Aufgabenblatt 7

Aufgabe A — Def. Logische Wahrheit

Definieren Sie den Begriff der logischen Wahrheit!

Aufgabe B — Def. Logische Folgerung

Definieren Sie den Begriff der logischen Folgerung!

Aufgabe C — Linke Beweisspalte I

Erklären Sie, was die linke Beweisspalte im Kalkül des natürlichen Schließens ist und wozu sie benutzt wird. Erklären Sie den Unterschied zur rechten Beweisspalte. Woher kommen die Abhängigkeiten einer Zeile und wie wird man eine Abhängigkeit wieder los?

Aufgabe D — Linke Beweisspalte II

Vervollständigen Sie die linke Beweisspalte für die folgenden Kalküle des natürlichen Schließens!

1.

________	(1)	$p \to q$		Ann.
________	(2)	$(q \vee r) \to s$		Ann.
________	(3)	p		ZA
________	(4)	q	*1, 3*	MP
________	(5)	$q \vee r$	*4*	∨-Einf.
________	(6)	s	*2, 5*	MP
________	(7)	$p \to s$	*3, 6*	→-Einf., q.e.d.

2.

________	(1)	$p \to (q \to r)$		Ann.
________	(2)	$\neg((p \wedge q) \to r)$		ZA
________	(3)	$(p \wedge q) \wedge \neg r$	*2*	→-Ers.
________	(4)	$p \wedge q$	*3*	∧-Bes.
________	(5)	p	*4*	∧-Bes.
________	(6)	q	*4*	∧-Bes.
________	(7)	$q \to r$	*1, 5*	MP
________	(8)	r	*6, 7*	MP
________	(9)	$\neg r$	*3*	∧-Bes.
________	(10)	$\neg\neg((p \wedge q) \to r)$	*2, 8, 9*	RAA
________	(11)	$(p \wedge q) \to r$	*10*	¬-Bes., q.e.d.

Aufgabe E — Beweise mit Zusatzannahmen I

Beweisen Sie die folgenden Argumente mit dem Kalkül des natürlichen Schließens.

1. $\dfrac{(p \lor \neg q) \to r}{(p \to r)}$

2. $\dfrac{\begin{array}{l}(p \lor q) \to r \\ (r \lor s) \to t\end{array}}{p \to t}$

3. $\dfrac{r \lor \neg r}{(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)}$

Aufgabe F — Beweise mit Zusatzannahmen II

Formalisieren Sie die folgenden Argumente und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens.

1. Wenn Sherlock Holmes Irene Adler küsst, dann existiert Sherlock Holmes.
   Wenn Sherlock Holmes oder Irene Adler existieren, dann auch James Moriarty.
   Also: Wenn Sherlock Holmes existiert, existiert auch James Moriarty.

2. Ein Schmetterling schwingt seine Flügel nicht oder es weht ein raues Lüftchen.
   Es weht kein raues Lüftchen oder es entsteht ein Tornado.
   Also: Wenn ein Schmetterling seine Flügel schwingt, entsteht ein Tornado.

Aufgabe G — Beweise mit Zusatzannahmen III

Formalisieren Sie die folgenden Argumente und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens.

1. Der Produzent muss, wenn der Film nicht floppt, ebenso wenig seinen Hut nehmen. Denn wenn der Film weder floppt noch ein Skandal wird, dann muss der Produzent auch nicht seinen Hut nehmen. Bleiben die Kassen leer, dann floppt der Film. Aus Erfahrung wissen wir aber, dass, wenn die Kassen nicht leer bleiben, der Film auch kein Skandal wird.
2. Es gibt zwei Möglichkeiten, wie Peter die Prüfung bestehen kann: er lernt stur auswendig oder er stellt einfach alle seine Fragen. Also besteht Peter die Prüfung, wenn er alle seine Fragen stellt, und er besteht die Prüfung, wenn er stur auswendig lernt.

Aufgabe H — Reductio ad absurdum I

Beweisen Sie die folgenden Argumente mit dem Kalkül des natürlichen Schließens durch einen indirekten Beweis.

1. $\dfrac{p \land q}{p \to q}$

2. $\dfrac{\begin{array}{l}p \to q \\ p \to r\end{array}}{p \to (q \to r)}$

3. $\dfrac{\neg(p \leftrightarrow r) \land \neg r}{p}$

Aufgabe I — Reductio ad absurdum II

Formalisieren Sie die folgenden Argumente und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens durch einen indirekten Beweis.

