UCLouvain

LINMA1170 Analyse Numérique
Décomposition QR, moindres carrés et B-splines
Rapport

Devoir 1

Élève :
Pierre Vandermeersch

Enseignant :
Jean-François Remacle

23 février 2024

1 Questions théoriques

1.1 Question 1

On veut montrer que X est solution du problème des moindres carrés ssi l'équation normale

$$A^T AX = A^T B \tag{1}$$

est vérifiée.
$(\implies)$ Par définition de la norme de Frobenius, on a

$$J(X) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} \|(AX-B)_{ij}\|^2 \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \|(AX-B)_{ij}\|^2 \right) = \sum_{j=1}^{p} \|Ax_j - b_j\|^2 \tag{2}$$

où x_j et b_j représente, respectivement, la j-ème colonne de la matrice X et B.
On sait aussi que X minimise $J(X)$ ssi x_j minimise $J(x_j) = \|Ax_j - b_j\|^2$ pour $j = 1, \ldots, p$. Or x_j est un minimum de $J(x_j)$ si $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\big(\|Ax_j - b_j\|^2\big) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On pose donc $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$ pour trouver

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(\|Ax_j - b_j\|^2) &= \sum_{l=1}^{m} \left[\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{lk} x_{kj} \Big)^2 \right) - 2b_{lj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{lk} x_{kj} \Big) \right] && (3)\\
&= \sum_{l=1}^{m} \left[2A_{li} \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{lk} x_{kj} - b_{lj} \Big) \right] = 0 && (4)\\
\implies \sum_{l=1}^{m} \left[A_{li} \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{lk} x_{kj} \Big) \right] &= \sum_{l=1}^{m} A_{li} b_{lj}. && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}$$

En notation matricielle on a,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{m} \left[A_{li} \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{lk} x_{kj} \Big) \right] = \sum_{l=1}^{m} A_{li} (A_l^T \cdot x_j) = A_i^T A_i x_j && (7)\\
\sum_{l=1}^{m} A_{li} b_{lj} = A_i^T b_j && (8)\\
A_i^T A_i x_j = A_i^T b_j && (9)
\end{aligned}$$

Étant donné que i et j sont arbitraires on peut regrouper ces équations comme

$$A^T AX = A^T B.$$

$(\impliedby)$ Par le même argument qu'à la preuve précédente, minimiser $J(X)$ revient à minimiser tous les $J(x_j) = \|Ax_j - b_j\|$ pour $j = 1, \ldots, p$. On suppose donc que $A^T Ax_j = A^T b_j \iff A^T(Ax_j - b_j) = 0$. Posons $y \in \mathbb{R}^n$ arbitraire. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\|A(x_j + y) - b_j\| &= (Ax_j - b_j + Ay)^T (Ax_j - b_j + Ay) && (10)\\
&= (Ax_j - b_j)^T (Ax_j - b_j) + 2y^T A^T (Ax_j - b_j) + (Ay)^T Ay && (11)\\
&= \|Ax_j - b_j\|^2 + 2y^T A^T (Ax_j - b_j) + \|Ay\|^2 && (12)\\
&= \|Ax_j - b_j\|^2 + \|Ay\|^2 \geq \|Ax_j - b_j\|^2. && (13)
\end{aligned}$$

On a donc bien que si X vérifie $A^TAX = A^TB$ alors X minimise $J(X)$.
On veut maintenant montrer que $A^TAX = A^TB$ admet toujours une solution. On remarque donc puisque $Ker(A) = Im(A^T)^\perp$ on a que

$$Ker(A^TA) = Im((A^TA)^T)^\perp = Im(A^TA)^\perp$$

et $Ker(A^TA) = Ker(A)$ donc $Im(A^TA)^\perp = Im(A)^\perp$ ou encore $Im(A^TA) = Im(A)$ c'est-à-dire, pour tout $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ il existe $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ tel que $A^TAX = A^TB$.
On cherche finalement à montrer que si $rang(A) = n$ alors cette solution est unique. On remarque que la solution de $A^TAX = A^TB$ est unique ssi $A^TAX = 0 \implies X = 0$. On suppose donc que $A^TAX = 0$. Si $A^TAX = 0$, alors

$$X^TA^TAX = (AX)^TAX = \|AX\|^2 = 0 \iff AX = 0 \implies X = 0. \tag{14}$$

A^TA est donc inversible et $X = (A^TA)^{-1}A^TB$.

