4 Schéma de Bernoulli

Jacques Bernoulli (1654-1705) mathématicien suisse. Il travaille dans plusieurs domaines des mathématiques dont les probabilités. On lui doit une démonstration rigoureuse de la loi faible des grands nombres (chapitre 14).

On dit qu'on a un schéma de Bernoulli lorsqu'une épreuve est répétée un certain nombre de fois dans les mêmes conditions indépendamment les unes des autres avec seulement deux possibilités (échec ou réussite, pièce défectueuse ou pièce non défectueuse, etc.).

Application

Une usine fabrique en grande série des cylindres.
Une machine est utilisée pour effectuer cette production.
On suppose que 5 % des cylindres produits sont défectueux.
On tire au hasard 3 cylindres (on assimile cette épreuve à un tirage successif et avec remise des 3 pièces).

1. Quelle est la probabilité de tirer aucune pièce défectueuse ?

2. Quelle est la probabilité de tirer une pièce défectueuse ?

3. Quelle est la probabilité de tirer au plus une pièce défectueuse ?

Corrigé

Soit D_i l'événement « le cylindre est défectueux au i-ième tirage ».
Comme on assimile cette épreuve à un tirage successif avec remise, les événements D_1, D_2 et D_3 sont indépendants.
De plus : $P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = 0{,}05$.

1. La probabilité de tirer aucune pièce défectueuse p_1 est égale à :

$$P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3) = P(\overline{D}_1) \times P(\overline{D}_2) \times P(\overline{D}_3)$$
$$= (0{,}95)^3$$
$$p_1 \approx 0{,}857 \quad \text{(voir } \textit{tableau 1}\text{)}.$$

2. Par exemple, l'événement $(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3)$ convient, et :

$$P(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3) = P(D_1) \times P(\overline{D}_2) \times P(\overline{D}_3)$$
$$= 0{,}05 \times (0{,}95)^2$$
$$\approx 0{,}045.$$

La pièce défectueuse peut être tirée au 2^e^ tirage ou au 3^e^ tirage avec la même probabilité, donc :
la probabilité p_2 de tirer une pièce défectueuse est :
$p_2 = 3 \times 0{,}05 \times (0{,}95)^2$