1. Es regnet und schneit.
   Also: Es regnet oder schneit.
2. Wenn St. Nikolaus durch die Nacht zieht, dann bekommt Peter, vorausgesetzt er war artig, Geschenke.
   Also: Peter bekommt Geschenke, wenn St. Nikolaus durch die Nacht zieht und Peter artig war.
3. Es ist wahr, dass es morgen regnet und der Hahn heute kräht, oder, dass es morgen regnet und der Hahn nicht kräht.
   Also: Morgen regnet es.

Aufgabe J — Reductio ad absurdum III

Formalisieren Sie die folgenden Argumente und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens durch einen indirekten Beweis.

1. Morgen wird es wohl regnen. Das ist plausibel, denn ist es sowohl wahr, dass es morgen regnet oder heute der Hahn kräht, als auch, dass es morgen regnet oder heute nicht der Hahn kräht.
2. Unmissverständlich geht die Sonne auf, wenn drei Passauer Pappe pressen. Denn wenn drei Passauer Pappe pressen, dann geht, sofern Sigismund Berta liebt, die Sonne auf. Es ist jedoch nicht der Fall, dass drei Passauer Pappe pressen genau dann, wenn der linksgetiftelte Raftenzügler den Kauzriemen schmirgelt, denn wenn Sigismund nicht Berta liebt, dann schmirgelt der linksgetiftelte Raftenzügler den Kauzriemen auf keinen Fall.

Knobelei 1 — Aussagenlogisches Rätsel

Wer sagt die Wahrheit, wer lügt und wie kommen Sie darauf?

Erhöhte Schwierigkeit: Schaffen Sie es, ihre Lösung des Rätsels mit Hilfe des Kalkül des natürlichen Schließens zu beweisen?

Im Land der Lügner gibt es zwei Arten von Menschen: Lügner, die nur falsche Sätze äußern und Wahrsager, die nur wahre Sätze äußern. Auf ihrer Reise durch dieses Land begegnen Sie drei Einheimischen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

$\mathcal{A}$ sagt: „Wenn ich ein Wahrsager bin, dann ist $\mathcal{B}$ ein Lügner.“
$\mathcal{B}$ sagt: „Ich bin genau dann ein Wahrsager, wenn $\mathcal{C}$ einer ist.“

Wer lügt und wer sagt die Wahrheit?

Lösungvorschläge – Aufgabenblatt 7

Lösungvorschlag A Def. Logische Wahrheit

Definieren Sie den Begriff der logischen Wahrheit!

Lösungsvorschlag

Ein Satz α heißt *logisch wahr*, gdw. sich allein aus der Definition der logischen Zeichen dieser Sätze ergibt, dass α unter jeder Bewertung wahr ist.

Lösungvorschlag B Def. Logische Folgerung

Definieren Sie den Begriff der logischen Folgerung!

Lösungsvorschlag

Ein Satz α *folgt logisch* aus beliebig vielen Sätzen β_1, ..., β_n, gdw. sich allein aus der Definition der logischen Zeichen dieser Sätze ergibt, dass für jede Bewertung dieser Sätze gilt: Wenn β_1, ..., β_n wahr sind, dann ist auch α wahr.

Lösungvorschlag C Linke Beweisspalte I

Erklären Sie, was die linke Beweisspalte im Kalkül des natürlichen Schließens ist und wozu sie benutzt wird. Erklären Sie den Unterschied zur rechten Beweisspalte. Woher kommen die Abhängigkeiten einer Zeile und wie wird man eine Abhängigkeit wieder los?

Lösungsvorschlag

Die linke Beweisspalte ist die äußerst linke Spalte im Kalkül des natürlichen Schließens, links von der Zeilennummer, und gibt für jede Zeile an, von welchen Annahmen und Zusatzannahmen sie ursprünglich abgeleitet worden ist.

Die rechte Beweisspalte enthält im Gegensatz zur linken Beweisspalte diejenigen Nummern anderer Zeilen, aus denen die Zeile abgeleitet wurde. Diese Zeilen müssen jedoch nicht immer die Annahmen sein, sondern können selbst auch Zwischenschritte sein. Daher unterscheiden sich die rechte und die linke Beweisspalte.

