Logik-Tutorium #11

Beweise mit dem prädikatenlogischen KdnS #2

Tristan Pieper

Wintersemester 2024/2025

Mittwoch, 15.01.2025

Ziele für die Sitzung

Innerhalb der nächsten Wochen kann ich...

[PL1] Aussagesätze in PL formalisieren.

[PL2] Beweise mit dem prädikatenlogischen Kalkül des natürlichen Schließens führen.

Dazu kann ich nach der Sitzung...

1. ... die Regeln QT, $\forall$-Bes., $\exists$-Einf. anwenden.
2. ... die Regeln $\forall$-Einf., $\exists$-Bes. und ihre Einschränkungen erklären.

Erwärmung

Aufgabe

Beweisen Sie, dass p logisch aus $\neg(r \lor \neg q)$ und $r \land q$ folgt!

Bildung von Sätzen durch Ersetzung

Definition

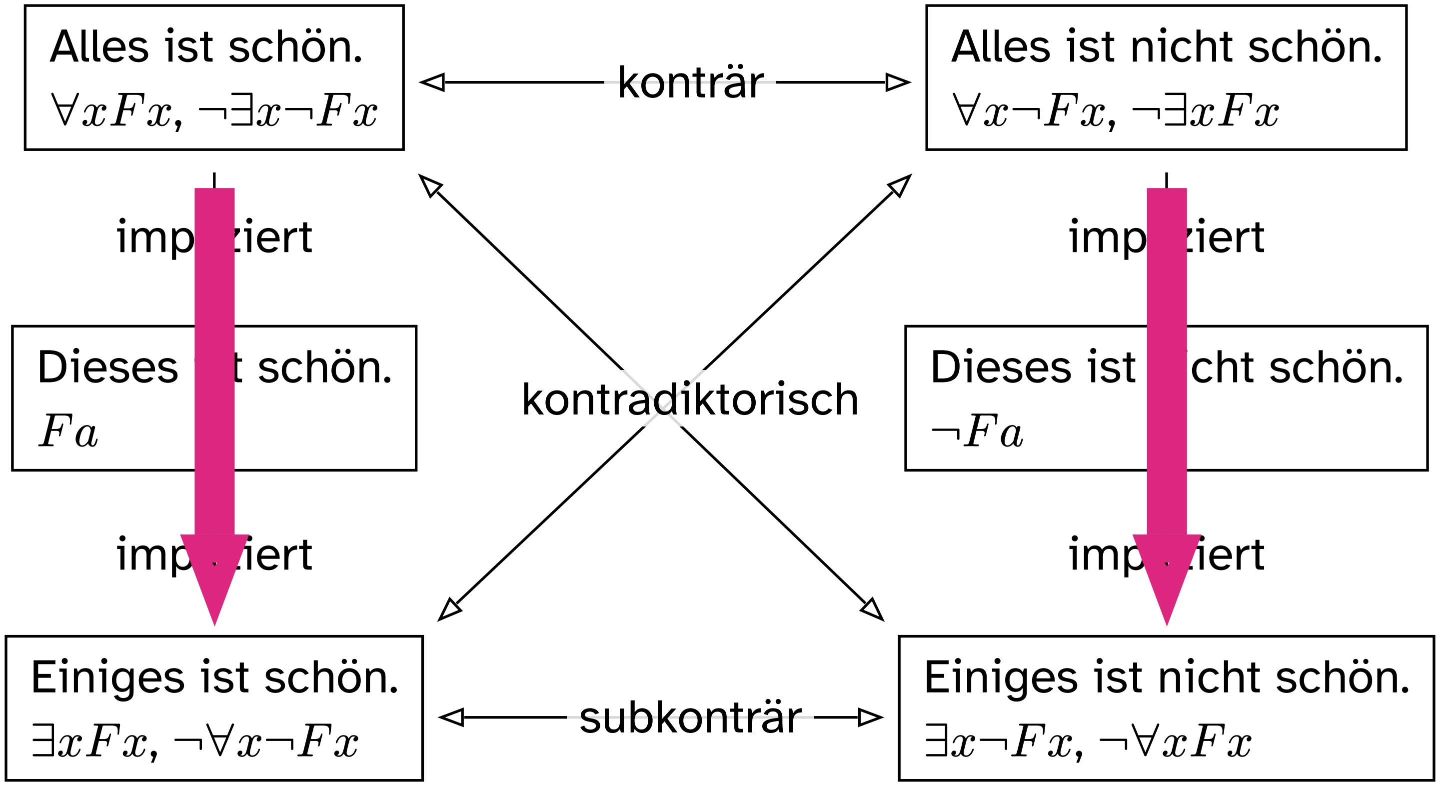
Wenn α ein Satz ist und eine Zeichenkette β in α vorkomt, dann ist $\alpha[\beta/\gamma]$ der Satz, der aus α entsteht, wenn man β darin durch eine Zeichenkette γ *einheitlich* ersetzt.

