1. Gram-Schmidt

2. Conditionnement

3. Stabilité

Orthogonalisation de Gram-Schmidt

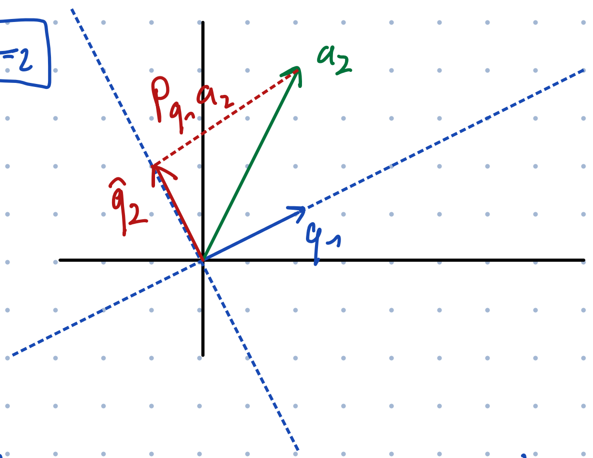
Soient n vecteurs $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}^m$ avec $m \geq n$
On souhaite construire une base orthonormale $\{q_1,\dots,q_n\}$ pour span $\{a_1,\dots,a_n\}$

span $\{a_1,\dots,a_n\}$ = espace engendré par $a_1,\dots,a_n$: $\{c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_na_n,\ c_i\in\mathbb{R}\}$
orthonormale si $q_i^* q_j = \begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Idée: Construire une base orthonormée pour $\overset{k=1}{\{a_1\}}$, $\overset{k=2}{\{a_1,a_2\}}$, ..., $\overset{k=n}{\{a_1,\dots,a_n\}}$

$\boxed{k=1}$ $q_1 = a_1/\|a_1\|$

$\boxed{k=2}$



$$\hat{q}_2 = a_2 - P_{q_1} a_2$$
$$= a_2 - (\overbrace{q_1 q_1^*}^{m\times m})\, a_2$$
$$= a_2 - (q_1^* a_2)\, q_1$$
$$q_2 = \hat{q}_2/\|\hat{q}_2\|$$

$\boxed{k}$ On soustrait successivement les projections de a_k sur $q_1,\dots,q_{k-1}$:

$$\hat{q}_k = (I - P_{q_1} - \dots - P_{q_{k-1}})\, a_k$$
$$= \dots$$
$$= a_k - (q_1^* a_k)q_1 - \dots - (q_{k-1}^* a_k)\, q_{k-1}$$
$$q_k = \hat{q}_k / \|\hat{q}_k\|$$

La décomposition QR apparaît:

$$a_k = (q_1^* a_k)\, q_1 + (q_2^* a_k)\, q_2 + \dots + (q_{k-1}^* a_k)\, q_{k-1} + \|\hat{q}_k\| \cdot q_k .$$

r_{1k} $\quad r_{2k}$ $\quad r_{k-1,k}$ $\quad r_{kk}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}}_{R}$$

! $Q^* Q = I_{n \times n}$

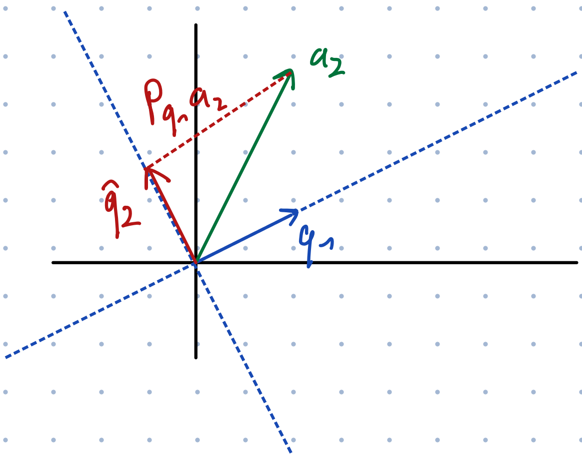
$QQ^* \neq I$

Householder = triangularisation orthogonale

Gram-Schmidt = orthogonalisation triangulaire.

