Aufgabenblatt 10

Aufgabe A — Prädikatenlogische Formalisierung

Formalisieren Sie die folgenden PL-Sätze!

1. Auch ein blindes Huhn findet mal ein Korn.
2. Niemand hat Lust auf den Schokokuchen von Oma.
3. Jeder Dussel hat mindestens einen Fussel.
4. Niemand hat Lust auf Schokokuchen.
5. Das sind die Weisen, die durch den Irrtum zur Wahrheit reisen; die bei dem Irrtum verharren, das sind die Narren.
6. Wenn jeder jedem hilft, helfen einige sich selbst.
7. Ein Auto hat vier Räder.

Aufgabe B — Begründung der ∀-Beseitigung *(„universelle Spezialisierung“)*

Erklären Sie an einem Beispiel, warum Sie den Allquantor beseitigen dürfen. Zeigen Sie anhand des Beispiels, wie Sie dazu vorgehen müssen. Nennen Sie außerdem typische Fehler, die auftreten können!

Aufgabe C — Begründung der ∃-Einführung *(„existenzielle Generalisierung“)*

Erklären Sie an einem Beispiel, warum Sie den Existenzquantor einführen dürfen. Zeigen Sie anhand des Beispiels, wie Sie dazu vorgehen müssen. Nennen Sie außerdem typische Fehler, die auftreten können!

Aufgabe D — ∀-Beseitigung I

Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. $$\frac{\begin{array}{l}\forall x(Fx \to Gx)\\ Fa\end{array}}{Ga}$$

2. $$\frac{\begin{array}{l}\forall x(Hx \to Gx)\\ \forall x \forall y(\neg Hx \to Gy)\end{array}}{Gc}$$

Aufgabe E — ∀-Beseitigung II

Formalisieren Sie die folgenden Schlüsse und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. Alles liebt Bob.
   Wenn Peter Bob liebt, dann ist Peter verliebt.
   Also: Peter ist verliebt.

2. Verbrecher ist man genau dann, wenn man ein Verbrechen begangen hat.
   Man hat ein Verbrechen begangen oder man wurde nicht zurecht bestraft.
   Claudius wurde zurecht bestraft.
   Also: Claudius ist ein Verbrecher.

Aufgabe F — ∀-Beseitigung III

Bringen Sie die folgenden Schlüsse in die Normalform, formalisieren und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. Wenn Alice ein Gott ist, kann sie den großen See beeinflussen, denn alle Götter können alles beeinflussen.
2. Wenn Peter Wasser trinkt, wird er nicht so schnell krank. Denn es ist allgemein bekannt, dass, wenn jemand Wasser trinkt, dieser hydriert wird. Und wenn jemand hydriert wird, wird dieser nicht so schnell krank.

Aufgabe G — ∃-Einführung I

Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. $\dfrac{Fa \land Fb}{\exists x F x}$

2. $\dfrac{Ga \to (Fba \to Fab)}{(Ga \land Fba) \to \exists x F x b}$

Aufgabe H — ∃-Einführung II

Formalisieren Sie die folgenden Schlüsse und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. Verina ist eine Hexe.
   Wenn es Hexen gibt, dann gibt es Dinge, die zaubern können.
   Also: Also gibt es Dinge, die zaubern können.
2. Alle helfen allen.
   Also: Es gibt jemanden, der allen hilft.

Aufgabe I — ∃-Einführung III

Bringen Sie den folgenden Schluss in die Normalform, formalisieren und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

Alle Dinge stammen aus der Erfahrung. Also gibt es Dinge, die aus der Erfahrung stammen und wechselwirken, denn alle Dinge wechselwirken.

Aufgabe J — Quantorentausch I

Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. $\dfrac{\forall x \neg F x}{\neg \exists x F x}$
2. $\dfrac{\forall x G x}{F a \to \neg \exists x \neg G x}$

Aufgabe K — Quantorentausch II

Bringen Sie die folgenden Schlüsse in die Normalform, formalisieren und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

Wenn es einen Gott gibt, dann hat er alles gemacht. Also gilt: Wenn es einen Gott gibt, dann gibt es nichts, was er nicht gemacht hat.

Lösungvorschläge – Aufgabenblatt 10

Lösungvorschlag APrädikatenlogische Formalisierung

Formalisieren Sie die folgenden PL-Sätze!

1. Auch ein blindes Huhn findet mal ein Korn.
2. Niemand hat Lust auf den Schokokuchen von Oma.
3. Jeder Dussel hat mindestens einen Fussel.
4. Niemand hat Lust auf Schokokuchen.
5. Das sind die Weisen, die durch den Irrtum zur Wahrheit reisen; die bei dem Irrtum verharren, das sind die Narren.
6. Wenn jeder jedem hilft, helfen einige sich selbst.
7. Ein Auto hat vier Räder.

