



Università degli Studi di Pisa  
Robotica Aerospaziale

---

Corso di Laurea Magistrale in Ing. Robotica e  
dell'Automazione

Documento di Progetto

## Missione Urano

Aprile 2022

Gruppo di lavoro:

Francesco Iotti, [f.iotti@studenti.unipi.it](mailto:f.iotti@studenti.unipi.it)  
Matricola 624512

Lorenzo Lehmann, [l.lehmann@studenti.unipi.it](mailto:l.lehmann@studenti.unipi.it)  
Matricola 533969

Marco Cucchi, [m.cucchi3@studenti.unipi.it](mailto:m.cucchi3@studenti.unipi.it)  
Matricola 626576

Pietro Gori, [p.gori3@studenti.unipi.it](mailto:p.gori3@studenti.unipi.it)  
Matricola 564872

Vincenzo Degiacomo, [v.degiacomo@studenti.unipi.it](mailto:v.degiacomo@studenti.unipi.it)  
Matricola 564713

Docente:

Prof. Mario Innocenti

Anno Accademico 2021-2022

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Obiettivi della missione</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Scelte di progetto</b>	<b>2</b>
3.1	Data e ora di lancio . . . . .	2
3.2	Cambio di piano sulla Terra: da Equatoriale a piano dell'Eclittica	3
3.3	Fuga dalla SOI della Terra . . . . .	4
3.4	Missioni interplanetarie . . . . .	5
3.4.1	Trasferimento interplanetario con Manovra di Hohmann .	5
3.4.2	Terra-Giove-Saturno-Urano . . . . .	8
3.4.3	Terra-Venere-Saturno-Urano . . . . .	11
3.4.4	Terra-Terra-Saturno-Urano . . . . .	12
3.4.5	Terra-Marte-Giove-Urano . . . . .	13
3.4.6	Terra-Marte-Saturno-Urano . . . . .	14
3.5	Cattura nella SOI di Urano . . . . .	15
3.6	Cambio di Piano su Urano: da piano dell'Eclittica a Equatoriale	16
<b>4</b>	<b>Considerazioni finali</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Appendice</b>	<b>19</b>
5.1	Plot traiettorie veicolo spaziale . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Riferimenti</b>	<b>20</b>

# 1 Introduzione

Il progetto consiste in una pianificazione di una missione interplanetaria con partenza di uno spacecraft dal pianeta Terra al pianeta Urano. Sono state prese in esame diverse missioni, evidenziandone per ciascuna i relativi costi in termini di carburante e i tempi impiegati al raggiungimento del pianeta target.

L'approccio seguito è iniziato con la decisione della base di lancio, giustificando la scelta della data e dell'ora. Successivamente, posti su un'orbita equatoriale attorno alla Terra, mediante l'utilizzo dei propulsori, è stato effettuato il passaggio sul piano dell'Eclittica.

Giunti ad altezza di 200 km dalla superficie terrestre è iniziato il calcolo della traiettoria verso il primo pianeta della missione considerata. I dati relativi alle missioni, in seguito descritte, sono stati ricavati dalle effemeridi.

# 2 Obiettivi della missione

L'obiettivo del progetto è di raggiungere il pianeta Urano, arrivando su un'orbita circolare equatoriale ad un'altezza di 1000 km sulla superficie di Urano, eseguendo almeno 2 fly-by attorno ai pianeti.

Il lancio dalla Terra deve avvenire nel periodo 01/01/2022-28/02/2022.

# 3 Scelte di progetto

## 3.1 Data e ora di lancio

Un aspetto importante nell'ottica di minimizzare il dispendio di propellente nell'intera missione è la scelta della data e dell'ora di lancio. Queste considerazioni sono strettamente correlate alla scelta del sito di lancio che in questo caso è Kourou (Guinea Francese). La scelta di questa base è pressoché obbligata poiché è la base che si trova alla latitudine più bassa. Dalla teoria è noto che non è possibile lanciare su un'orbita che sia ad una latitudine più piccola di quella della base di lancio, in tal senso lanciare da Kourou permette di minimizzare il  $\Delta v$  per passare all'orbita di parcheggio equatoriale.

Una volta scelta la base bisogna decidere giorno e ora del lancio.

Per la data è stata imposta una finestra temporale: dal 01/01/2022 al 28/02/2022; in questo periodo è stata scelta come data l'01/02/2022. Quanto all'ora si fa riferimento al LST ( Local Sidereal Time), infatti sapendo che  $i = \Phi_{gc} = 5.2^\circ$  si ottiene che:

$$\sin(\beta) = \frac{\cos(i)}{\cos(\Phi_{gc})} = 1$$
$$\beta = \sin^{-1}(1) = 90^\circ$$

A questo punto, imponendo  $\Omega = 0$ , è possibile calcolare il LST a cui deve avvenire il lancio.

$$\cos(\lambda_u) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(i)}$$

$$\lambda_u = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

$$\Theta_{LST} = \Omega + \lambda_u = 90^\circ$$

Dai calcoli effettuati risulta che nella data del lancio il LST desiderato si ha intorno alle ore 01:00 oppure 19:00 (ora locale) dunque si è scelto di partire alle ore 01:00 (ora locale) del 01/02/2022.

Per la missione Terra-Venere-Saturno-Urano la data e l'ora di lancio sono diverse a causa dell'allineamento dei pianeti, quindi per ottimizzare la spesa di carburante e la durata della missione completa si è deciso di partire l'01/01/2022 (un mese prima delle altre missioni) alle ore 03:00 (ora locale). I calcoli effettuati per determinare l'ora sono gli stessi illustrati in precedenza.

### 3.2 Cambio di piano sulla Terra: da Equatoriale a piano dell'Eclittica

Poiché il trasferimento interplanetario si svolge prevalentemente sul piano dell'Eclittica, si è rivelato necessario portarsi su un'orbita di parcheggio terrestre giacente sul suddetto piano. Prendendo come riferimento l'orbita finale della manovra ( $i_{Ecl} = 0^\circ$ ), quella di partenza avrà una inclinazione relativa ad essa pari a  $i_{Eq} = -23.4^\circ$  considerandola puramente Equatoriale. In realtà, partendo da Kourou l'orbita di parcheggio avrà un'inclinazione relativa all'Eclittica pari a  $i_{Kou} = -18.2^\circ$  e ciò implica un  $\Delta v$  di manovra leggermente inferiore.

