Limites d’une fonction

Notion de limite d’une fonction

Partons d’un exemple très simple, on va introduire la fonction $f(x)=\frac{x}{(x-5)^2}$.

Par exemple :

- l’image de 3 par f est $f(3)=\frac{3}{(3-5)^2}=0{,}75$,
- l’image de 10 par f est $f(10)=\frac{10}{(10-5)^2}=0{,}4$,
- … et l’image de 5 ?

On ne peut pas calculer l’image de 5 par f car c'est une valeur interdite !

Cependant, il est possible de calculer les images de valeurs assez proches de 5 .

Par exemple :

- l’image de $4{,}9$ par f est $f(4{,}9)=490$,
- l’image de $4{,}999$ par f est $f(4{,}999)=4999000$,
- l’image de $4{,}9999$ par f est $f(4{,}9999)=499990000$.

La question est de savoir quel est le comportement de la fonction f lorsque x se rapproche de plus en plus de 5 . On dira que x tend vers 5 . On écrit :

$$\lim_{x\to 5} f(x)=+\infty \text{ .}$$

Donc, on est amené à faire des calculs de limites dans le cas où la fonction n'est pas définie.

Par ailleurs, on peut être amené à faire des calculs de limites lorsque x tend vers l'un des deux infinis, par exemple :

- l’image de 100 par f est $f(100)=0{,}011080332$,
- l’image de 10000 par f est $f(10000)=0{,}0001001$,
- … et l’image de $+\infty$?

Je ne peux pas calculer l'image de l'infini car il n'est pas un nombre.

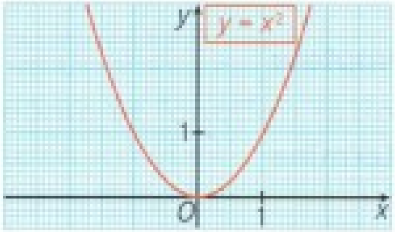
La question est de savoir quel est le comportement de la fonction f lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes. On dira que x tend vers $+\infty$. On écrit :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0 \text{ .}$$

Limites de fonctions usuelles

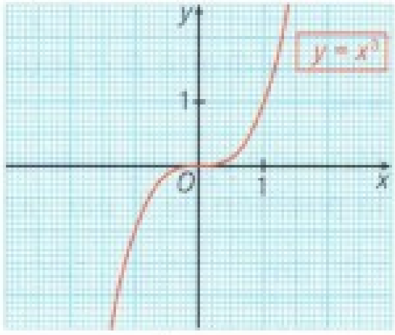
Fonction carré : $f(x) = x^2$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty$.
- Courbe représentative :



Fonction cube : $f(x) = x^3$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty$.
- Courbe représentative :

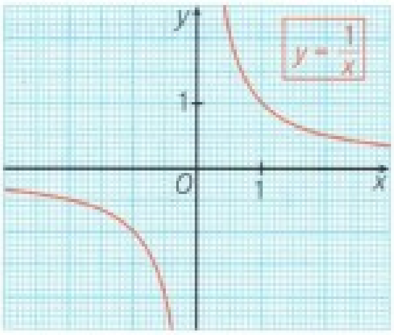


Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

- f est définie sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

- Courbe représentative :

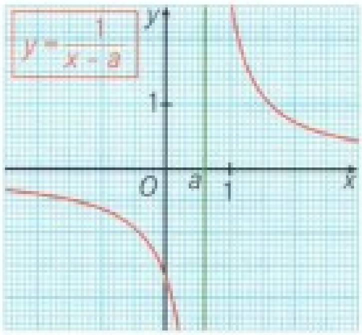


Fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$: a réel

- f est définie sur chacun des intervalles $]-\infty\,;a[$ et $]a\,;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x-a}\right) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x-a}\right) = 0$.

