6. Permutations

On réalise une **permutation** si on écrit **touts** les éléments de l'ensemble dans **un ordre déterminé**.

Exemple : Soit un ensemble $E=\{a,b,c\}$, (b,c,a) est une permutation des éléments de E.

Le **nombre de permutations** de n éléments est $n!$, se lit « factorielle n ».
$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots 1$ et $0!=1$.

On peut écrire toutes les triplets obtenus à l'aide des éléments de E :
$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$

On peut vérifier qu'ils sont en fait $3!=3\times2\times1=6$.

7. Combinaisons

Soit $p\leqslant n$.
On réalise une **combinaison** de p éléments parmi n si on les choisit dans un **ordre indifférent**.

Exemple : Soit un ensemble $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, $(1,2,4)$ est une combinaison à $p=3$ éléments parmi les $n=6$ de E.

Le **nombre de combinaisons** à p éléments parmi n est : $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Combien y a-t-il de grilles possibles avec 3 numéros parmi les 6 éléments de E ?
$(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),(1,5,6),$
$(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6),(2,5,6),$
$(3,4,5),(3,4,6),(3,5,6),$
$(4,5,6)$.

On peut vérifier qu'ils sont en fait $C_6^3=\dfrac{6!}{3!(6-3)!}=\dfrac{720}{36}=20$.

Attention : $(1,2,4)$ et $(1,4,2)$ sont des combinaisons équivalentes elles ne doivent donc être comptées qu'une seule fois.

Jeu du loto

Une grille de loto comporte 49 numéros différents de 1 à 49.
Combien y a-t-il de grilles possibles avec 6 numéros ?
Le nombre de grilles est $C_{49}^6=\dfrac{49!}{6!(43)!}=13\,983\,816$.
À chaque tirage du loto, une seule de ces combinaison à 6 numéros est gagnante !

4 Schéma de Bernoulli

Jacques Bernoulli (1654-1705) mathématicien suisse. Il travaille dans plusieurs domaines des mathématiques dont les probabilités. On lui doit une démonstration rigoureuse de la loi faible des grands nombres (chapitre 14).

On dit qu'on a un schéma de Bernoulli lorsqu'une épreuve est répétée un certain nombre de fois dans les mêmes conditions indépendamment les unes des autres avec seulement deux possibilités (échec ou réussite, pièce défectueuse ou pièce non défectueuse, etc.).

• Application

Une usine fabrique en grande série des cylindres.
Une machine est utilisée pour effectuer cette production.
On suppose que 5 % des cylindres produits sont défectueux.
On tire au hasard 3 cylindres (on assimile cette épreuve à un tirage successif et avec remise des 3 pièces).

1. Quelle est la probabilité de tirer aucune pièce défectueuse ?
2. Quelle est la probabilité de tirer une pièce défectueuse ?
3. Quelle est la probabilité de tirer au plus une pièce défectueuse ?

Corrigé

Soit D_i l'événement « le cylindre est défectueux au i-ième tirage ».
Comme on assimile cette épreuve à un tirage successif avec remise, les événements D_1, D_2 et D_3 sont indépendants.
De plus : $P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = 0{,}05$.

1. La probabilité de tirer aucune pièce défectueuse p_1 est égale à :

$$P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3) = P(\overline{D}_1) \times P(\overline{D}_2) \times P(\overline{D}_3)$$
$$= (0{,}95)^3$$
$$p_1 \approx 0{,}857 \quad \text{(voir } \textit{tableau 1}\text{).}$$

2. Par exemple, l'événement $(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3)$ convient, et :

$$P(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3) = P(D_1) \times P(\overline{D}_2) \times P(\overline{D}_3)$$
$$= 0{,}05 \times (0{,}95)^2$$
$$\approx 0{,}045.$$

La pièce défectueuse peut être tirée au 2^e^ tirage ou au 3^e^ tirage avec la même probabilité, donc :
la probabilité p_2 de tirer une pièce défectueuse est :
$p_2 = 3 \times 0{,}05 \times (0{,}95)^2 = 0{,}135$

3. « Tirer au plus une pièce défectueuse » signifie « tirer aucune pièce défectueuse » ou « tirer une pièce défectueuse », donc la probabilité de tirer au plus une pièce défectueuse p est égale à $p_1 + p_2$.
$p \approx 0{,}857 + 0{,}135.$

$$p \approx 0{,}992.$$

Loi binomiale

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$.
On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X discrète est une loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n, p)$, si : $P(X = k) = \mathrm{C}_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

À savoir

Soit une épreuve à deux résultats possibles : succès ou échec.
Soit n le nombre de répétitions indépendantes de cette épreuve.
La variable aléatoire X mesurant le nombre de succès au cours de ces n épreuves suit la loi binomiale de paramètres n et p, p étant la probabilité de succès.

