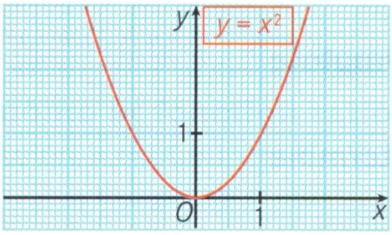
1 Limites des fonctions usuelles

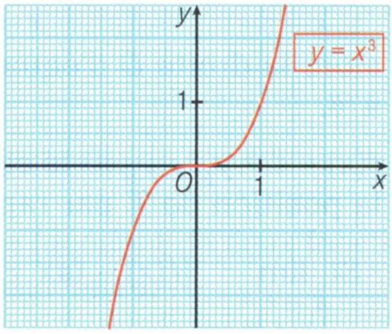
Fonction carré : $f(x) = x^2$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty$.
- Courbe représentative :



Fonction cube : $f(x) = x^3$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty$.
- Courbe représentative :

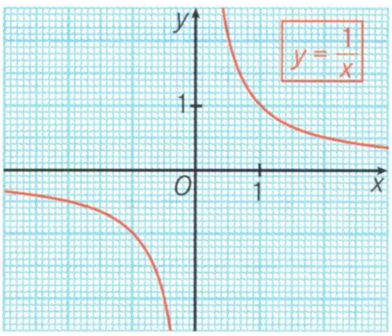


Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

- f est définie sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

- Courbe représentative :

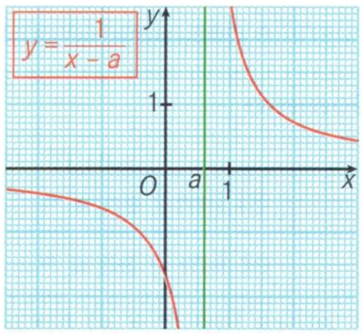


Fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$: a réel

- f est définie sur chacun des intervalles $]-\infty\,;a[$ et $]a\,;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x-a}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x-a}\right) = 0$.

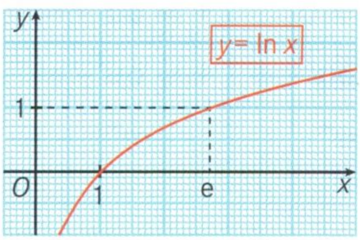
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \left(\dfrac{1}{x-a}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \left(\dfrac{1}{x-a}\right) = +\infty$.

- Courbe représentative :



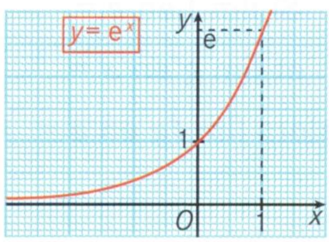
Fonction logarithme népérien : $f(x) = \ln(x)$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Courbe représentative :



Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty$.
- Courbe représentative :

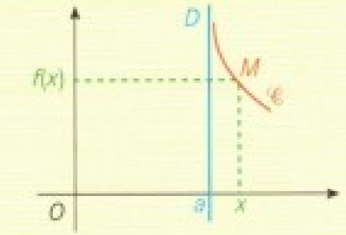


2 Asymptotes à une courbe représentative

La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.

• Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$,

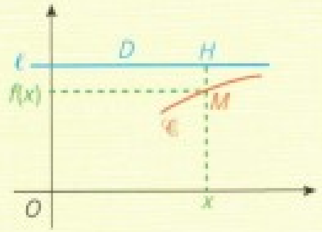
alors la droite D d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathscr{C}$.



• Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$,

alors la droite D d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

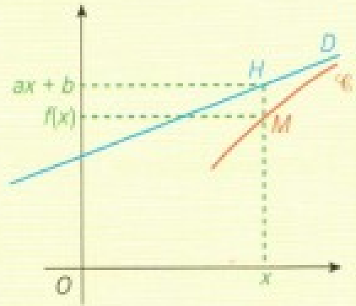
$f(x) - \ell = y_M - y_H$; le signe de $f(x) - \ell$ détermine la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.