Die Abhängigkeiten sind die Gesamtheit der Abhängigkeiten derjenigen Zeilen, aus denen sie abgeleitet wurden. Bei Annahmen und Zusatzannahmen ist die Abhängigkeit die Zeile selbst. Eine Abhängigkeit wird man nur dann los, wenn man die Annahme entweder mittels eines *Reductio ad absurdums* ausschließen kann, oder die Zeile mithilfe einer →*-Einf.* konditionalisiert.

Lösungvorschlag D Linke Beweisspalte II

Vervollständigen Sie die linke Beweisspalte für die folgenden Kalküle des natürlichen Schließens!

1.

________	(1)	$p \rightarrow q$		Ann.
________	(2)	$(q \vee r) \rightarrow s$		Ann.
________	(3)	p		ZA
________	(4)	q	*1, 3*	MP
________	(5)	$q \vee r$	*4*	∨-Einf.
________	(6)	s	*2, 5*	MP
________	(7)	$p \rightarrow s$	*3, 6*	→-Einf., q.e.d.

2.

________	(1)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$		Ann.
________	(2)	$\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$		ZA
________	(3)	$(p \wedge q) \wedge \neg r$	*2*	→-Ers.
________	(4)	$p \wedge q$	*3*	∧-Bes.
________	(5)	p	*4*	∧-Bes.
________	(6)	q	*4*	∧-Bes.
________	(7)	$q \rightarrow r$	*1, 5*	MP
________	(8)	r	*6, 7*	MP
________	(9)	$\neg r$	*3*	∧-Bes.
________	(10)	$\neg\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$	*2, 8, 9*	RAA
________	(11)	$(p \wedge q) \rightarrow r$	*10*	¬-Bes., q.e.d.

Lösungsvorschlag

1.

1	(1)	$p \rightarrow q$		Ann.
2	(2)	$(q \vee r) \rightarrow s$		Ann.
3	(3)	p		ZA
1, 3	(4)	q	*1, 3*	MP
1, 3	(5)	$q \vee r$	*4*	∨-Einf.
1, 2, 3	(6)	s	*2, 5*	MP
1, 2	(7)	$p \rightarrow s$	*3, 6*	→-Einf., q.e.d.

2.

1	(1)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$		Ann.
2	(2)	$\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$		ZA
2	(3)	$(p \wedge q) \wedge \neg r$	*2*	→-Ers.
2	(4)	$p \wedge q$	*3*	∧-Bes.
2	(5)	p	*4*	∧-Bes.
2	(6)	q	*4*	∧-Bes.
1, 2	(7)	$q \rightarrow r$	*1, 5*	MP
1, 2	(8)	r	*6, 7*	MP
2	(9)	$\neg r$	*3*	∧-Bes.
1	(10)	$\neg\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$	*2, 8, 9*	RAA

1	(11)	$(p \land q) \to r$	*10*	¬-Bes., q.e.d.

Lösungvorschlag E Beweise mit Zusatzannahmen I

Beweisen Sie die folgenden Argumente mit dem Kalkül des natürlichen Schließens.

1. $\dfrac{(p \lor \neg q) \to r}{(p \to r)}$
2. $\dfrac{(p \lor q) \to r \quad (r \lor s) \to t}{p \to t}$
3. $\dfrac{r \lor \neg r}{(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)}$

Lösungsvorschlag

1.

1	(1)	$(p \lor \neg q) \to r$		Ann.
2	(2)	p		ZA
2	(3)	$p \lor \neg q$	*2*	∨-Einf.
1, 2	(4)	r	*1, 3*	MP
1	(5)	$p \to r$	*2, 4*	→-Einf.

2.

1	(1)	$(p \lor q) \to r$		Ann.
2	(2)	$(r \lor s) \to t$		Ann.
3	(3)	p		ZA
3	(4)	$p \lor q$	*3*	∨-Einf.
1, 3	(5)	r	*1, 4*	MP
1, 3	(6)	$r \lor s$	*5*	∨-Einf.
1, 2, 3	(7)	t	*2, 6*	MP
1, 2	(8)	$p \to t$	*3, 7*	→-Einf., q.e.d.

3.

1	(1)	$r \lor \neg r$		Ann.
2	(2)	$(p \leftrightarrow q)$		ZA
2	(3)	$(p \to q) \land (q \to p)$	*2*	↔-Bes.
2	(4)	$(p \to q)$	*3*	∧-Bes.
	(5)	$(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$	*2, 4*	→-Einf., q.e.d.