Si riportano ora i calcoli approssimando l'orbita di parcheggio come puramente Equatoriale:

$$i_{orbita\_iniziale} = i_{Eq} = -23.4^\circ$$

$$i_{orbita\_finale} = i_{Ecl} = 0^\circ$$

$$\Omega_{orbita\_in} = 0^\circ$$

$$\Omega_{orbita\_fin} = 0^\circ$$

$$r_{park\_orbit} = r_{Terra} + r_{parcheggio} = 6371km + 200km = 6571km$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta_e) &= \cos(i_{Eq}) * \cos(i_{Ecl}) + \\ &+ \sin(i_{Eq}) * \sin(i_{Ecl}) * \cos(\Omega_{orbita\_fin} - \Omega_{orbita\_in}) \\ \theta_e &= \arccos(\cos(\theta_e)) \end{aligned} \tag{1}$$

$$v_{park\_orbit} = \sqrt{\frac{\mu_T}{r_{park\_orbit}}} \tag{2}$$

$$\Delta v = 2v_{park\_orbit} \sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right) = 3.16km/s \tag{3}$$

Essendo la manovra ad un solo impulso il  $\Delta t$  è trascurabile.



**Figura 1:** Cambio piano: da Equatoriale, in giallo, a piano dell'Eclittica, in rosso.

### 3.3 Fuga dalla SOI della Terra

L'orbita iperbolica da percorrere al fine di lasciare la sfera di influenza del pianeta Terra è stata calcolata imponendo la  $v_{\infty\_hyp}$  e il raggio di perigeo  $r_{p\_hyp}$ . Infatti, una volta nota  $v_{socr\_Sole}$  (velocità della sonda rispetto al Sole necessaria per intraprendere l'orbita di trasferimento interplanetario desiderata), si avrà che:

$$v_{\infty\_hyp} = v_{socr\_Sole} - v_{Terra\_Sole} \quad (4)$$

A questo punto, dall'Eq. dell'energia con  $r_{\infty\_hyp} \rightarrow \infty$  è possibile ricavare il valore del semiasse maggiore dell'orbita ('a') e di conseguenza la sua eccentricità ('e'), il semilato retto ('p') e l'angolo fra gli asintoti ('δ'):

$$a_{hyp} = -\frac{\mu_T}{(v_{\infty\_hyp})^2} \quad (5)$$

$$r_{p\_hyp} = r_{park\_orbit} \quad (6)$$

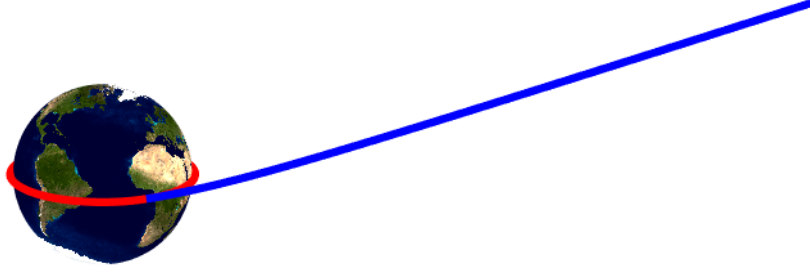
$$e_{hyp} = 1 - \frac{r_{p\_hyp}}{a_{hyp}} \quad (7)$$

$$p_{hyp} = a_{hyp} * (1 - e_{hyp}^2) \quad (8)$$

Avendo caratterizzato completamente l'orbita è possibile calcolare la velocità di fuga al perigeo e quindi il  $\Delta v$  da fornire per il cambio di orbita:

$$v_{p\_hyp} = \sqrt{v_{\infty\_hyp}^2 + 2v_{park\_orbit}^2} \quad (9)$$

$$\Delta v = v_{p\_hyp} - v_{park\_orbit} \quad (10)$$



**Figura 2:** Fuga da SOI terrestre: orbita di parcheggio su Eclittica, in rosso, e iperbole di fuga, in blu.

Per il calcolo del  $\Delta t$  la faccenda si complica leggermente. È infatti necessario ricavare la variazione di anomalia vera della sonda (a partire da  $f_{in} = 0$ ) quando questa si trova ai limiti della SOI, rinunciando quindi all'ipotesi di  $r_{\infty\_hyp} \rightarrow \infty$ . A questo punto bisogna calcolare l'anomalia Media ('M') passando per l'anomalia eccentrica ('E') ed infine ricavare il tempo di volo.

$$f_{hyp} = \arccos \frac{(p_{hyp} - r_{SOI\_T})}{(e_{hyp} * r_{SOI\_T})} \quad (11)$$

$$E_{hyp} = \frac{1}{2} * \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{e_{hyp} - 1}{e_{hyp} + 1}} * \tan \frac{f_{hyp}}{2} \right) \quad (12)$$

$$M_{hyp} = e_{hyp} * \sinh E_{hyp} - E_{hyp} \quad (13)$$

$$\Delta t = M_{hyp} * \sqrt{\frac{-a_{hyp}^3}{\mu_T}} \quad (14)$$

### 3.4 Missioni interplanetarie

#### 3.4.1 Trasferimento interplanetario con Manovra di Hohmann

Per poter effettuare un trasferimento interplanetario da Terra ad Urano attorno al Sole con una manovra di Hohmann si è fatto ricorso all'ipotesi semplificativa di orbita perfettamente circolare sia per quella terrestre (di partenza) che per quella di Urano (orbita di arrivo).

Definendo  $r_{iniziale\_H}$  come la distanza tra Sole e Terra, e come  $r_{finale\_H}$  la distanza tra Sole ed Urano, possiamo ricavarci i parametri orbitali della Hohmann:

$$a_H = \frac{(r_{iniziale\_H} + r_{finale\_H})}{2} \quad (15)$$

$$e_H = 1 - \frac{r_{iniziale\_H}}{a_H} \quad (16)$$

$$v_{p\_H} = \sqrt{\frac{\mu_S}{r_{iniziale\_H}} \left[ 2 - \frac{2}{1 + \frac{r_{finale\_H}}{r_{iniziale\_H}}} \right]} = 40.70(km/s) \quad (17)$$

$$v_{a\_H} = \sqrt{\frac{\mu_S}{r_{finale\_H}} \left[ 2 - \frac{2(r_{finale\_H}/r_{iniziale\_H})}{1 + \frac{r_{finale\_H}}{r_{iniziale\_H}}} \right]} = 2.17(km/s) \quad (18)$$

Le equazioni 17 e 18 rappresentano rispettivamente il modulo della velocità che la sonda deve avere al perielio e all'afelio dell'orbita di trasferimento; a partire da queste due informazioni è possibile ricavare il  $\Delta V$  necessario alla manovra come mostrato nelle sezioni riguardanti le fasi di fuga e di cattura.

Per costruzione il  $\Delta t_H$  necessario ad effettuare la manovra di Hohmann è pari alla metà del periodo orbitale dell'orbita di trasferimento, perciò si avrà:

$$\Delta t_H = \pi \sqrt{\frac{a_H^3}{\mu_S}} = 15.95(anni) \quad (19)$$

Un resoconto in termini di  $\Delta v$  e  $\Delta t$  della missione è riportato nella tabella 1.

