

Aufgabenblatt 4

Aufgabe A — Syntax der Aussagenlogik I

Nennen Sie alle syntaktischen Regeln zur Bildung von Formeln bzw. Sätzen der Sprache AL!

Aufgabe B — Syntax der Aussagenlogik II

Welcher der folgenden Zeichenketten sind Sätze der Sprache AL?

1. p
2. $(\neg p_1 \wedge p_2)$
3. $\neg p \wedge q \neg$
4. $(p_2 \rightarrow q)$
5. $((p \wedge q) \leftrightarrow r)$
6. $(s_2 \leftrightarrow \neg p_{36})$
7. $(r \rightarrow q \rightarrow s)$
8. $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)))$
9. (p)
10. $p \wedge q$

Aufgabe C — Syntax der Aussagenlogik III

Listen Sie die aussagenlogischen Junktoren ihrer Ordnung nach auf!

Aufgabe D — Syntax der Aussagenlogik IV

Setzen Sie die Klammern so, dass die Ordnung der Operatoren erhalten bleibt!

1. $\neg p \wedge q$
2. $p \wedge q \vee q \wedge r$
3. $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
4. $\neg p \vee q \wedge \neg r$
5. $p \leftrightarrow r \wedge q \vee p$

Aufgabe E — Wahrheitstabellen I

Unterstreichen Sie in den folgenden Ausdrücken den Hauptjunktork.

1. $p \wedge q$
2. $\neg p \wedge \neg q$
3. $p \rightarrow q$
4. $p \leftrightarrow \neg q$

5. $p \vee \neg(p \wedge r)$
6. $(p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg q)$
7. $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow (q \wedge \neg p))$

Aufgabe F — Semantik der Aussagenlogik

Interpretieren Sie die folgenden Formeln. Welche Wahrheitswerte haben sie? Sei p falsch, seien q und r wahr.

1. $p \vee q$
2. $q \rightarrow p$
3. $r \rightarrow p$
4. $r \rightarrow \neg p$
5. $(\neg r \vee q) \wedge \neg p$
6. $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$
7. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$
8. $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow r)$
9. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
10. $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow (\neg p \wedge r))$

Aufgabe G — Wahrheitstabellen II

Zeichnen Sie eine Wahrheitstabelle für die folgenden Ausdrücke.

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $\neg p \wedge \neg q$
4. $p \rightarrow q$
5. $r \rightarrow r$
6. $p \leftrightarrow q$
7. $p \leftrightarrow \neg q$
8. $p \vee \neg p$
9. $(p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg q)$
10. $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow (q \wedge \neg s))$

Lösungsvorschläge – Aufgabenblatt 4

Lösungsvorschlag ASyntax der Aussagenlogik I

Nennen Sie alle syntaktischen Regeln zur Bildung von Formeln bzw. Sätzen der Sprache AL!

Lösungsvorschlag

Laut Vorlesung:

1. Erlaubte Zeichen sind:
 - a) Satzbuchstaben: p, p_1, p_2, q, r, \dots ,
 - b) Junktoren: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ und \leftrightarrow ,
 - c) Klammern: (und),
2. Wenn α ein Satzbuchstabe ist, dann ist α ein Satz von AL.
3. Wenn α und β AL-Sätze sind, dann auch:
 - a) $\neg\alpha$
 - b) $(\alpha \wedge \beta)$
 - c) $(\alpha \vee \beta)$
 - d) $(\alpha \rightarrow \beta)$
 - e) $(\alpha \leftrightarrow \beta)$

Jede Syntax besteht aus erlaubten Zeichen (1.) und Regeln, wie diese Zeichen kombiniert werden dürfen (2. und 3.). Dies gilt nicht nur für die Aussagenlogik, sondern für alle Sprachen: für Deutsch etwa wären die erlaubten Zeichen das lateinische Alphabet mit Umlauten und Sonderzeichen, die Regeln, wonach diese Zeichen kombiniert werden dürfen, findet man in der Linguistik dann in der „Morphologie“ und „Grammatik“. Für natürliche Sprachen sind diese Regeln extrem kompliziert, für die Aussagenlogik sind es nur ganz wenige.

