, ob das $a$, das quantifiziert wurde, die folgenden Regeln erfüllt (Siehe im Skript S. 113 / 252):

1. $a$ kommt weder in den Annahmen noch der Konklusion vor. ✓
2. Die Zeile 6, auf die die ∀-*Einführung* angewendet wurde, darf keine Konstanten enthalten, die aus einer ∃-*Beseitigung* stammen. Es kommt als Konstante nur $a$ vor, die wurde nicht aus einer ∃-*Beseitigung* abgeleitet. ✓

Die Bedingungen sind erfüllt, daher ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet werden konnte, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | (1) | $\forall x(Ga \to Fx)$ | | Ann. |
| *2* | (2) | $Ga$ | | ZA |
| *1* | (3) | $Ga \to Fb$ | *1* | ∀-Bes. |
| *1, 2* | (4) | $Fb$ | *2, 3* | MP |
| *1, 2* | (5) | $\forall x Fx$ | *4* | ∀-Einf. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | (6) | $Ga \to \forall x Fx$ | *2, 5* | $\to$-Einf. |

Da die ∀-*Einführung* angewandt wurde, muss geprüft werden, ob das $b$, das quantifiziert wurde, die folgenden Regeln erfüllt (Siehe im Skript S. 113 / 252):

1. $b$ kommt nicht in den Annahmen vor. ✓
2. $b$ kommt nicht in der Konklusion vor. ✓
3. Die Zeile 4, auf die die ∀-*Einführung* angewendet wurde, darf keine Konstanten enthalten, die aus einer ∃-*Beseitigung* stammen. Es kommt als Konstante nur $b$ vor, die wurde nicht aus einer ∃-*Beseitigung* abgeleitet. ✓

Die Bedingungen sind erfüllt, daher ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet werden konnte, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

## **Lösungvorschlag E**∀-Einführung II

*Formalisieren und beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. Alle Menschen sind sterblich.
   Niemand ist sterblich.
   Also: Also sind alle unmenschlich.

2. Wenn Alice glücklich ist, sind alle glücklich.
   Also: Für alle gilt, dass wenn Alice glücklich ist, sie glücklich sind.

**Lösungsvorschlag**

1. $Mx$: $x$ ist ein Mensch.
   $Sx$: $x$ ist sterblich.

$$\frac{\forall x(Mx \to Sx) \quad \neg\exists x Sx}{\forall x \neg Mx}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\forall x(Mx \to Sx)$ | | Ann. |
| (2) | $\neg\exists x Sx$ | | Ann. |
| (3) | $\neg\neg\forall x \neg Sx$ | *2* | QT |
| (4) | $\forall x \neg Sx$ | *3* | $\neg$-Bes. |
| (5) | $\neg Sa$ | *4* | ∀-Bes. |
| (6) | $Ma \to Sa$ | *1* | ∀-Bes. |
| (7) | $\neg Ma$ | *5, 6* | MT |
| (8) | $\forall x \neg Mx$ | *7* | ∀-Einf. |

In Zeile 8 wurde eine ∀-Einf. angewandt, es wurde $a$ generalisiert. Daher gilt zu prüfen:

1. $a$ kommt weder in den Annahmen noch in der Konklusion vor. ✓
2. $a$ stammt nicht aus einer ∃-*Beseitigung*. ✓

Damit ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet wurde und auch nur von den Prämissen abhängt, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

2. $Gx$: $x$ ist glücklich.
   $a$: Alice

   $$\frac{Ga \to \forall x Gx}{\forall x(Ga \to Gx)}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | (1) | $Ga \to \forall x Gx$ | | Ann. |
| *2* | (2) | $Ga$ | | ZA |
| *1, 2* | (3) | $\forall x Gx$ | *1, 2* | MP |
| *1, 2* | (4) | $Gb$ | *3* | ∀-Bes. |
| *1* | (5) | $Ga \to Gb$ | *2, 4* | →-Einf. |
| *1* | (6) | $\forall x(Ga \to Gx)$ | *5* | ∀-Einf. |

