La fonction exponentielle

Le nombre *e*

Le nombre *e* est un nombre très présent dans les mathématiques et dans les sciences en général.
Il est environ égal à 2,718281828.

Obtention du nombre *e*

Considérons la suite *u* telle que :

$$u_0 = 1$$
$$u_1 = 1+1$$
$$u_2 = 1+1+\frac{1}{1\times 2}$$
$$u_3 = 1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}$$
$$u_4 = 1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}$$, etc...

On a : $u_n = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ (! est la notation factorielle).

Calculons ses premiers termes :

$u_0 = 1$	$u_5 \approx 2,717$	$u_{10} \approx 2,7182818$
$u_1 = 2$	$u_6 \approx 2,7181$	$u_{11} \approx 2,718281826$
$u_2 = 2,5$	$u_7 \approx 2,71825$	$u_{12} \approx 2,7182818282$
$u_3 \approx 2,67$	$u_8 \approx 2,71828$	$u_{13} \approx 2,71828182845$
$u_4 \approx 2,71$	$u_9 \approx 2,7182815$	$u_{14} \approx 2,71828182845$

Cette suite est convergente. Le nombre *e* est sa limite quand n tend vers +∞.

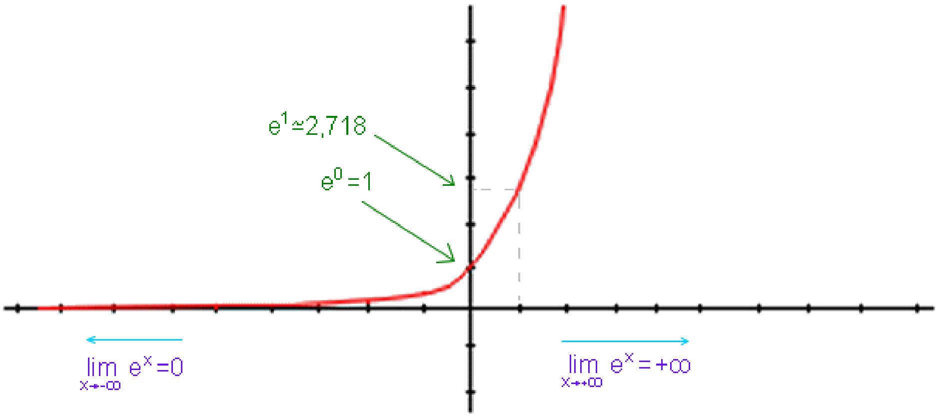
La fonction exponentielle

Définition
La fonction exponentielle est la fonction qui à tout nombre x associe le nombre *e* à la puissance x.
Donc $f(x)=e^x$.

Propriétés

- Comme *e*>0, on a toujours $e^x>0$.
- La fonction exponentielle vérifie les propriétés sur les puissances, en particulier $e^0=1$, $e^{a+b}=e^a\times e^b$, $e^{a-b}=e^a/e^b$, $(e^a)^n=e^{a\times n}$ et $1/e^a=e^{-a}$.
- La fonction exponentielle est toujours égale à sa fonction dérivée. On peut le vérifier graphiquement en comparant le coefficient directeur de la tangente à sa courbe, pour un x pris au hasard, avec e^x.
- Comme elle ne prend qu'une fois chaque valeur de $\mathbb{R}^+$, si $e^a=e^b$, alors a=b (pratique pour résoudre certaines équations).

Représentation graphique



Limites particulières

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

La fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien (notée *ln*) est la réciproque de la fonction exponentielle : c'est la fonction telle que pour tout nombre a, $\ln(e^a)=a$ et pour tout nombre a>0, $e^{\ln(a)}=a$.

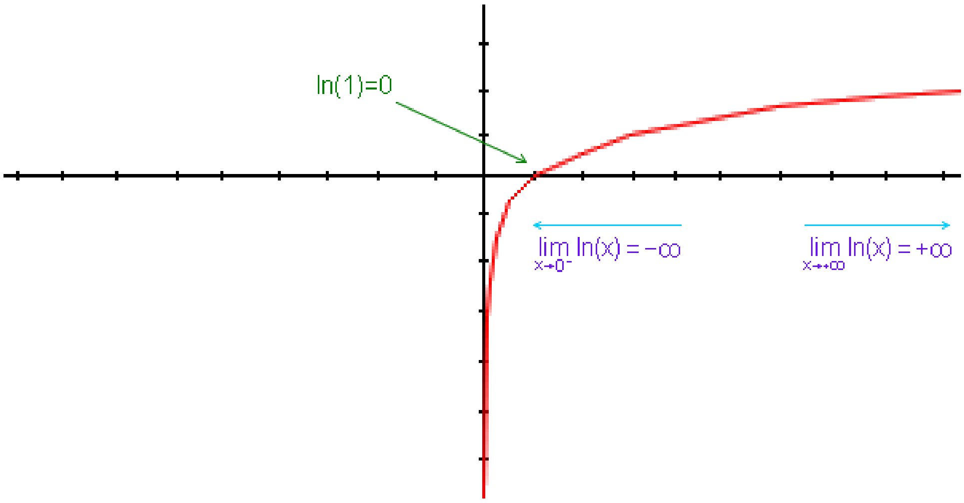
Son [ensemble de définition](#) est $]0;+\infty[$, car la fonction exponentielle ne prend jamais de valeurs négatives.