Lösungsvorschlag

1. Bx: x ist blind.
   Hx: x ist ein Huhn.
   Kx: x ist ein Korn.
   Fxy: x findet y.

   $\exists x(Bx \land Hx \land \exists y(Kxy \land Fxy))$

   oder

   $\exists x \exists y(Bx \land Hx \land Kxy \land Fxy)$
2. Lxy: x hat Lust auf y.

   a: der Schokokuchen von Oma

   $\neg \exists x Lxa$

   oder

   Kx: x ist ein Schokokuchen.
   Bxy: x hat y gebacken.

   b: Oma

   $\neg \exists x \exists y(Lxy \land Ky \land Bby)$
3. Dx: x ist ein Dussel.
   Gx: x ist ein Fussel.
   Hx: x hat 'nen y.

   $\forall x(Dx \to \exists y(Gy \land Hxy))$
4. Sx: x ist ein Schokokuchen.
   Gxy: x hat Lust auf y.

   $\forall x(Sx \to \neg \exists y(Lxy))$

5. Hxy: x hilft y.

   $\forall x \forall y Hxy \to \exists x Hxx$

6. Ax: x ist ein Auto.
   Rx: x hat vier Räder.

   $\forall x(Ax \to Rx)$

7. Nx: x ist ein Narr.
   Wx: x ist ein Weiser.
   Ix: x ist Irrtum.
   Ax: x ist Wahrheit.
   Rxy: x reist durch y zu z.
   Vxy: x verharrt bei y.

   $\forall x((Wx \to \forall y \exists z((Iy \land Az) \to Rxyz)) \land (Nx \to \exists y(Iy \land Vxy)))$

   Man könnte auch argumentieren, dass mit „verharren“ gemeint ist, dass es bei Narren Irrtümer gibt, bei denen es keine Wahrheit gibt, zu der sie durch den Irrtum gereist sind. Dann erhält man folgendes:
   $\forall x((Wx \to \forall y \exists z((Iy \land Az) \to Rxyz)) \land (Nx \to$
   $\exists y \neg \exists z((Iy \land Az) \to Rxyz)))$

   Vielleicht haben Sie schon bemerkt, dass die notwendige Bedingung für Wx und die notwendige Bedingung für Nx hier kontradiktorisch sind. Das sieht man einfacher, wenn man beide aufteilt und untereinanderschreibt:

   - $\forall x\Big(Wx \to \underline{\forall y \exists z((Iy \land Az) \to Rxyz)}\Big)$
   - $\forall x\Big(Nx \to \underline{\exists y \neg \exists z((Iy \land Az) \to Rxyz)}\Big)$

   Die notwendige Bedingungen folgen einmal dem Schema „$\forall y \alpha$“ und einmal „$\exists y \neg \alpha$“. Laut dem logischen Quadrat sind diese Sätze kontradiktorisch. Das heißt, dass ein Narr jemand ist, der nicht weise ist. Die Narren sind dann die Nicht-Weisen. Das kann man wie folgt festhalten:

   $\forall x(Nx \to \neg Wx)$

   Wenn Sie die beiden Punkte als Prämissen annehmen, können Sie das sogar mit dem Kalkül des natürlichen Schließens ableiten. (Das wäre eine gute Klausurvorbereitung!) Die Übersetzung kann nun also wie folgt vereinfacht werden:

   $\forall x((Wx \to \forall y \exists z((Iy \land Az) \to Rxyz)) \land (Nx \to \neg Wx))$

Lösungvorschlag B Begründung der ∀-Beseitigung *(„universelle Spezialisierung“)*

Erklären Sie an einem Beispiel, warum Sie den Allquantor beseitigen dürfen. Zeigen Sie anhand des Beispiels, wie Sie dazu vorgehen müssen. Nennen Sie außerdem typische Fehler, die auftreten können!

Lösungsvorschlag

Wenn alle Menschen sterblich sind, gilt auch, dass wenn Peter ein Mensch ist, er sterblich ist. Da der Allquantor für alle Dinge gilt, ist es egal, über welches Ding die Aussage gemacht wird. Man wendet die ∀-Beseitigung an, indem man den Quantor aus dem Satz entfernt und *alle vorher gebundenen* Variablen durch eine beliebige Konstante ersetzt.

Mx: x ist ein Mensch.
Sx: x ist sterblich.

a: Peter

$$\frac{\forall x(Mx \to Sx)}{Ma \to Sa}$$

In dem Beispiel wurde jedes x, das vorher durch den Allquantor gebunden war, durch dieselbe Konstante a ersetzt.

