Les suites

Une suite est « comme une fonction », la différence est que la variable (le x) est nécessairement un nombre entier naturel noté n .

Calculer les premiers termes d'une suite

On considère les suites suivantes :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n = 3n^2 - 1$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = 2v_n - 1$
$v_0 = 2$

La suite u_n est définie comme une fonction : on peut calculer la valeur de u directement à partir de la valeur de n (par exemple : $u_8 = 3 \times 8^2 - 1 = 191$).

La suite v_n est différente car il n'est pas possible de calculer un terme à partir de la valeur de n .
Il est nécessaire de connaître la valeur du terme précédent (par exemple : $v_8 = 2 \times v_7 - 1$).
On dit que la suite v_n est définie par récurrence.

On calcule les premiers termes :

1) $u_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1$

$u_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2$

$u_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11$

$u_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26$

etc...

2) $v_0 = 2$

$v_1 = 2 \times v_0 - 1 = 3$

$v_2 = 2 \times v_1 - 1 = 5$

$v_3 = 2 \times v_2 - 1 = 9$

etc...

Reconnaître une suite arithmétique et une suite géométrique

(u_n) suite <u>arithmétique</u> de raison r :	(u_n) suite <u>géométrique</u> de raison q :
$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$

Exemples :

- $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 3$: arithmétique de raison $r = 3$ et premier terme $u_0 = 4$.
- $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = 3u_n$: géométrique de raison $q = 3$ et premier terme $u_0 = 7$.
- $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = u_n - 5$: arithmétique de raison $r = -5$ et premier terme $u_1 = -2$.
- $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$: géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et premier terme $u_0 = -3$.

Démontrer qu'une suite est arithmétique

La suite (u_n) définie par $u_n = 7-9n$ est-elle arithmétique ?

(u_n) est suite arithmétique de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$.

On peut réécrire cette relation sous la forme : $u_{n+1} - u_n = r$.

Donc, prouver que la suite (u_n) est arithmétique signifie vérifier que la différence $u_{n+1} - u_n$ est une constante.

On calcule alors :

$u_{n+1} - u_n = 7-9(n+1) - (7-9n) = 7-9n-9-7+9n = -9$.

On peut conclure que (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=-9$.

Démontrer qu'une suite est géométrique

La suite (u_n) définie par $u_n = 3\times 5^{n+1}$ est-elle géométrique ?

(u_n) suite géométrique de raison q si $u_{n+1} = q\times u_n$.

On peut réécrire cette relation sous la forme : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Donc, prouver que la suite (u_n) est géométrique signifie vérifier que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante.

On calcule alors :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times 5^{n+1+1}}{3\times 5^{n+1}} = \frac{5^{n+2}}{5^{n+1}} = 5^{n+2-(n+1)} = 5^{n+2-n-1} = 5$.

On peut conclure que (u_n) est une suite géométrique de raison $q=5$.

Déterminer l'expression générale d'une suite arithmétique

Si (u_n) est suite arithmétique de raison r et premier terme u_0 , alors l'<u>expression générale</u> de la suite est : $u_n = u_0 + nr$	Si (u_n) est suite arithmétique de raison r et premier terme u_p , alors l'<u>expression générale</u> de la suite est : $u_n = u_p + (n-p)r$

Exemple : l'expression générale de la suite arithmétique définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 3$ est :

$$u_n = u_1 + (n-1)r = 5 + (n-1)\times 3 = 5+3n-3 = 2+3n \text{ , donc } u_n = 2+3n \text{ .}$$

Déterminer l'expression générale d'une suite géométrique

Si (u_n) est suite géométrique de raison q et premier terme u_0 , alors l'<u>expression générale</u> de la suite est : $u_n = u_0 \times q^n$	Si (u_n) est suite géométrique de raison q et premier terme u_p , alors l'<u>expression générale</u> de la suite est : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Exemple : l'expression générale de la suite géométrique définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n$ est :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 5\times 2^{n-1} = 5\times 2^n \times 2^{-1} = 2{,}5\times 2^n \text{ , donc } u_n = 2{,}5\times 2^n \text{ .}$$

Déterminer l'expression générale d'une suite arithmético-géométrique

On considère la suite arithmético-géométrique (u_n) définie par :

$$u_{n+1}=1{,}03u_n+300 \quad \text{et} \quad u_0=5000 \quad .$$

On donne la suite (v_n) définie par : $v_n=u_n+10000$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   Le premier terme de la suite est : $v_0=u_0+10000=5000+10000=15000$.

   La suite (v_n) est une suite géométrique de raison q si $v_{n+1}=q\times v_n$.
   On cherche alors le terme v_{n+1} :

   $v_{n+1}=u_{n+1}+10000=1{,}03u_n+300+10000=1{,}03u_n+10300$.

   Attention ! Voici la partie un peu délicate de la démonstration !

   Il va falloir factoriser cette expression :

   $v_{n+1}=1{,}03u_n+10300=1{,}03\left(u_n+\dfrac{10300}{1{,}03}\right)=1{,}03(u_n+10000)=1{,}03v_n$.

   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q=1{,}03$ et premier terme $v_0=15000$.

2. Déterminer l'expression générale de (v_n) et (u_n) .

   Si (v_n) est suite géométrique de raison q et premier terme v_0 , alors l'expression générale de la suite est : $v_n=v_0\times q^n$.

   Donc : $v_n=15000\times 1{,}03^n$.

   En utilisant la définition de (v_n) , on peut écrire : $u_n=v_n-10000$.

   On peut conclure : $u_n=15000\times 1{,}03^n-10000$.

Limite et sens de variation d'une suite arithmétique

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison r et premier terme u_0 : $u_n=u_0+nr$.

La limite de cette suite est : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0+\lim\limits_{n\to+\infty} nr$.

On a deux cas :

$r>0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0+\lim\limits_{n\to+\infty} nr=+\infty$	$r<0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0+\lim\limits_{n\to+\infty} nr=-\infty$

On peut conclure que <u>une suite arithmétique est toujours divergeant</u>.

Une suite arithmétique est :

croissante si $u_{n+1}-u_n>0$	décroissante si $u_{n+1}-u_n<0$

Exemple : On considère une suite arithmétique (u_n) de raison $0{,}01$ et premier terme $u_2=4$.

1. Définir (u_n) .

   $u_{n+1}=u_n+0{,}01$ et $u_2=4$.

2. Déterminer l'expression générale de (u_n) .

   $u_n=u_2+(n-2)\times 0{,}01=4+0{,}01n-0{,}02=3{,}98+0{,}01n$.

3. Déterminer le sens de variation.

   $u_{n+1}-u_n=0{,}01 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1}-u_n>0$, donc (u_n) est croissante.

4. Déterminer la limite.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(3{,}98+0{,}01n)=3{,}98+\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}01n=+\infty$.

Limite et sens de variation d'une suite géométrique

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison q et premier terme u_0 : $u_n=u_0\times q^n$.

La limite de cette suite est : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0\times\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$.

On a quatre cas :

q	$q\leq -1$	$-1<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Exemple : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n=+\infty$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(3^n+2)=+\infty$.

Sens de variation :

	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$u_0>0$	décroissante	constante	croissante
$u_0<0$	croissante	constante	décroissante

Exemple :

1) $u_n=-4\times 2^n$. (u_n) est décroissante car $u_0=-4<0$ et $q=2>1$.

2) $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ et $v_0=-2$. (v_n) est croissante car $v_0=-2<0$ et $0<q=\frac{1}{2}<1$.