   In Zeile 6 wurde eine ∀-Einf. angewandt, es wurde $b$ generalisiert. Daher gilt zu prüfen:

   1. $b$ kommt weder in den Annahmen noch in der Konklusion vor. ✓
   2. $b$ stammt nicht aus einer ∃-*Beseitigung*. ✓

   Damit ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet wurde und auch nur von den Prämissen abhängt, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

## **Lösungvorschlag F**∀-Einführung III

*Bringen Sie die folgenden Schlüsse in die Normalform, formalisieren und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. Wenn es einen gibt, der allen hilft, dann ist allen geholfen.
2. **To do:** Aufgabe

**Lösungsvorschlag**

1. $Hxy$: $x$ hilft $y$.

   | | |
   |---|---|
   | | Es gibt einen, der allen hilft. |
   | Also: | Allen wird von jemandem geholfen. |

   $$\frac{\exists x \forall y Hxy}{\forall x \exists y Hyx}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\exists x \forall y Hxy$ | | Ann. |
| (2) | $\forall y Hay$ | *1* | ∃-Bes. |
| (3) | $Hab$ | *2* | ∀-Bes. |
| (4) | $\exists y Hyb$ | *3* | ∃-Einf. |
| (5) | $\forall x \exists y Hyx$ | *4* | ∀-Einf |

Es wurde sowohl die ∃-*Beseitigung* als auch die ∀-*Einführung* angewandt. Daher muss die korrektheit der Anwendung beider Regeln betrachtet werden. $a$ stammt aus der ∃ -Beseitigung in Z. 2. $b$ wurde mit der ∀-*Einführung* generalisiert in Z. 5.

1. $a$ und $b$ kommen weder in den Annahmen noch in der Konklusion vor. ✓
2. ∃-*Beseitigung:* Da es keine anderen Zeilen gibt, in denen eine ∃-*Beseitigung* angewendet wurde, wurde nirgendwo die gleiche Konstante zur ∃-*Beseitigung* benutzt. Das generalisierte $b$ stammt nicht aus einer ∃-*Beseitigung*. ✓
3. Das spezialisierte $a$ kommt nicht bereits in der Zeile vor, auf die die ∃-*Beseitigung* angewendet wurde (Z. 1). ✓

Die Bedingungen sind erfüllt, daher ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet werden konnte, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

2. **To do:** Lösung

## **Lösungvorschlag G**∃-Beseitigung I

*Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. $\dfrac{\exists x(Gx \to Hx)}{\forall xGx \to \exists xHx}$

2. $\dfrac{\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \quad \exists xFx}{\exists x(Fx \land Gx)}$

**Lösungsvorschlag**

1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | (1) | $\exists x(Gx \to Hx)$ | | Ann. |
| *2* | (2) | $\forall xGx$ | | ZA |
| *1* | (3) | $Ga \to Ha$ | *1* | ∃-Bes. |
| *2* | (4) | $Ga$ | *2* | ∀-Bes. |
| *1, 2* | (5) | $Ha$ | *3, 4* | MP |
| *1, 2* | (6) | $\exists xHx$ | *5* | ∃-Einf. |
| *1* | (7) | $\forall xGx \to \exists xHx$ | *2, 6* | →-Einf. |

Da die Regel ∃-*Beseitigung* in Z. 9 angewendet wurde, muss überprüft werden, ob sie korrekt angewendet wurde:

1. Das spezialisierte $a$ kommt weder in den Annahmen noch der Konklusion vor. ✓
2. Da es keine anderen Zeilen gibt, in denen eine ∃-*Beseitigung* angewendet wurde, wurde nirgendwo die gleiche Konstante zur ∃-*Beseitigung* benutzt. ✓
3. $a$ kommt nicht bereits in der Zeile (Z. 1) vor, auf die die ∃-*Beseitigung* angewendet wurde. ✓

