Approximations de la loi binomiale

1. Approximation par la loi de Poisson

À savoir

Pour n « assez grand » ($n > 30$) et pour p « voisin » de 0, ($p \leqslant 0{,}1$) tels que $np(1-p) \leqslant 10$, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda = np$.
On a alors :

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Exemple :

Dans une chaîne de fabrication, 5 % des pièces sont défectueuses : on prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on la replace parmi les autres. On répète 120 fois cette expérience. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 120 pièces associe le nombre des pièces défectueuses.

a) Justifier que X suit une loi binomiale, en préciser les paramètres.

1) Pour chaque tirage, on a **deux résultats** possibles :
la pièce est défectueuse ($p=0,05$) ou la pièce ne l'est pas ($q=1-p=0,95$).
2) On effectue 120 tirages de manière **indépendante**.

Donc X suit la loi binomiale $B(n,p)$ avec $n=120$ et $p=0,05$.

b) Calculer $P(X=5)$.

$$P(X=5)=C_{120}^{5}\times 0{,}05^{5}\times 0{,}95^{115}\approx 0{,}163 \quad .$$

c) Montrer que une approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson convient.

Comme $n>30, p<0{,}1$ et $np(1-p)=120\times 0{,}05\times 0{,}95=5{,}7<10$ l'approximation par la loi de Poisson $P(\lambda)$, ($\lambda=np=6$) convient.

d) Calculer $P(X=5)$ à l'aide de l'approximation.

À l'aide d'une calculatrice : $P(X=5)\approx 0{,}161$.
La loi de Poisson donne une bonne approximation.

2. Approximation par la loi de normale

À savoir

Pour n « assez grand » ($n \geqslant 50$) et pour p ni voisin de 0 ni voisin de 1, tels que $np(1-p) > 10$, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$,
où $m = np$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
On a alors :

$$P(X=k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-m}{\sigma}\right)^2}.$$

Exemple :

On lance 300 fois une pièce de monnaie truquée ce qui consiste une partie.
La probabilité d'obtenir « face » est $\frac{2}{3}$.
On désigne par *X* la variable aléatoire qui à chaque partie associe le nombre de « face » obtenus.

a) Justifier que *X* suit une loi binomiale, en préciser les paramètres.

1) Pour chaque jet, on a **deux résultats** possibles :
on obtient « face » (*p=2/3*) ou on obtient « pile » (*q=1-p=1/3*).
2) On lance 300 fois la pièce de manière **indépendante**.

Donc *X* suit la loi binomiale *B(n,p)* avec *n=300* et *p=2/3*.

b) Peut-on calculer simplement $P(X>210)$?

Comme *X* suit la loi binomiale *B(n,p)* avec *n=300* et *p=2/3* :

$$P(X>210)=\sum_{i=211}^{300} C_{300}^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{300-i} .$$

La calculatrice ne peut pas effectuer un tel calcul.

D'ailleurs, comme $n>50,\ p=\frac{2}{3}\approx 0{,}667$ et $np(1-p)=300\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{200}{3}\approx 66{,}667$
l'approximation par une loi normale *N(m,σ)* convient. Les paramètres sont :

$$m=300\times\frac{2}{3}=200 \quad \text{et} \quad \sigma=\sqrt{300\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\sqrt{6}\approx 8{,}16 .$$

À l'aide d'une calculatrice : $P(X>210)\approx 0{,}1102$.