Дерево оптимального поиска

Пусть двоичное дерево поиска содержит ключи $k_1,\ k_2, k_2,\ \dots\ ,\ k_n$.

Задача № 1. Пусть каждый пользователь разыскивает только один из имеющихся в дереве ключей, причем, известна вероятность того, что пользователя интересует именно i–й ключ:

$$p_i = P\big|_{x=k_i}.$$

То, что пользователя интересуют только имеющиеся ключи, выражается равенством

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Требуется построить такое дерево, чтобы

$$P_I = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i \ \to\ \min,$$

h_i – уровень вершины i (число, на единицу большее глубины).

Задача № 2. Пусть каждый пользователь разыскивает ключ, который может либо присутствовать, либо отсутствовать в дереве. Вероятность успешного поиска сформулирована выше, а вероятность неудачи есть

$$q_i = P\big|_{k_i < x < k_{i+1}}, \ \ i = 1, 2, 3, \ \dots, \ n-1,$$

$$q_0 = P\big|_{x < k_1}, \quad q_n = P\big|_{x > k_n}$$

То, что в дереве могу быть только интересующие или не интересующие пользователя ключи, выражается равенством

$$\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=0}^{n} q_j = 1.$$

Требуется построить такое дерево, чтобы

$$P_\Sigma = P_I + P_E = \sum_{i=1}^{n} p_i h_i + \sum_{j=0}^{n} q_j h_j' \ \rightarrow \ \min$$

p_i – вероятность обращения к i–му ключу в дереве;
q_i – вероятность обращения к отсутствующим ключам, «расположенным» между i–м и $(i-1)$ – м ключами в дереве;
q_0 – вероятность обращения к отсутствующим ключам, «меньшим», чем 0–й (по номеру) ключ в дереве;
q_n – вероятность обращения к отсутствующим ключам, «большим», чем n–й (по номеру) ключ в дереве;
h_j' – уровень специальной вершины j.

Разумеется, каждая из этих задач может быть решена. Однако, величины p_i и q_j не могут быть известны точно. Они могут быть оценены приближенно, на основе статистики обращения пользователей к дереву поиска:

$$p_m = \frac{a_m}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=0}^{n} b_j}, \qquad q_m = \frac{b_m}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=0}^{n} b_j},$$

где:

a_i – количество обращений к i–му ключу в дереве,

b_i – количество обращений к несуществующим ключам, «расположенным» между i–м и $(i-1)$–м ключами в дереве,

b_0 – количество обращений к несуществующим ключам, «меньшим», чем 0–й (по номеру) ключ в дереве,

b_n – количество обращений к отсутствующим ключам, «большим», чем n–й ключ в дереве.

Задача № 3. Требуется построить такое дерево, чтобы

$$P = P_I' + P_E' = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i + \sum_{j=0}^{n} b_j h_j' \rightarrow \min$$

Функция, которая минимизируется в задаче № 3, пропорциональна функции в задаче № 2. Коэффициент пропорциональности

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=0}^{n} b_j$$

от вида дерева не зависит.

Утверждение.

$$P = P_L + W + P_R, \qquad \text{где} \qquad W = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=0}^{n} b_j \ .$$

P называется *длиной пути* дерева, W называется *весом* дерева.

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i h_i + \sum_{j=0}^{n} b_j h_j{}' =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} a_i h_i + a_m \underbrace{h_m}_{=1} + \sum_{i=m+1}^{n} a_i h_i + \sum_{j=0}^{m-1} b_j h_j{}' + \sum_{j=m}^{n} b_j h_j{}' =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} a_i h_i + \sum_{j=0}^{m-1} b_j h_j{}' + \sum_{i=m+1}^{n} a_i h_i + \sum_{j=m}^{n} b_j h_j{}' + a_m =$$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m-1} a_i (h_i - 1) + \sum_{j=0}^{m-1} b_j (h_j{}' - 1) \right)}_{=P_L} + \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{j=0}^{m-1} b_j +$$

$$+ \underbrace{\left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i (h_i - 1) + \sum_{j=m}^{n} b_j (h_j{}' - 1) \right)}_{=P_R} + \sum_{i=m+1}^{n} a_i + \sum_{j=m}^{n} b_j + a_m =$$

$$= P_L + P_R + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=0}^{n} b_j}_{=W}$$

Замечание.

$$P_\Sigma = \frac{P}{W}.$$

Алгоритм построения дерева

Пусть T_{ij} – оптимальное поддерево, составленное из ключей $k_{i+1}, k_{i+2}, \ldots, k_j$ (ключ k_i в дереве отсутствует).

Пусть вес этого дерева – w_{ij}, целевая функция (длина пути) – p_{ij}.