• Si $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (\text{ou } x \to -\infty)}} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite D d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

$y_M - y_H = f(x) - (ax + b)$;

le signe de $f(x) - (ax + b)$ détermine la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.



3 Opérations sur les limites

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; ℓ et ℓ' désignent des réels.
∞^* désigne $-\infty$ ou $+\infty$; le signe est déterminé par une règle analogue à celle donnant le signe du produit ou du quotient de deux réels.
? signifie que, dans le cas envisagé, on ne peut pas conclure directement.

1. Somme

Si lim f en a =	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et lim g en a =	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors lim $(f + g)$ en a =	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

2. Produit

Si lim f en a =	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
et lim g en a =	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors lim fg en a =	$\ell \times \ell'$	∞^*	∞^*	?

3. Quotient

Dans le cas où $\lim g = 0$, on suppose que l'on a au voisinage de a, soit $g(x) > 0$ soit $g(x) < 0$.

Si $\lim f$ en a =	ℓ	ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell \neq 0$	0
et $\lim g$ en a =	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0
alors $\lim \frac{f}{g}$ en a =	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞*	?	∞*	?

4 Propriétés

1. Polynôme et fonction rationnelle

• La limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

• La limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

2. Fonction composée

• Fonction de la forme $u^n(x)$; n entier naturel non nul.

a désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$; ℓ désigne un réel.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} u^n(x) = \ell^n$.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} u^n(x) = +\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} u^n(x) = +\infty$ si n est pair et

$\lim\limits_{x \to a} u^n(x) = -\infty$ si n est impair.

• Fonction de la forme $\ln[u(x)]$; $u(x)$ fonction strictement positive.

a et c désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$; b désigne soit un réel positif ou nul, soit $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{X \to b} \ln(X) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} \ln[u(x)] = c$.

• Fonction de la forme $e^{u(x)}$.

a et b désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$; c désigne soit un réel positif ou nul, soit $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{X \to b} e^X = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = c$.

3. Comparaison des fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissance

Pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha \ln x = 0$.

Comment rechercher une limite ?

Pour rechercher la limite d'une fonction, on utilise les résultats donnés dans l'Essentiel pages 233 et 234.
Il peut arriver que l'on soit dans un cas noté ? au paragraphe 3 page 234, cas où l'on ne peut conclure directement.
Dans ces conditions, l'énoncé donnera la méthode à suivre pour conclure.

Exemple 1. Rechercher les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 + 3e^x$.

• *Limites en $+\infty$*

$f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = x + 2$ et $v(x) = 3e^x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^x = +\infty$.

On en déduit : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ (limite d'une somme).

• *Limite en $-\infty$*

D'une part, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x) = -\infty$, d'autre part $\lim\limits_{x \to -\infty} 3e^x = 0$.

On en déduit : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$ (limite d'une somme).

Exemple 2. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(x) = x - 1$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 + x + 1) = 3$ (fonction définie pour $x = 1$) et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x - 1) = 0$

On est dans le cas où le tableau page 000 indique ∞* ; il faut donc utiliser la « règle des signes ».

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 + x + 1) = 3$ or $3 > 0$ et $x - 1 > 0$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1} = +\infty}$.

Exemple 3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \ln x)$; *indication : pour conclure, on mettra x^2 en facteur.*

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; on ne peut conclure directement.

On écrit : $x^2 - \ln x = x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$; on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 1$ d'où $\boldsymbol{\lim x^2 \left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty}$ (limite d'un produit).

Comment déterminer une asymptote à la courbe représentative d'une fonction ?

On utilise les résultats donnés dans l'Essentiel page 234 au paragraphe 2 : Asymptotes à une courbe représentative.