In der letzten Zeile verschwindet die letzte Abhängigkeit. Das heißt, die Zeile ist von nichts abhängig! Damit ist die Wahrheit des Satzes nur aus den Regeln von AL ableitbar und damit logisch wahr.

Lösungvorschlag F Beweise mit Zusatzannahmen II

Formalisieren Sie die folgenden Argumente und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens.

1. Wenn Sherlock Holmes Irene Adler küsst, dann existiert Sherlock Holmes.
   Wenn Sherlock Holmes oder Irene Adler existieren, dann auch James Moriarty.
   Also: Wenn Sherlock Holmes existiert, existiert auch James Moriarty.

2. Ein Schmetterling schwingt seine Flügel nicht oder es weht ein raues Lüftchen.
   Es weht kein raues Lüftchen oder es entsteht ein Tornado.
   Also: Wenn ein Schmetterling seine Flügel schwingt, entsteht ein Tornado.

Lösungsvorschlag

1. p: Sherlock Holmes küsst Irene Adler.
   q: Sherlock Holmes existiert.
   r: Irene Adler existiert.
   s: James Moriarty existiert.

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ (q \lor r) \rightarrow s \end{array}}{p \rightarrow s}$$

1	(1)	$p \rightarrow q$		Ann.
2	(2)	$(q \lor r) \rightarrow s$		Ann.
3	(3)	p		ZA
1, 3	(4)	q	*1, 3*	MP
1, 3	(5)	$q \lor r$	*4*	$\lor$-Einf.
1, 2, 3	(6)	s	*2, 5*	MP
1, 2	(7)	$p \rightarrow s$	*3, 6*	$\rightarrow$-Einf., q.e.d.

2. p: Ein Schmetterling schwingt seine Flügel.
   q: Es weht ein raues Lüftchen.
   r: Ein Tornado entsteht.

$$\frac{\begin{array}{l} \neg p \lor q \\ \neg q \lor r \end{array}}{p \rightarrow q}$$

1	(1)	$\neg p \lor q$		Ann.
2	(2)	$\neg q \lor r$		Ann.
3	(3)	p		ZA
3	(4)	$\neg\neg p$	*3*	$\neg$-Einf.
1, 3	(5)	q	*1, 4*	DS
1, 3	(6)	$\neg\neg q$	*5*	$\neg$-Einf.
1, 2, 3	(7)	r	*2, 6*	DS
1, 2	(8)	$p \rightarrow r$	*3, 7*	$\rightarrow$-Einf., q.e.d.

Lösungvorschlag G Beweise mit Zusatzannahmen III

Formalisieren Sie die folgenden Argumente und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens.

1. Der Produzent muss, wenn der Film nicht floppt, ebenso wenig seinen Hut nehmen. Denn wenn der Film weder floppt noch ein Skandal wird, dann muss der Produzent auch nicht seinen Hut nehmen. Bleiben die Kassen leer, dann floppt der Film. Aus Erfahrung wissen wir aber, dass, wenn die Kassen nicht leer bleiben, der Film auch kein Skandal wird.

2. Es gibt zwei Möglichkeiten, wie Peter die Prüfung bestehen kann: er lernt stur auswendig oder er stellt einfach alle seine Fragen. Also besteht Peter die Prüfung, wenn er alle seine Fragen stellt, und er besteht die Prüfung, wenn er stur auswendig lernt.

Lösungsvorschlag

1. Wenn der Film weder floppt noch ein Skandal wird, dann muss der Produzent auch nicht seinen Hut nehmen.
   Bleiben die Kassen leer, dann floppt der Film.
   Aus Erfahrung wirssen wir aber, dass, wenn die Kassen nicht leer bleiben, der Film auch kein Skandal wird.
   Also: Der Produzent muss, wenn der Film nicht floppt, ebenso wenig seinen Hut nehmen.

   p: Der Produzent muss seinen Hut nehmen.
   q: Der Film floppt.
   r: Der Film wird ein Skandal.
   s: Die Kassen bleiben leer.

$$\frac{(\neg q \land \neg r) \to \neg p \quad s \to q \quad \neg s \to \neg r}{\neg q \to \neg p}$$

