

EXERCICE 1 (10 points)

Le traitement de certaines infections touchant l'intérieur de l'œil nécessite l'administration d'antibiotiques. Dans cet exercice, on étudie l'évolution au cours du temps de la concentration d'un antibiotique chez un patient, en envisageant plusieurs modes d'administration.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Administration par intraveineuse – Étude d'une équation différentielle

On modélise la concentration plasmatique de l'antibiotique dans le sang, exprimée en $\mu\text{g.L}^{-1}$, en fonction du temps, exprimé en heure, lors d'une injection par intraveineuse, par une fonction solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,2 y = 0,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t , définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

La concentration initiale de l'antibiotique est $20 \mu\text{g.L}^{-1}$.

1° a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

On fournit la formule suivante :

| Équation différentielle | Solutions sur un intervalle I |
|-------------------------|---------------------------------|
| $a y' + b y = 0$ | $f(t) = k e^{-\frac{b}{a}t}$ |

b) Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale.

Cette fonction f modélise la concentration plasmatique de l'antibiotique dans le sang.

2° On appelle demi-vie d'un médicament, la durée, en heure, à l'issue de laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

a) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $e^{-0,2t} = 0,5$.

b) En déduire la demi-vie de cet antibiotique. On arrondira ce résultat à la minute.

3° En pharmacologie, l'aire sous la courbe de la fonction correspondant à la concentration plasmatique est utilisée pour comparer la biodisponibilité d'un médicament entre deux dosages ou modes d'administration différents, le mode d'administration par intraveineuse étant celui de référence.

a) Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(t) = 20 e^{-0,2t}$.

b) Montrer que l'aire, en unité d'aire, limitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 15$, vaut $100(1 - e^{-3})$.

B. Administration par voie orale – Étude d'une fonction


On admet que la concentration plasmatique dans le sang de l'antibiotique étudié, lorsqu'il est administré par voie orale, peut être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(t) = 20 (e^{-0,2t} - e^{-2t}),$$

où t représente la durée, en heure, écoulée depuis l'instant initial et $g(t)$ la concentration, en $\mu\text{g.L}^{-1}$, de l'antibiotique dans le sang.

- 1° a) Montrer que, pour tout nombre t de l'intervalle $[0, +\infty[$,
$$g'(t) = 40 e^{-2t} (1 - 0,1 e^{1,8t}).$$

b) Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant. Ce résultat est admis et peut être utilisé dans cette question.


$$\text{Résoudre}(1 - 0,1 e^{1,8t} > 0, t) \rightarrow \left\{ \frac{5}{9} \ln(10) > t \right\}$$

Étudier le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

c) Donner les variations de la fonction g .

d) En déduire la concentration plasmatique maximale (donner la valeur approchée arrondie au dixième).

2° La « biodisponibilité absolue » entre deux valeurs est ici le quotient de l'aire sous la courbe associée à l'administration par voie orale par l'aire sous la courbe associée à l'administration intraveineuse.

On rappelle que l'administration intraveineuse a été étudiée dans la partie A. On admet que l'aire sous la courbe associée à l'administration par voie orale et délimitée par les droites d'équations $t = 0$, $t = 15$ et l'axe des abscisses, est environ 85,02 unités d'aire.

Calculer la biodisponibilité absolue de cet antibiotique. Exprimer le résultat en pourcentage.

C. Administration répétée par intraveineuse – Étude d'une suite

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose d'antibiotique par voie intraveineuse. L'intervalle de temps entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, arrondi à la dizaine de minutes, soit 3 h 30. Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration d'antibiotique de $20 \mu\text{g.L}^{-1}$.

On modélise la concentration de l'antibiotique, exprimée en $\mu\text{g.L}^{-1}$, immédiatement après la n -ième injection par la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 20 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } 1, \quad u_{n+1} = 0,5 u_n + 20.$$

1° Quelle est la concentration plasmatique de l'antibiotique immédiatement après la deuxième injection ?

2° On pose, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $v_n = u_n - 40$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.