Die Bedingungen sind erfüllt, daher ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet werden konnte, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *1* | (1) | $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$ | Ann. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *2* | (2) | $\exists x Fx$ | | Ann. |
| *2* | (3) | $Fa$ | *2* | ∃-Bes. |
| *1* | (4) | $Fa \leftrightarrow Ga$ | *1* | ∀-Bes. |
| *1* | (5) | $(Fa \to Ga) \land (Ga \to Fa)$ | *4* | ↔-Bes. |
| *1* | (6) | $Fa \to Ga$ | *5* | ∧-Bes. |
| *1, 2* | (7) | $Ga$ | *6, 3* | MP |
| *1, 2* | (8) | $Fa \land Ga$ | *3, 7* | ∧-Einf. |
| *1, 2* | (9) | $\exists x(Fx \land Gx)$ | *8* | ∃-Einf. |

Da die Regel ∃-*Beseitigung* in Z. 3 angewendet wurde, muss überprüft werden, ob sie korrekt angewendet wurde:

1. Das spezialisierte $a$ kommt weder in den Annahmen noch der Konklusion vor. ✓
2. Da es keine anderen Zeilen gibt, in denen eine ∃-*Beseitigung* angewendet wurde, wurde nirgendwo die gleiche Konstante zur ∃-*Beseitigung* benutzt. ✓
3. $a$ kommt nicht bereits in der Zeile (Z. 2) vor, auf die die ∃-*Beseitigung* angewendet wurde. ✓

Die Bedingungen sind erfüllt, daher ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet werden konnte, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

## Lösungvorschlag H∃-Beseitigung II

*Formalisieren und beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. Alle Piraten sind Menschen.
   Es gibt Säugetiere, die keine Menschen sind.
   Also: Es gibt Säugetiere, die keine Piraten sind.
2. **To do:** Aufgabe

**Lösungsvorschlag**

1. $Fx$: $x$ ist ein Pirat.
   $Gx$: $x$ ist ein Mensch.
   $Hx$: $x$ ist ein Säugetier.

$$\begin{array}{l} \forall x(Fx \to Gx) \\ \exists x(Hx \land \neg Gx) \\ \hline \exists x(Hx \land \neg Fx) \end{array}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\forall x(Fx \to Gx)$ | | Ann. |
| (2) | $\exists x(Hx \land \neg Gx)$ | | Ann. |
| (3) | $Fa \to Ga$ | *1* | ∀-Bes. |
| (4) | $Ha \land \neg Ga$ | *2* | ∃-Bes. |
| (5) | $Ha$ | *4* | ∧-Bes. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (6) | $\neg Ga$ | *4* | $\wedge$-Bes. |
| (7) | $\neg Fa$ | *3, 6* | MT |
| (8) | $Ha \wedge \neg Fa$ | *5, 7* | $\wedge$-Einf. |
| (9) | $\exists x(Hx \wedge \neg Fx)$ | *8* | $\exists$-Einf. |

Da die Regel ∃-*Beseitigung* in Z. 4 angewendet wurde, muss überprüft werden, ob sie korrekt angewendet wurde:

1. Das spezialisierte $a$ kommt nicht in den Annahmen oder der Konklusion nicht vor. ✓
2. Da es keine anderen Zeilen gibt, in denen eine ∃-*Beseitigung* angewendet wurde, wurde nirgendwo die gleiche Konstante zur ∃-*Beseitigung* benutzt. ✓
3. $a$ kommt nicht bereits in der Zeile (Z. 2) vor, auf die die ∃-*Beseitigung* angewendet wurde. ✓

Die Bedingungen sind erfüllt, daher ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet werden konnte, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

2. **To do:** Lösungen

## Lösungvorschlag I∃-Beseitigung III

*Bringen Sie die folgenden Schlüsse in die Normalform, formalisieren und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!*