1	(1)	$(\neg q \land \neg r) \to \neg p$		Ann.
2	(2)	$s \to q$		Ann.
3	(3)	$\neg s \to \neg r$		Ann.
4	(4)	$\neg q$		ZA
2, 4	(5)	$\neg s$	*2, 4*	MT
2, 3, 4	(6)	$\neg r$	*3, 5*	MP
2, 3, 4	(7)	$\neg q \land \neg r$	*4, 6*	$\land$-Einf.
1, 2, 3, 4	(8)	$\neg p$	*1, 7*	MP
1, 2, 3	(9)	$\neg q \to \neg p$	*4, 8*	$\to$-Einf., q.e.d.

2. Wenn Peter stur auswendig lernt oder alle seine Fragen stelt, besteht er die Prüfung.
   Also: Peter besteht die Prüfung, wenn er alle seine Fragen stellt, und er besteht die Prüfung, wenn er stur auswendig lernt.

   p: Peter stellt alle seine Fragen.
   q: Peter lernt stur auswendig.
   r: Peter besteht die Prüfung.

$$\frac{(p \lor q) \to r}{(p \to r) \land (q \to r)}$$

1	(1)	$(p \lor q) \to r$		Ann.
2	(2)	p		ZA
2	(3)	$p \lor q$	*2*	$\lor$-Einf.
1, 2	(4)	r	*1, 3*	MP

1	(5)	$p \to r$	*2, 4*	$\to$-Einf.
6	(6)	q		ZA
6	(7)	$p \lor q$	*6*	$\lor$-Einf.
1, 6	(8)	r	*1, 7*	MP
1	(9)	$q \to r$	*6, 8*	$\to$-Einf.
1	(10)	$(p \to r) \land (q \to r)$	*5, 9*	$\land$-Einf., q.e.d.

Lösungvorschlag H Reductio ad absurdum I

Beweisen Sie die folgenden Argumente mit dem Kalkül des natürlichen Schließens durch einen indirekten Beweis.

1. $\dfrac{p \land q}{p \to q}$

2. $\dfrac{\begin{array}{l} p \to q \\ p \to r \end{array}}{p \to (q \to r)}$

3. $\dfrac{\neg(p \leftrightarrow r) \land \neg r}{p}$

Lösungsvorschlag

1.

1	(1)	$p \land q$		Ann.
2	(2)	$\neg(p \to q)$		ZA
2	(3)	$p \land \neg q$	*2*	$\to$-Ers.
1	(4)	q	*1*	$\land$-Bes.
2	(5)	$\neg q$	*3*	$\land$-Bes.
1	(6)	$\neg\neg(p \to q)$	*2, 4, 5*	RAA
1	(7)	$p \to q$	*6*	$\neg$-Bes., q.e.d.

2.

1	(1)	$p \to q$		Ann.
2	(2)	$p \to r$		Ann.
3	(3)	p		ZA
1, 3	(4)	q	*1, 3*	MP
2, 3	(5)	r	*2, 3*	MP
6	(6)	$\neg(q \to r)$		ZA
6	(7)	$q \land \neg r$	*6*	$\to$-Ers.
6	(8)	$\neg r$	*7*	$\land$-Bes.
2, 3	(9)	$\neg\neg(q \to r)$	*5, 6, 8*	RAA
2, 3	(10)	$q \to r$	*9*	$\neg$-Bes.
2	(11)	$p \to (q \to r)$	*3, 10*	$\to$-Einf., q.e.d.

3.

1	(1)	$\neg(p \leftrightarrow r) \land \neg r$		Ann.
1	(2)	$\neg(p \leftrightarrow r)$	*1*	$\land$-Bes.
1	(3)	$\neg r$	*1*	$\land$-Bes.
1	(4)	$\neg((p \to r) \land (r \to p))$	*2*	$\leftrightarrow$-Best.
1	(5)	$\neg(p \to r) \lor \neg(r \to p)$	*4*	DM
6	(6)	$\neg(r \to p)$		ZA
6	(7)	$r \land \neg p$	*6*	$\to$-Ers.

6	(8)	r	7	$\wedge$-Bes.
1	(9)	$\neg\neg(r \to p)$	3, 6, 8	RAA
1	(10)	$\neg(p \to r)$	5, 9	DS
1	(11)	$p \wedge \neg r$	10	$\to$-Ers.
1	(12)	p	11	$\wedge$-Bes., q.e.d.