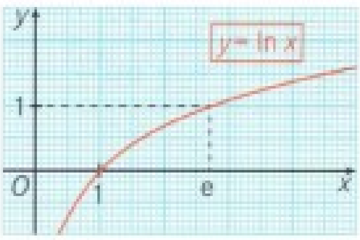
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \left(\dfrac{1}{x-a}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \left(\dfrac{1}{x-a}\right) = +\infty$.

- Courbe représentative :



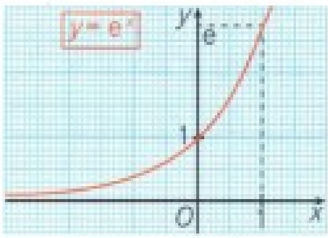
Fonction logarithme népérien : $f(x) = \ln(x)$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Courbe représentative :



Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty$.
- Courbe représentative :



Opérations sur les limites

- Somme : $\lim(f+g)=\lim f+\lim g$.
- Produit : $\lim(fg)=(\lim f)(\lim g)$.
- Quotient : $\lim\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\lim f}{\lim g}$.

Attention ! Il y a des cas dans lesquels on ne peut pas conclure directement :

- Somme : $\lim f=+\infty$ et $\lim g=-\infty$ alors $\lim(f+g)=+\infty-\infty=?$.
- Produit : $\lim f=0$ et $\lim g=\pm\infty$ alors $\lim(fg)=(0)(\pm\infty)=?$.
- Quotient : 1. $\lim f=0$ et $\lim g=0$ alors $\lim\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{0}{0}=?$,

  2. $\lim f=\pm\infty$ et $\lim g=\pm\infty$ alors $\lim\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}=?$.

Polynôme et fonction rationnelle

La limite en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+3)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty \quad .$$

La limite en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) est celle du quotient de ses termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-5)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-10x+25}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \quad .$$

Comparaison des fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissance

Pour $\alpha>0$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^\alpha\ln x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x}{x^\alpha}=-\infty$.

Comment calculer une limite ?

Exemple 1 : Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+2+3\,e^{x}$.

On pose : $f(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=x+2$ et $v(x)=3\,e^{x}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=+\infty$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (limite d'une somme).

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x)=0$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (limite d'une somme).

Exemple 2 : Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

On pose : $u(x)=x^2+x+1$ et $v(x)=x-1$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} u(x)=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} v(x)=0$.

Attention ! $x>1 \Leftrightarrow x-1>0$, il faut donc utiliser la règle des signes en faisant le quotient.

On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x^2+x+1}{x-1}=\dfrac{3}{0}=+\infty$.

Exemple 3 : Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-\ln x)$.

On pose : $f(x)=u(x)-v(x)$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=\ln x$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=+\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\infty=?$.

On ne peut pas conclure directement.

Pour conclure on met x^2 en facteur :

$x^2-\ln x=x^2\left(1-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$; on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}=0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=(+\infty)(1+0)=(+\infty)(1)=+\infty$ (limite d'un produit).

Exercices

Ex 1 : Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de

1. $f(x)=3x^2-4x+1$; $f(x)=x^3-2x^2+5$
2. $f(x)=-\frac{4}{3}x^4-3x^2+\frac{1}{3}$; $f(x)=6x^3-4x$
3. $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+1}$; $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+x+1}$; $f(x)=\frac{2x^2-1}{4x^2+5}$

Ex 2 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+\ln x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+e^x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}3e^{-2x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}x^2e^x$; $\lim\limits_{x\to 1}2x^3\ln x$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\ln(x-2)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}2e^{x+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+e^{-x})$; $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{\ln x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{e^x}{x^2}\right)$

Ex 3 : f est définie sur $]2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{5}{x-2}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x-2)$.
2. Préciser le signe de $(x-2)$ sur $]2;+\infty[$.
3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)$.

Ex 4 : f est définie sur l'intervalle $I=]-\infty;-1[$ par : $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$.

1. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Préciser le signe de $(x+1)$ sur I .
3. Déterminer $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$.