1. **To do:** Aufgabe

2. Die Philosophie setzt sich häufig mit Begriffsklärungen auseinander. Zum Beispiel könnte man vorschlagen, dass der Begriff „Besonnenheit“ heißt, seine Lüste beherrschen zu können. Seine Lüste beherrschen zu können, heißt sich selbst zu beherrschen. Aber es gibt ein Gegenargument dagegen: Wenn jemand über etwas herrscht, hat der Herrscher mehr Macht als der Beherrschte. Und wenn einer mehr Macht hat als ein anderer, hat der andere nicht mehr Macht als der eine. Also gibt es keine Selbstbeherrschung.[3]

**Lösungsvorschlag**

1. **To do:** Lösung

2. Der Text besteht aus einer Einleitung und dem Argument an sich. Die Einleitung ist nicht für das Argument relevant.

| | |
|---|---|
| | Wenn jemand über etwas herrscht, hat der Herrschende mehr Macht als der beherrschte. |
| | Wenn einer mehr macht als ein anderer hat, hat der andere nicht mehr Macht als der eine. |
| Also: | Niemand beherrscht sich selbst. |

[3] Also beherrscht niemand sich selbst.

$Hxy$: $x$ herrscht über $y$.
$Mxy$: $x$ hat mehr Macht als $y$.

$$\frac{\forall x \forall y(Hxy \to Mxy) \quad \forall x \forall y(Mxy \to \neg Myx)}{\neg \exists x Hxx}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\forall x \forall y(Hxy \to Mxy)$ | | Ann. |
| 2 | (2) | $\forall x \forall y(Mxy \to \neg Myx)$ | | Ann. |
| 3 | (3) | $\neg\neg\exists x Hxx$ | | ZA |
| 3 | (4) | $\exists x Hxx$ | 3 | ¬-Bes |
| 1 | (5) | $\forall y(Hay \to May)$ | 1 | ∀-Bes. |
| 1 | (6) | $Haa \to Maa$ | 5 | ∀-Bes. |
| 2 | (7) | $\forall y(May \to \neg May)$ | 2 | ∀-Bes. |
| 2 | (8) | $Maa \to \neg Maa$ | 7 | ∀-Bes. |
| 3 | (9) | $Haa$ | 4 | ∃-Bes. |
| 1, 3 | (10) | $Maa$ | 6, 9 | MP |
| 1, 2, 3 | (11) | $\neg Maa$ | 8, 10 | MP |
| 1, 2 | (12) | $\neg\neg\neg\exists x Hxx$ | 10, 11, 3 | RAA |
| 1, 2 | (13) | $\neg\exists x Hxx$ | 12 | ¬-Bes. |

Da die Regel ∃-*Beseitigung* in Z. 9 angewendet wurde, muss überprüft werden, ob sie korrekt angewendet wurde:

1. Das spezialisierte $b$ kommt weder in den Annahmen noch der Konklusion vor. ✓
2. Da es keine anderen Zeilen gibt, in denen eine ∃-*Beseitigung* angewendet wurde, wurde nirgendwo die gleiche Konstante zur ∃-*Beseitigung* benutzt. ✓
3. $a$ kommt nicht bereits in der Zeile (Z. 4) vor, auf die die ∃-*Beseitigung* angewendet wurde. ✓

Die Bedingungen sind erfüllt, daher ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet werden konnte, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

## **Lösungvorschlag J**Lose Sammlung prädikatenlogischer Schlüsse

*Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens.*

1. $$\frac{\forall x Fx \quad \forall x(Fx \to Gx)}{\forall x Gx}$$
2. $$\frac{\neg Ga \quad \forall x(Fx \to Gx)}{\neg Fa}$$
3. $$\frac{\forall x(Gx \to Fx) \quad \exists x(Hx \land Gx)}{\exists x(Hx \land Fx)}$$
4. $$\frac{\forall x \neg Gx \quad \forall y(Hy \to Gy)}{\exists x \neg Hx}$$
5. $$\frac{\forall x(Fx \to Gx)}{\forall x Fx \to \forall x Gx}$$
6. $$\frac{\exists x(Fx \to Gx)}{\forall x Fx \to \exists x Gx}$$
7. $$\frac{\forall x Fx \to \exists x Gx}{\exists x(Fx \to Gx)}$$
8. $$\frac{\neg\exists x(Fx \to Gx)}{\neg\exists x(\neg Fx \lor Gx)}$$
9. $$\frac{\neg\exists(Fx \to Gx)}{\forall x \neg Gx}$$