Fasi della missione	$\Delta v$ (km/s)	$\Delta t$ (giorni)
Cambio piano sulla Terra	3.16	0
Fuga dalla Terra	8.06	1
ToF Hohmann	0	5822.15
Cattura su Urano	6.25	120
Cambio piano su Urano	12.94	0.125
Totale	30.42	5943.27

**Tabella 1:** Resoconto missione con orbita di trasferimento Hohmann

**Data di Partenza** La scelta della data di partenza è stata effettuata a partire dal calcolo di  $\theta_H$ , angolo tra Terra e Urano, necessario per intercettare il pianeta target alla fine del periodo di trasferimento.

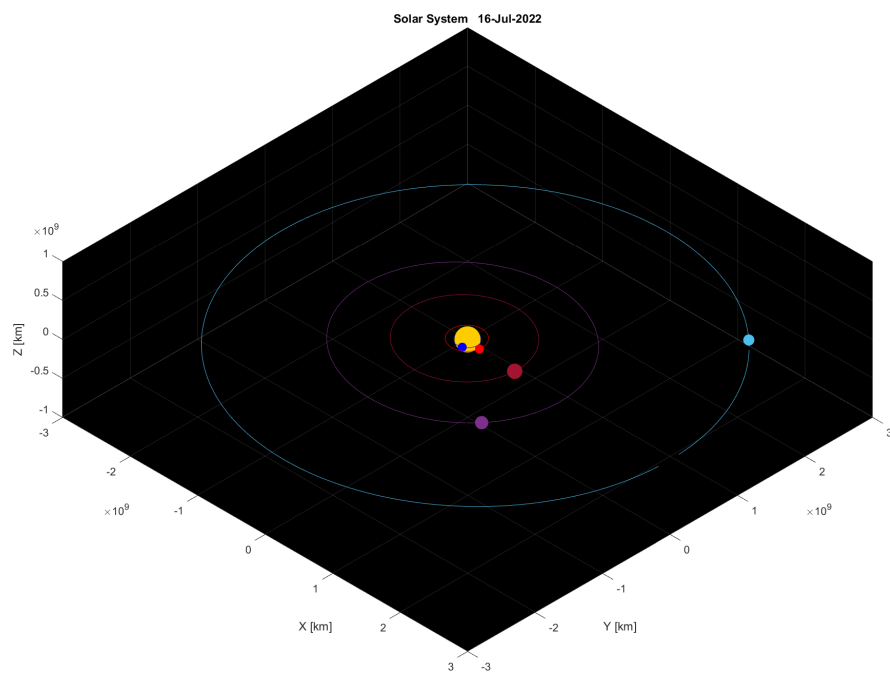
$$\theta_H = \pi \left[ 1 - \sqrt{\left[ \frac{(1 + r_{iniziale\_H}/r_{finale\_H})}{2} \right]^3} \right] = 111.21(deg) \quad (20)$$

Una volta noto  $\theta_H$ , è stata scelta la data di partenza in maniera iterativa, per mezzo di uno script Matlab in grado di estrarre il vettore posizione dei pianeti alla partenza dalle effemeridi e di calcolarne l'angolo compreso  $\theta$  a partire dalla formula inversa del prodotto scalare. Tale valore è stato poi confrontato con  $\theta_H$  fino ad ottenere un errore  $e_\theta$  prossimo allo zero.

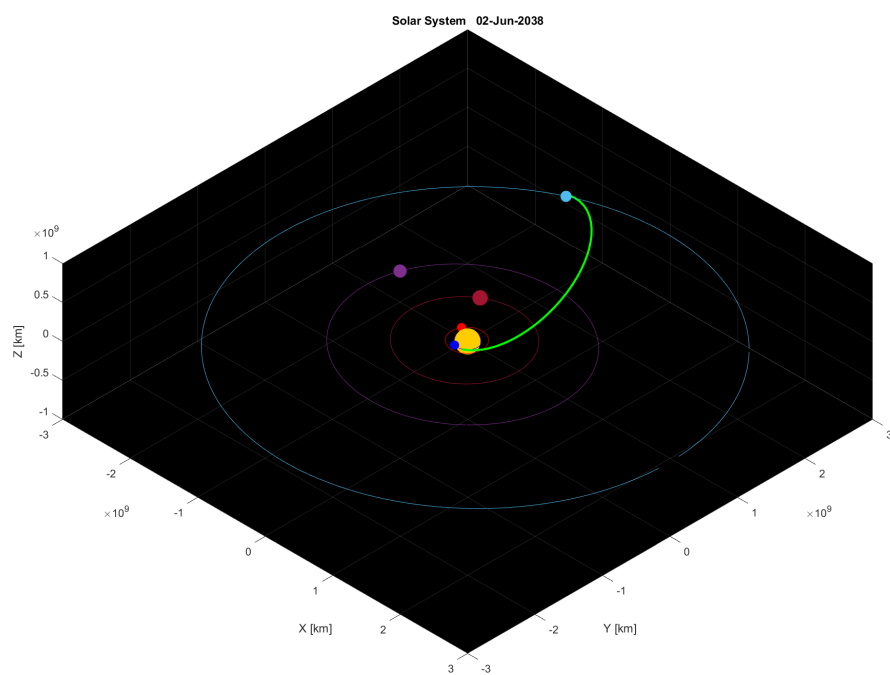
$$\theta = \arccos \frac{\vec{r}_U \cdot \vec{r}_T}{||r_U|| ||r_T||} \quad (21)$$

$$e_\theta = \theta_H - \theta = -3.06 * 10^{-6}(deg) \quad (22)$$

Le date di partenza e di arrivo risultanti sono rispettivamente il 16/07/2022 alle 23:59:30 (figura 3) e il 29/06/2038 alle 03:16:11 (figura 4).



**Figura 3:** Trasferimento con manovra di Hohmann: allineamento pianeti alla partenza.



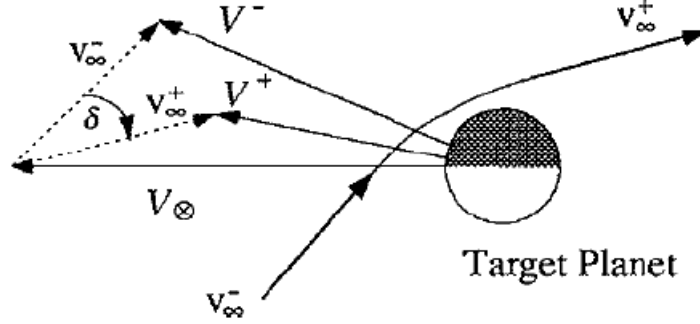
**Figura 4:** Trasferimento con manovra di Hohmann: allineamento pianeti all'arrivo.