Ex 5 : f est définie sur $]3;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2+1}{x-3}$.

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Déterminer $\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$.

Ex 6 : Déterminer les limites en 1 et en -1 de $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$ définie sur $]-1;1[$.

Cas d'indétermination

Ex 7 : Déterminer $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

Indication : mettre $(x-1)$ en facteur au numérateur et au dénominateur.

Ex 8 : Déterminer $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$.

Indication : mettre $(x-2)$ en facteur au numérateur et au dénominateur.

Ex 9 : f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x-1}{2e^x+1}$.

1. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   Indication : mettre e^x en facteur au numérateur et au dénominateur.

Ex 10 : f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^x-x$.

1. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   Indication : mettre e^x en facteur.

Ex 11 : Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$.

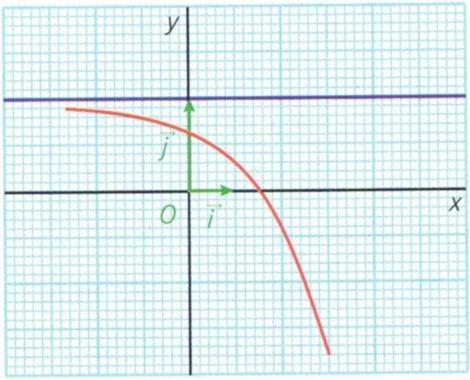
Indication : écrire $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

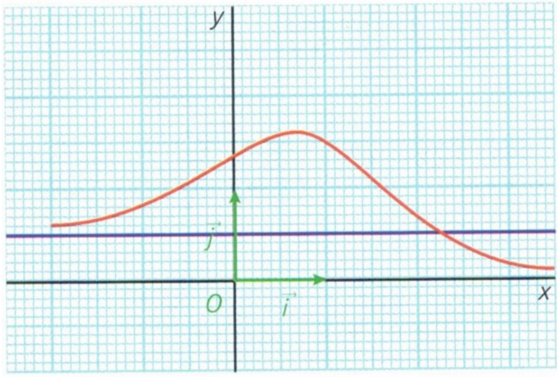
Ex 12 : Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 1}{x^2 + 1}$.

Indication : mettre e^x en facteur au numérateur et x^2 en facteur au dénominateur.

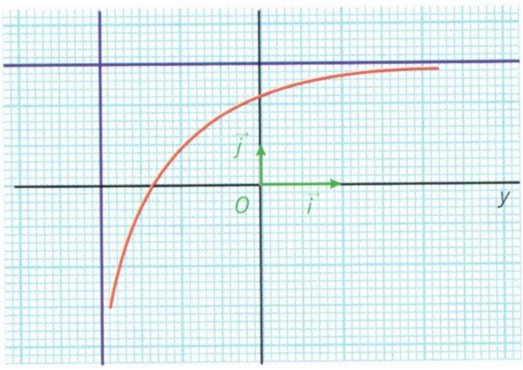
Lecture graphique

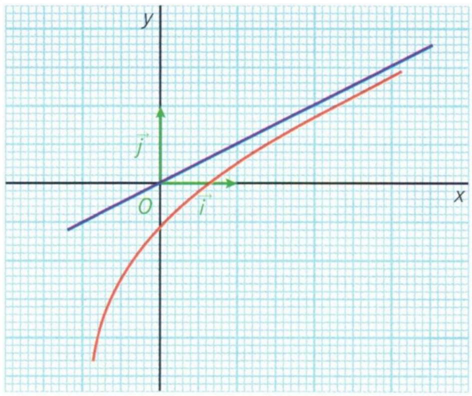
Ex 13 : Donner par lecture graphique la limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

