Ex 3

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} \quad \text{et } \mathscr{C}_f \text{ est sa courbe représentative}$$

1) Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$.
2) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par $O(0,0)$?

1) $f(x) = \frac{u}{v}$ $\quad u = 2x \quad v = 1+x$

$u' = 2 \quad v' = 1$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2(1+x) - 2x(1)}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{2+2x-2x}{(1+x)^2} = \frac{2}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = 4 \Rightarrow \frac{2}{(1+x)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^2 = \frac{2}{4} \Leftrightarrow 1 + 2x + x^2 = 0,5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 0,5 = 0 \quad a = 1 \quad b = 2 \quad c = 0,5$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 0,5 = 4 - 2 = 2$$

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à $y = 4x$

au points d'abscisse $x_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Tangente en $O(0;0)$

Éq tangente en x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$x_0 = 0$ $\quad f'(0) = \dfrac{2}{(1+0)^2} = 2$ $\quad f(0) = \dfrac{2 \times 0}{1+0} = 0$

$$\Rightarrow \quad y = 2(x-0) + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2x}$$

$f(0) = 0$, donc le point $O(0;0)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.

La droite $y = 2x$ est bien tangente à $\mathcal{C}_f$ en O.