**Lösungsvorschlag**

1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\forall x Fx$ | | Ann. |
| (2) | $\forall x(Fx \to Gx)$ | | Ann. |
| (3) | $Fa$ | *1* | $\forall$-Bes. |
| (4) | $Fa \to Ga$ | *2* | $\forall$-Bes. |
| (5) | $Ga$ | *3, 4* | MP |
| (6) | $\forall x Gx$ | *5* | $\forall$-Einf. |

In Zeile 6 wurde eine $\exists$-Bes. angewandt, es wurde $a$ generalisiert. Daher gilt zu prüfen:

1. $a$ kommt weder in den Annahmen noch in der Konklusion vor. ✓
2. $a$ wurde nicht bereits in einer anderen $\exists$-*Beseitigung* spezialisiert. ✓

Damit ist die Ableitung fertig und da die Konklusion abgeleitet aus den Prämissen abgeleitet werden konnte, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\neg Ga$ | | Ann. |
| (2) | $\forall x(Fx \to Gx)$ | | Ann. |
| (3) | $Fa \to Ga$ | *2* | $\forall$-Bes. |
| (4) | $\neg Fa$ | *3* | MT, q.e.d. |

3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\forall x(Gx \to Fx)$ | | Ann. |
| (2) | $\exists x(Hx \land Gx)$ | | Ann. |
| (3) | $Ga \to Fa$ | *1* | $\forall$-Bes. |
| (4) | $Ha \land Ga$ | *2* | $\exists$-Bes. |
| (5) | $Ga$ | *4* | $\land$-Bes. |
| (6) | $Ha$ | *4* | $\land$-Bes. |
| (7) | $Fa$ | *3, 5* | MP |
| (8) | $Fa \land Ha$ | *6, 7* | $\land$-Einf. |
| (9) | $\exists x(Fx \land Hx)$ | *8* | $\exists$-Einf. |

In Zeile 4 wurde eine $\exists$-Bes. angewandt, es wurde $a$ spezialisiert. Daher gilt zu prüfen:

1. $a$ kommt weder in den Annahmen noch in der Konklusion vor. ✓
2. $a$ wurde nicht bereits in einer anderen $\exists$-*Beseitigung* spezialisiert. ✓
3. $a$ kommt nicht bereits in der Zeile vor, die spezialisiert wurde (Z. 2). ✓

Damit ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet wurde und auch nur von den Prämissen abhängt, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

4.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\forall x \neg Gx$ | | Ann. |
| (2) | $\forall y(Hy \to Gy)$ | | Ann. |
| (3) | $\neg Ga$ | *1* | $\forall$-Bes. |
| (4) | $Ha \to Ga$ | *2* | $\forall$-Bes. |
| (5) | $\neg Ha$ | *3, 4* | MP |
| (6) | $\exists x \neg Hx$ | *5* | $\exists$-Einf., q.e.d. |

5.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *1* | (1) | $\forall x(Fx \to Gx)$ | Ann. |
| *2* | (2) | $\forall x Fx$ | ZA |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | (3) | $Fb \to Gb$ | *1* | ∀-Bes. |
| *2* | (4) | $Fb$ | *2* | ∀-Bes. |
| *1, 2* | (5) | $Gb$ | *3, 4* | MP |
| *1, 2* | (6) | $\forall x Gx$ | *5* | ∀-Einf. |
| *1* | (7) | $\forall x Fx \to \forall x Gx$ | *2, 3* | →-Einf. |