Ясно, что $w_{0n} = W$, $p_{0n} = P$.

$$w_{ij} = \sum_{s=i+1}^{j} a_s + \sum_{t=i}^{j} b_t, \quad p_{ij} = \sum_{s=i+1}^{j} a_s h_s + \sum_{t=i}^{j} b_t h_t'.$$

Тогда:

$w_{ii} = b_i, \quad 0 \le i \le n,$

$w_{ij} = w_{i,j-1} + a_j + b_j, \quad 0 \le i < j \le n,$

$p_{ii} = w_{ii}, \quad 0 \le i \le n,$

$p_{ij} = w_{ij} + \min\limits_{k:\ i<k\le j} (p_{i,k-1} + p_{kj}), \quad 0 \le i < j \le n.$

r_{ij} – то значение k, при котором достигается этот **min**.

Пример

Пусть $n = 4$, а числа пользовательских обращений представлены в таблице:

i	0	1	2	3	4
a_i		20	10	5	3
b_i	64	32	16	8	4

Без затруднений и объяснений заполняется таблица

$w_{00} = 64$	$w_{01} = 64 + 52 = 116$	$w_{02} = 116 + 26 = 142$	$w_{03} = 142 + 13 = 155$	$w_{04} = 155 + 7 = 162$
	$w_{11} = 32$	$w_{12} = 32 + 26 = 58$	$w_{13} = 58 + 13 = 71$	$w_{14} = 71 + 7 = 78$
		$w_{22} = 16$	$w_{23} = 16 + 13 = 29$	$w_{24} = 29 + 7 = 36$
			$w_{33} = 8$	$w_{34} = 8 + 7 = 15$
				$w_{44} = 4$

Формирование величин p_{ij}, r_{ij} несколько сложнее и требует пояснений.

Разница индексов – единица:

$p_{01} = w_{01} + \min(p_{00} + p_{11}) = 116 + 96 = 212, \ \ r_{01} = 1,$

$p_{12} = w_{12} + \min(p_{11} + p_{22}) = 58 + 48 = 106, \ \ r_{12} = 2,$

$p_{23} = w_{23} + \min(p_{22} + p_{33}) = 29 + 24 = 53, \ \ r_{23} = 3,$

$p_{34} = w_{34} + \min(p_{33} + p_{44}) = 15 + 12 = 27, \ \ r_{34} = 4,$

Разница индексов – двойка:

$p_{02} = w_{02} + \min(p_{00} + p_{12},\ p_{01} + p_{22}) = 142 + \min(64 + 106,\ 212 + 16) = 142 + 170 = 312,$

$r_{02} = 1,$

$p_{13} = w_{13} + \min(p_{11} + p_{23},\ p_{12} + p_{33}) = 71 + \min(32 + 53,\ 106 + 8) = 71 + 85 = 156,$

$r_{13} = 2,$

$p_{24} = w_{24} + \min(p_{22} + p_{34},\ p_{23} + p_{44}) = 36 + \min(16 + 27,\ 53 + 4) = 36 + 43 = 79,$

$r_{24} = 3,$

Разница индексов – тройка:

$p_{03} = w_{03} + \min(p_{00} + p_{13},\ p_{01} + p_{23},\ p_{02} + p_{33}) = 155 +$

$+ \min(64 + 156,\ 212 + 53,\ 312 + 8) = 155 + 220 = 375,$

$r_{03} = 1,$

$p_{14} = w_{14} + \min(p_{11} + p_{24},\ p_{12} + p_{34},\ p_{13} + p_{44}) = 78 +$

$+ \min(32 + 79,\ 106 + 27,\ 156 + 4) = 78 + 111 = 189,$

$r_{14} = 2,$

$p_{14} = w_{14} + \min(p_{11} + p_{24},\ p_{12} + p_{34},\ p_{13} + p_{44}) = 78 +$

Разница индексов – четверка:

$p_{04} = w_{04} + \min(p_{00} + p_{14},\ p_{01} + p_{24},\ p_{02} + p_{34},\ p_{03} + p_{44}) = 162 +$

$+ \min(64 + 189,\ 212 + 79,\ 312 + 27,\ 375 + 4) = 162 + 253 = 415,$

$r_{04} = 1,$

	$p_{11} = 32$	$w_{12} = 32 + 26 = 58$	$w_{13} = 58 + 13 = 71$	$w_{14} = 71 + 7 = 78$
		$p_{22} = 16$	$w_{23} = 16 + 13 = 29$	$w_{24} = 29 + 7 = 36$
			$p_{33} = 8$	$w_{34} = 8 + 7 = 15$
				$p_{44} = 4$