### 3.4.2 Terra-Giove-Saturno-Urano

La prima missione considera la traiettoria determinata col problema di Lambert tra i pianeti Terra-Giove, Giove-Saturno, Saturno-Urano, sfruttando i fly-by sui pianeti centrali. L'inizio di questa missione è previsto il 01/07/2022 dall'orbita terrestre, implicando un mantenimento dello spacecraft di durata pari a 6 mesi in essa. E' stato perciò effettuato il calcolo della traiettoria, considerando le posizioni dei pianeti grazie alle effemeridi, in funzione del tempo ed è stato scelto per la percorrenza della prima orbita un tempo di volo di 2 anni con un rispettivo  $\Delta v$  di 7.62124 km/s.

**Fly-By** Variazioni di traiettorie dello spacecraft sono possibili grazie ai fly-by (o gravity-assist). Inizialmente si arriva al pianeta sul quale fare la manovra con un certo vettore velocità  $V_\infty^-$  e grazie alla velocità inerziale del pianeta si ottiene un vettore velocità di uscita  $V_\infty^+$ .



**Figura 5:** Vettori velocità ingresso e uscita dal pianeta relativi al pianeta e inerziali

Quindi dal triangolo delle velocità possiamo affermare che  $V_\infty^- = V_l - V_p$  ovvero la differenza tra la velocità calcolata col problema di Lambert e quella del pianeta. In seguito passiamo al calcolo del semiasse maggiore ('a'), definito come il rapporto tra la costante gravitazionale planetaria e la norma della  $V_\infty^-$ . Un parametro libero può essere considerato il raggio di perigeo che crea una dipendenza con l'eccentricità dell'orbita secondo:

$$e = 1 - (r_p/a) \quad (23)$$

Dalla figura di cui sopra si nota l'angolo  $\delta$  che denota la rotazione del vettore velocità in ingresso e in uscita dalla sfera di influenza del pianeta.

In funzione dei parametri orbitali descritti si definisce l'anomalia vera ('f'):

$$f = \cos^{-1} \left( \frac{a(1 - e^2) - r_p}{r_p e} \right) \quad (24)$$

Tramite il semilato retto ('p') possiamo calcolarci il tempo di volo dello spacecraft dal punto di ingresso della SOI a quello di uscita del pianeta.

$$f_{in} = \cos^{-1} \left( \frac{1}{e} \left[ \frac{p}{R_{SOI}} - 1 \right] \right) \quad (25)$$

Descriviamo le equazioni di Keplero, mediante l'anomalia eccentrica ('F') e quella media ('M'), utilizzate per il calcolo del tempo impiegato dallo spacecraft per percorrere l'orbita descritta attorno al pianeta, partendo dal raggio della sfera di influenza.

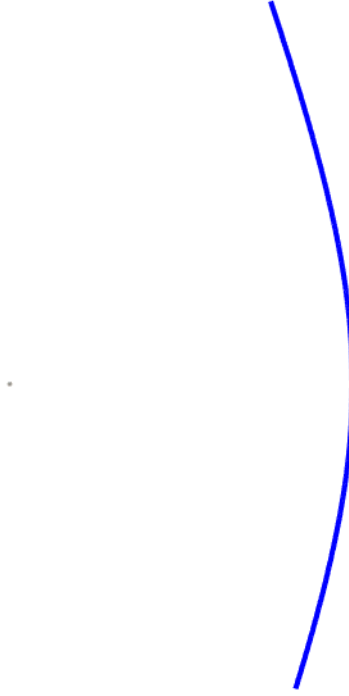
$$F = \ln(\cosh(F) + \sqrt{(\cosh(F))^2 - 1}) \quad (26)$$

$$\cosh(F) = \frac{e + \cos(f)}{e \cdot \cos(f) + 1} \quad (27)$$

$$t - t_p = \sqrt{\frac{-a^3}{\mu}} M \quad (28)$$

$$M = (e \cdot \sinh(F) - F) \quad (29)$$

Quindi con le formule descritte possiamo ricavarci il tempo impiegato dallo spacecraft affinché entri nella SOI del pianeta e arrivi al raggio di perigeo, con queste caratteristiche dell'orbita. Successivamente, in modo da minimizzare il  $\Delta v$  è stata implementata una parte di codice che verificasse il momento esatto in cui applicare l'impulso per immettersi su di una nuova traiettoria di Lambert. In altre parole è stato confrontato il costo all'uscita della SOI del pianeta con il costo nel caso si proseguisse sulla stessa traiettoria utilizzata per fare il gravity assist. Ora Prendiamo in esame il flyby su Giove come primo esempio.



**Figura 6:** Fly-by attorno a Giove

Il tempo per effettuare il fly-by su quest'ultimo pianeta è di circa 5 mesi con un raggio di perigeo di  $5 \cdot 10^6$  km.

Tale procedimento è stato seguito anche per le altre missioni.

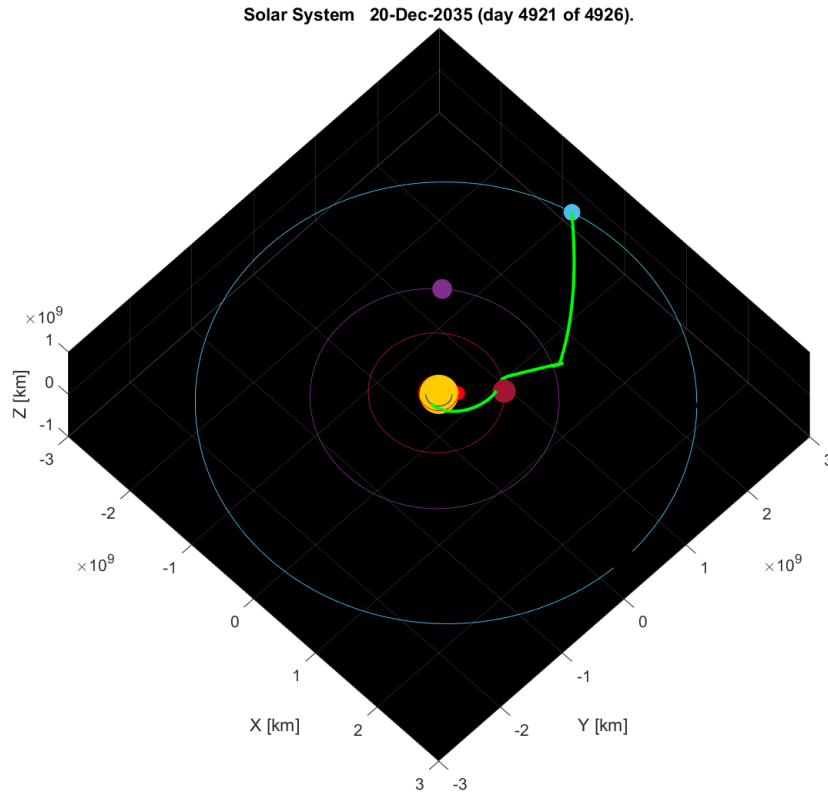
In seguito al gravity-assist si presenta una nuova traiettoria di Lambert, la cui

posizione iniziale coincide con quella del pianeta Giove, trascurando il fly-by. Questo è stato eseguito solamente in questa missione, per i mancati allinamenti planetari. Giunti perciò in data 01/09/2030 su Saturno si esegue un nuovo fly-by di durata pari a 4 mesi e 5 giorni, per raggiungere poi il pianeta target il 25/12/2035.