Lösungsvorschlag BSyntax der Aussagenlogik II

Welcher der folgenden Zeichenketten sind Sätze der Sprache AL?

1. p
2. $(\neg p_1 \wedge p_2)$
3. $\neg p \wedge q \neg$
4. $(p_2 \rightarrow q)$
5. $((p \wedge q) \leftrightarrow r)$
6. $(s_2 \leftrightarrow \neg p_{36})$
7. $(r \rightarrow q \rightarrow s)$
8. $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)))$
9. (p)
10. $p \wedge q$

Lösungsvorschlag

Hier ist die vollständige Liste der Syntaxregeln von AL aus dem Skript S. 29 f. / 52 ff.:

1. Wenn α ein Satzbuchstabe ist, dann ist α ein Satz von AL.
2. Wenn α und β AL-Sätze sind, dann sind auch die folgenden Sätze jeweils Sätze von AL:
 - a) $\neg\alpha$
 - b) $(\alpha \wedge \beta)$
 - c) $(\alpha \vee \beta)$
 - d) $(\alpha \rightarrow \beta)$
 - e) $(\alpha \leftrightarrow \beta)$
3. Äußerste Klammern dürfen weggelassen werden.

Eine Zeichenkette ist nun ein Satz von AL, gdw. sie durch die oben genannten Regeln vollständig aufgeschlüsselt werden kann:

✓ Satz von AL, ✗ kein Satz von AL

1. ✓ p Regel 1.
2. ✓ $(\neg p_1 \wedge p_2)$ „ $\neg p_1$ “ ist Regel 2. a), „ $(\neg p_1 \wedge p_2)$ “ ist Regel 2. b)
3. ✗ $\neg p \wedge q \neg$ Die Negation am Ende entspricht keiner Regel.
4. ✓ $(p_2 \rightarrow q)$ Regel 2. d)
5. ✓ $((p \wedge q) \leftrightarrow r)$ „ $(p \wedge q)$ “ ist Regel 2. b), „ $((p \wedge q) \leftrightarrow r)$ “ ist Regel 2. e)
6. ✓ $(s_2 \leftrightarrow \neg p_{36})$ „ $\neg p_{36}$ “ ist Regel 2. a), „ $(s_2 \leftrightarrow \neg p_{36})$ “ ist Regel 2. e)
7. ✗ $(r \rightarrow q \rightarrow s)$ Es gibt keine Regel, die zwei Konditionale hintereinander erlaubt. Der Ausdruck wäre richtig, wenn man Klammern um eines der beiden Konditionale setzen würde. Also $((r \rightarrow q) \rightarrow s)$ oder $(r \rightarrow (q \rightarrow s))$.
8. ✓ $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)))$ Die Regel 2. d) kann auf den Gesamtausdruck und jedes Konsequenz angewandt werden.
9. ✗ (p) Wenn man streng ist: Es gibt keine Regel, die Klammern um einen einzelnen Satzbuchstaben erlaubt.
10. ✓ $p \wedge q$ Die Klammerersparnisregel erlaubt dies.

Lösungsvorschlag CSyntax der Aussagenlogik III

Listen Sie die aussagenlogischen Junktoren ihrer Ordnung nach auf!

Lösungsvorschlag

1. \neg
2. \wedge, \vee
3. $\rightarrow, \leftrightarrow$

Weiteres regeln Klammern.

Lösungsvorschlag DSyntax der Aussagenlogik IV

Setzen Sie die Klammern so, dass die Ordnung der Operatoren erhalten bleibt!

1. $\neg p \wedge q$
2. $p \wedge q \vee q \wedge r$
3. $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
4. $\neg p \vee q \wedge \neg r$
5. $p \leftrightarrow r \wedge q \vee p$

Lösungsvorschlag

Die Reihenfolge ist (1.) \neg , (2.) \wedge und \vee , (3.) \rightarrow und \leftrightarrow :

1. $(\neg p \wedge q)$
2. $((p \wedge q) \vee q) \wedge r$
3. $((p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$
4. $((\neg p \vee q) \wedge \neg r)$
5. $(p \leftrightarrow ((r \wedge q) \vee p))$

Lösungsvorschlag EWahrheitstabellen I

Unterstreichen Sie in den folgenden Ausdrücken den Hauptjunktior.

