Suites

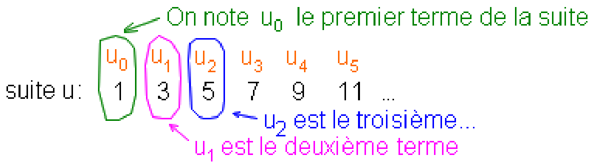
En maths, une **suite** est un ensemble de nombres qui se suivent d'une manière logique avec un début mais sans fin.

Exemples
1, 3, 5, 7, 9,... est une suite.
5, -10, 20, -40, 80, -160,... est une suite.

Les suites servent principalement à étudier des phénomènes répétitifs, par exemple si on veut savoir quel montant sera présent sur un livret d'épargne si on effectue ni retrait ni dépôt et que des intérêts sur la somme initiale s'accumulent chaque année pendant 10 ans (il ne suffit pas de calculer 10 fois les intérêts de la première année).

Notations

On nomme généralement u ou v les suites que l'on étudie.
Les valeurs prises par une suite sont appelées les **termes** de la suite.



Écriture d'une suite

Écrire les premiers termes ne suffit pas pour représenter une suite.
Les suites sont toujours représentées :

- Soit par une formule qui donne u_n en fonction de n.
- Soit par le premier terme et une formule appelée **formule de récurrence** qui donne le terme u_{n+1} en fonction de u_n.

Exemple
Pour représenter la suite des nombres impairs nous pouvons écrire $u_n=2n+1$.

Nous pouvons aussi écrire $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.

Donne le 7ème terme de la suite définie par $u_n=-2n+2$.

Suites arithmétiques

Définition

Si la suite avance toujours d'un même nombre (par exemple 5, 10, 15, 20,...), on dit que c'est une **suite arithmétique**.

Le nombre r tel que $u_{n+1}=u_n+r$ est appelé **la raison** de la suite.

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on peut prouver que $u_{n+1}-u_n$ est constant.

Calcul des termes

Pour une suite arithmétique, comme $u_1=u_0+r$ on a:

$u_2=u_1+r=u_0+2r$,

$u_3=u_2+r=u_0+3r$,

$u_4=u_3+r=u_0+4r$, et d'une manière générale :

$\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Cette formule permet de calculer n'importe quel terme quand on connaît le premier terme et la raison.

On peut aussi calculer n'importe quel terme si on connaît un terme quelconque et la raison.
Par exemple, $u_{20}=u_{10}+10\times r$.

On peut aussi retrouver la raison à partir de deux termes éloignés.
Si $u_3=10$ et $u_7=34$, la raison est 6 car on a avancé de 24 (34-10) en 4 termes (7-3).

u est une suite arithmétique. On sait que $u_1=-13$ et $u_3=-5$. Combien fait u_{10}?

Somme des termes

Il existe une formule qui permet de calculer la somme des premiers termes d'une suite arithmétique.

Essayons de calculer la somme des 47 premiers termes de la suite des nombres impairs.
Comme le dernier terme u_{46} vaut 93 (rappel : $u_n=u_0+nr$), on peut écrire :

$S = 1+ 3+ 5+ 7+\ldots\ldots +89+91+93$

et $S = 93+91+89+87+\ldots\ldots + 5+ 3+ 1$

En additionnant ces deux égalités, on obtient 47 fois le même nombre 94.

$S+S = 94+94+94+94+\ldots\ldots 94+94+94$

Donc $2S = 47\times 94$

Et donc $S = \frac{47\times 94}{2} = 2209$

La somme des 47 premiers termes de cette suite fait 2209.

Pour une suite arithmétique, on a toujours :

$$\boxed{S = nombre\ de\ termes \times \frac{(premier + dernier\ terme)}{2}}$$

Quelle est la somme des 10 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 100 et de raison -10?

Suites géométriques

Définition

Une **suite géométrique** est une suite pour laquelle on multiplie toujours par un même nombre (également appelé raison de la suite, et généralement noté q) pour passer d'un terme au suivant.

Par exemple, la suite $u_n=(-2)^n$, dont les premiers termes sont -2, 4, -8, 16, -32,... , est une suite géométrique de raison -2.