Di seguito si presenta un resoconto della missione.

Fasi della missione	$\Delta v$ (km/s)	$\Delta t$ (giorni)
Cambio piano sulla Terra	3.16	0
Terra-Giove	7.62	731
Giove-Saturno	12.95	2253
Saturno-Urano	14.83	1941
Cattura su Urano	6.34	70.3
Cambio piano su Urano	12.94	3.25
Totale	57.84	4998.55

**Tabella 2:** Resoconto missione Terra-Giove-Saturno-Urano



**Figura 7:** Missione Terra-Giove-Saturno-Urano

### 3.4.3 Terra-Venere-Saturno-Urano

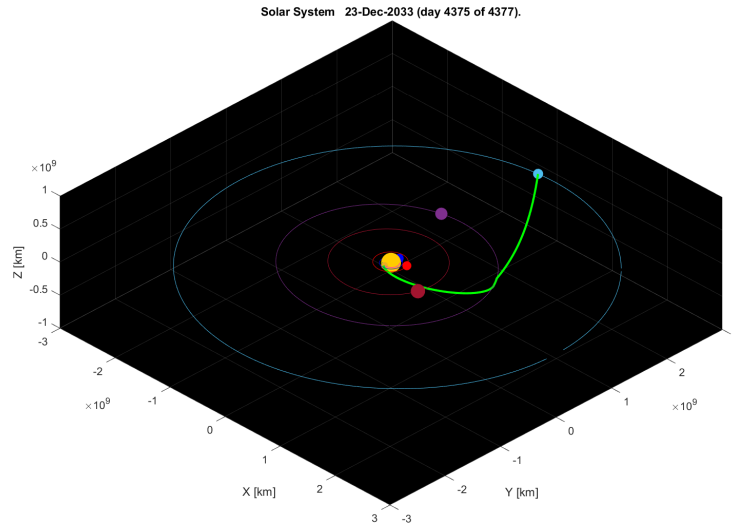
Come già notato in precedenza questa missione inizia molto prima delle altre: il 02/01/2022. La fuga dalla Terra avviene il giorno successivo al lancio a causa dell'allineamento favorevole tra i pianeti ed ha dunque inizio la missione.

Dopo solo 90 giorni lo spacecraft arriva su Venere e sfruttando la sua attrazione gravitazionale e un  $\Delta v$  fornito dai motori si immette in un'orbita che lo porterà su Saturno. L'arrivo su Saturno è previsto il 02/01/2028. In seguito attorno a Saturno viene eseguito un ulteriore fly-by per potersi immettere, con un minor costo in termini di carburante, su una traiettoria eliocentrica che porta lo spacecraft da Saturno ad Urano, dove è previsto che arrivi il 26/12/2033.

Successivamente all'ingresso nella Sfera di Influenza di Urano verranno eseguite le fasi di cattura e di cambio piano per porsi sull'orbita finale equatoriale ad una quota di 1000 km dalla superficie del pianeta.

Fasi della missione	$\Delta v$ (km/s)	$\Delta t$ (giorni)
Cambio piano sulla Terra	3.16	0
Terra-Venere	6.53	90.14
Venere-Saturno	11.81	2101
Saturno-Urano	11.32	2184.6
Cattura su Urano	6.39	56.11
Cambio piano su Urano	12.94	3.25
Totale	52.15	4435.1

**Tabella 3:** Resoconto missione Terra-Venere-Saturno-Urano



**Figura 8:** Panoramica missione Terra-Venere-Saturno-Urano completa.

### 3.4.4 Terra-Terra-Saturno-Urano

Per effettuare questa missione si effettua un fly-by attorno alla Terra ed uno attorno a Saturno inoltre le traiettorie interplanetarie sono determinate dalla risoluzione del problema di Lambert conoscendo le posizioni dei pianeti, sfruttando le Effemeridi, e l'imposizione del tempo di volo (TOF) tra il punto di partenza e quello di arrivo.

Le date di arrivo e partenza dai pianeti non sono state scelte casualmente ma facendo un'analisi di ottimizzazione del  $\Delta$  di velocità per ottenere il più piccolo  $\Delta v$  complessivo per questo tipo di missione.

La partenza dall'orbita di parcheggio Terrestre è il 01/03/2023, per tornare sulla Terra il 01/08/2024.

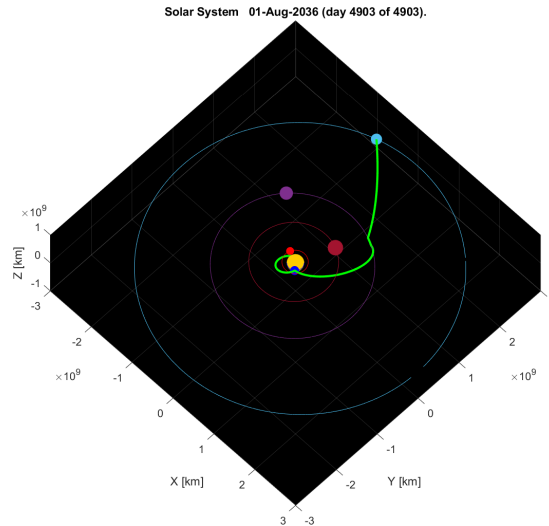
Dopo il fly-by attorno alla Terra della durata di 1 giorno 1 ora e 43 minuti, lo spacecraft riparte verso Saturno, su cui arriva il 02/08/2030.

Arrivato a questo punto viene eseguito l'ultimo fly-by nella sfera di influenza di Saturno; dopo 6 mesi 5 giorni 21 ore e 27 minuti lo spacecraft esce dalla SOI di Saturno per dirigersi verso Urano per poi effettuare la cattura e il cambio di piano finali.

L'arrivo su Urano è previsto per il 03/08/2036.

