Aufgabenblatt 9

Aufgabe A — Prädikatenlogische Formalisierung

Formalisieren Sie die folgenden Sätze!

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Alice liebt Bob.
3. Alice und Bob hassen Mallory.
4. Jeder hasst Mallory.
5. Niemand hasst Mallory.
6. Alle Menschen sind nicht sterblich.
7. Kein Mensch ist unsterblich.

Aufgabe B — Freie und gebundene Variablen

Erklären Sie, wann eine Variable als „gebunden" beschrieben wird. Dürfen in Sätzen Variablen „ungebunden" bzw. „frei" vorkommen?

Aufgabe C — Bindungsbereiche von Quantoren

Markieren Sie den Bindungsbereich der Quantoren durch Unterstreichung in verschiedenen Farben.

1. $\forall x(Fx \land Gx)$
2. $\forall x Fx \to \exists x Gx$
3. $\exists x \neg((Gx \land \neg Hx) \to \neg \forall x(Fx \leftrightarrow \neg Hx))$
4. $\exists x \neg \forall y(Fx \to \exists z Hxyz)$
5. $Fa \to \forall x(Gb \land Fx \land \exists y \forall z(Hzy))$

Aufgabe D — Quantorenreihenfolge

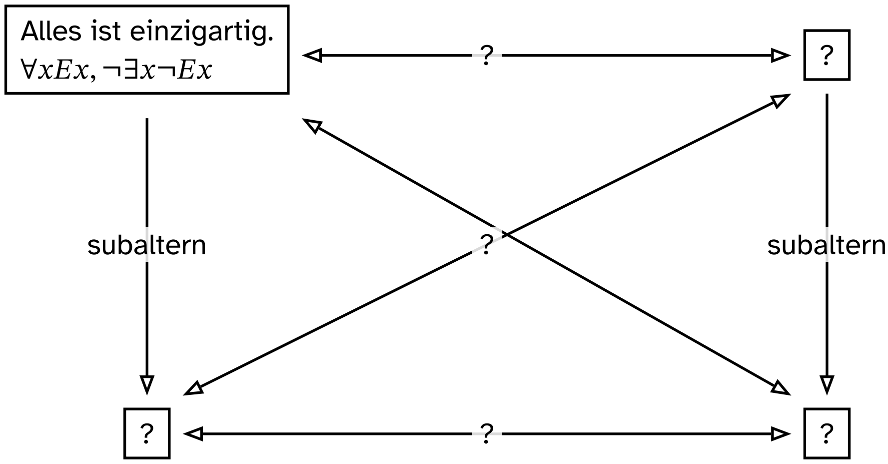
Formalisieren Sie die folgenden beiden Sätze. Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

Lxy: x liebt y.

1. Jeder liebt jemanden.
2. Jemand wird von allen geliebt.

Aufgabe E — Logisches Quadrat

Vervollständigen Sie das folgende logische Quadrat!


Alles ist einzigartig.
$\forall x Ex, \neg\exists x \neg Ex$
?
?
?
?
?
?
subaltern
subaltern

Lösungvorschläge – Aufgabenblatt 9

Lösungvorschlag A Prädikatenlogische Formalisierung

Formalisieren Sie die folgenden Sätze!

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Alice liebt Bob.
3. Alice und Bob hassen Mallory.
4. Jeder hasst Mallory.
5. Niemand hasst Mallory.
6. Alle Menschen sind nicht sterblich.
7. Kein Mensch ist unsterblich.

Lösungsvorschlag

Mx: x ist ein Mensch.
Sx: x ist sterblich.
Lxy: x liebt y.
Hxy: x hasst y.

a: Alice
b: Bob
c: Mallory

1. $\forall x(Mx \to Sx)$
2. Lab
3. $Hac \land Hbc$
4. $\forall x Hxc$
5. $\neg \exists x Hxc$
6. $\forall x(Mx \to \neg Sx)$
7. $\neg \exists x(Mx \land \neg Sx)$ *oder* $\forall x \neg(Mx \land \neg Sx)$

Lösungvorschlag B Freie und gebundene Variablen

Erklären Sie, wann eine Variable als „gebunden“ beschrieben wird. Dürfen in Sätzen Variablen „ungebunden“ bzw. „frei“ vorkommen?

Lösungsvorschlag

Eine Variable ist gebunden genau dann, wenn sie in dem Bindungsbereich eines Quantors vorkommt und die gleiche ist wie die, die hinter dem Quantor steht. Der Bindungsbereich eines Quantors ist der nächstmöglich kürzeste Satz direkt hinter dem Quantor und seiner Variable.

$$\forall x\ (Fx \land (Gx \to \neg Hx))$$

Für das Beispiel ist der kürzeste Satz hinter dem Quantor derjenige, der eingeklammer ist, also: $Fx \land (Gx \to \neg Hx)$. Dort kann nun für x alles eingesetzt werden. Nur wenn der Satz unter allen Belegungen wahr ist, wird der Allquantor wahr. Im Falle des Existenzquantors reicht ein einziges Individuum zu finden, für den der Satz wahr wird, dann ist der Existenzquantor wahr. Hier ein weiteres Beispiel für die Bindungsbereiche:

$$\forall x\ \forall y\ Fxy \leftrightarrow \exists z\ Gxz \land Gyz$$

Variablen dürfen in Sätzen niemals frei vorkommen. Die einzigen Namen, die frei vorkommen dürfen sind Individuenkonstanten wie a, b, c, ... (siehe im Skript S. 72 f. / 115 ff. sowie S. 84 / 175 ganz am Ende der Seite).