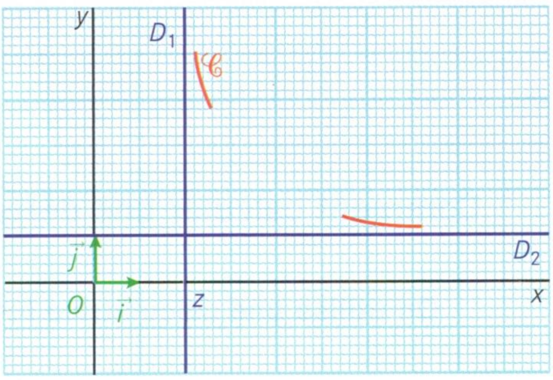
Exemple 1. ***f est définie sur]2 ; + ∞[par*** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

1. Étudier $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ***; interpréter graphiquement le résultat obtenu.***

2. Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ***; interpréter graphiquement le résultat obtenu.***

1. $\lim\limits_{x \to 2} (x+1) = 3$ et $\lim\limits_{x \to 2} (x-2) = 0$ d'où, puisque $x - 2 > 0$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet pour ***asymptote la droite D_1 d'équation $x = 2$.***



2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$; $\mathscr{C}$ admet pour ***asymptote la droite D_2 d'équation $y = 1$.***

La position de $\mathscr{C}$ par rapport à D_2 est donnée par le signe de $f(x) - 1$.

$f(x) - 1 = \dfrac{x+1}{x-2} - 1 = \dfrac{3}{x-2}$ donc, sur]2 ; + ∞[

$f(x) - 1 > 0$; ***$\mathscr{C}$ est « au-dessus » de D_2.***

Exemple 2. ***f est définie sur [0 ; + ∞[par*** $f(x) = x + 2 - xe^{-x}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ ***; en déduire*** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

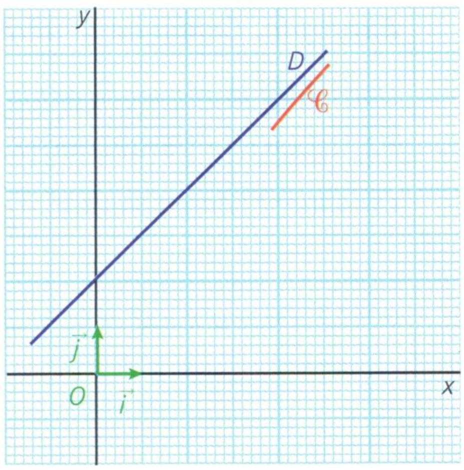
2. Justifier que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite D d'équation $y = x + 2$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$; on ne peut conclure directement pour $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$.

On écrit $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$; on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

(voir formulaire) donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0}$;

on en déduit $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim (x+2) = +\infty}$.



2. $f(x) - (x+2) = -xe^{-x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-xe^{-x}) = 0$ donc $\mathscr{C}$ admet pour ***asymptote la droite D d'équation $y = x + 2$.***

$-xe^{-x} < 0$ donc ***$\mathscr{C}$ est « au-dessous » de D.***

Recherche de limites

Fiche méthode 2

Pour chacun des exercices 17 à 23, déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction polynôme ou de la fonction rationnelle donnée.
On utilisera le résultat donné dans la fiche l'Essentiel page 233.

17 C $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

18 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5.$

19 R $f(x) = -\dfrac{4}{3}x^4 - 3x^2 + \dfrac{1}{3}.$

20 $f(x) = 6x^3 - 4x.$

21 $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}.$

22 C $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}.$

23 $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{4x^2+5}.$

Pour chacun des exercices 24 à 36, déterminer les limites demandées.
On utilisera les résultats donnés dans la fiche l'Essentiel page 233.

