Logik-Tutorium #7

Beweise mit Zusatzannahmen und Reductio ad absurdum

Tristan Pieper

Wintersemester 2023/2024

Mittwoch, 04.12.2024

Ziele für die Sitzung

Innerhalb der nächsten Wochen kann ich...

[AL3] Beweise mit dem aussagenlogischen Kalkül des natürlichen Schließens führen.

Dazu kann ich nach der Sitzung...

1. ... die linke Beweisspalte korrekt befüllen.
2. ... einfache Beweise mit der $\rightarrow$-Einf.-Regel führen.
3. ... einfache Beweise mit der RAA-Regel führen.

Puzzle

Aufgabe

Einige Zeilen des KdnS auf M1 sind durcheinandergeraten! Bringen Sie in Gruppenarbeit wieder in die richtige Reihenfolge!

Beweise mit Zusatzannahmen I

Beispiel

Wenn es regnet oder wer einen Eimer ausschüttet,
wird die Straße nass.

Wenn wer einen Eimer ausschüttet, wird die Straße nass.

… aber wie beweisen wir, dass das gültig ist?

Beweise mit Zusatzannahmen I

Machen wir einen kleinen Beweis in natürlicher Sprache!

1. [Ann.] Wenn es regnet oder wer einen Eimer ausschüttet, wird die Straße nass.

Beweise mit Zusatzannahmen I

Machen wir einen kleinen Beweis in natürlicher Sprache!

1. [Ann.] Wenn es regnet oder wer einen Eimer ausschüttet, wird die Straße nass.
2. [ZA] Angenommen einer schüttet einen Eimer aus. Was dann?

Beweise mit Zusatzannahmen I

Machen wir einen kleinen Beweis in natürlicher Sprache!

1. [Ann.] Wenn es regnet oder wer einen Eimer ausschüttet, wird die Straße nass.
2. [ZA] Angenommen einer schüttet einen Eimer aus. Was dann?
3. [∨-Einf.] Dann regnet es oder einer schüttet einen Eimer aus.

Beweise mit Zusatzannahmen I

Machen wir einen kleinen Beweis in natürlicher Sprache!

1. [Ann.] Wenn es regnet oder wer einen Eimer ausschüttet, wird die Straße nass.
2. [ZA] Angenommen einer schüttet einen Eimer aus. Was dann?
3. [$\vee$-Einf.] Dann regnet es oder einer schüttet einen Eimer aus.
4. [MP] Dann wäre die Straße nass.

Beweise mit Zusatzannahmen I

Machen wir einen kleinen Beweis in natürlicher Sprache!

1. [Ann.] Wenn es regnet oder wer einen Eimer ausschüttet, wird die Straße nass.
2. [ZA] Angenommen einer schüttet einen Eimer aus. Was dann?
3. [∨-Einf.] Dann regnet es oder einer schüttet einen Eimer aus.
4. [MP] Dann wäre die Straße nass.
5. [⟶-Einf.] Also wenn jemand einen Eimer ausschüttet, wird die Straße nass. Q.E.D.

Beweise mit Zusatzannahmen I

Machen wir einen kleinen Beweis in natürlicher Sprache!

1. [Ann.] Wenn es regnet oder wer einen Eimer ausschüttet, wird die Straße nass.
2. [ZA] Angenommen einer schüttet einen Eimer aus. Was dann?
3. [∨-Einf.] Dann regnet es oder einer schüttet einen Eimer aus.
4. [MP] Dann wäre die Straße nass.
5. [→-Einf.] Also wenn jemand einen Eimer ausschüttet, wird die Straße nass. Q.E.D.

1	(1)	$(p \vee r) \to q$		Ann.
2	(2)	p		ZA
2	(3)	$p \vee r$	*2*	∨-Einf.
1, 2	(4)	q	*1, 3*	MP
1	(5)	$p \to q$	*4, 2*	→-Einf.