Fasi della missione	$\Delta v$ (km/s)	$\Delta t$ (giorni)
Cambio piano sulla Terra	3.16	0
Fuga dalla Terra	15.23	519.5
Terra-Saturno	42.04	2191
Saturno-Urano	8.32	2191.7
Cattura su Urano	6.33	71.21
Cambio piano su Urano	12.94	3.25
Totale	88.03	4977.7

**Tabella 4:** Resoconto missione Terra-Terra-Saturno-Urano



**Figura 9:** Panoramica missione Terra-Terra-Saturno-Urano completa.

### 3.4.5 Terra-Marte-Giove-Urano

Per effettuare questa missione si è scelto di non effettuare alcun fly-by attorno alla Terra ma di fare il primo fly-by attorno a Marte ed uno successivo attorno a Giove. Le traiettorie interplanetarie sono determinate sempre dalla risoluzione del problema di Lambert attraverso le Effemeridi e l'imposizione del tempo di volo (TOF) tra il punto di partenza e quello di arrivo.

Le date di arrivo e partenza dai pianeti non sono state scelte casualmente ma facendo un'analisi di ottimizzazione del  $\Delta v$  di velocità per ottenere il più piccolo  $\Delta v$  complessivo per questo tipo di missione.

La partenza dall'orbita di parcheggio Terrestre è il 01/05/2027, per arrivare nella SOI di Marte il 03/10/2028.

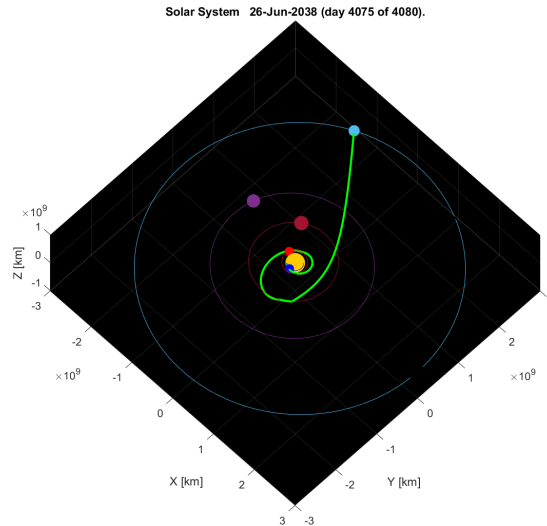
Dopo 1 giorno 11 ore e 10 minuti, lo spacecraft esce dalla SOI per dirigersi verso Giove, su cui arriva il 03/07/2032.

Arrivato a questo punto viene eseguito l'ultimo fly-by nella sfera di influenza di Giove della durata di 5 mesi 29 giorni 9 ore e 35 minuti.

Successivamente lo spacecraft esce da Giove e percorre l'ultima traiettoria interplanetaria verso Urano per poi effettuare la cattura e il cambio di piano finali. L'ingresso nella SOI di Urano è previsto per il 03/07/2038.

Fasi della missione	$\Delta v$ (km/s)	$\Delta t$ (giorni)
Cambio piano sulla Terra	3.16	0
Fuga dalla Terra	4.28	521
Marte-Giove	12.37	1368
Giove-Urano	21.40	2191
Cattura su Urano	6.54	35
Cambio piano su Urano	12.94	3.25
Totale	60.69	4118.25

**Tabella 5:** Resoconto missione Terra-Marte-Giove-Urano



**Figura 10:** Panoramica missione Terra-Marte-Giove-Urano completa.

### 3.4.6 Terra-Marte-Saturno-Urano

Anche questa missione, così come la precedente, effettua un fly-by attorno a Marte ma l'altro viene effettuato attorno a Saturno inoltre le traiettorie interplanetarie sono determinate, come nelle missioni precedenti, dalla risoluzione del problema di Lambert conoscendo le posizioni dei pianeti e imponendo la durata temporale del percorso interplanetario.

Le date di arrivo e partenza dai pianeti non sono state scelte casualmente ma facendo un'analisi di ottimizzazione del  $\Delta v$  di velocità per ottenere il più piccolo  $\Delta v$  complessivo per questo tipo di missione.

La partenza dall'orbita di parcheggio sulla Terra è il 01/09/2022. L'arrivo nella SOI di Marte è previsto per il 04/10/2023.

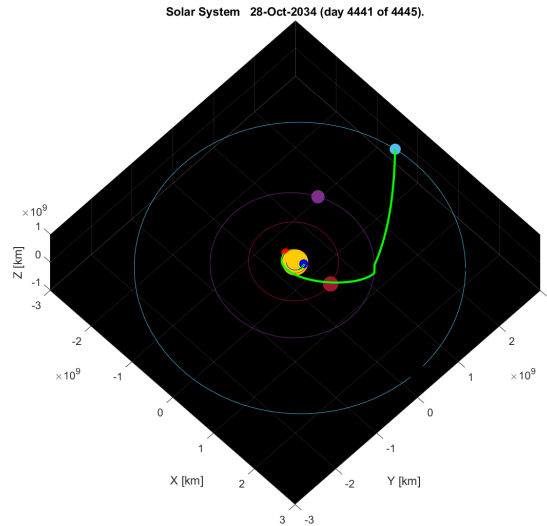
Dopo il fly-by attorno a Marte, della durata di 4 giorni 3 ore e 39 minuti, lo spacecraft riparte su una nuova orbita per arrivare su Saturno. Su quest'ultimo l'arrivo è previsto il 04/11/2028.

Arrivato a questo punto viene eseguito l'ultimo fly-by nella sfera di influenza di Saturno. Dopo 6 mesi 6 giorni 7 ore e 23 minuti lo spacecraft esce dalla SOI di Saturno per dirigersi verso Urano per poi effettuare le operazioni finali.

L'arrivo nella sfera di influenza di Urano è previsto per il 04/11/2034.