In Zeile 6 wurde eine ∀-Einf. angewandt, es wurde $b$ generalisiert. Daher gilt zu prüfen:

1. $b$ kommt weder in den Annahmen noch in der Konklusion vor. ✓
2. $b$ stammt nicht aus einer ∃-*Beseitigung*. ✓

Damit ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet wurde und auch nur von den Prämissen abhängt, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

6.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | (1) | $\exists x(Fx \to Gx)$ | | Ann. |
| *2* | (2) | $\forall x Fx$ | | ZA |
| *1* | (3) | $Fa \to Ga$ | *1* | ∃-Bes. |
| *2* | (4) | $Fa$ | *2* | ∀-Bes. |
| *1, 2* | (5) | $Ga$ | *3, 4* | MP |
| *1, 2* | (6) | $\exists x Gx$ | *5* | ∃-Einf. |
| *1* | (7) | $\forall x Fx \to \exists x Gx$ | *2, 6* | →-Einf. |

In Zeile 3 wurde eine ∃-Bes. angewandt, es wurde $a$ spezialisiert. Daher gilt zu prüfen:

1. $a$ kommt weder in den Annahmen noch in der Konklusion vor. ✓
2. $a$ wurde nicht bereits in einer anderen ∃-*Beseitigung* spezialisiert. ✓
3. $a$ kommt nicht bereits in der Zeile vor, die spezialisiert wurde (Z. 2). ✓

Damit ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet wurde und auch nur von den Prämissen abhängt, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

7.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | (1) | $\forall x Fx \to \exists x Gx$ | | Ann. |
| *2* | (2) | $\neg \exists x(Fx \to Gx)$ | | ZA |
| *2* | (3) | $\neg\neg \forall x \neg(Fx \to Gx)$ | *2* | QT |
| *2* | (4) | $\forall x \neg(Fx \to Gx)$ | *3* | ¬-Bes. |
| *2* | (5) | $\neg(Fa \to Ga)$ | *4* | ¬-Bes. |
| *2* | (6) | $Fa \land \neg Ga$ | *5* | →-Ers. |
| *2* | (7) | $Fa$ | *6* | ∧-Bes. |
| *2* | (8) | $\neg Ga$ | *6* | ∧-Bes. |
| *2* | (9) | $\forall x Fx$ | *7* | ∀-Einf. |
| *2* | (10) | $\forall x \neg Gx$ | *8* | ∀-Einf. |
| *2* | (11) | $\neg \exists x \neg\neg Gx$ | *10* | QT |
| *2* | (12) | $\neg \exists x Gx$ | *11* | ¬-Bes. |
| *1, 2* | (13) | $\exists x Gx$ | *1, 9* | MP |
| *1* | (14) | $\neg\neg \exists x(Fx \to Gx)$ | *2, 12, 13* | RAA |

In Zeile 8 und 9 wurde eine ∀-Einf. angewandt, je wurde $a$ generalisiert. Daher gilt zu prüfen:

1. $a$ kommt weder in den Annahmen noch in der Konklusion vor. ✓

2. $a$ stammt nicht aus einer ∃-*Beseitigung*. ✓

Damit ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet wurde und auch nur von den Prämissen abhängt, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

8.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\neg\exists x(Fx \to Gx)$ | | Ann. |
| (2) | $\neg\neg\forall x\neg(Fx \to Gx)$ | *1* | QT |
| (3) | $\forall x\neg(Fx \to Gx)$ | | ¬-Bes. |
| (4) | $\neg(Fa \to Ga)$ | *3* | ∀-Bes. |
| (5) | $Fa \land \neg Ga$ | *4* | →-Ers. |
| (6) | $\neg\neg(Fa \land \neg Ga)$ | *5* | ¬-Einf. |
| (7) | $\neg(\neg Fa \lor \neg\neg Ga)$ | *6* | DM |
| (8) | $\neg(\neg Fa \lor Ga)$ | *7* | ¬-Bes. |
| (9) | $\forall x\neg(\neg Fx \lor Gx)$ | *8* | ∀-Einf. |
| (10) | $\neg\exists x\neg\neg(\neg Fx \lor Gx)$ | *9* | QT |
| (11) | $\neg\exists x(\neg Fx \lor Gx)$ | *10* | ¬-Bes. |