Gram-Schmidt modifié

On projette a_k sur l'espace orthogonal à $q_1, \dots, q_{k-1}$: $\hat{q}_k = P_k a_k$



On peut aussi projeter successivement :

$$\hat{q}_k = P_{\perp q_{k-1}} \cdots P_{\perp q_1} a_k .$$

<u>Idée</u> : Dès que j'ai calculé q_k,

je projette $a_{k+1}, \dots, a_n$ sur $\perp q_k$.

for $k=1$ to n
  $\hat{q}_k = a_k$

```
for k = 1 to n
    for j = 1 to k-1
        q̂_k ← q̂_k − (q_j* q̂_k) q_j
    q̂_k ← q̂_k / ||q̂_k||
```

```
for k = 1 to n
    // q̂_k est orthogonal à q_1, ..., q_{k-1}
    q_k ← q̂_k / ||q̂_k||
    for j = k+1 to n
        q̂_j ← q̂_j − (q_k* q̂_j) q_k
```

solution exacte

$y \longrightarrow f(y)$ $\boxed{Q1}$ Comment $f(y)$ est affecté par un petit changement en y ?

↳ CONDITIONNEMENT (f)

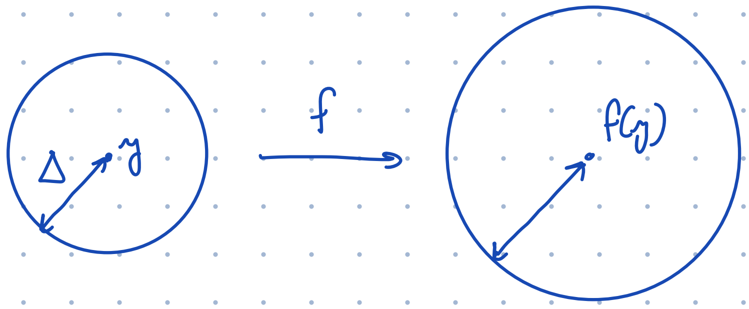
$y \longrightarrow \tilde{f}(y)$ $\boxed{Q2}$ Comment se comporte $\tilde{f}$ par rapport à f ?

↳ STABILITÉ (de $\tilde{f}$)

Conditionnement

J'applique une (petite) perturbation δy. Comment change f ?

$$\delta f = f(y+\delta y) - f(y)$$



$$\kappa = \lim_{\Delta \to 0} \max_{\|\delta y\| \leq \Delta} \frac{\|\delta f\| / \|f(y)\|}{\|\delta y\| / \|y\|}$$

nombre de conditionnement

Exemple : résolution d'un système linéaire $Ax = b$ (A est inversible)

$A, b \longrightarrow x = A^{-1} b$

$\delta A \longrightarrow \delta x$?

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = b$$

$$\cancel{Ax} + A\delta x + \delta A\, x + \cancel{\delta A\, \delta x} = \cancel{b}$$

car $Ax = b$

$$A\delta x = -\delta A\, x$$

$$\delta x = -A^{-1}\delta A\, x$$

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta A\, x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|x\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\|\,\|A^{-1}\|}_{\kappa(A)} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$$\kappa(A) \sim = \left| \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \right|$$

Stabilité

$y \longrightarrow \tilde{f}(y)$ $\boxed{Q2}$ Comment se comporte $\tilde{f}$ par rapport à f ?

↳ STABILITÉ (de $\tilde{f}$)

$$y \longrightarrow \tilde{y} \longrightarrow \tilde{f}(y)$$

plus petit nombre représentable 10^{-16}

Un algorithme est précis (accurate) si $\dfrac{\|\tilde{f}(y) - f(y)\|}{\|f(y)\|} = O(\varepsilon_{machine})$

↳ pas raisonnable car y n'est pas exact : $y \to \tilde{y}$

Un algorithme est stable si $\dfrac{\|\tilde{f}(y) - f(\tilde{y})\|}{\|f(\tilde{y})\|} = O(\varepsilon_{machine})$

↳ précis par rapport à une entrée inexacte

Un algorithme est inversement stable (backward stable) s'il existe $\underbrace{\tilde{y} \text{ proche de } y}_{\frac{\|\tilde{y} - y\|}{\|y\|} = O(\varepsilon_{machine})}$ tel que $\tilde{f}(y) = f(\tilde{y})$