Beweise mit Zusatzannahmen I

Achtung

Kommt ein **Konditional in der Konklusion** vor, ist dies häufig (aber nicht immer!) ein Hinweis dafür, dass man eine $\rightarrow$-Einf. braucht. Die darf man aber nur anwenden, wenn man die ZA auch zum Ableiten benutzt hat!

Definition

In der **linken Beweisspalte** notieren wir die Zeilennummern der Prämissen, mit deren Hilfe die Zeile abgeleitet wurde.

Beweise mit Zusatzannahmen I: Linke Beweisspalte

Am Beispiel des folgenden Schlusses füllen wir die linke Beweisspalte aus…

$$\frac{\begin{array}{l}\neg p \lor s \\ \neg r \to \neg s\end{array}}{(p \land q) \to r}$$

Beweise mit Zusatzannahmen I

Definition

Wenn die Konklusion dem Schema „$\alpha \rightarrow \beta$“ entspricht, dann…

1. … nehmen wir α mit der Regel **ZA** an,
2. … zeigen, dass mit α der Satz β abgeleitet werden kann,
3. … zeigen, dass die Zeile mit β von der Zeile α abhängig ist und
4. … dürfen dann $\alpha \rightarrow \beta$ in einer neuen Zeile ableiten und die Abhängigkeit von der Zusatzannahme entfernen.

Beweise mit Zusatzannahmen I

> **Aufgabe**
>
> Beweisen Sie mit Hilfe des KdnS, dass der folgende Schluss gültig ist!

Peter ist genau dann zu Hause, wenn Irene zu Hause ist.
Irene ist nicht zu Hause oder nicht in der Bar.

Wenn Peter zu Hause ist, ist Irene nicht in der Bar.

Reductio ad absurdum

Beweise mit Zusatzannahmen II

Aufgabe

Erklären Sie kurz die Methode vom Anfang des Semesters, wie wir alle Argumente auf Gültigkeit prüfen können! (Zum Beispiel auch das Folgende.)

$$\frac{\alpha \land \alpha}{\alpha}$$

Beispiel

Theorem: Aus $\alpha \wedge \alpha$ folgt α logisch. **Beweis:**

Beispiel

Theorem: Aus $\alpha \land \alpha$ folgt α logisch. **Beweis:**

1. [ZA] Angenommen α folge *nicht* logisch aus $\alpha \land \alpha$.

Beispiel

Theorem: Aus $\alpha \wedge \alpha$ folgt α logisch. **Beweis:**

1. [ZA] Angenommen α folge *nicht* logisch aus $\alpha \wedge \alpha$.
2. [Def. log. Folg.] Also muss $\alpha \wedge \alpha$ wahr, aber α falsch sein können!

Beispiel

Theorem: Aus $\alpha \wedge \alpha$ folgt α logisch. **Beweis:**

1. [ZA] Angenommen α folge *nicht* logisch aus $\alpha \wedge \alpha$.
2. [Def. log. Folg.] Also muss $\alpha \wedge \alpha$ wahr, aber α falsch sein können!
3. [Def. „$\wedge$"] Die Definition von „$\wedge$" sagt: $\alpha \wedge \alpha$ ist wahr, gdw. α wahr ist.

Beispiel

Theorem: Aus $\alpha \wedge \alpha$ folgt α logisch. **Beweis:**

1. [ZA] Angenommen α folge *nicht* logisch aus $\alpha \wedge \alpha$.
2. [Def. log. Folg.] Also muss $\alpha \wedge \alpha$ wahr, aber α falsch sein können!
3. [Def. „$\wedge$"] Die Definition von „$\wedge$" sagt: $\alpha \wedge \alpha$ ist wahr, gdw. α wahr ist.
4. [Def. „$\wedge$"] $\alpha \wedge \alpha$ haben wir als wahr angenommen, also muss auch α wahr sein. *Widerspruch zu 2.!*

