Ex 3

$$y' - 2y = -2x^2 - 2x \quad (E)$$

$$y' - 2y = 0 \quad (H)$$

1. Les solutions de (H)

$$y_0(x) = K e^{-\frac{-2}{1}x} = K e^{2x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

2. $h(x) = (x+1)^2$ est solution de (E) si

$$h' - 2h = -2x^2 - 2x$$

$$h'(x) = 2(x+1) = 2x + 2$$

$$h' - 2h = 2x + 2 - 2(x+1)^2 =$$

$$= 2x + 2 - 2(x^2 + 2x + 1) =$$

$$= 2x + \cancel{2} - 2x^2 - 4x - \cancel{2} =$$

$$= -2x^2 - 2x$$

Donc $h(x)$ est bien solution de (E).

3. Les solutions de (E) sont :

$$y_E(x) = K e^{2x} + (x+1)^2$$

4. f est solution de (E) donc

$$f(x) = Ke^{2x} + (x+1)^2$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = Ke^2 + (1+1)^2$$

$$\Rightarrow Ke^2 + 4 = 1$$

$$K = -\frac{3}{e^2} = -3e^{-2}$$

Donc $f(x) = -3e^{-2}e^{2x} + (x+1)^2 =$

$$= -3e^{2x-2} + (x+1)^2$$

<u>Ex 4</u>

$$y' + 2y = -\frac{5}{3}e^{-3x} \qquad (E)$$

1. Les solutions de (E_0) sont :

$$y_0(x) = Ke^{-\frac{2}{1}x} = Ke^{-2x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

2. $g(x) = \frac{5}{3}e^{-3x}$ est solution de (E) si :

$$g' + 2g = -\frac{5}{3}e^{-3x}$$

$$g' = \frac{5}{3}(-3)e^{-3x} = -5e^{-3x}$$

$$g' + 2g = -5e^{-3x} + 2 \times \frac{5}{3} e^{-3x} =$$

$$= -5e^{-3x} + \frac{10}{3} e^{-3x} =$$

$$= e^{-3x}\left(-5 + \frac{10}{3}\right) = e^{-3x}\left(\frac{-15+10}{3}\right) =$$

$$= -\frac{5}{3} e^{-3x}$$

Donc $g(x)$ est solution de (E).

3. Les solutions de (E) sont :

$$y_E(x) = Ke^{-2x} + \frac{5}{3} e^{-3x}$$

4. $f(x)$ est solution de (E) donc

$$f(x) = Ke^{-2x} + \frac{5}{3} e^{-3x}$$

$$f(0) = -\frac{5}{6} \Rightarrow f(0) = Ke^{0} + \frac{5}{3} e^{0}$$

$$\Rightarrow K + \frac{5}{3} = -\frac{5}{6}$$

$$K = -\frac{5}{6} - \frac{5}{3} = \frac{-5-10}{6} = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$$

Donc $f(x) = -\frac{5}{2} e^{-2x} + \frac{5}{3} e^{-3x} =$

$$= 5 e^{-2x} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} e^{-x} \right)$$

Ex 5

$$y' + y = 2x e^{-x} \quad (E)$$

1. $g(x) = ax^2 e^{-x}$ est solution de (E) si

$$g' + g = 2x e^{-x} \qquad (*)$$

$g(x) = ax^2 e^{-x} = uv \qquad u = ax^2 \qquad v = e^{-x}$

$\qquad u' = 2ax \qquad v' = -e^{-x}$

$g'(x) = u'v + uv' = 2ax\, e^{-x} + ax^2 (-e^{-x}) =$

$= 2ax e^{-x} - ax^2 e^{-x}$

$g' + g = 2axe^{-x} - \cancel{ax^2} e^{-x} + \cancel{ax^2} e^{-x} = 2axe^{-x}$

Donc $(*)$: $\quad 2axe^{-x} = 2xe^{-x}$

$$\boxed{a = 1}$$

2. Les solutions de (E_0) sont :

$$y_0(x) = K e^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

3. Les solutions de (E) sont :

$$y_E(x) = K e^{-x} + x^2 e^{-x}$$

4. $f(x)$ est solution de (E) donc

$$f(x) = K e^{-x} + x^2 e^{-x}$$

$f(-1) = 2e \Rightarrow f(-1) = K e^{-(-1)} + (-1)^2 e^{-(-1)}$

$\Rightarrow K e + e = 2e$

$K + 1 = 2 \Rightarrow K = 1$

Donc $f(x) = e^{-x} + x^2 e^{-x} = e^{-x}(1 + x^2)$