Lösungvorschlag C Bindungsbereiche von Quantoren

Markieren Sie den Bindungsbereich der Quantoren durch Unterstreichung in verschiedenen Farben.

1. $\forall x(Fx \land Gx)$
2. $\forall xFx \to \exists xGx$
3. $\exists x\neg((Gx \land \neg Hx) \to \neg\forall x(Fx \leftrightarrow \neg Hx))$
4. $\exists x\neg\forall y(Fx \to \exists zHxyz)$
5. $Fa \to \forall x(Gb \land Fx \land \exists y\forall z(Hzy))$

Lösungsvorschlag

1. $\forall x\underline{(Fx \land Gx)}$
2. $\forall x\underline{Fx} \to \exists x\underline{Gx}$
3. $\exists x\underline{\neg((Gx \land \neg Hx) \to \neg\forall x\underline{(Fx \leftrightarrow \neg Hx)})}$
4. $\exists x\underline{\neg\forall y\underline{(Fx \to \exists z\underline{Hxyz})}}$
5. $Fa \to \forall x\underline{(Gb \land Fx \land \exists y\underline{\forall z\underline{(Hzy)}})}$

Lösungvorschlag D Quantorenreihenfolge

Formalisieren Sie die folgenden beiden Sätze. Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

Lxy: x liebt y.

1. Jeder liebt jemanden.

2. Jemand wird von allen geliebt.

Lösungsvorschlag

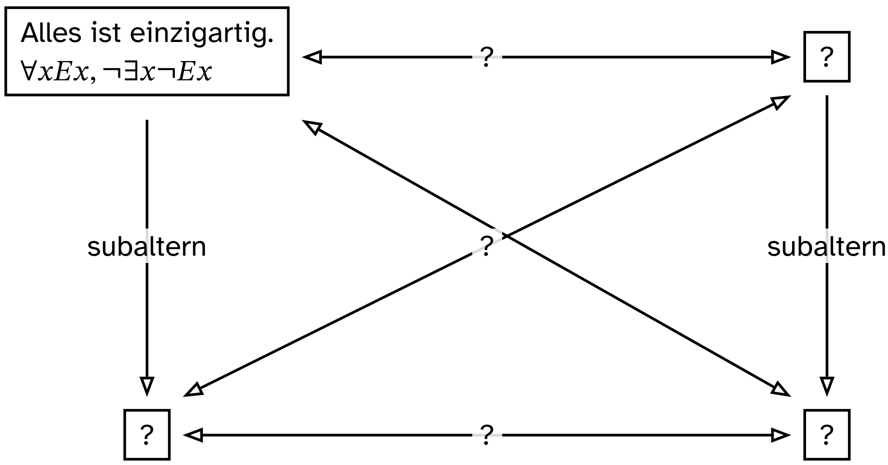
Lxy: x liebt y.

1. $\forall x \exists y Lxy$
2. $\exists y \forall x Lxy$

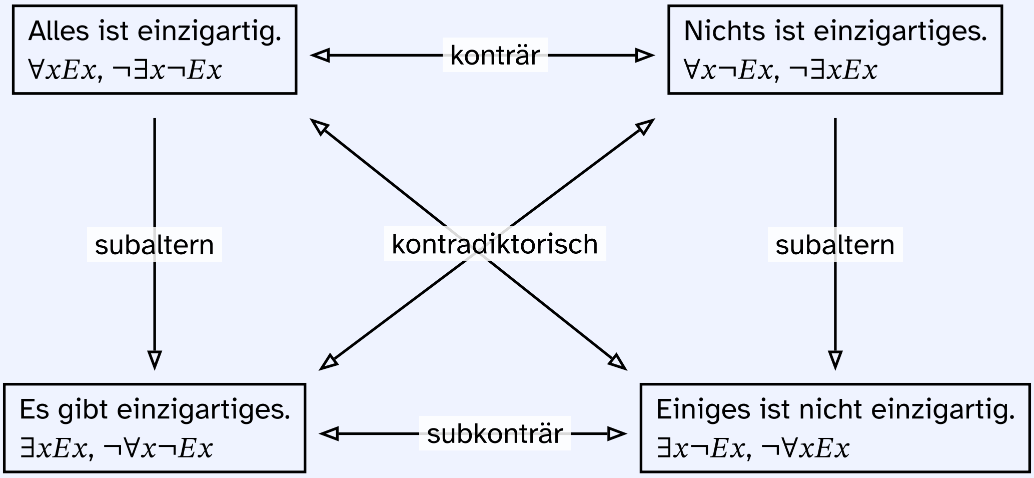
Die Reihenfolge der Quantoren scheint das normalsprachliche Aktiv und Passiv zu vertauschen. Außerdem ist im 1. Satz davon die Rede, dass jeder irgendwen liebt, aber im zweiten Satz, dass *mindestens eine einzige* Person von *allen* geliebt wird. Die PL-Sätze stehen also für verschiedene Dinge!

Lösungvorschlag ELogisches Quadrat

Vervollständigen Sie das folgende logische Quadrat!



Lösungsvorschlag


Alles ist einzigartig.
$\forall x E x$, $\neg\exists x \neg E x$
konträr
Nichts ist einzigartiges.
$\forall x \neg E x$, $\neg\exists x E x$
subaltern
kontradiktorisch
subaltern
Es gibt einzigartiges.
$\exists x E x$, $\neg\forall x \neg E x$
subkonträr
Einiges ist nicht einzigartig.
$\exists x \neg E x$, $\neg\forall x E x$