Etude de fonction

Dans ce cours, nous allons apprendre à étudier les variations d'une fonction afin de pouvoir dessiner son tableau de variation et connaître ses minimums et maximums sans avoir besoin de sa représentation graphique.

Étude des variations d'une fonction

Méthode

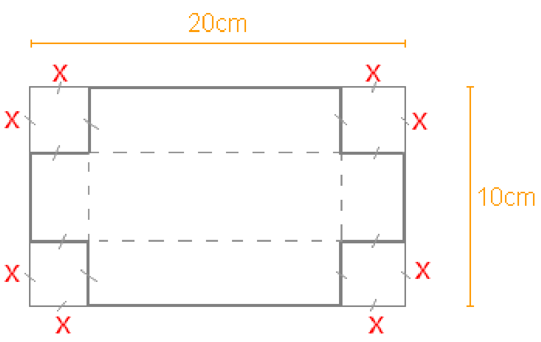
Pour étudier les variations d'une fonction :

- **1.** On calcule sa dérivée.
- **2.** On étudie le signe de la dérivée (avec une inéquation).
- **3.** On dessine un tableau comme ci-dessous :

x	
signe de f'(x)	
variations de f	

- **4.** On écrit sur la première ligne les valeurs de x pour lesquelles f'(x) change de signe.
- **5.** On remplit la deuxième ligne avec des + ou des -.
- **6.** On remplit la troisième ligne avec des flèches qui montent lorsque f'(x)>0 pour les valeurs de x situées sur la première ligne, ou qui descendent si f'(x)<0.

Exemple



Nous avons besoin de trouver la valeur de *x* permettant de construire une boite de volume maximal à partir d'un support rectangulaire de dimensions 20*10 cm.

La fonction $f(x)=x(20-2x)(10-2x)$ s'écrit aussi $f(x)=4x^3-60x^2+200x$.

<u>Étude des variations</u>
1. $f'(x)=12x^2-120x+200$.

2. On doit résoudre l'inéquation $12x^2-120x+200>0$ (ou l'inéquation $12x^2-120x+200<0$).
C'est une inéquation du deuxième degré.

Résolution de l'inéquation

2.1. On calcule delta. $\Delta = b^2 - 4ac = 120^2 - 4 \times 12 \times 200 = 14400 - 9600 = 4800$.

2.2. $\Delta > 0$ donc l'équation $12x^2-120x+200=0$ possède deux solutions.

2.3. On calcule les solutions.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{120-\sqrt{4800}}{24} = \frac{120-\sqrt{3\times 1600}}{24} = \frac{120-40\sqrt{3}}{24} = 5-\frac{5}{3}\sqrt{3} \simeq 2{,}11$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{120+\sqrt{4800}}{24} = \frac{120+\sqrt{3\times 1600}}{24} = \frac{120+40\sqrt{3}}{24} = 5+\frac{5}{3}\sqrt{3} \simeq 7{,}89$$

2.4. Comme $a>0$, la parabole est de même allure que celle de x^2 (le sommet est en bas et les branches sont tournées vers le haut).

2.5. On en déduit que $12x^2-120x+200$ est positif de $-\infty$ à x_1, négatif de x_1 à x_2, et de nouveau positif de x_2 à $+\infty$.

$12x^2-120x+20$ est positif (+) sur $\left]-\infty ; 5-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right] \cup \left[5+\frac{5}{3}\sqrt{3} ; +\infty\right[$ et négatif (-) sur $\left[5-\frac{5}{3}\sqrt{3} ; 5+\frac{5}{3}\sqrt{3}\right]$.

3. 4. 5. et **6.**

x	$-\infty$		$5-\frac{5}{3}\sqrt{3}$ $\simeq 2{,}11$		$5+\frac{5}{3}\sqrt{3}$ $\simeq 7{,}89$		$+\infty$
Signe de f'(x)		+	0	—	0	+	
Variations de f		↗		↘		↗	

Solution du problème
On voit que sur l'intervalle]0;5[correspondant aux valeurs de x possibles pour construire la boîte, f est croissante de 0 à $5-\frac{5}{3}\sqrt{3}$, puis décroissante de $5-\frac{5}{3}\sqrt{3}$ à 5.

Elle admet donc un maximum pour $x=5-\frac{5}{3}\sqrt{3}$.
C'est cette valeur (environ 2,11) qu'il faudra utiliser pour dessiner le patron.