Beispiel

α = „Hier ist etwas."
$\alpha[\text{etwas}/\text{nichts}]$ = „Hier ist nichts."

$\forall$-Bes., $\exists$-Einf.

Sie befinden sich hier



Allquantorbeseitigung

Definition

Wenn α ein Satz ist, π eine Individuenkonstante und ψ eine Individuenvariable ist, die in α vorkommt, dann ist die $\forall$**-Beseitigung** erlaubt.

$$\frac{\forall\psi\alpha}{\alpha[\psi/\pi]}$$

Beispiel

1. $$\frac{\begin{array}{l}\forall x\forall y(Fx \to (Gx \land Bxy))\\ Fb\end{array}}{Gb \land Bbc}$$

2. $$\frac{\begin{array}{l}\neg\exists xFx\\ Fa \lor Ga\end{array}}{Ga}$$

Existenzquantoreinführung

Definition

Wenn …

1. α ein Satz ist,
2. π eine Individuenkonstante, *die in α vorkommt*,
3. und ψ eine Individuenvariable ist, die *nicht* in α vorkommt,

… dann ist die **∃-Einführung** erlaubt.

$$\frac{\alpha}{\exists\psi\alpha[\pi/\psi]}$$

Beispiel

1. $$\frac{\neg Fab}{\neg \forall x Fxb}$$

2. $$\frac{\begin{array}{l} Fab \leftrightarrow \neg Gbc \\ Fab \end{array}}{\exists x (Fax \land \neg Gxc)}$$

Eine kleine Problematik über Spezialfälle

Aufgabe

1. Entscheiden Sie begründet, ob die Existenzquantoreinführung korrekt durchgeführt wurde!
2. Beurteilen Sie die Gültigkeit des folgenden Schlusses!

$$\frac{Faa}{\exists x Fxa}$$

(1)	Faa		Ann.
(2)	$\exists x Fxa$	1	$\exists$-Bes.

Übung

Aufgabe

Beweisen Sie, dass folgender Schluss gültig ist!

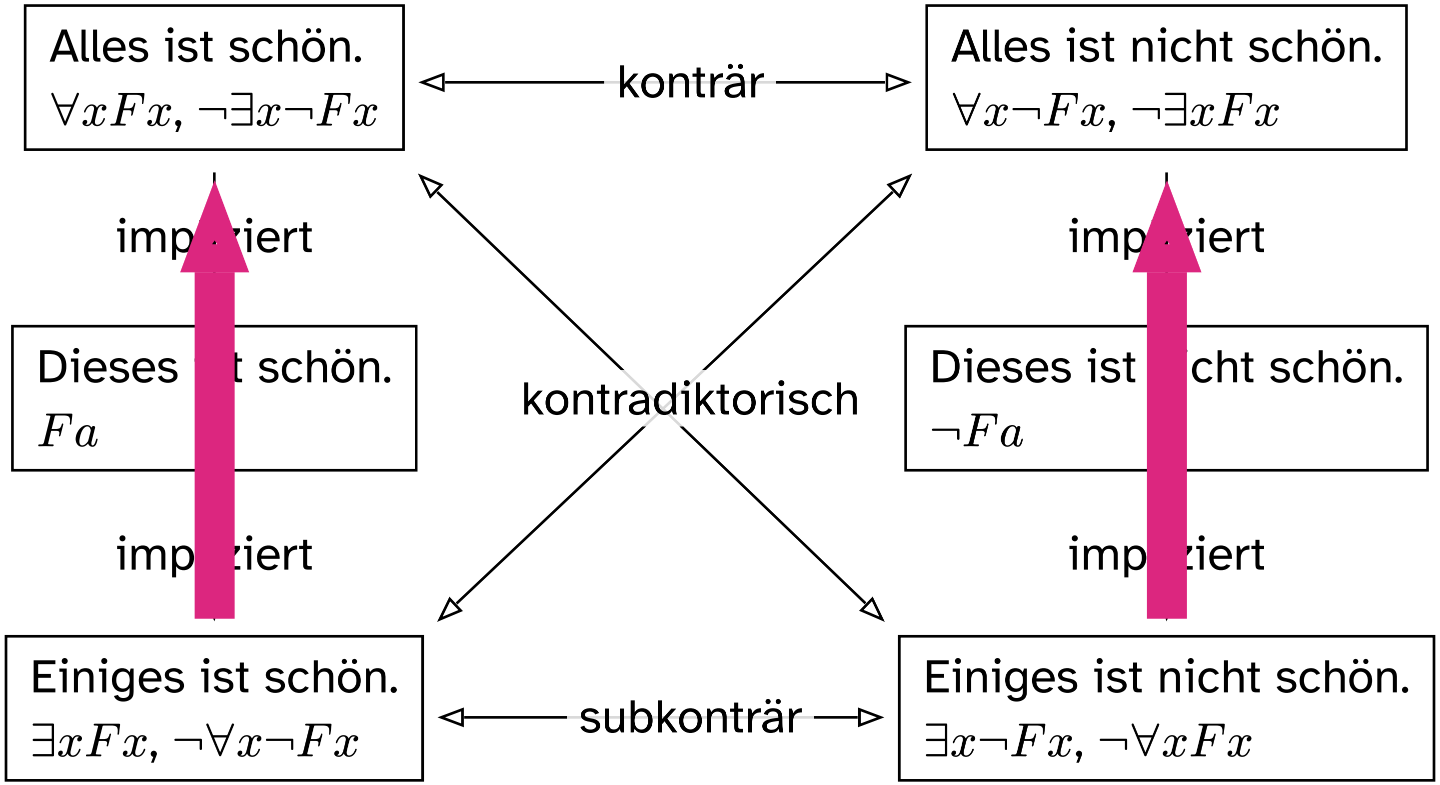
„Menschen handeln zielortientiert. Also gibt es Menschen, die zielorientiert handeln.“

