Comment étudier les variations d'une fonction en utilisant la dérivée ?

1. On calcule la dérivée $f'(x)$ de f.
2. On étudie sur l'intervalle I le signe de $f'(x)$ et on en déduit les variations de f.
3. On construit le tableau de variation.

***Exemple.* Étudier les variations de f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.**

1. *f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$; d'après un résultat précédent : $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$.*

2. *Sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ a le signe de $1-2\ln x$. On a :*

- *$1-2\ln x<0$ si $\ln x>\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si $x>e^{\frac{1}{2}}$ soit si $x>\sqrt{e}$;*
- *$1-2\ln x>0$ si $\ln x<\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si $x<\sqrt{e}$.*

Donc sur $]0\,;\sqrt{e}[$, f est croissante ; sur $[\sqrt{e}\,;+\infty[$, f est décroissante.

3.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

On vérifiera que :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$