

Dans le devoir 1, vous avez utilisé la décomposition QR pour résoudre numériquement le problème des moindres carrés. Une autre façon est de résoudre le système linéaire des équations normales

$$A^T A x = A^T B. \quad (1)$$

L'algorithme le plus indiqué pour résoudre un système linéaire est la décomposition LU, qui factorise la matrice  $A$  en un produit d'une matrice triangulaire inférieure  $L$  et une matrice triangulaire supérieure  $U$  (quelles seront leurs dimensions dans ce cas-ci ?). On va en profiter pour analyser le conditionnement du problème des moindres carrés.

1. On s'intéresse au conditionnement du problème des moindres carrés. Que signifie le conditionnement, et comment est défini le nombre de conditionnement  $\kappa$  ? Quel est le conditionnement par rapport aux inputs  $A$  et  $b$  ? Montrez-le numériquement ; vous pouvez utiliser une implémentation de Numpy et la supposer stable.
2. Implémentez l'algorithme de décomposition LU (sans pivotage). Quelle est sa complexité ? Cet algorithme est-il facilement parallélisable ?
3. Démontrez que le pivotage n'est pas nécessaire lorsque tous les mineurs principaux de  $A$  sont positifs. Est-ce le cas pour les équations normales ?
4. Pour résoudre le problème des moindres carrés, vous pouvez exploiter une propriété des équations normales pour accélérer la décomposition LU. De quel algorithme parle-t-on, et quel est le gain en termes d'opérations arithmétiques ? Montrez numériquement ce gain.

## Le devoir

### Echéance

**Le travail demandé est un travail individuel.** Il consiste en (i) la remise d'un rapport et (ii) la remise de codes écrits en Python.

Les codes et le rapport sont à soumettre sur le **Gradescope** du cours d'Analyse Numérique pour le dimanche 10 mars à 18:15.

### Le code

La partie code contiendra un ensemble de scripts Python permettant de reproduire les figures de votre rapport. Il n'y aura pas de tests automatiques pour ce devoir.

Toutes les implémentations seront soumises à un logiciel anti-plagiat.

## **Le rapport**

Le rapport doit être réalisé avec `LATEX`, avec la `documentclass article [11pt]` en `pagestyle plain`. Le `.PDF` et les sources `.TEX` de ce rapport (compressées dans un archive `.zip`) sont également à remettre sur **Gradescope**.

La longueur maximale du rapport est de 3 pages *A4*.

Les sources des rapports seront soumises à un logiciel anti-plagiat.