24 C $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + \ln x).$

25 $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + e^x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{e^x}{x}.$

26 R $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x + 1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-2x}.$

27 $\lim\limits_{x \to 1} x^2 e^x$; $\lim\limits_{x \to 1} 2x^3 \ln x.$

28 C $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-2)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \ln(x-2).$

29 $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{x+1}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x}.$

30 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln x$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)e^{-x}.$

31 $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + e^{-x})$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}}.$

32 R $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + \dfrac{\ln x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{e^x}{x^2}\right).$

33 C f est définie sur $]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5}{x-2}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x-2).$

2. Préciser le signe de $(x-2)$ sur $]2\,;+\infty[.$

3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x).$

34 f est définie sur l'intervalle $I =]-\infty\,;-1[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x).$

2. Préciser le signe de $(x+1)$ sur I.

3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x).$

35 f est définie sur $]3\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x).$

2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x).$

36 R Déterminer les limites en 1 et en -1 de la fonction f définie sur $]-1\,;1[$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}.$$

***Pour chacun des exercices 37 à 42**, il se présente des « cas d'indétermination ».*
Pour chacun d'eux, indiquer pourquoi on ne peut pas conclure directement et utiliser l'indication fournie par l'énoncé pour déterminer la limite demandée.

37 **C** Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.

Indication : mettre $(x - 1)$ en facteur au numérateur et au dénominateur.

38 Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$.

Indication : mettre $(x - 2)$ en facteur au numérateur et au dénominateur.

39 **R** f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Indication : mettre e^x en facteur au numérateur et au dénominateur.

40 f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Indication : mettre e^x en facteur.

41 Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$.

Indication : écrire $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

42 **R** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 1}{x^2 + 1}$.

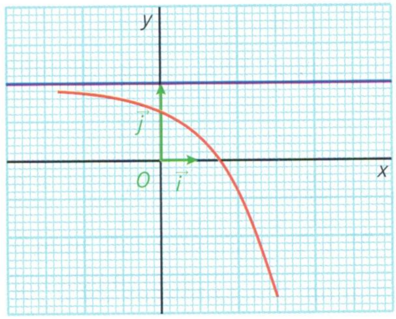
Indication : mettre e^x en facteur au numérateur et x^2 en facteur au dénominateur.

Lecture graphique

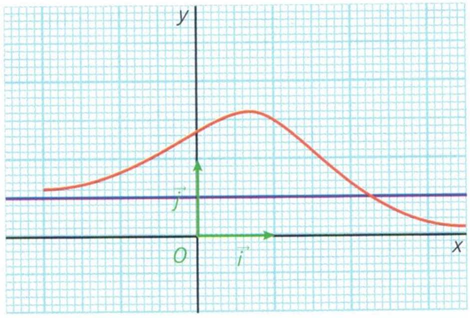
Fiche l'Essentiel

***Pour chacun des exercices 43 à 44**, donner par lecture graphique la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de chaque fonction représentée.*

43

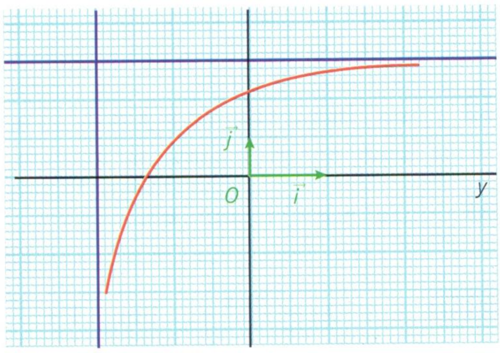


44

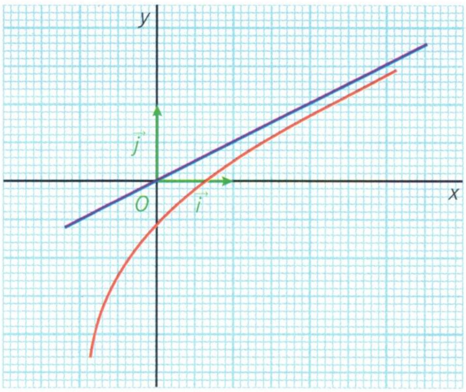


***Pour chacun des exercices 45 à 48**, donner pour chaque fonction les équations des asymptotes à la courbe représentative.*