Calcul des termes

Comme $u_1=u_0\times q$, on a :

$u_2=u_1\times q=u_0\times q\times q=u_0\times q^2$

$u_3=u_2\times q=u_0\times q^2\times q=u_0\times q^3$

$u_4=u_3\times q=u_0\times q^3\times q=u_0\times q^4$

Et d'une manière générale :

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

Somme des termes

La formule suivante permet de calculer la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\boxed{S = premier\ terme \times \frac{1 - q^{nombre\ de\ termes}}{1 - q}}$$

<u>Démonstration</u>

La somme des n+1 premiers termes est $S=u_0+u_0q+u_0q^2+...u_0q^n=u_0(1+q+q^2+...+q^n)$.

Donc $q\times S=u_0(q+q^2+q^3+...+q^{n+1})$

Donc $q\times S-S=u_0[(q+q^2+q^3+...+q^{n+1})-(1+q+q^2+q^3+...+q^n)]=u_0(q^{n+1}-1)$.

D'où $S(q-1)=u_0(q^{n+1}-1)$ et la formule ci-dessus.

<u>Exemple</u>

Calcul de la somme des quatre premiers termes de la suite géométrique qui commence par 5, -10, 20 et -40.

$$S = 5 \times \frac{1-(-2)^4}{1-(-2)} = 5 \times \frac{1-16}{3} = 5 \times \frac{-15}{3} = 5 \times (-5) = -25$$

On peut le vérifier : 5-10+20-40=-25.

Quelle est la somme des 15 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 5 et de raison -4 ?

Sens de variation des suites arithmétiques et géométriques

Une suite arithmétique est croissante si sa raison et positive et décroissante si sa raison est négative.

C'est plus compliqué pour les suites géométriques. Pour une suite géométrique de premier terme positif :
- Si $q<0$, la suite n'est ni croissante ni décroissante car le signe des termes change à chaque fois.
- Si $q=0$, les termes valent tous 0 à partir du deuxième. Elle est donc constante à partir du deuxième terme.
- Si $0<q<1$, la suite est décroissante. En effet, si on multiplie un nombre positif par un nombre strictement compris entre 0 et 1, le résultat est plus petit que le nombre de départ.
- Si $q=1$, les termes sont tous égaux au premier terme. La suite est constante.
- Si $q>1$, la suite est croissante.

Sens de variation d'une suite définie par son terme général

Pour déterminer le sens de variation d'une suite définie par son terme général u_n en fonction de n, on peut :

1. Calculer $u_{n+1}-u_n$ et montrer que le résultat est toujours positif (suite croissante) ou toujours négatif (suite décroissante).

2. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer que le résultat est toujours strictement plus grand que 1 (suite croissante) ou strictement compris entre 0 et 1 (suite décroissante).

3. Etudier les variations de la fonction associée. La suite et la fonction ont les mêmes variations.

Sens de variation d'une suite définie par une relation de récurrence.

Pour déterminer le sens de variation d'une suite quelconque définie par une relation de récurrence, on peut établir une représentation graphique des premiers termes. Cette méthode possède l'avantage de mettre en évidence l'existence d'une éventuelle limite de la suite (un nombre vers lequel les termes de la suite se rapprochent de plus en plus) mais ne démontre pas formellement la croissante ou la décroissance.
On trace pour cela la représentation graphique de la fonction associée ainsi que la droite d'équation $y=x$. On place le premier terme sur l'axe des abscisses. Avec la courbe de la fonction, on place le deuxième sur l'axe des ordonnées puis avec la droite $y=x$ on reporte cette valeur sur l'axe des abscisses. On place le troisième terme sur l'axe des ordonnées en utilisant le deuxième sur l'axe des

abscisses et la courbe de la fonction. On le reporte sur l'axe des abscisses, etc...On peut ainsi visualiser les différents termes sur l'axe des abscisses.

Exemples

1. $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n-6$.

C'est une suite arithmétique de raison négative donc cette suite est décroissante.

2. $u_n=3\times0,9^n$.

C'est une suite géométrique de premier terme positif et de raison strictement comprise entre 0 et 1 donc u est décroissante.

3. $u_n=n^2-1$.

$u_{n+1}-u_n=((n+1)^2-1)-(n^2-1)=n^2+2n+1-1-n^2+1=2n+1$.

$n>0$ donc $2n+1>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$ donc u est croissante.