Fasi della missione	$\Delta v$ (km/s)	$\Delta t$ (giorni)
Cambio piano sulla Terra	3.16	0
Fuga dalla Terra	3.92	397.5
Marte-Saturno	15.99	1858
Saturno-Urano	8.14	2191
Cattura su Urano	6.37	61.38
Cambio piano su Urano	12.94	3.25
Totale	50.51	4511.13

**Tabella 6:** Resoconto missione Terra-Marte-Saturno-Urano



**Figura 11:** Panoramica missione Terra-Marte-Saturno-Urano completa.

### 3.5 Cattura nella SOI di Urano

Una volta entrati nella SOI di Urano, l'influenza gravitazionale del pianeta non é più trascurabile e la sonda intraprenderà un'orbita iperbolica attorno ad esso. Il problema dei due corpi riguarda ora solo Urano e lo spacecraft, mentre può essere trascurata l'influenza del Sole. Come nel caso della fuga dalla SOI terrestre, si impone il raggio dell'orbita di parcheggio desiderata (in questa fase giacente ancora sul piano dell'eclittica) pari a 1000 km dalla superficie del pianeta, come da specifiche di progetto. La  $v_{\infty\_hyp}$  può essere ricavata invece dalla seguente relazione:

$$v_{\infty\_hyp} = v_{socr\_Sole} - v_{Urano\_Sole} \quad (30)$$

Come nella sezione 3.3, possiamo ora ricavare tutti i parametri di interesse dell'orbita:

$$a_{hyp} = -\frac{\mu_U}{(v_{\infty\_hyp})^2} \quad (31)$$

$$r_{p\_hyp} = r_{Urano} + 1000km = r_{park\_orbit} \quad (32)$$

$$e_{hyp} = 1 - \frac{r_{p\_hyp}}{a_{hyp}} \quad (33)$$

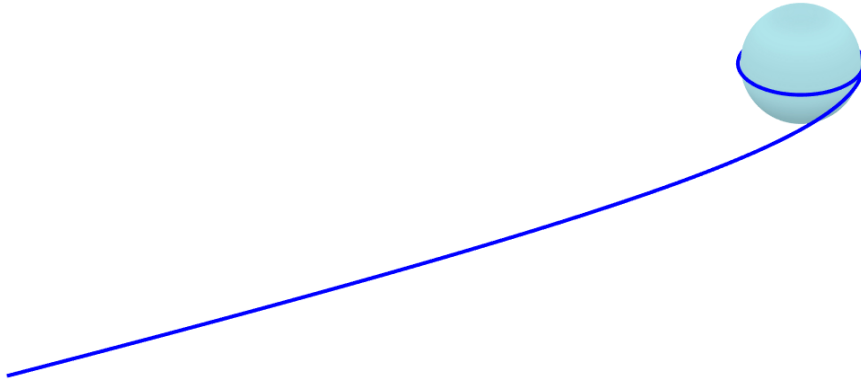
$$p_{hyp} = a_{hyp} * (1 - e_{hyp}^2) \quad (34)$$

Avendo caratterizzato completamente l'orbita é possibile calcolare la velocità sull'orbita di cattura al perigeo e quindi il  $\Delta v$  da fornire per immettersi sull'orbita di parcheggio:

$$v_{park\_orbit} = \sqrt{\frac{\mu_U}{r_{park\_orbit}}} \quad (35)$$

$$v_{p\_hyp} = \sqrt{v_{\infty\_hyp}^2 + 2v_{park\_orbit}^2} \quad (36)$$

$$\Delta v = v_{p\_hyp} - v_{park\_orbit} \quad (37)$$



**Figura 12:** Cattura SOI di Urano: orbita di parcheggio su Eclittica e iperbole di cattura , in blu.

Si omette il calcolo del  $\Delta t$  in quanto identico al caso riportato nella sezione 3.3.



### 3.6 Cambio di Piano su Urano: da piano dell'Eclittica a Equatoriale

L'ultima parte della missione prevede l'arrivo su un'orbita equatoriale del pianeta target, che ha un'inclinazione  $i_{EQU} = 97.7^\circ$ .

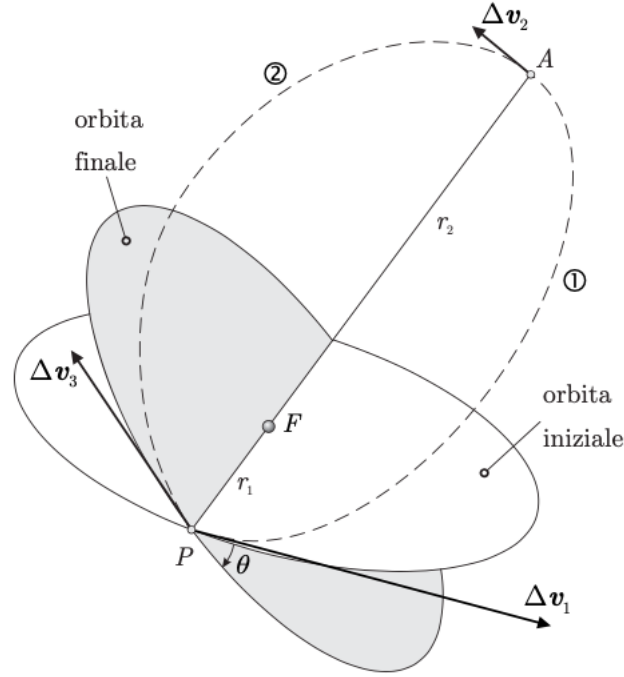
Per eseguire questo cambio di piano è stato scelto di effettuare una manovra a tre impulsi restrittiva, come mostrata in figura 13.

Questa scelta è stata dettata dal minor  $\Delta v$  complessivo della manovra rispetto ad una manovra a singolo impulso.

La manovra inizia con l'applicazione di una variazione di velocità  $\Delta v_1$ . Successivamente lo spacecraft si immette in un'orbita ellittica complanare a quella iniziale, definita di trasferimento, raggiunto l'apocentro viene applicata una seconda variazione impulsiva di velocità  $\Delta v_2$ , che effettua una rotazione del vettore velocità pari all'angolo del cambio di piano. A questo punto lo spacecraft si trova su di un'orbita appartenente al piano orbitale dell'orbita circolare finale. Infine viene eseguito una terza ed ultima variazione di velocità  $\Delta v_3$ , tale da entrare in un'orbita circolare. Il vettore  $\Delta v_3$  ha lo stesso modulo di  $\Delta v_1$  pertanto il calcolo totale di variazione di velocità è dato da:

$$\Delta v_{tot} = 2\Delta v_1 + \Delta v_2 \quad (38)$$

Definisco  $r_1$  ed  $r_2$  rispettivamente come la distanza di pericentro e di apocentro dell'orbita di trasferimento. Inoltre sia  $\rho = r_2/r_1$



**Figura 13:** Cambiamento di piano orbitale con manovra a tre impulsi

La variazione  $\Delta v_1$ , in forma adimensionale, è data dall'espressione:

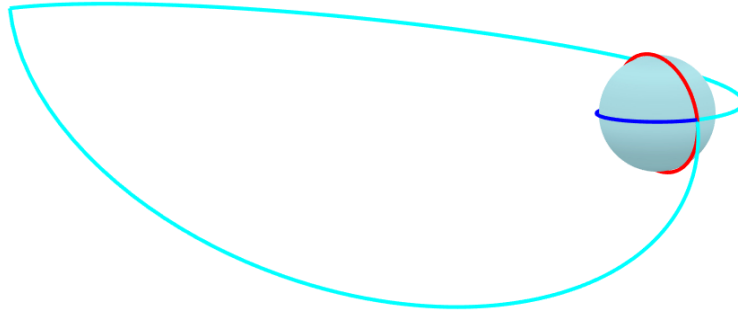
$$\frac{\Delta v_1}{v_{c1}} = \sqrt{\frac{2\rho}{1+\rho}} - 1 \quad (39)$$

nella quale  $v_{c1}$  indica la velocità dell'orbita circolare di parcheggio. Mentre la seconda variazione di velocità si ricava tenendo conto che si tratta di un puro cambiamento di piano orbitale, quindi conoscendo  $\theta$ :

$$\Delta v_2 = 2v_a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (40)$$

dove  $v_a$  si ricava dall'equazione dell'energia:

$$\frac{v_a^2}{2} - \frac{\mu}{r_2} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2} \quad (41)$$



**Figura 14:** Cambio piano su Urano: orbita sul piano dell'Eclittica, in blu, orbita ellittica, in azzurro, orbita equatoriale, in rosso

## 4 Considerazioni finali

La progettazione di svariate missioni interplanetarie è stata necessaria ai fini di poter scegliere qual è quella che permette di risparmiare maggiormente in termini di carburante oppure in termini di tempo.

Visto che il gruppo di lavoro è abbastanza grande si è pensato di analizzare uno spettro più ampio di possibilità anziché una singola missione, oltre la Hohmann, come previsto dalle specifiche di progetto.

Di seguito si riportano i  $\Delta v$  e  $\Delta t$  complessivi per le missioni analizzate.

Missione	$\Delta v$ totale (km/s)	$\Delta t$ totale (giorni)
Hohmann	30.42	5943.27
Terra-Giove-Saturno-Urano	57.84	4998.55
Terra-Venere-Saturno-Urano	52.15	4435.1
Terra-Terra-Saturno-Urano	88.03	4977.7
Terra-Marte-Giove-Urano	60.69	4118.25
Terra-Marte-Saturno-Urano	50.51	4511.13

**Tabella 7:** Resoconto missioni

Dalla tabella emerge chiaramente come il trasferimento con la manovra di Hohmann sia quello più economico in termini di  $\Delta v$  e quindi di spesa di carburante. Tutte le altre missioni non spendono meno del 50% in più rispetto a quest'ultima. Dall'altro lato della medaglia la Hohmann è la missione che impiega più tempo per arrivare a termine (senza tenere conto del tempo di attesa nell'orbita di parcheggio sulla Terra che non è stato preso in considerazione in nessuna missione).

Andando a valutare l'ottimalità delle missioni in termini di tempo si nota come la migliore sia la Terra-Marte-Giove-Urano che impiega 4118.25 giorni per arrivare a compimento. Degno di nota è il fatto che la missione più rapida non sia anche quella a costo più elevato in  $\Delta v$ :  $\Delta v_{TMGU} = 60.69 km/s$ .

Tuttavia per scegliere quale sia definitivamente la miglior missione da eseguire si può definire un funzionale che tenga conto di entrambe le componenti e che estragga la migliore opzione:

$$J = \min_m \{ \Delta v(m) \cdot \Delta t(m) \} \quad (42)$$

Missione	J ( $\times 10^3$ )
Hohmann	180.79
Terra-Giove-Saturno-Urano	289.12
Terra-Venere-Saturno-Urano	231.29
Terra-Terra-Saturno-Urano	438.19
Terra-Marte-Giove-Urano	249.94
Terra-Marte-Saturno-Urano	227.86

**Tabella 8:** Resoconto missioni2

Secondo questo criterio la missione migliore risulta il trasferimento tramite manovra di Hohmann. Appare chiaro come qualora si avessero particolari esigenze in termini di tempo si possa optare per un'altra missione essendo consapevoli che la spesa in termini di carburante sia di molto maggiore.

Per concludere si vuole ribadire il fatto che analizzando più missioni, oltre alla manovra di Hohmann, è stato possibile effettuare una scelta più accurata sul tipo di missione che può essere realizzata all'atto pratico, inoltre questo ha permesso al gruppo di capire meglio quali siano le problematiche da affrontare seguendo una traiettoria che passa per pianeti diversi.

## 5 Appendice

### 5.1 Plot traiettorie veicolo spaziale

Tutte le traiettorie percorse dal veicolo spaziale sono state tracciate utilizzando la funzione matlab *plot\_trajettoria\_spacecraft.m*. Tale funzione sfrutta gli elementi orbitali che contraddistinguono ogni orbita, per poterla tracciare.

Gli elementi orbitali in totale sono 7:

$[h]$  = momento angolare

$[e]$  = eccentricità

$[\Omega]$  = ascensione retta

$[i]$  = inclinazione dell'orbita rispetto all'Eclittica

$[\omega]$  = argomento del periasse

$[f]$  = anomalia vera

$[a]$  = semiasse maggiore

A partire da questi dati la funzione si ricava il semilato retto rispetto al corpo celeste che sta nel fuoco dell'orbita.

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (43)$$

con

$$\mu = G \cdot M$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale e  $M$  è la massa del corpo celeste. A questo punto si calcola la matrice di rotazione che riporta le coordinate della traiettoria dalla terna perifocale alla terna eliocentrica ovvero il sistema di riferimento rispetto a cui sono espresse le posizioni dei pianeti.

$$\begin{aligned} R_3(\Omega) &= \begin{bmatrix} \cos(\Omega) & \sin(\Omega) & 0 \\ -\sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R_1(incl) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(incl) & \sin(incl) \\ 0 & -\sin(incl) & \cos(incl) \end{bmatrix} \\ R_3(\omega) &= \begin{bmatrix} \cos(w) & \sin(w) & 0 \\ -\sin(w) & \cos(w) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Q = [R_2(\omega) * R_1(incl) * R_3(\Omega)]^T \quad (44)$$

Infine si ricava la posizione del veicolo spaziale in coordinate polari:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(f)} \quad (45)$$

e si converte in coordinate cartesiane

$$x = r \cdot \cos(f) \quad (46)$$

$$y = r \cdot \sin(f) \quad (47)$$

Per tracciare il grafico della traiettoria è sufficiente tracciare le coppie di punti  $(x, y)$  al variare dell'anomalia vera; infatti grazie alle effemeridi si è in grado di ricavare l'anomalia vera quando il veicolo si immette sull'orbita di trasferimento e l'anomalia vera quando quest'ultimo cambia orbita (lo stesso vale per i fly-by).

## 6 Riferimenti

- appunti delle lezioni
- Sito calcolo effemeridi NASA: "[https : //ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html/](https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/app.html/)"
- G. Mengali, A. A. Quarta "*FondamentidiMeccanicadelVoloSpaziale*"
- H. D. Curtis "*OrbitalMechanicsforEngineeringStudents*"