Comment construire et utiliser un arbre pour résoudre un problème faisant intervenir des probabilités conditionnelles ?

L'objectif est de traduire l'énoncé en terme de probabilités, puis de construire un arbre figurant les cas possibles.

Exemple

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2, fonctionnant de manière indépendante, produisent des pièces de même type. La machine M_1 fournit les 80 % de la production, la machine M_2 en fournit 20%.

Parmi ces pièces, certaines sont défectueuses : c'est le cas pour 5 % des pièces produites par M_1 et pour 4 % des pièces produites par M_2.

On prélève au hasard une pièce dans la production de l'atelier.

1. Démontrer que la probabilité que cette pièce soit défectueuse est 0,048.

2. Sachant que cette pièce est défectueuse, déterminer la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1.

1. *Traduisons l'énoncé en terme de probabilités. Notons :*

- M_1 l'événement : « La pièce a été produite par la machine M_1 » ;

– M_2 l'événement : « La pièce a été produite par la machine M_2 » ;

- D l'événement : « La pièce est défectueuse ».

La machine M_1 fournit les 80 % de la production se traduit par : $p(M_1) = 0{,}8$.

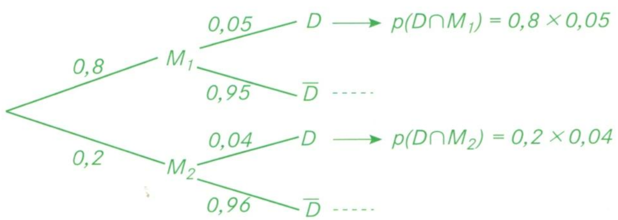
De même on a : $p(M_2) = 0{,}2$.

5 % des pièces produites par M_1 sont défectueuses se traduit par :

la probabilité de D sachant M_1 est 0,05, soit $p_{M_1}(D) = 0{,}05$.

De même on a : $p_{M_2}(D) = 0{,}04$,

On obtient l'arbre suivant :



Règle 1 *: la somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égal à 1.*

Règle 2 *: sur les branches secondaires on indique la probabilité conditionnelle de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.*

Règle 3 *: la probabilité d'un trajet est le produit des probabilités le constituant.*

d'où $\mathbf{p(D)} = p(D \cap M_1) + p(D \cap M_2) = \mathbf{p_{M_1}(D) \times p(M_1) + p_{M_2}(D) \times p(M_2)}$.

$p(D) = 0{,}8 \times 0{,}05 + 0{,}2 \times 0{,}04 = 0{,}04 + 0{,}008 = 0{,}048.$

2. $\mathbf{p_D(M_1)} = \dfrac{\mathbf{p(D \cap M_1)}}{\mathbf{p(D)}} = \dfrac{0{,}04}{0{,}048} \approx 0{,}833.$