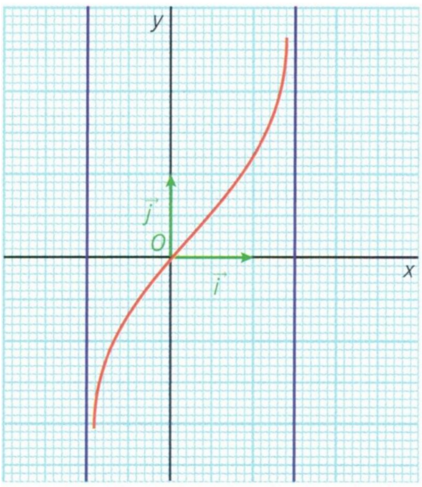


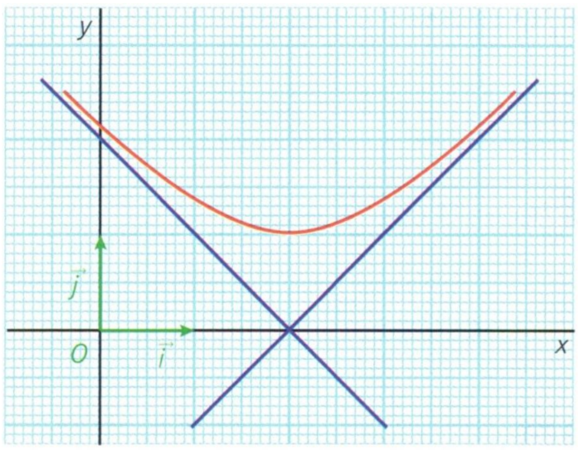


Ex 14 : Donner pour chaque fonction les équations des asymptotes à la courbe représentative.





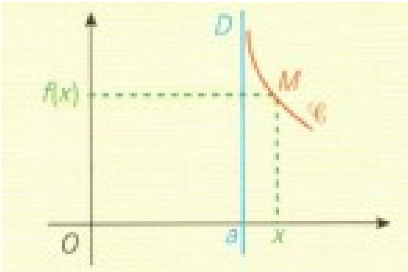




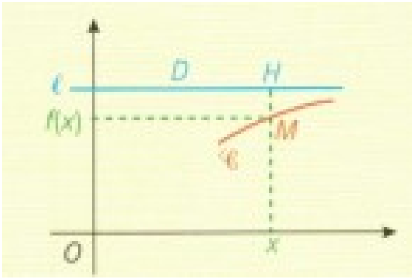
Asymptote à une courbe représentative

Définition

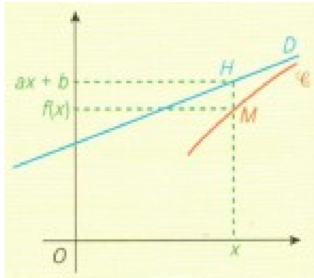
Une <u>asymptote</u> à une courbe est une droite telle que, lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, la distance de la courbe à la droite tend vers 0.



Asymptote verticale



Asymptote horizontale

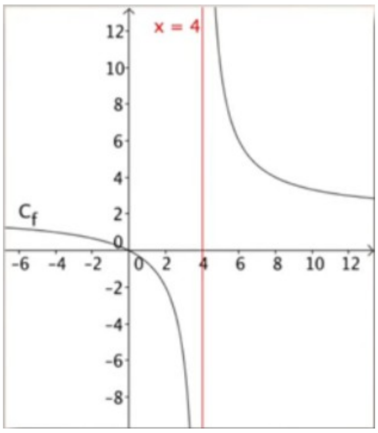


Asymptote oblique

Démontrer qu'une droite est asymptote verticale

Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ par $f(x)=\dfrac{2x}{x-4}$. Démontrer que la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

<u>Méthode graphique :</u>



- La courbe se rapproche de plus en plus de la droite lorsque l'ordonnée tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
- 1er cas : $x>4$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)=+\infty$.
- 2ème cas : $x<4$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x)=-\infty$.
- On peut conclure que la droite $x=4$ est bien asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

<u>Par le calcul :</u>

On pose : $u(x)=2x$ et $v(x)=x-4$. Donc $\lim\limits_{x\to 4} u(x)=8$ et $\lim\limits_{x\to 4} v(x)=0$.