Exemple :
Une urne contient 2 boules rouges, 2 boules bleues et 2 boules vertes indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule que l'on remet dans l'urne après avoir noté sa couleur.
On effectue 6 tirages.

a. Quelle est la probabilité de tirer 4 boules rouges ?

Le tirage d'une boule avec remise est une épreuve. Pour chaque éprouve, il y a deux résultat possibles : la boule est rouge (*R*) ou la boule n'est pas rouge (*N*).
Les probabilités correspondants sont :

$P(R)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, appelée probabilité de **succès** et noté p et

$P(N)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, appelée probabilité d'**échec** et noté q $(q=1-p)$.

Cette épreuve est dite « **épreuve de Bernoulli de paramètre *p*** » .
On répète 6 fois cette éprouve de façon identique ($n=6$).
Notons (R,R,N,R,N,R) un résultat contenant 4 boules rouges. Les 6 épreuves sont indépendants, donc la probabilité d'obtenir cette suite est :

$$P(R,R,N,R,N,R)=P(R)\times P(R)\times P(N)\times P(R)\times P(N)\times P(R)=\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 .$$

Or le nombre de ces suites favorables est égal au nombre de parties de 4 éléments dans un ensemble de 6 éléments (par exemple (N,R,R,R,N,R) est une autre suite favorable). Le nombre de suites favorables est égal au nombre de combinaison C_6^4 .

Donc la probabilité de tirer 4 boules rouge est égale à $C_6^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

b. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de boules rouges tirées au cours des 6 épreuves.
Donner la loi de probabilité de X.

Les valeurs de la variable X sont : 0,1,2,3,4,5,6.
On peut, comme dans la partie **a**, calculer les probabilités associées à chacune des valeurs.
On obtient ainsi le tableau de probabilité de X.

Valeurs de x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\mathrm{C}_6^0\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$\mathrm{C}_6^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$\mathrm{C}_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\mathrm{C}_6^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\mathrm{C}_6^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\mathrm{C}_6^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\mathrm{C}_6^6\left(\frac{1}{3}\right)^6$

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p avec $n=6$ et $p=1/3$.

Valeurs caractéristiques de la loi binomiale *B(n,p)*

À savoir

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$.
Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, $\mathcal{B}(n, p)$,
alors :
- **$E(X) = np$.**
- **$V(X) = np(1-p)$.**
- **$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.**

Les valeurs caractéristiques de la variable aléatoire *X* de l'exemple précédant sont :

$$E(X)=np=6\times\frac{1}{3}=2 \qquad V(X)=np(1-p)=6\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3} \qquad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad .$$

Comment justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale et comment effectuer des calculs avec cette loi ?

***Exemple :** une entreprise fabrique une grande quantité de tubes.*

Dans un lot de tubes, 3 % des tubes ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tubes de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 lots.

On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité P(Z = 0).

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un tube ne soit pas conforme pour la longueur.

1. Chaque prélèvement est constitué de 50 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
– soit le succès lorsque le tube n'est pas conforme de probabilité $p = 0{,}03$;
– soit l'échec lorsque le tube est conforme, de probabilité $q = 1 - p = 0{,}97$.

La variable aléatoire Z mesurant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}03$.

2. Pour calculer P avec une calculatrice, on procède de la façon suivante :

Avec la calculatrice Casio Graph 35+

Dans **MENU** *, on sélectionne* **STAT** **EXE** *, on tape* **F5** *pour* **DIST** *.*
On sélectionne **BINM** *par* **F5** *,puis* **Bpd** *par* **F1** *.*
Sur la 1re ligne on sélectionne **Var** *par* **F2** *.*
Sur la ligne **x:** *on tape* **0** **EXE** *puis* **50** **EXE** *puis* **0.03** **EXE** *qui donne $P(Z = 0) \approx 0{,}218$.*

Avec la calculatrice TI 82 stats.fr ou 83 Plus

On tape **2nde** **var** *pour distrib.*
On sélectionne **0:binomFdp** **entrer**
On complète **binomFdp(** 50, 0.03, 0) **entrer** *et on obtient $P(Z = 0) = 0{,}218$.*

3. $P(Z \geqslant 1) = 1 - P(Z = 0) \approx 0{,}782$.