On obtiendra un volume de $f\left(5-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)$, soit 192,45 cm³.

As-tu compris ?

Donne un arrondi à 0,00001 près de la valeur de x pour laquelle la fonction $f(x)=2x^3+x^2-3x+2$ est minimale sur l'intervalle [0;1].

Fonctions usuelles

Nous avons étudié deux fonctions usuelles : la fonction carré et la fonction inverse.
Voyons maintenant d'autres fonctions utiles.

La fonction racine carrée

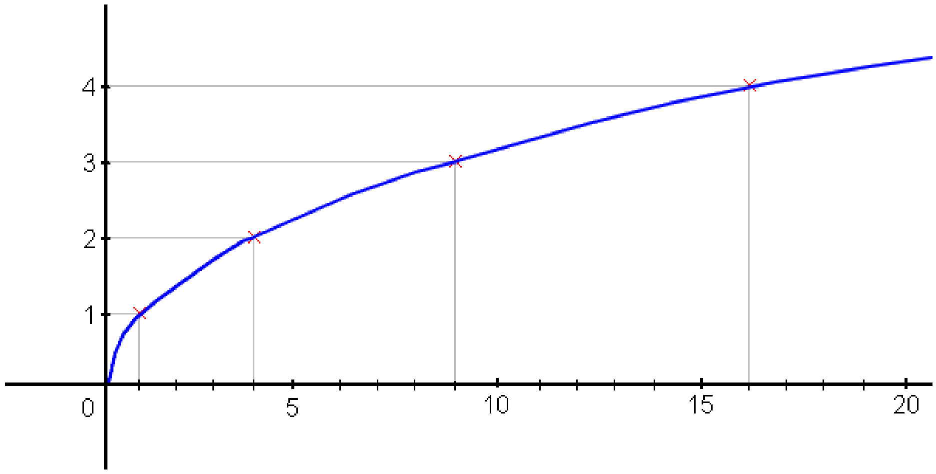
La fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur [0;+∞[, car il n'est pas possible de calculer la racine carrée d'un nombre strictement négatif.

Elle est toujours croissante car sa dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est toujours positive.

Tableau de valeurs

x	0	1	4	9	16
f(x)	0	1	2	3	4

Représentation graphique



La fonction valeur absolue

La fonction $f: x \mapsto |x|$, appelée **fonction valeur absolue**, est la fonction qui change les nombres négatifs en nombres positifs, mais ne change pas les nombres positifs.
Par exemple, |-10|=10 et |8|=8.
On a |x|=x si x>0 et |x|=-x si x<0 (l'opposé d'un nombre négatif est un nombre positif).

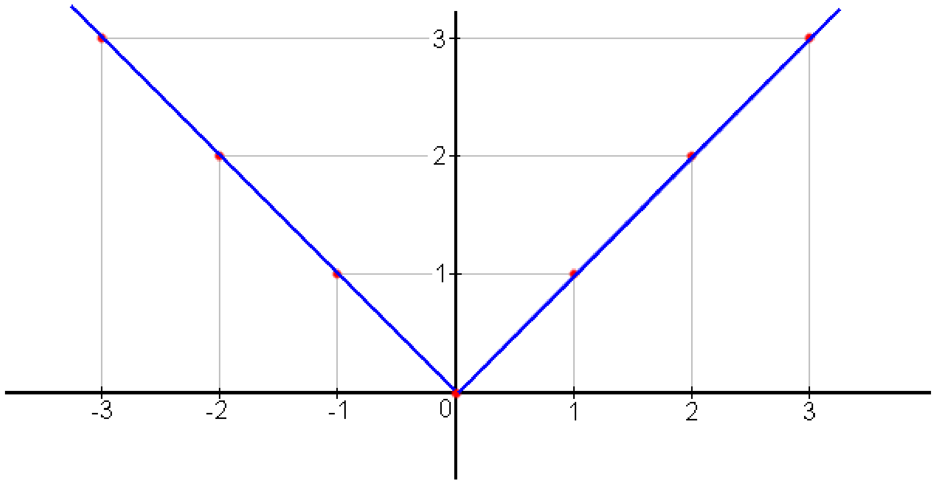
La fonction |x| est décroissante sur]-∞;0], car sur cet intervalle, elle est égale à -x et sa dérivée est donc -1.
Elle est croissante sur [0;+∞[, car sur cet intervalle, elle est égale à x et sa dérivée est donc 1.

