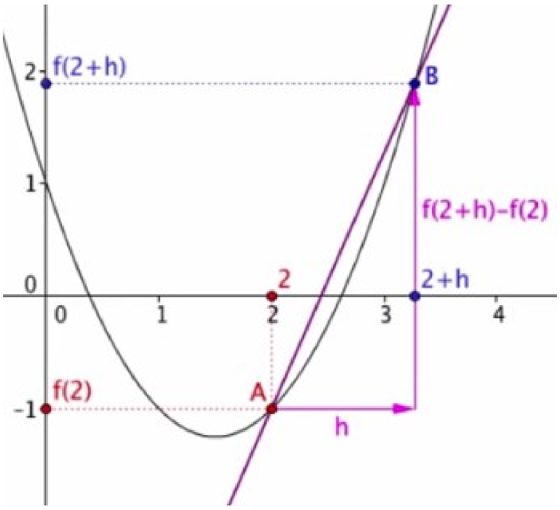
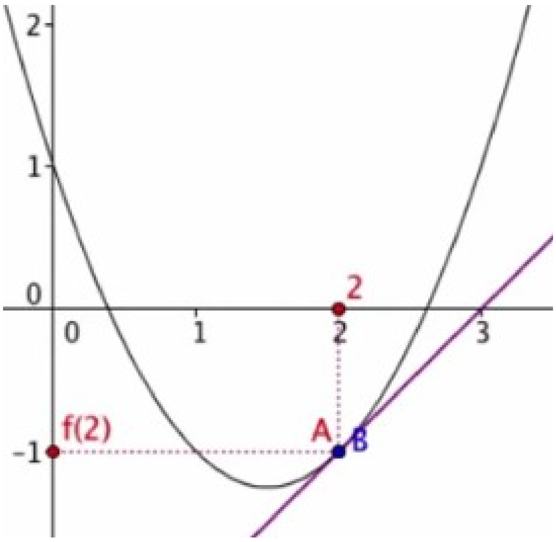
Le nombre dérivé

Définition et calcul du nombre dérivé

Déterminer que la fonction f définie par $f(x)=x^2-3x+1$ est dérivable en $x=2$. Calculer le nombre dérivé en 2.



- Les coordonnées des points A et B sont :
$$A(2;f(2)) \text{ et } B(2+h;f(2+h)) .$$
- Le coefficient directeur de la droite passant par A et B est :
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} .$$
- On rapproche de plus en plus les points A et B. Pour cela, on fait tendre h vers 0.
- Les points A et B coïncident. La droite devient la tangente en $x=2$.
- Le **coefficient directeur de la tangente** en $x=2$ est donc :
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} .$$



Propriété :

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L, tel que :
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=L .$$
L est appelé **nombre dérivé** de f en a.

On note : $f'(a)=L$.

Dérivabilité et calcul du nombre dérivé :

$f(2+h)=(2+h)^2-3(2+h)+1=4+4h+h^2-6-3h+1=h^2+h-1$.

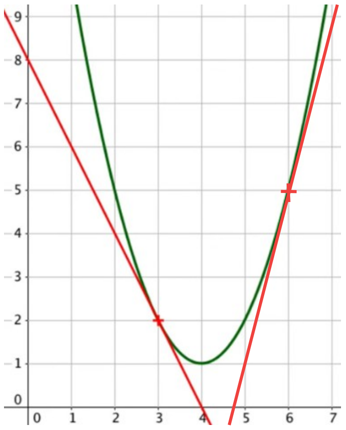
$f(2)=2^2-6+1=-1$.

Donc : $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h^2}{h}+\frac{h}{h}\right)=\lim_{h\to 0}(h+1)=1$.

On peut conclure que la fonction f est dérivable en $x=2$.

Le nombre dérivé en $x=2$ est égal à 1. On écrit $f'(2)=1$.

Déterminer graphiquement le nombre dérivé et l'équation de la tangente



Déterminer le nombre dérivé et l'équation de la tangente en $x=3$ et $x=6$.

- Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente.
- Équation de la tangente en $x=a$:

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$.

Donc, le nombre dérivé en $x=3$ est $f'(3)=-2$ et en $x=6$ est $f'(6)=4$.

L'équation de la tangente en $x=3$ est :

$y=f'(3)(x-3)+f(3)=-2(x-3)+2=-2x+6+2=-2x+8$, donc $y=-2x+8$.

L'équation de la tangente en $x=6$ est :

$y=f'(6)(x-6)+f(6)=4(x-6)+5=4x-24+5=4x-19$, donc $y=4x-19$.

Déterminer l'équation de la tangente à une courbe représentative

Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2-5x+2$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x=1$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x=1$ est :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$.

On a : $f(1)=1^2-5+2=-2$.

Le nombre dérivé est : $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, où

$f(1+h)=(1+h)^2-5(1+h)+2=1+2h+h^2-5-5h+2=h^2-3h-2$,

donc : $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-3h}{h}=\lim_{h\to 0}(h-3)=-3$.

En remplaçant dans la formule pour la tangente on trouve : $y=-3(x-1)-2=-3x+1$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x=1$ est donc : $y=-3x+1$.