- 1er cas : $x>4 \Leftrightarrow x-4>0$. On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \dfrac{2x}{x-4}=\dfrac{8}{0}=+\infty$.
- 2ème cas : $x<4 \Leftrightarrow x-4<0$. On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \dfrac{2x}{x-4}=\dfrac{8}{0}=-\infty$.

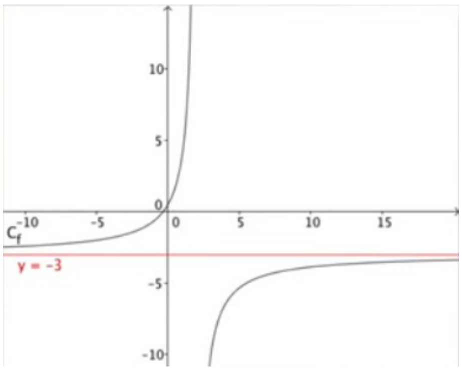
On peut conclure que la droite $x=4$ est bien asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

En général : La droite d'équation $x=A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f si $\lim\limits_{x\to A} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to A} f(x)=-\infty$.

Démontrer qu'une droite est asymptote horizontale

Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{3x+1}{2-x}$. Démontrer que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

<u>Méthode graphique :</u>



- La courbe se rapproche de plus en plus de la droite lorsque l'abscisse tend vers $+\infty$.
- On observe : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$.
- On peut conclure que la droite $y=-3$ est bien asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

<u>Par le calcul :</u>

On calcule : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{-x}=-3$.

On peut conclure que la droite $y=-3$ est bien asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

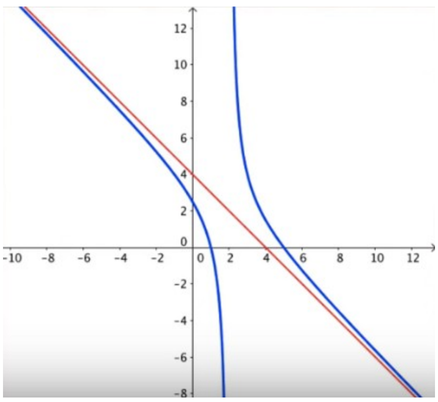
En général :

- La droite d'équation $y=A$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$.
- La droite d'équation $y=A$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$.

Démontrer qu'une droite est asymptote oblique

Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{-x^2+6x-5}{x-2}$. Démontrer que la droite D d'équation $y=-x+4$ est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

<u>Méthode graphique :</u>



- La courbe se rapproche de plus en plus de la droite lorsque l'abscisse et tend vers $+\infty$.
- On observe que la distance de la courbe à la droite tend vers 0 lorsque $x\to+\infty$. On exprime analytiquement cette condition sous la forme :
$$\lim_{x\to+\infty}(f-D)=0 \ .$$
- Le signe de $f-D$ détermine la position de f par rapport à D . f est au-dessus de D pour $x\to+\infty$.

Par le calcul :

- On calcule la distance de la courbe à la droite:

$$f(x)-(-x+4)=\frac{-x^2+6x-5}{x-2}+x-4=\frac{-x^2+6x-5+(x-4)(x-2)}{x-2}=\frac{3}{x-2} \quad .$$

- On calcule la limite :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x-2}=0 \quad .$$

On peut conclure que la droite $y=-x+4$ est bien asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

- On étudie le signe :

$$\frac{3}{x-2}>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>2 \quad .$$

On peut conclure que la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de la droite d'équation $y=-x+4$ en $+\infty$.

En général :

- La droite d'équation $y=ax+b$ est **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.
- La droite d'équation $y=ax+b$ est **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.
- Le signe de $f(x)-(ax+b)$ détermine la position de la courbe par rapport à la droite.