Comment exploiter un développement limité d'une fonction pour donner l'équation réduite de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de cette fonction en son point d'abscisse 0 et préciser les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T ?

La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. Pour obtenir une équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 et préciser les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T, on utilise le résultat suivant.

Si le développement limité de f en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_p x^p + x^p \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } a_p \neq 0,$$

alors :

1. La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A de coordonnées $A(0\ ;\ a_0)$.

2. La courbe $\mathscr{C}$ admet en A une tangente T dont l'équation réduite est :

$$y = a_0 + a_1 x.$$

3. La position de $\mathscr{C}$ par rapport à T est donnée par le signe de $a_p x^p$ au voisinage de 0.

Dans les cas usuels, le 1er terme non nul après $a_0 + a_1 x$ est $a_2 x^2$ ou $a_3 x^3$, c'est-à-dire $p = 2$ ou $p = 3$.

Exemple 1. Fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x)$.

On a obtenu (fiche méthode 7) le développement limité de f, à l'ordre 3, en 0 :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc, à l'ordre 2, $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$, *avec* $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On en déduit :

1. La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $O(0\ ;\ 0)$.

2. La courbe $\mathscr{C}$ admet en O une tangente T dont l'équation réduite est $y = x$.

3. $\overline{HM} = f(x) - x$ *donc, au voisinage de 0,* $\overline{HM} \approx -\dfrac{x^2}{2}$.

Ainsi, pour tout x voisin de 0, on a $\overline{HM} < 0$, donc $\mathscr{C}$ est au-dessous de T.