1.2 Question 2

On pose donc $A = QR$ au sens de la décomposition QR, c'est-à-dire que Q est orthonormale et R est une matrice triangulaire supérieur. En substituant dans l'équation normale, on obtient

$$(QR)^TQRX = (QR)^TB \tag{15}$$
$$R^TQ^TQRX = R^TQ^TB \tag{16}$$
$$R^TRX = R^TQ^TB \tag{17}$$

Étant donné que Q est orthonormale, $Q^TQ = I$ et donc

$$R^TRX = R^TQ^TB \tag{18}$$
$$RX = Q^TB. \tag{19}$$

Il ne suffit plus que de calculer $V = Q^TB$ et résoudre $RX = V$ par substitution arrière. L'avantage de cette méthode est qu'il ne faut pas inverser A^TA. On remarque pour la simplification entre (18) et (19) que R^T est bien inversible puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire inférieure dont aucun élément de sa diagonale n'est nul.

1.3 Question 3

On cherche donc à approximer m points $\{P_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ par n points de contrôle $\{P^* = (X_j^*, Y_j^*)\}_{j=1}^n$ au sens des moindres carrés à l'aide de n B-splines évaluées en m paramètres t_i pour $i = 1, \dots, m$. On peut définir l'erreur de cette approximation entre $U(t_i) = \sum_{j=1}^n B_j(t_i)P_j^*$ et P_i comme $E(t_i) = U(t_i) - P_i$. On cherchera donc les points de contrôle pour minimiser

$$J(P^*) = \sum_{i=1}^m \|E(t_i)\|^2 = \sum_{i=1}^m \|B(t_i)\cdot P^* - P_i\|^2 = \|BP^* - P\|_F^2 \tag{20}$$

avec $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $P^* \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ et $P \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ tel que

$$B = \begin{bmatrix} B_1(t_1) & \cdots & B_n(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(t_m) & \cdots & B_n(t_m) \end{bmatrix}, \quad P^* = \begin{bmatrix} X_1^* & Y_1^* \\ \vdots & \vdots \\ X_n^* & Y_n^* \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Par les résultats établis aux questions 1 et 2, on peut trouver $P^* = (B^TB)^{-1}B^TP$.

2 Complexité temporelle d'une factorisation QR

On peut démontrer que la complexité temporel du processus de Gram-Schmidt est de $\mathcal{O}(m^2n)$. Expérimentalement on peut vérifier cela en effectuant des factorisations QR de matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec des m et n de plus en plus grand tout en se limitant à $m, n < 2000$.

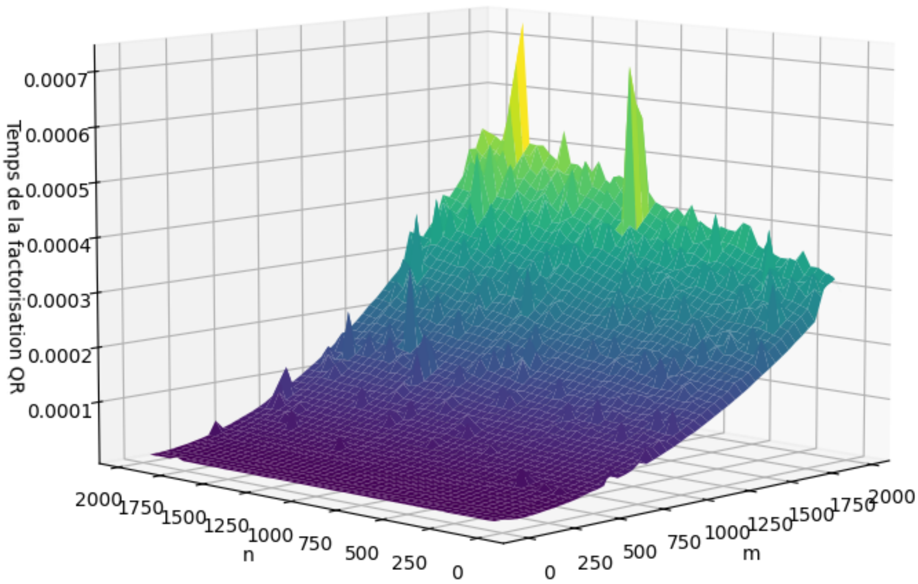

FIGURE 1 – Graphe de la complexité temporelle en fonction de m et n

On peut alors observer que la complexité est bien de $\mathcal{O}(m^2n)$, lorsque n est constant et m augment on peut observer le caractère quadratique de la surface alors que lorsque m est constant et n augmente on observe une croissance linéaire.