ISO
De la passion naît l'excellence

Classe : TS2
Date : Février 2020

DST Mathématiques

Durée: 2h

Présentation et orthographe seront pris en compte dans le barème de notation.
Les calculatrices graphiques sont autorisées pour ce sujet.

EXERCICE 1 *(4 points/20)*

Pour tester la résistance à la chaleur d'une plaque d'isolation phonique, on porte en laboratoire sa température à 100° C et on étudie l'évolution de sa température en fonction du temps *t* (en minutes).
Après 6 minutes la température est redescendue à 82° C.
La température ambiante du laboratoire est de 19° C.
Soit $\theta(t)$ la température (en degré Celsius) de la plaque à l'instant *t* (*t* exprimé en minutes).
En exploitant ces données, on peut affirmer que la fonction θ est solution de l'équation différentielle :

$$y'(t)+0{,}042\,y(t)=0{,}798 \qquad (E)$$

où y est la fonction inconnue, de la variable *t*, définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

1. Résoudre sur l'intervalle $[0;+\infty[$ l'équation différentielle :
$$y'(t)+0{,}042\,y(t)=0 \ .$$
2. Trouver une solution particulière de (*E*) constante du type $g(t)=a$, où a est un nombre réel à déterminer.
3. En déduire toutes les solutions de (*E*).
4. D'après l'énoncé donner $\theta(0)$, puis déterminer la solution θ de l'équation (*E*) vérifiant cette condition initiale.

EXERCICE 2 *(9 points/20)*

Une entreprise fabrique et commercialise des composants électroniques assemblés dans deux ateliers numérotés 1 et 2.
L'atelier 1 fournit 80 % de la production et l'atelier 2 fournit le 20 % restants.
On a remarqué que 1,5 % des composants issus de l'atelier 1 sont défectueux, et que 4 % des composants issus de l'atelier 2 sont défectueux.

Partie A
On prend au hasard un composant dans la production d'une journée et on considère les évènements suivants :
- évènement A : « le composant provient de l'atelier 1 » ;
- évènement B : « le composant provient de l'atelier 2 » ;
- évènement D : « le composant est défectueux ».

1. Déduire de l'énoncé les probabilités $P(A)$ et $P(B)$, ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
2. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré ou un tableau à double entrée.
3. Calculer la probabilité de l'évènement D .
4. On constate qu'un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de l'atelier 1.

Dans la suite, on supposera que 2 % des composants produits par l'entreprise sont défectueux.

Partie B

Dans cette partie, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au millième.
Un client commande un lot de 150 composants.
On assimile le choix des 150 composants à des tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de composants défectueux que contient ce lot.

1. Justifier le fait que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.
2. Donner l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité d'avoir exactement 4 composants défectueux dans ce lot.

Partie C

On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi d'une variable aléatoire Y qui suit la loi de Poisson de paramètre 3.

1. Justifier cette valeur du paramètre.
2. Déterminer la probabilité d'avoir strictement plus de 4 composants défectueux dans ce lot.

EXERCICE 3 *(3 points/20)*

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
Une entreprise produit des batteries de téléphone portable. On s'intéresse à la durée de décharge des batteries. On note Y la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 batteries associe la moyenne des durées de décharge.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètre $m=80$ et $\sigma=0,4$.

1. Calculer la probabilité : $P(79 \leq Y \leq 81)$.
2. Déterminer le réel a tel que : $P(Y \geq a)=0,95$.
   On donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de a.
3. Calculer la probabilité de l'évènement : « $(Y \geq 80)$ sachant que $(Y \geq 79,34)$ ».

EXERCICE 4 *(4 points/20)*

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda>0$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X>5)=0,4$.
2. Dans cette question, on prendra $\lambda=0,18$.
   Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de pannes au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?
3. Dans cette question on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X>5)=0,4$.
   On considère un lot de 10 ordinateurs.
   a. Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.
   b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

Correction DST Maths TS2/TOP2 Février 2020

Exercice 1 :

1. $y_H(t) = K e^{-0,042t}$

2. $0,042a = 0,798 \Rightarrow a = 19$

3. $y_E(t) = Ke^{-0,042t} + 19$

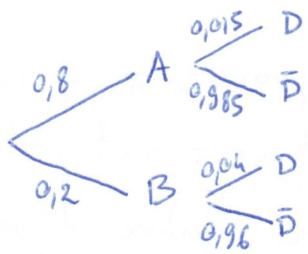
4. $\theta(0) = 100 \Rightarrow K + 19 = 100 \Rightarrow K = 81$

   $\Rightarrow \theta(t) = 81e^{-0,042t} + 19$

Exercice 2 :

Partie A :

1. $P(A) = 0,8$ $P(B) = 0,2$ $P_A(D) = 0,015$ $P_B(D) = 0,04$

2. 

3. $P(D) = 0,8 \times 0,015 + 0,2 \times 0,04 = 0,02$

4. $P_D(A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(D)} = \dfrac{0,8 \times 0,015}{0,02} = 0,6$

Partie B :

1. Le tirage est assimilé à une épreuve à 2 issues répétée 150 fois, $n = 150$. Les épreuves élémentaires sont indépendantes. Le succès : « le composant est défecteux » a pour probabilité $p = 0,02$, et l'échec $q = 1 - p = 0,98$. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(150 ; 0,02)$.

2. $E(X) = np = 3$ $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2,94} \simeq 1,715$

3. $P(X = 4) = 0,17$

Partie C :

1. Dans la loi de Poisson $E(Y) = \lambda$ donc $\lambda = np = 3$.

2. $P(Y > 4) = 1 - P(Y \leq 4) = 0{,}185$.

Exercice 3 :

1. $P(79 \leq Y \leq 81) = 0{,}9876$.

2. $\alpha = 79{,}3421$.

3. $P_{(Y \geqslant 79{,}34)}(Y \geqslant 80) = \dfrac{P((Y \geqslant 79{,}34) \cap (Y \geqslant 80))}{P(Y \geqslant 79{,}34)} = \dfrac{P(Y \geqslant 80)}{P(Y \geqslant 79{,}34)} = 0{,}526$.

Exercice 4 :

1. $P(X > 5) = e^{-5\lambda} \Rightarrow e^{-5\lambda} = 0{,}4 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\ln 0{,}4}{-5} \simeq 0{,}183$.

2. $P_{(X \geqslant 3)}(X \geqslant 5) = \dfrac{P((X \geqslant 3) \cap (X \geqslant 5))}{P(X \geqslant 3)} = \dfrac{P(X \geqslant 5)}{P(X \geqslant 3)} = \dfrac{e^{-5 \times 0{,}18}}{e^{-3 \times 0{,}18}} \simeq 0{,}698$.

3. a. La situation correspond à une épreuve à 2 issues répétée 10 fois. Les épreuves élémentaires sont indépendantes. La variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs ayant une durée de vie supérieure à 5 ans parmi 10, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0{,}4)$.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \simeq 0{,}994$.

b. À l'aide de la calculatrice, en donnant différentes valeurs à n, on obtient $n = 14$.