Propriétés

- $\ln(1)=0$ car $e^0=1$.
- La fonction *ln* transforme des produits en sommes et des quotients en différences :

  ln(ab) = ln(a)+ln(b), ln(a/b) = ln(a)-ln(b)
- $\boxed{\ln(a^n)=n\ln(a)}$, car $\ln(a^n)=\ln(a\times a\times\ldots\times a)=\ln(a)+\ln(a)+\ldots+\ln(a)=n\ln(a)$.
- ln(1/a) = ln(1)-ln(a) = -ln(a).
- ln(a)=ln(b) équivaut à a=b.
- ln(a)<ln(b) équivaut à a<b.
- La fonction *ln* a pour [dérivée](#) la fonction $\frac{1}{x}$. On peut le vérifier graphiquement.

Représentation graphique



Limite particulière

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Exercice 3

Combien fait $\lim_{x \to -\infty} e^x$?

Exercice 4

Combien fait $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$?

Exercice 5

Quelle est la dérivée de la fonction f définie sur $\Re$ par $f(x) = -e^{-x-1}$?

Exercice 6

f est une fonction définie sur $\Re$ par $f(x) = e^x$.
(d) est une droite d'équation $y = 3x + 1$.
Ecris sous la forme $y = mx + p$ l'équation de la tangente à la courbe de f parallèle à la droite (d).
Combien valent, arrondis à 0,1 près, les nombres m et p?

Exercice 7

Combien l'équation $2e^{2x} - 10e^x + 3 = 0$ possède t-elle de solutions?

Exercice 8

Ecris sous la forme $a \ln 3$ le nombre $2\ln(6) - \ln(4)$.

Exercice 9

Combien l'équation $\ln(x^2 + x) = \ln(1 - x)$ possède t-elle de solutions?

Exercice 10

Quelle est la dérivée de la fonction $f(x) = \ln(\sqrt{x})$?

6. Résolution d'une équation ou d'une inéquation.

Ce qu'il faut retenir

	$e^{ax} = b$ $a \neq 0$ et $b > 0$	$e^{ax} \geqslant b$ $a \neq 0$ et $b > 0$	
Résolution	$\ln(e^{ax}) = \ln b$ $ax = \ln b$	$\ln(e^{ax}) \geqslant \ln b$ $ax \geqslant \ln b$	
Solutions	$x = \dfrac{\ln b}{a}$	$a < 0$ $x \leqslant \dfrac{\ln b}{a}$	$a > 0$ $x \geqslant \dfrac{\ln b}{a}$

MÉTHODE Comment résoudre des équations du type $e^{ax} = b$?

On cherche à résoudre l'équation : $e^{-2x} = 15$

- On calcule le logarithme népérien de chacun des deux membres :

$$\ln(e^{-2x}) = \ln 15$$

- On applique les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien :

$$-2x \times \ln e = \ln 15$$
$$-2x = \ln 15$$

- On termine la résolution :

$$x = \frac{\ln 15}{-2}$$
$$x \approx -1{,}35$$

APPLICATIONS

13 Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{0,5x} = 90$
b) $e^{1000\,x} = 500$
c) $e^{-0,003x} = 7{,}5$
d) $e^{2,5x} = 5$
e) $e^{-x} = 0{,}1$

14 Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{x} + 10 = 20$
b) $5\,e^{10\,x} + 25 = 50$
c) $e^{-3x} + 1{,}5 = 3$

15 Une erreur s'est glissée dans le début des résolutions d'équations suivantes. Quelle est-elle dans chaque cas ?

a) $e^{4x} = 5$
$\ln(e^{4x}) = 5$
$4x = 5$

b) $e^{-6x} = 1$
$\ln(e^{-6x}) = \ln 1$
$x\ln(-6) = \ln 1$

16 Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{4x} \geqslant 650$

b) $e^{-x} \leqslant 100$

c) $e^{-0,001x} < 12$

d) $e^{0,5x} > 0,5$

e) $e^{-3x} \leqslant 1\,290$

17 Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{-2x} + 1,5 \leqslant 7,5$

b) $0,1\, e^{100x} - 1 \geqslant 4$

Ce qu'il faut retenir

	$\ln(ax) = b$ $x > 0$ et $a > 0$	$\ln(ax) \geqslant b$ $x > 0$ et $a > 0$
Résolution	$e^{\ln(ax)} = e^b$ $ax = e^b$	$e^{\ln(ax)} \geqslant e^b$ $ax \geqslant e^b$
Solutions	$x = \dfrac{e^b}{a}$	$x \geqslant \dfrac{e^b}{a}$

MÉTHODE Comment résoudre des équations du type $\ln(ax) = b$?