Lösungvorschlag IReductio ad absurdum II

Formalisieren Sie die folgenden Argumente und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens durch einen indirekten Beweis.

1. Es regnet und schneit.
   Also: Es regnet oder schneit.
2. Wenn St. Nikolaus durch die Nacht zieht, dann bekommt Peter, vorausgesetzt er war artig, Geschenke.
   Also: Peter bekommt Geschenke, wenn St. Nikolaus durch die Nacht zieht und Peter artig war.
3. Es ist wahr, dass es morgen regnet und der Hahn heute kräht, oder, dass es morgen regnet und der Hahn nicht kräht.
   Also: Morgen regnet es.

Lösungsvorschlag

1. p: Es regnet.
   q: Es schneit.

$$\frac{p \wedge q}{p \vee q}$$

1	(1)	$p \wedge q$		Ann.
2	(2)	$\neg(p \vee q)$		ZA
2	(3)	$\neg p \wedge \neg q$	2	DM
1	(4)	p	1	$\wedge$-Bes.
2	(5)	$\neg p$	3	$\wedge$-Bes.
1	(6)	$\neg\neg(p \vee q)$	2, 4, 5	RAA
1	(7)	$p \vee q$	6	$\neg$-Bes., q.e.d.

2. p: St. Nikolaus zieht durch die Nacht.
   q: Peter war artig.
   r: Peter bekommt Geschenke.

$$\frac{p \to (q \to r)}{(p \wedge q) \to r}$$

1	(1)	$p \to (q \to r)$		Ann.
2	(2)	$\neg((p \wedge q) \to r)$		ZA

2	(3)	$(p \land q) \land \neg r$	2	→-Ers.
2	(4)	$p \land q$	3	∧-Bes.
2	(5)	p	4	∧-Bes.
2	(6)	q	4	∧-Bes.
1, 2	(7)	$q \to r$	1, 5	MP
1, 2	(8)	r	6, 7	MP
2	(9)	$\neg r$	3	∧-Bes.
1	(10)	$\neg\neg((p \land q) \to r)$	2, 8, 9	RAA
1	(11)	$(p \land q) \to r$	10	¬-Bes., q.e.d.

3. p: Morgen regnet es.
   q: Heute kräht der Hahn.

$$\frac{(p \land q) \lor (p \land \neg q)}{p}$$

1	(1)	$(p \land q) \lor (p \land \neg q)$		Ann.
2	(2)	$\neg p$		ZA
3	(3)	$p \land \neg q$		ZA
3	(4)	p	3	∧-Bes.
2	(5)	$\neg(p \land \neg q)$	2, 3, 4	RAA
1, 2	(6)	$p \land q$	1, 5	DS
1, 2	(7)	p	6	∧-Bes.
1	(8)	$\neg\neg p$	2, 7	RAA
1	(9)	p	8	¬-Bes., q.e.d.

Lösungvorschlag J Reductio ad absurdum III

Formalisieren Sie die folgenden Argumente und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens durch einen indirekten Beweis.

1. Morgen wird es wohl regnen. Das ist plausibel, denn ist es sowohl wahr, dass es morgen regnet oder heute der Hahn kräht, als auch, dass es morgen regnet oder heute nicht der Hahn kräht.

2. Unmissverständlich geht die Sonne auf, wenn drei Passauer Pappe pressen. Denn wenn drei Passauer Pappe pressen, dann geht, sofern Sigismund Berta liebt, die Sonne auf. Es ist jedoch nicht der Fall, dass drei Passauer Pappe pressen genau dann, wenn der linksgetiftelte Raftenzügler den Kauzriemen schmirgelt, denn wenn Sigismund nicht Berta liebt, dann schmirgelt der linksgetiftelte Raftenzügler den Kauzriemen auf keinen Fall.

Lösungsvorschlag

1. Sowohl ist wahr, dass es morgen regnet oder heute der Hahn kräht, als auch, dass es morgen regnet oder heute der Hahn nicht kräht.