Elle est définie sur R.

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	2	1	0	1	2	3

Représentation graphique



La fonction cube

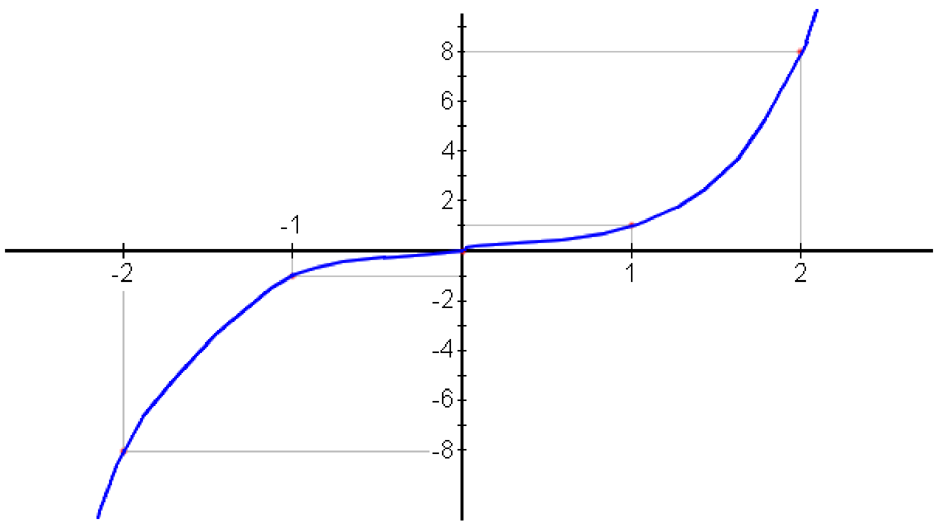
La fonction $f : x \mapsto x^3$ est définie sur R car on peut toujours calculer le cube d'un nombre.

Comme sa dérivée est $3x^2$ et que $3x^2$ est toujours positif ou nul, la fonction cube est toujours croissante.

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-8	-1	0	1	8

Représentation graphique



Exercice 1

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{3}{x}$.
Calcule sa dérivée puis réponds à la question suivante : f est-elle croissante ou décroissante sur son ensemble de définition?

Exercice 2

f est une fonction définie sur $\Re^+$ par $f(x) = -\sqrt{x}$.

Calcule sa dérivée puis réponds à la question suivante : f est-elle croissante ou décroissante sur son ensemble de définition?

Exercice 3
Une fonction admet un maximum en x = -10.
Que peut-on dire de f'(-10)?

Exercice 4

f est une fonction définie sur $\Re$ par $f(x) = x^3 + x$.
Sur quel intervalle f est-elle décroissante?

Exercice 5

f est une fonction définie sur $\Re$ par $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.
Sur quel intervalle f est-elle croissante?

Exercice 6

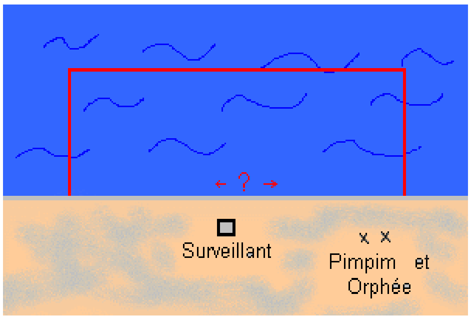
f est une fonction définie sur $\Re$ par $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+2}$.
Sur quel intervalle ou union d'intervalles f est-elle croissante?

Exercice 7

f est une fonction définie sur $\Re$ par $f(x) = \frac{2x^2+7x+3}{x^2+1}$.
Sur quel intervalle f est-elle croissante?

Exercice 9
Pimpim et Orphée sont sur la plage. Le surveillant veut délimiter une zone de baignade de 1250m²
avec des bouées et une corde rouge la plus petite possible.

Quelle doit être la longueur de la corde rouge (la corde n'a pas besoin d'être le long de la plage)?



Exercice 10
Pour créer le patron d'une boîte sans couvercle, le petit frère de Pimpim dispose d'un rectangle de 50 cm de long et de 20 cm de large.

Quelle longueur, arrondie au millimètre près, doit-il utiliser pour x afin que le volume de sa boîte soit maximal?