Ein typischer Fehler wäre…

1. zu vergessen eine Variable in die Zielkonstante umzubenennen,
2. die gleichen Variablen durch unterschiedliche Konstanten zu ersetzen oder
3. eine Variable in eine Konstante umzubenennen, die nicht zum Quantor gehört.

Lösungvorschlag CBegründung der ∃-Einführung *(„existenzielle Generalisierung“)*

Erklären Sie an einem Beispiel, warum Sie den Existenzquantor einführen dürfen. Zeigen Sie anhand des Beispiels, wie Sie dazu vorgehen müssen. Nennen Sie außerdem typische Fehler, die auftreten können!

Lösungsvorschlag

Wenn Alice mit Bob redet, dann gibt es jemanden, der mit Bob redet. Wenn also jemand etwas tut, gibt es mindestens einen, der dies tut. Das besagt die Definition des Existenzquantors. Man geht vor, indem man den Existenzquantor an den Anfang des Satzes schreibt und ein oder beliebig viele Vorkommen *derselben* Variable durch die zu bindende Variable ersetzt.

Rxy: x redet mit y.

a: Alice
b: Bob

$$\frac{Rab}{\exists x Rxb}$$

In diesem Beispiel wurde das a von Alice durch die Variable x an den eingeführten Existenzquantor gebunden.

> Ein typischer Fehler wäre es, unterschiedliche Konstanten durch die gleiche Variablen zu ersetzen.Aus Rab kann nicht $\exists xFxx$ gefolgert werden. Nur weil Alice mit Bob redet (Rab), kann man daraus nicht folgern, dass es einen gibt, der mit sich selbst redet ($\exists xRxx$).

Lösungvorschlag D∀-Beseitigung I

Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. $\forall x(Fx \to Gx)$
   Fa
   ———
   Ga

2. $\forall x(Hx \to Gx)$
   $\forall x \forall y(\neg Hx \to Gy)$
   ———
   Gc

> **Lösungsvorschlag**
>
> 1.
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | (1) | $\forall x(Fx \to Gx)$ | | Ann. |
> | (2) | Fa | | Ann. |
> | (3) | $Fa \to Ga$ | *1* | ∀-Bes. |
> | (4) | Ga | *2, 3* | MP, q.e.d. |
>
> 2.
>
> | | | | | |
> |---|---|---|---|---|
> | *1* | (1) | $\forall x(Hx \to Gx)$ | | Ann. |
> | *2* | (2) | $\forall x \forall y(\neg Hx \to Gy)$ | | Ann. |
> | *2* | (3) | $\forall y(\neg Hc \to Gy)$ | *2* | ∀-Bes. |
> | *2* | (4) | $\neg Hc \to Gc$ | *3* | ∀-Bes. |
> | *1* | (5) | $Hc \to Gc$ | *1* | ∀-Bes. |
> | *6* | (6) | $\neg Gc$ | | ZA |
> | *1, 6* | (7) | $\neg Hc$ | *6, 5* | MT |
> | *2, 6* | (8) | $\neg\neg Hc$ | *6, 4* | MT |
> | *1, 2* | (9) | $\neg\neg Gc$ | *6, 7, 8* | RAA |
> | *1, 2* | (10) | Gc | *9* | ¬-Bes., q.e.d. |

Lösungvorschlag E∀-Beseitigung II

Formalisieren Sie die folgenden Schlüsse und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. Alles liebt Bob.
   Wenn Peter Bob liebt, dann ist Peter verliebt.
   Also: Peter ist verliebt.

2. Verbrecher ist man genau dann, wenn man ein Verbrechen begangen hat.
   Man hat ein Verbrechen begangen oder man wurde nicht zurecht bestraft.
   Claudius wurde zurecht bestraft.
   Also: Claudius ist ein Verbrecher.

Lösungsvorschlag

1. Fxy: x ist liebt y.
   Gx: x ist verliebt.

   a: Peter
   b: Bob

   $$\frac{\forall x Fxb \quad Fab \rightarrow Ga}{Ga}$$

(1)	$\forall x Fxb$		Ann.
(2)	$Fab \rightarrow Ga$		Ann.
(3)	Fab	*1*	$\forall$-Bes.
(4)	Ga	*1, 2*	MP, q.e.d.

