Classe : TU
Date : 07/05/2020

DST
Mathématiques

Durée: 1h 30min

EXERCICE 1 : *(10 points)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{2x}+e^{x}-x-2 \quad .$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   Indication. On mettra e^x en facteur dans $f(x)$.

2. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Démontrer que la droite D d'équation $y=-x-2$ est une asymptote de la courbe C .

4. Étudier la position relative de C et D .

5. Calculer $f'(x)$.

6. Vérifier que pour tout x réel :
$$f'(x)=2(e^x+1)\left(e^x-\frac{1}{2}\right) \quad .$$

7. Déduire de la question précédente le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

8. Établir le tableau de variation de f .

   Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité, en 0, à l'ordre 2 de f :
$$f(x)=2x+\frac{5}{2}x^2+x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0$$

9. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C en son point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

10. Illustrer par un schéma cette situation en traçant la courbe C et la droite T .

Classe : TU
Date : 07/05/2020

EXERCICE 2 : *(10 points)*

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2-1-\ln(x) \quad .$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de f en 0.
2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu précédemment.
3. En observant que, sur $]0\,;+\infty[$:

$$f(x)=x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x)}{x^2}\right) \quad ,$$

   déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de f .
5. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ et établir le tableau de variations de f .
6. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe C en son point d'abscisse 1.
7. Vérifier que 1 est solution de l'équation :

$$f(x)=0 \quad .$$

8. Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une autre solution, notée α , appartenant à l'intervalle $[0{,}4\,;0{,}6]$.
9. À l'aide d'un tableau de valeurs de f obtenue à la calculatrice, déterminer une valeur décimale approchée à 10^{-2} prés de α .
10. Illustrer par un schéma cette situation en traçant la courbe C et la droite d'équation $y=x-1$.