Beispiel

Theorem: Aus $\alpha \land \alpha$ folgt α logisch. **Beweis:**

1. [ZA] Angenommen α folge *nicht* logisch aus $\alpha \land \alpha$.
2. [Def. log. Folg.] Also muss $\alpha \land \alpha$ wahr, aber α falsch sein können!
3. [Def. „$\land$“] Die Definition von „$\land$“ sagt: $\alpha \land \alpha$ ist wahr, gdw. α wahr ist.
4. [Def. „$\land$“] $\alpha \land \alpha$ haben wir als wahr angenommen, also muss auch α wahr sein. *Widerspruch zu 2.!*
5. [RAA 1/2] Widersprüche folgen nur aus Falschem. Dieser folgte aus der Annahme, dass das Theorem falsch wäre.

Beispiel

Theorem: Aus $\alpha \wedge \alpha$ folgt α logisch. **Beweis:**

1. [ZA] Angenommen α folge *nicht* logisch aus $\alpha \wedge \alpha$.
2. [Def. log. Folg.] Also muss $\alpha \wedge \alpha$ wahr, aber α falsch sein können!
3. [Def. „$\wedge$"] Die Definition von „$\wedge$" sagt: $\alpha \wedge \alpha$ ist wahr, gdw. α wahr ist.
4. [Def. „$\wedge$"] $\alpha \wedge \alpha$ haben wir als wahr angenommen, also muss auch α wahr sein. *Widerspruch zu 2.!*
5. [RAA 1/2] Widersprüche folgen nur aus Falschem. Dieser folgte aus der Annahme, dass das Theorem falsch wäre.
6. [RAA 2/2] Also war es falsch anzunehmen, dass das Theorem falsch war.

Beispiel

Theorem: Aus $\alpha \wedge \alpha$ folgt α logisch. **Beweis:**

1. [ZA] Angenommen α folge *nicht* logisch aus $\alpha \wedge \alpha$.
2. [Def. log. Folg.] Also muss $\alpha \wedge \alpha$ wahr, aber α falsch sein können!
3. [Def. „∧"] Die Definition von „∧" sagt: $\alpha \wedge \alpha$ ist wahr, gdw. α wahr ist.
4. [Def. „∧"] $\alpha \wedge \alpha$ haben wir als wahr angenommen, also muss auch α wahr sein. *Widerspruch zu 2.!*
5. [RAA 1/2] Widersprüche folgen nur aus Falschem. Dieser folgte aus der Annahme, dass das Theorem falsch wäre.
6. [RAA 2/2] Also war es falsch anzunehmen, dass das Theorem falsch war.
7. [¬-Bes] Also ist das Theorem wahr. Q.E.D.

Beweise mit Zusatzannahmen II

Aufgabe

Erklären Sie, warum Sie mit der Begründung „Widersprüche folgen nur aus Falschem.“ das Gegenteil der Zusatzannahme ableiten dürfen!

Beweise mit Zusatzannahmen II

Aufgabe

Erklären Sie, warum Sie mit der Begründung „Widersprüche folgen nur aus Falschem.“ das Gegenteil der Zusatzannahme ableiten dürfen!

Definition

Die Regel **RAA** (Reductio ad absurdum) macht genau das: Wir nehmen das Gegenteil der Konklusion an und wenn wir einen Widerspruch gefunden haben, dürfen wir auf die Wahrheit der Konklusion schließen!

Beweise mit Zusatzannahmen II

Beispiel

Rechnen wir ein Beispiel zusammen an der Tafel. Gleicher Schluss wie bei der $\rightarrow$-Einf.:

$$\frac{(p \lor r) \rightarrow q}{p \rightarrow q}$$

Aufgabe

Beweisen Sie die folgenden Schlüsse mit dem KdnS!

1. $$\frac{q}{p \to q}$$

2. $$\frac{p \land q}{p \lor q}$$

Zuzsatz für die ganz schnellen

$$\frac{(p \land q) \lor (p \land \neg q)}{p}$$

Fassen Sie in einem Satz zusammen, was Sie aus der heutigen Sitzung mitnehmen!

Auswertung Probeklausur und Zwischenstand