Comment étudier les variations d'une fonction en utilisant la dérivée ?

1. **On calcule la dérivée $f'(x)$ de f.**

2. **On étudie sur l'intervalle I le signe de $f'(x)$ et on en déduit les variations de f.**

3. **On construit le tableau de variation.**

Exemple. *Étudier les variations de f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.*

1. *f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$; d'après un résultat précédent : $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$.*

2. *Sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ a le signe de $1-2\ln x$. On a :*

- *$1-2\ln x<0$ si $\ln x>\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire si $x>e^{\frac{1}{2}}$ soit si $x>\sqrt{e}$;*
- *$1-2\ln x>0$ si $\ln x<\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire si $x<\sqrt{e}$.*

Donc sur $]0\,;\sqrt{e}[$, f est croissante ; sur $[\sqrt{e}\,;+\infty[$, f est décroissante.

3.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$	0

On vérifiera que :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$