On cherche à résoudre l'équation : $\ln(2x) = 10$

- On calcule l'exponentielle de chacun des deux membres :

$$e^{\ln(2x)} = e^{10}$$

- On applique les propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

$$2x = e^{10}$$

- On termine la résolution :

$$x = \frac{e^{10}}{2}$$

$$x \approx 11\,013,23$$

APPLICATIONS

18 Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(1,5x) = 8$

b) $\ln(0,5x) = 100$

c) $\ln(0,1x) = 0,5$

d) $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = 4$

e) $\ln x + 1 = 4$

f) $\ln(2x) + 2,3 = 3,8$

19 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\ln(2,5x) \geqslant 10$

b) $\ln(2x) \leqslant 25$

c) $\ln(0,01x) < 0,1$

d) $\ln(1000x) > 5$

e) $\ln(x) \leqslant 10^{-4}$

f) $\ln(4x) + 1 \leqslant 7,5$

g) $\ln(x) - 6 \geqslant -5$

Exemple 1. Résoudre l'équation $e^{-0,5x+1} - 2 = 0$.

L'équation s'écrit : $e^{-0,5x+1} = 2$.

En prenant le logarithme népérien de chaque membre, on obtient : $-0,5x + 1 = \ln 2$,

d'où, successivement : $-0,5x = \ln 2 - 1$; $x = \dfrac{\ln 2 - 1}{-0,5} = 2(1 - \ln 2)$.

L'équation proposée admet une solution : $\boldsymbol{x = 2(1 - \ln 2)}$; $\boldsymbol{x \approx 0,61}$.

Exemple 2. Résoudre l'inéquation $2 \ln (x + 4) > \ln (2 - x)$

On doit avoir $x + 4 > 0$ et $2 - x > 0$ soit $\boldsymbol{-4 < x < 2}$.

On écrit : $\ln (x + 4)^2 > \ln (2 - x)$ d'où $(x + 4)^2 > 2 - x$

c'est-à-dire : $x^2 + 8x + 16 > 2 - x$ d'où $x^2 + 9x + 14 > 0$.

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + 9x + 14 = 0$ a pour solutions : $x_1 = -7$; $x_2 = -2$.

Dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 9x + 14 > 0$ pour x tel que $x < -7$ ou $x > -2$.

On doit avoir $-4 < x < 2$, donc l'inéquation proposée a pour solutions **les réels x tels que** $\boldsymbol{-2 < x < 2}$.

Exemple 3. Résoudre l'équation $e^x - 10 = -3e^{2x}$.

L'équation s'écrit : $3e^{2x} + e^x - 10 = 0$ soit $3(e^x)^2 + e^x - 10 = 0$.

En posant $X = e^x$, on obtient l'équation du second degré $3X^2 + X - 10 = 0$.

Cette équation a pour solutions dans $\mathbb{R}$: $X_1 = -2$ et $X_2 = \dfrac{5}{3}$.

Il faut alors résoudre les équations d'inconnue x : $e^x = -2$; $e^x = \dfrac{5}{3}$.

– L'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution, car $e^x > 0$.

– L'équation $e^x = \dfrac{5}{3}$ a pour solution : $x = \ln \dfrac{5}{3}$.

Donc l'équation proposée a une seule solution : $\boldsymbol{x = \ln \dfrac{5}{3}}$; $\boldsymbol{x \approx 0,51}$.

1 Simplifier les expressions suivantes :

$\ln 3 + \ln \dfrac{1}{3}$; $\ln e^3 - \ln e$; $e^{-\ln 2}$.

2 R Simplifier les expressions suivantes :

$\ln \sqrt{e^5}$; $e^{\ln 5 - \ln 3}$; $\ln e^3 - e^{\ln 3}$.

***Pour chacun des exercices 3 à 7**, résoudre les équations proposées.*

3 R $\ln x + 2 = 0$; $\ln (x + 1) - 3 = 0$.

4 C $\ln (x + 2) = \ln (2x + 1)$; $2 \ln x + \ln 3 = 0$.

5 $\ln x^2 = \ln 2 + \ln (x + 1)$.

6 R $e^{2x} - 3 = 0$; $e^{2x} = e^{x+1}$.

7 C $e^{4x} - 2e^{3x} = 0$; $e^{0,2x} = 2e^{-0,2x}$.

8 **a)** Résoudre l'équation d'inconnue X :

$$X^2 - 2X - 3 = 0.$$

b) En déduire les solutions de l'équation d'inconnue x :

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0.$$

On posera $X = e^x$.

9 **a)** Résoudre l'équation d'inconnue X :

$$X^2 - 2X + 2 = 0.$$

b) En déduire les solutions de l'équation d'inconnue x :

$$e^{2x} - 2e^x + 2 = 0.$$

On posera $X = e^x$.

***Pour chacun des exercices 10 à 15**, résoudre les inéquations proposées.*

10 C $\ln (x + 1) < 0$; $\ln (2 - x) > \ln 3$.

11 $\ln \dfrac{x + 1}{x - 1} > 0$.

12 C $3 - 2e^{0,5x} > 0$.

13 $e^x(e^x - 2) > 0$.

14 $e^{2x} - 4e^x < 0$.

15 R $1 - e^{0,5x-1} < 0$.

16 C Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $(e^x + 1)(e^x - 3)$.