Also: Morgen regnet es.

p: Morgen regnet es.
q: Heute kräht der Hahn.

$$\frac{(p \lor q) \land (p \lor \neg q)}{p}$$

1	(1)	$(p \lor q) \land (p \lor \neg q)$		Ann.
1	(2)	$p \lor q$	1	$\land$-Bes.
1	(3)	$p \lor \neg q$	1	$\land$-Bes.
4	(4)	$\neg p$		ZA
1, 4	(5)	q	2, 4	DS
1, 4	(6)	$\neg q$	3, 4	DS
1	(7)	$\neg\neg p$	4, 5, 6	RAA
1	(8)	p	7	$\neg$-Bes., q.e.d.

2. Wenn drei Passauer Pappe pressen, dann geht, wenn Sigismund Berta liebt, die Sonne auf.
Es ist nicht der Fall, dass drei Passauer Pappe pressen genau dann, wenn der linksgetiftelte Raftenzügler den Kauzriemen schmirgelt.
Wenn Sigismund Berta nicht liebt, dann schmirgelt der linksgetiftelte Raftenzügler den Kauzriemen auf keinen Fall.
Also: Wenn drei Passauer Pappe pressen, dann geht die Sonne auf.

q: Sigismund liebt Berta.
r: Der linksgetiftelte Raftenzügler schmirgelt den Kauzriemen.
s: Drei Passauer pressen Pappe.
t: Die Sonne geht auf.

$$\begin{array}{l} s \to (q \to t) \\ \neg(s \leftrightarrow r) \\ \neg q \to r \\ \hline s \to t \end{array}$$

1	(1)	$s \to (q \to t)$		Ann.
2	(2)	$\neg(s \leftrightarrow t)$		Ann.
3	(3)	$\neg q \to r$		Ann.
4	(4)	$\neg(s \to t)$		ZA
4	(5)	$s \land \neg t$	4	$\to$-Ers.
4	(6)	s	5	$\land$-Bes.
4	(7)	$\neg t$	5	$\land$-Bes.
1, 4	(8)	$q \to t$	1, 6	MP
1, 4	(9)	$\neg q$	7, 8	MT
1, 3, 4	(10)	r	3, 9	MP
2	(11)	$\neg((s \to r) \land (r \to s))$	2	$\leftrightarrow$-Bes.
2	(12)	$\neg(s \to r) \lor \neg(r \to s)$	11	DM
13	(13)	$\neg(s \to r)$		ZA
13	(14)	$s \land \neg r$	13	$\to$-Ers.

13	(15)	$\neg r$	*14*	$\wedge$-Bes.
1, 3, 4	(16)	$\neg\neg(s \to r)$	*10, 13, 15*	RAA
1, 2, 3, 4	(17)	$\neg(r \to s)$	*12, 16*	DS
1, 3, 4	(18)	$r \wedge \neg s$	*16*	$\to$-Ers.
1, 3, 4	(19)	$\neg s$	*18*	$\wedge$-Bes.
1, 3	(20)	$\neg\neg(s \to t)$	*6, 19*	RAA
1, 3	(21)	$s \to t$	*20*	$\neg$-Bes., q.e.d.

Lösungvorschlag 1 Aussagenlogisches Rätsel

Wer sagt die Wahrheit, wer lügt und wie kommen Sie darauf?

Erhöhte Schwierigkeit: Schaffen Sie es, ihre Lösung des Rätsels mit Hilfe des Kalkül des natürlichen Schließens zu beweisen?

Im Land der Lügner gibt es zwei Arten von Menschen: Lügner, die nur falsche Sätze äußern und Wahrsager, die nur wahre Sätze äußern. Auf ihrer Reise durch dieses Land begegnen Sie drei Einheimischen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

$\mathcal{A}$ sagt: „Wenn ich ein Wahrsager bin, dann ist $\mathcal{B}$ ein Lügner.“
$\mathcal{B}$ sagt: „Ich bin genau dann ein Wahrsager, wenn $\mathcal{C}$ einer ist.“

Wer lügt und wer sagt die Wahrheit?

