

Comment résoudre une équation ou une inéquation où figure la fonction logarithme ou la fonction exponentielle ?

<ul style="list-style-type: none"> • l'équation $\ln x = a$ a pour solution : $x = e^a$. • $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$. • $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$. 	<ul style="list-style-type: none"> • l'équation $e^x = a$, avec $a > 0$, a pour solution : $x = \ln a$. • $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$. • $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.
---	--

Exemple 1 : Résoudre l'équation $e^{-0,5x+1} - 2 = 0$.

$$e^{-0,5x+1} = 2 \Leftrightarrow -0,5x+1 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2 - 1}{-0,5} = 2(1 - \ln 2) \text{ .}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{2(1 - \ln 2)\}$.

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation $2\ln(x+4) > \ln(2-x)$.

Ensemble de définition : $x+4 > 0$ et $2-x > 0$ soit $-4 < x < 2$ donc $D =]-4; 2[$.

$$\ln(x+4)^2 > \ln(2-x) \Leftrightarrow (x+4)^2 > 2-x \Leftrightarrow x^2 + 9x + 14 > 0 \Leftrightarrow x < -7 \text{ ou } x > -2 \text{ .}$$

On doit avoir $x \in D$, donc l'ensemble des solutions est $S =]-2; 2[$.

Exemple 3 : Résoudre l'équation $e^x - 10 = -3e^{2x}$.

$$3e^{2x} + e^x - 10 = 0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 + e^x - 10 = 0 \text{ .}$$

Changement de variable : $X = e^x$, on obtient l'équation $3X^2 + X - 10 = 0$.

Cette équation a pour solutions : $X_1 = -2$ et $X_2 = \frac{5}{3}$.

Il faut alors résoudre les équations d'inconnue x :

- $e^x = -2$ n'a pas de solution, car $e^x > 0$.
- $e^x = \frac{5}{3}$ a pour solution $x = \ln \frac{5}{3}$.

L'ensemble des solutions est $S = \{\ln \frac{5}{3}\}$.