Variations de fonctions

Fiche méthode 6

Pour chacun des exercices 84 à 98*, la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.*
Dans chaque cas :
– calculer f '(x) ;
– étudier le signe de f '(x) sur I ;
– dresser le tableau de variation de f.
L'étude des limites éventuelles de f n'est pas demandée ici.

84 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2x^2 - 8x - 3$.

85 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = -x^2 + 3x + 5$.

86 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

87 **R** $I = [0\,;+\infty[$; $f(x) = 2x^2 - 4e^{-x}$.

88 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

89 **R** $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = \ln x - x - 1$.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour déterminer le signe de $f'(x)$ sur I, il faudra résoudre l'inéquation $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$.
Il peut être utile dans certains cas de consulter les résultats rappelés dans le Mémento :
– Équations et inéquations, page 302 ;
– Fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissances, page 303.

90 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$.

91 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 3x^2 - 3x^3$.

92 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

93 **R** $I = [0\,;10]$; $f(x) = x + 10 - 5\ln(x+2)$.

94 **R** $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = x^2 - 18\ln x + 18$.

95 **C** $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$.

96 $I = [0\,;40]$; $f(x) = 45x^2 - x^3$.

97 **R** $I = [0\,;12]$; $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$.

98 **C** $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = 3 + 2\ln x - (\ln x)^2$.

99 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2(e^x + 1)}.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} + 3e^x + 2}{2(e^x + 1)^2}.$$

3. Dresser le tableau de variation de f.

100 **R** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 7e^x + 5x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout x réel :

$$f'(x) = (e^x - 1)(2e^x - 5).$$

2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

101 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - 2x + e^{2x}.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Dresser le tableau de variation de f (on ne demande pas les limites en $-\infty$ et en $+\infty$).

3. En déduire que, pour tout réel x, on a $f(x) > 0$.

Équations du type $f(x) = k$

Fiche l'Essentiel

Pour les exercices 102 à 104*, une calculatrice graphique Casio Graph 35+ ou TI 82 Stats.fr suffit.*

102 **C** On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation.

2. En déduire que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α sur $[0\,;1]$.