2. Fx: x ist ein Verbrecher.
   Gx: x hat ein Verbrechen begangen.
   Hx: x wird zurecht bestraft.

   c: Claudius

   $$\frac{\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \quad \forall x(Gx \lor \neg Hx) \quad Hc}{Fc}$$

(1)	$\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$		Ann.
(2)	$\forall x(Gx \lor \neg Hx)$		Ann.
(3)	Hc		Ann.
(4)	$Gc \lor \neg Hc$	*2*	$\forall$-Bes.
(5)	$\neg\neg Hc$	*3*	$\neg$-Einf.
(6)	Gc	*4, 5*	DS
(7)	$Fc \leftrightarrow Gc$	*1*	$\forall$-Bes.
(8)	$(Fc \rightarrow Gc) \land (Gc \rightarrow Fc)$		$\leftrightarrow$-Bes.
(9)	$Gc \rightarrow Fc$	*8*	$\land$-Bes.
(10)	Fc	*6, 9*	MP, q.e.d.

Lösungvorschlag F$\forall$-Beseitigung III

Bringen Sie die folgenden Schlüsse in die Normalform, formalisieren und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. Wenn Alice ein Gott ist, kann sie den großen See beeinflussen, denn alle Götter können alles beeinflussen.

2. Wenn Peter Wasser trinkt, wird er nicht so schnell krank. Denn es ist allgemein bekannt, dass, wenn jemand Wasser trinkt, dieser hydriert wird. Und wenn jemand hydriert wird, wird dieser nicht so schnell krank.

Lösungsvorschlag

1. | | |
   |---|---|
   | | Alle Götter können alles beeinflussen. |
   | Also: | Wenn Alice ein Gott ist, kann sie den großen See beeinflussen. |

   Fx: x ist ein Gott.
   Gxy: x kann y beeinflussen.

   a: Alice
   b: der große See

   $$\frac{\forall x \forall y (Fx \rightarrow Gy)}{Fa \rightarrow Fb}$$

(1)	$\forall x \forall y (Fx \rightarrow Gy)$		Ann.
(2)	$\forall y (Fa \rightarrow Gy)$	1	∀-Bes.
(3)	$Fa \rightarrow Gb$	2	∀-Bes., q.e.d.

2. | | |
   |---|---|
   | | Wenn jemand Wasser trinkt, wird dieser hydriert. |
   | | Wenn jemand hydriert wird, wird dieser nicht so schnell krank. |
   | Also: | Wenn Peter Wasser trinkt, wird er nicht so schnell krank. |

   Fx: x trinkt Wasser.
   Gx: x wird hydriert.
   Hx: x wird nicht so schnell krank.

   a: Peter

   $$\frac{\forall x (Fx \rightarrow Gx) \quad \forall x (Gx \rightarrow Hx)}{Fa \rightarrow Ha}$$

1	(1)	$\forall x (Fx \rightarrow Gx)$		Ann.
2	(2)	$\forall x (Gx \rightarrow Hx)$		Ann.
3	(3)	Fa		ZA
1	(4)	$Fa \rightarrow Ga$	1	∀-Bes.
1, 3	(5)	Ga	3, 4	MP
2	(6)	$Ga \rightarrow Ha$	2	∀-Bes.
1, 2, 3	(7)	Ha	5, 6	MP
1, 2	(8)	$Fa \rightarrow Ha$	3, 7	→-Einf., q.e.d.

Lösungvorschlag G∃-Einführung I

Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. $\underline{Fa \land Fb}$ 2. $\underline{Ga \rightarrow (Fba \rightarrow Fab)}$

$$\frac{}{\exists x Fx} \qquad \frac{}{(Ga \land Fba) \to \exists x Fxb}$$

Lösungsvorschlag

1.

(1)	$Fa \land Fb$		Ann.
(2)	Fa	*1*	$\land$-Bes.
(3)	$\exists x Fx$	*2*	$\exists$-Einf., q.e.d.

2.

1	(1)	$Ga \to (Fba \to Fab)$		Ann.
2	(2)	$\neg((Ga \land Fba) \to \exists x Fxb)$		ZA
2	(3)	$(Ga \land Fba) \land \neg\exists x Fxb$	*2*	$\to$-Ers.
2	(4)	$Ga \land Fba$	*3*	$\land$-Bes.
2	(5)	$\neg\exists x Fxb$	*3*	$\land$-Bes.
2	(6)	Ga	*4*	$\land$-Bes.
2	(7)	Fba	*4*	$\land$-Bes.
1, 2	(8)	$Fba \to Fab$	*1, 6*	MP
1, 2	(9)	Fab	*7, 8*	MP
1, 2	(10)	$\exists x Fxb$	*9*	$\exists$-Einf.
1, 2	(11)	$\neg\neg((Ga \land Fba) \to \exists x Fxb)$	*5, 10, 3*	RAA
1, 2	(12)	$(Ga \land Fba) \to \exists x Fxb$	*11*	$\neg$-Bes., q.e.d.