4. $u_n=\frac{0,5^n}{n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{0,5^{n+1}}{n+1}}{\frac{0,5^n}{n}}=\frac{0,5^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{0,5^n}=0,5\times\frac{n}{n+1}.$$

Comme $0,5<1$ et $n/(n+1)<1$, $0,5\times n/(n+1)<1$ donc $u_{n+1}/u_n<1$ donc u est décroissante.

5. $u_n=n^2+2n-3$

On pose $f(x)=x^2+2x+3$.

$f'(x)=2x+2$. Lorsque $x>0$, $f'(x)>0$ donc f est croissante donc u est croissante.

Exercice 1

On considère la suite u définie par sa formule $u_n=-5n+6$.

Donne la valeur numérique de u_3.

Exercice 2

Une suite u est définie par son premier terme et une relation de récurrence.

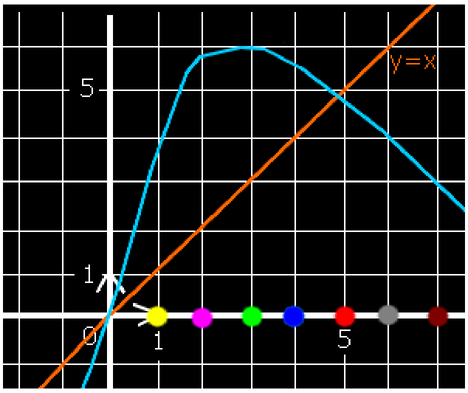
$$\begin{cases} u_0=-5 \\ u_{n+1}=-u_n+10 \end{cases}$$

Combien vaut u_5?

Exercice 3

u est une suite définie par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

La courbe bleue est la représentation graphique de f.
De quelle couleur est représenté u_2?



Exercice 4

u est une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4 \end{cases}$.

On aimerait connaître u_{100}.
Complète l'algorithme suivant :

2->u
……… de 1 à 100
……… ->u
Fin de ………
Afficher u

Exercice 5

u est une suite définie par $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$.

On aimerait savoir à partir de quel indice les termes de la suite dépassent 10000.

Complète l'algorithme suivant :

9->u
0->i
Tant que ………
……… -> ……….
i+1->i
Fin de Tant que
Afficher ……….

Exercice 6
u est une suite arithmétique de premier terme $u_0=100$ *et de raison -3.*

$u_{100}=$

Exercice 7
u est une suite géométrique de premier terme $u_0=-5$ *et de raison 2.*

$u_{10}=$

Exercice 8
u est une suite arithmétique.

$u_3=-10$ *et* $u_4=-7$.

$u_0=$

Exercice 9
u est une suite géométrique.

$u_3=40$ *et* $u_4=-80$.

$u_0=$

Exercice 10
Quelle est la somme des 100 premiers nombres entiers?

Exercice 11
u est une suite arithmétique de premier terme $u_0=5$ *et de raison 7.*

Calcule u_{39} *puis la somme des 40 premiers termes de cette suite.*

$u_{39}=$

somme=

Exercice 12
u est une suite arithmétique.

$u_0=50$ *et* $u_4=42$.

Quelle est la somme de ses 100 premiers termes?

Exercice 13
u est une suite géométrique de premier terme $u_0=10$ *et de raison -3.*

Quelle est la somme de ses 10 premiers termes?

Exercice 14
On place 200 euros sur un livret d'épargne rémunéré à 5% par an.
Chaque année les intérêts s'accumulent et on n'effectue ni dépôt ni retrait.

Quel sera le montant sur le livret au bout de 20 ans? (arrondir à 1 euro près)

Exercice 15
Pimpim et Orphée creusent un puits dans le désert.

Ils creusent 2 mètres le premier jour, puis 2,10 mètres le deuxième, 2,20 mètres le troisième, et toujours 10 centimètres de plus chaque jour. L'eau est à une profondeur de 300 mètres.

Combien de jours leur faudra t-ils pour atteindre l'eau?

Exercice 16
Pimpim et Orphée veulent sortir du désert.

Ils parcourent 10 kilomètres le premier jour.
En raison de la fatigue, ils parcourent 5% de moins à chaque jour qui passe.

Combien de jours seront nécessaires pour atteindre le bout du désert situé à 150 kilomètres?