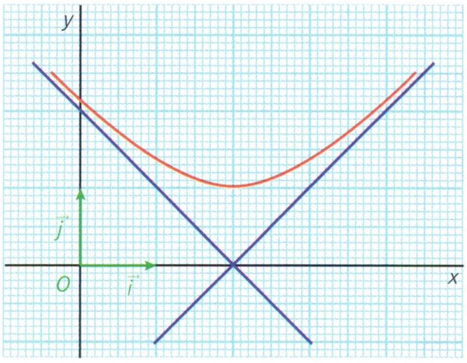
45



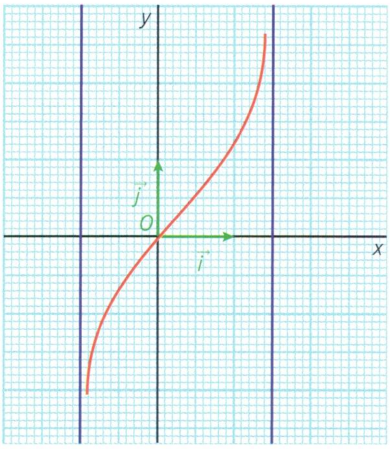
46 **R**



47



48



Recherche d'asymptote

Fiche méthode 3

***Pour chacun des exercices 49 à 53**, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.*
Dans chaque cas, on illustrera par un graphique la situation rencontrée.

49 **C** f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-2-\frac{1}{x}.$$

1. Étudier $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}$.

2. a) Montrer que la droite D d'équation $y=x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

50 f est définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}.$$

1. Étudier $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}$.

2. a) Vérifier que, pour $x>1$, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$.
En déduire que la droite D d'équation $y=x+1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

51 f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+2\,\frac{\ln x}{x}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}$.

2. a) Prouver que la droite D d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de D.

52 **R** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+e^{2x}$.

1. Étudier $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

2. Montrer que la droite D d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de D.

53 f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+2+xe^{-2x}.$$

1. Étudier $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2. a) Prouver que la droite d'équation $y=x+2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

Indication : pour la question **a)**, écrire $xe^{-2x}=\dfrac{x}{e^{2x}}$.

Correction :

17 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2) = +\infty$.

19 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

22 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

24 • $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + \ln x) = +\infty$.

26 • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{e^{2x}} = 0$.

28 • $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-2) = +\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x-2) = 0$ (par valeurs positives)

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \ln(x-2) = -\infty$.

32 • $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{x^2}\right) = +\infty$.

33 **1.** $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x-2) = 0$.

2. Sur $]2\,;+\infty[$, on a $x - 2 > 0$.

3. Des résultats précédents, on déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.

36 • $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$.

37 • $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 - 2x + 1) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1) = 0$

donc on ne peut conclure pour le quotient.

On écrit, pour $x > 1$:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} :$$

ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x-1}{x+1} = 0$.

39 **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

42 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + 1}{x^2 + 1} = +\infty$.

46 $y = \frac{1}{2}x$.

49 **1.** $\lim\limits_{x \to 0} (x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet pour **asymptote l'axe des ordonnées.**

2. a) $f(x) - (x-2) = -\frac{1}{x}$

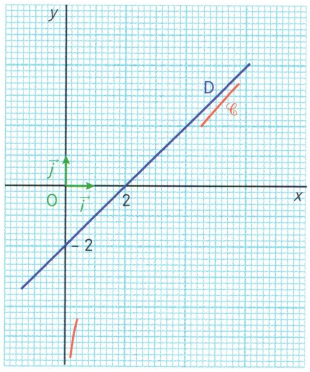
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-2)) = 0$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet pour **asymptote la droite** D **d'équation** $y = x - 2$.

b) Pour $x > 0$, on a $f(x) - (x-2) < 0$

donc la courbe $\mathscr{C}$ **est « au-dessous » de la droite** D.

Ces situations sont illustrées par la figure ci-après.



52 **1.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f(x) - x = e^{2x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0$ et

$f(x) - x > 0$ donc la **droite** D **d'équation** $y = x$ **est asymptote à** $\mathscr{C}$ **et** $\mathscr{C}$ **est « au-dessus » de** D.