Lösungvorschlag H$\exists$-Einführung II

Formalisieren Sie die folgenden Schlüsse und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. Verina ist eine Hexe.
   Wenn es Hexen gibt, dann gibt es Dinge, die zaubern können.
   Also: Also gibt es Dinge, die zaubern können.
2. Alle helfen allen.
   Also: Es gibt jemanden, der allen hilft.

Lösungsvorschlag

1. Fx: x ist eine Hexe.
   Gx: x kann zaubern.

   a: Verina

$$\frac{Fa \qquad \exists x Fx \to \exists x Gx}{\exists x Gx}$$

(1)	Fa		Ann.
(2)	$\exists x Fx \to \exists x Gx$		Ann.
(3)	$\exists x Fx$	*1*	$\exists$-Einf.

(4)	$\exists x Gx$	*2, 3*	MP, q.e.d.

2. Hxy: x hilft y.

$$\frac{\forall x \forall y Hxy}{\exists x \forall y Hxy}$$

(1)	$\forall x \forall y Hxy$		Ann.
(2)	$\forall y Hay$	*1*	$\forall$-Bes.
(3)	$\exists x \forall y Hxy$	*2*	$\exists$-Einf.

Lösungvorschlag I∃-Einführung III

Bringen Sie den folgenden Schluss in die Normalform, formalisieren und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

Alle Dinge stammen aus der Erfahrung. Also gibt es Dinge, die aus der Erfahrung stammen und wechselwirken, denn alle Dinge wechselwirken.

Lösungsvorschlag

	Alle Dinge stammen aus der Erfahrung.
	Alle Dinge wechselwirken.
Also:	Es gibt Dinge, die aus der Erfahrung stammen und wechselwirken.

Fx: x stammt aus der Erfahrung.
Gx: x wechselwirken.

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x Fx \\ \forall x Gx\end{array}}{\exists x (Fx \land Gx)}$$

(1)	$\forall x Fx$		Ann.
(2)	$\forall x Gx$		Ann.
(3)	Fa	*1*	$\forall$-Bes.
(4)	Ga	*2*	$\forall$-Bes.
(5)	$Fa \land Ga$	*3, 4*	$\land$-Einf.
(6)	$\exists x (Fx \land Gx)$	*5*	$\exists$-Einf.

Lösungvorschlag JQuantorentausch I

Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

1. $$\frac{\forall x \neg Fx}{\neg \exists x Fx}$$
2. $$\frac{\forall x Gx}{Fa \to \neg \exists x \neg Gx}$$

Lösungsvorschlag

1.
(1)	$\forall x \neg Fx$		Ann.
(2)	$\neg \exists x \neg \neg Fx$	*1*	QT
(3)	$\neg \exists x Fx$	*2*	$\neg$-Bes., q.e.d.

2.
1	(1)	$\forall x Gx$		Ann.
2	(2)	Fa		ZA
1	(3)	$\neg \exists x \neg Gx$	*1*	QT
1	(4)	$Fa \to \neg \exists x \neg Gx$	*2, 3*	$\to$-Einf., q.e.d.

Lösungvorschlag KQuantorentausch II

Bringen Sie die folgenden Schlüsse in die Normalform, formalisieren und beweisen Sie sie mit dem Kalkül des natürlichen Schließens!

Wenn es einen Gott gibt, dann hat er alles gemacht. Also gilt: Wenn es einen Gott gibt, dann gibt es nichts, was er nicht gemacht hat.

Lösungsvorschlag

	Wenn es einen Gott gibt, dann hat er alles gemacht.
Also:	Wenn es einen Gott gibt, dann gibt es nichts, was er nicht gemacht hat.

Gx: x ist ein Gott.

$$\frac{\exists x Gx \to \forall x Mx}{\exists x Gx \to \neg \exists x \neg Mx}$$

1	(1)	$\exists x Gx \to \forall x Mx$		Ann.
2	(2)	$\exists x Gx$		ZA
1, 2	(3)	$\forall x Mx$	*1, 2*	MP
1, 2	(4)	$\neg \exists x \neg Mx$	*3*	QT
1	(5)	$\exists x Gx \to \neg \exists x \neg Mx$	*2, 4*	$\to$-Einf., q.e.d.

oder, da die Regel *Quantorentausch* eine „K“-Regel ist und auf innere Ausdrücke angewandt werden kann:

(1)	$\exists x Gx \to \forall x Mx$		Ann.
(2)	$\exists x Gx \to \neg \exists x \neg Mx$	*1*	QT, q.e.d.