In Zeile 9 wurde eine ∀-Einf. angewandt, es wurde $a$ generalisiert. Daher gilt zu prüfen:

1. $a$ kommt weder in den Annahmen noch in der Konklusion vor. ✓
2. $a$ stammt nicht aus einer ∃-*Beseitigung*. ✓

Damit ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet wurde und auch nur von den Prämissen abhängt, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

9.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $\neg\exists x(Fx \to Gx)$ | | Ann. |
| (2) | $\neg\neg\forall x\neg(Fx \to Gx)$ | *1* | QT |
| (3) | $\forall x\neg(Fx \to Gx)$ | *2* | ¬-Bes. |
| (4) | $\neg(Fa \to Ga)$ | *3* | ∀-Bes. |
| (5) | $Fa \land \neg Ga$ | *4* | →-Bes. |
| (6) | $\neg Ga$ | *5* | ∧-Bes. |
| (7) | $\forall x\neg Gx$ | *6* | ∀-Einf. |

In Zeile 7 wurde eine ∀-Einf. angewandt, es wurde $a$ generalisiert. Daher gilt zu prüfen:

1. $a$ kommt weder in den Annahmen noch in der Konklusion vor. ✓
2. $a$ stammt nicht aus einer ∃-*Beseitigung*. ✓

Damit ist die Ableitung fertig und da die Konklusion aus den Prämissen abgeleitet wurde und auch nur von den Prämissen abhängt, ist der Schluss gültig. Q.E.D.

## **Lösungvorschlag 1**Zählen in der Prädikatenlogik

*Formalisieren Sie den folgenden Satz:*

Es gibt genau zwei Menschen.[4]

[4] Zur Formalisierung benötigen Sie das Identitätszeichen „=“. Wenn $a = b$ gilt, dann sprechen $a$ und $b$ von demselben Objekt, also von einem einzigen. „$a = b$“ ist eine Aussage in PL und darf auch so behandelt werden.

**Lösungsvorschlag**

$Mx$: $x$ ist ein Mensch.
$x = y$: $x$ und $y$ bezeichnen dasselbe Ding.

$\exists x \exists y(Mx \land My \land x \neq y \land \forall z(Mz \to (z = x \lor z = y)))$

Der Satz $\exists x \exists y(Mx \land My)$ hat das Problem, dass nicht ausgeschlossen werden kann, dass $x$ und $y$ dasselbe sind. Dieser Satz ist also bereits wahr, wenn es nur ein einziges Ding gibt, das ein Mensch ist. Das können wir ausschließen, indem wir außerdem festlegen, dass $x$ und $y$ nicht dasselbe sind, mit $x \neq y$:

$\exists x \exists y(Mx \land My \land x \neq y)$

Jetzt ist weiterhin das Problem, dass dieser Satz auch wahr ist, wenn es mehr als zwei Menschen gibt. Es sollen aber genau zwei sein, nicht mehr und nicht weniger. Daher legen wir dazu fest, dass alles, dann und nur dann ein Mensch ist, gdw. es entweder mit $x$ oder mit $y$ identisch ist: $\forall z(Mz \to (z = x \lor z = y))$!

$\exists x \exists y(Mx \land My \land x \neq y \land \forall z(Mz \to (z = x \lor x = y)))$

Man könnte „=“ als das Prädikat „... ist mit ... identisch.“ bestimmen. Aus Gewohnheit schreiben wir es aber zwischen zwei Individuen und nicht wie große Buchstaben davor.