Lösungsvorschlag

Metasprachlicher Lösungsvorschlag:

1. $\mathcal{A}$ meint, dass, wenn $\mathcal{A}$ die Wahrheit sagt, $\mathcal{B}$ lügt.
2. Angenommen $\mathcal{A}$ lügt.
3. *Aus [1., 2.]:* Dann ist es nicht der Fall, dass, wenn $\mathcal{A}$ ein Wahrsager ist, $\mathcal{B}$ ein Lügner ist.
4. *Aus [3.]:* Diese Aussage ist nur falsch, wenn $\mathcal{A}$ die Wahrheit sagt und $\mathcal{B}$ nicht lügt. Einmal soll $\mathcal{A}$ also die Wahrheit sagen, einmal soll $\mathcal{A}$ lügen. Daher war die Annahme, das $\mathcal{A}$ lügt, falsch.
5. *Aus [4.]:* $\mathcal{A}$ muss die Wahrheit sagen.
6. *Aus [1., 5.]:* Wenn $\mathcal{A}$ die Wahrheit sagt, dann muss $\mathcal{B}$ lügen. Da $\mathcal{A}$ die Wahrheits sagt, lügt $\mathcal{B}$.
7. $\mathcal{B}$ behauptet, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ entweder zusammen lügen oder die Wahrheit sagen.
8. *Aus [6., 7.]:* Da $\mathcal{B}$ lügt, machen beide nicht die gleichen sondern unterschiedliche Dinge: $\mathcal{C}$ muss also nicht wie $\mathcal{B}$ ein Lügner sein, sondern die Wahrheit sagen.
9. *Aus [5., 6., 8.]:* $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ sind Wahrsager, $\mathcal{B}$ ist ein Lügner. QED

Lösungsvorschlag per Kalkül des natürlichen Schließens: Aus dem metasprachlichen Beweis kann man jetzt einen güligen Schluss machen, der dann nur noch mit dem Kalkül des natürlichen Schließens bewiesen werden muss. (Weitere Erklärungen, wie man auf die Prämissen kommt, ist in den Hinweisen zu dieser Aufgabe gegeben.)

p: $\mathcal{A}$ sagt die Wahrheit.
q: $\mathcal{B}$ sagt die Wahrheit.
r: $\mathcal{C}$ sagt die Wahrheit.

$$\frac{p \leftrightarrow (p \to \neg q) \quad q \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)}{p \land \neg q \land r}$$

Beweis:

1	(1)	$p \leftrightarrow (p \to \neg q)$		P
2	(2)	$q \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$		P
3	(3)	$\neg p$		ZA
1	(4)	$(p \to (p \to \neg q)) \land ((p \to \neg q) \to p)$	*1*	$\leftrightarrow$-Bes.
1	(5)	$(p \to \neg q) \to p$	*4*	$\land$-Bes.
1, 3	(6)	$\neg(p \to \neg q)$	*5, 3*	MT
1, 3	(7)	$p \land \neg\neg q$	*6*	$\to$-Ers.
1, 3	(8)	p	*7*	$\land$-Bes.
1	(9)	$\neg\neg p$	*3, 8*	RAA
1	(10)	p	*9*	$\neg$-Bes.
1	(11)	$p \to (p \to \neg q)$	*4*	$\land$-Bes.
1	(12)	$p \to \neg q$	*10, 11*	MP
1	(13)	$\neg q$	*10, 12*	MP
2	(14)	$(q \to (q \leftrightarrow r)) \land ((q \leftrightarrow r) \to q)$	*2*	$\leftrightarrow$-Bes.
2	(15)	$(q \leftrightarrow r) \to q$	*14*	$\land$-Bes.
1, 2	(16)	$\neg(q \leftrightarrow r)$	*15, 13*	MT
1, 2	(17)	$\neg(q \to r \land r \to q)$	*16*	$\leftrightarrow$-Bes.
1, 2	(18)	$\neg(q \to r) \lor \neg(r \to q)$	*17*	DM
1, 2	(19)	$(q \land \neg r) \lor (r \land \neg q)$	*18*	$\to$-Ers.
20	(20)	$q \land \neg r$		ZA
20	(21)	q	*20*	$\land$-Bes.
1	(22)	$\neg(q \land \neg r)$	*13, 20, 21*	RAA
1, 2	(23)	$r \land \neg q$	*22, 19*	DS
1, 2	(24)	$p \land \neg q \land r$	*10, 23*	$\land$-Einf.

Damit gilt: $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ sind Wahrsager, $\mathcal{B}$ ist ein Lügner. QED

Die Schritte im Kalkül sind die gleichen wie die, des metasprachlichen Lösungsvorschlags. Diese Aufgabe ist eine gute Übung zum Lernen der Umformungsregeln, allein im Kalkül wird man jedoch wahrscheinlich nicht auf die richtige Lösung kommen, dazu ist es zu abstrakt.