1. $p \wedge q$
2. $\neg p \wedge \neg q$
3. $p \rightarrow q$
4. $p \leftrightarrow \neg q$
5. $p \vee \neg(p \wedge r)$
6. $(p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg q)$
7. $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow (q \wedge \neg p))$

Lösungsvorschlag

1. $p \underline{\wedge} q$
2. $\neg p \underline{\wedge} \neg q$
3. $p \underline{\rightarrow} q$
4. $p \underline{\leftrightarrow} \neg q$
5. $p \underline{\vee} \neg(p \wedge r)$
6. $(p \wedge q) \underline{\wedge} (\neg r \vee \neg q)$
7. $(p \vee q) \underline{\rightarrow} (r \leftrightarrow (q \wedge \neg p))$

Lösungsvorschlag FSemantik der Aussagenlogik

Interpretieren Sie die folgenden Formeln. Welche Wahrheitswerte haben sie? Sei p falsch, seien q und r wahr.

1. $p \vee q$
2. $q \rightarrow p$
3. $r \rightarrow p$
4. $r \rightarrow \neg p$
5. $(\neg r \vee q) \wedge \neg p$
6. $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$
7. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$
8. $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow r)$
9. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
10. $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow (\neg p \wedge r))$

Lösungsvorschlag

1. wahr
2. falsch
3. wahr
4. wahr
5. wahr
6. falsch
7. wahr
8. falsch
9. falsch
10. wahr

Lösungsvorschlag G Wahrheitstabellen II

Zeichnen Sie eine Wahrheitstabelle für die folgenden Ausdrücke.

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $\neg p \wedge \neg q$
4. $p \rightarrow q$
5. $r \rightarrow r$
6. $p \leftrightarrow q$
7. $p \leftrightarrow \neg q$
8. $p \vee \neg p$
9. $(p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg q)$
10. $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow (q \wedge \neg s))$

Lösungsvorschlag

1.

p	q	$p \wedge q$
-----	-----	--------------

w	w	w w w
w	f	w f f
f	w	f f w
f	f	f f f

↑

2.

p	q	$p \vee q$
w	w	w w w
w	f	w w f
f	w	f w w
f	f	f f f

↑

3.

p	q	$\neg p \wedge \neg q$
w	w	f w f f w
w	f	f w f w f
f	w	w f f f w
f	f	w f w w f

↑

4.

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w w w
w	f	w f f
f	w	f w w
f	f	f w f

↑

5.

r	$r \rightarrow r$
w	w w w
f	f w f

↑

6.

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w w w
w	f	w f f
f	w	f f w
f	f	f w f

↑

7.

p	$p \leftrightarrow \neg p$
w	w f f w
f	f f w f

↑

8.

p	$p \vee \neg p$
-----	-----------------

w	w w f w
f	f w w f

↑

9.

p	q	r	$(p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg q)$
w	w	w	w w w f f w f f w
w	w	f	w w w w w f w f w
w	f	w	w f f f f w w w f
w	f	f	w f f f w f w w f
f	w	w	f f w f f w f f w
f	w	f	f f w f w f w f w
f	f	w	f f f f f w w w f
f	f	f	f f f f w f w w f

↑

10.

p	q	r	s	$(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow (q \wedge \neg s))$
w	w	w	w	w w w f w f w f f w
w	w	w	f	w w w w w w w w w f
w	w	f	w	w w w w f w w f f w
w	w	f	f	w w w f f f w w w f
w	f	w	w	w w f f w f f f f w
w	f	w	f	w w f f w f f f w f
w	f	f	w	w w f w f w f f f w
w	f	f	f	w w f w f w f f w f
f	w	w	w	f w w f w f w f f w
f	w	w	f	f w w w w w w w w f
f	w	f	w	f w w w f w w f f w
f	w	f	f	f w w f f f w w w f
f	f	w	w	f f f w w f f f f w
f	f	w	f	f f f w w f f f w f
f	f	f	w	f f f w f w f f f w
f	f	f	f	f f f w f w f f w f

↑