Zusatz

Beweisen Sie, dass der Schluss $\exists x Fx \vDash_{\text{PL}} \exists y Fy$ gültig ist.

$\exists$-Bes., $\forall$-Einf.

Sie befinden sich hier



Existenzquantorbeseitigung

Definition

Wenn α ein Satz ist, π eine Individuenkonstante und ψ eine Individuenvariable ist, dann darf die $\exists$-Beseitigung unter folgenden Einschränkungen angewendet werden:

1. π kommt weder in den Ann. noch in der Konklusion vor.
2. π wurde zuvor nicht schonmal mit einer $\exists$-Bes. eingeführt.
3. π kommt nicht bereits in α vor.

$$\frac{\exists\psi\alpha}{\alpha[\psi/\pi]}$$

Beispiel

1. $$\frac{\begin{array}{l}\forall x(Fx \lor Gx)\\ \exists x\neg Fx\end{array}}{\exists yGy}$$

2. $$\frac{\neg\forall x\neg(Fx \land Gx)}{\exists xFx \land \exists yFy}$$

3. $$\frac{\forall x\exists yFxy}{\exists xFxx}$$

Allquantoreinführung

Definition

Wenn α ein Satz ist, π eine Individuenkonstante, die in α vorkommt, und ψ eine Individuenvariable, die nicht in α vorkommt, dann darf die $\forall$**-Einführung** unter folgenden Einschränkungen angewandt werden:

1. π kommt nicht in den Annahmen oder der Konklusion vor.
2. In α kommt keine Konstante vor, die aus einer $\exists$-Bes. stammt.

$$\frac{\alpha}{\forall\psi\alpha[\pi/\psi]}$$

Beispiel

1. $$\frac{\begin{array}{l}\forall x(Fx \to Gx)\\ \forall x(Gx \to Hx)\end{array}}{\forall x(Fx \to Hx)}$$

2. $$\frac{\forall x Fx \land \forall x \forall y Gxy}{\forall x \forall y \forall z(Fx \land Gyz)}$$

Übung

Aufgabe

Beweisen Sie das Daimonen-Argument mit dem prädikatenlogischen Kalkül des natürlichen Schließens!

„Es gibt Daimonen. Also gibt es auch Götter, denn alle Daimonen sind Kinder von Göttern.“

Fassen Sie in einem Satz zusammen, was Sie aus der heutigen Sitzung mitnehmen!

Folien, Übungsblätter, Ablaufplan, Konzepte und Sourcecode:
https://github.com/piepert/logik-tutorium-wise2023-2024