Correction DST TU Mai 2020

Exercice 1 :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x \left(e^x + 1 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right)$

Rappel : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(+\infty + 1 - 0 - 0) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{2x} + e^x - x - 2\right)$

Rappel : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 + 0 + \infty - 2 = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (-x-2)\right] =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{2x} + e^x\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (-x-2)\right] =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{2x} + e^x\right) = 0$

Donc la droite D est asymptote à la courbe C pour $x \to -\infty$

4. Étude de signe de $f(x) - (-x-2)$:

$$e^{2x} + e^{x} > 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}$$

Donc la courbe C est au-dessus de D.

5. $f'(x) = 2e^{2x} + e^{x} - 1$

6. $f'(x) = 2(e^{x} + 1)\left(e^{x} - \frac{1}{2}\right) =$

$$= 2\left(e^{2x} - \frac{1}{2}e^{x} + e^{x} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\left(e^{2x} + \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2e^{2x} + e^{x} - 1$$

7. $2(e^{x} + 1) > 0$

Toujours positif

$e^{x} - \frac{1}{2} > 0$

$e^{x} > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc

x	$-\infty$		$\ln(1/2)$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

8.

x	$-\infty$		$\ln(1/2)$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

$m = f(\ln(1/2)) = e^{2\ln(1/2)} + e^{\ln(1/2)} - \ln(1/2) - 2 =$

$$= e^{\ln(1/4)} + e^{\ln(1/2)} - \ln(1/2) - 2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \ln(2) - 2 =$$

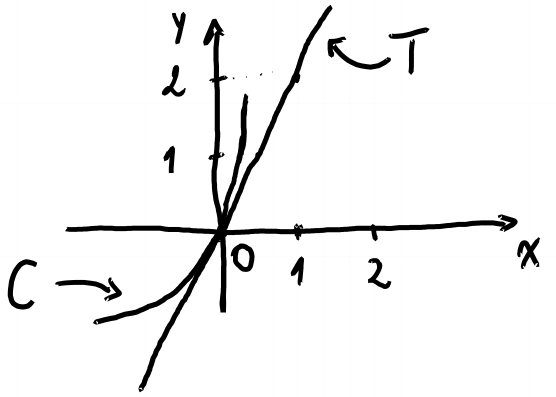
$$= \frac{1+2-8}{4} + \ln(2) = -\frac{5}{4} + \ln(2) \simeq -0{,}557$$

9. $T : \quad y = 2x$

$f(x) - 2x = \frac{5}{2}x^2$ qui est toujours positif

Donc la courbe C est au-dessus de T

10.



Exercice 2 :

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 - 1 - \ln(x) \right)$

Rappel : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 - 1 + \infty = +\infty$

2. La droite d'equation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe C.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$

Rappel : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\left(1 - 0 - 0\right) = +\infty$

4. $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

5. $2x^2 - 1 > 0$ | $x > 0$

$\Delta = 0 - 4 \times 2 \times (-1) = 8$

$x_1 = \frac{-\sqrt{8}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

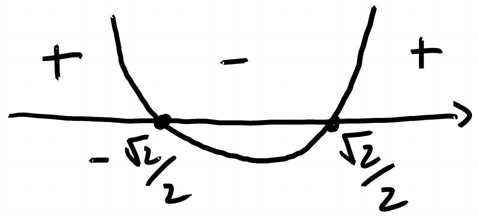


Tableau de variations :

x	0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

$m = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq -0,15$

6. T : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = \dfrac{2-1}{1} = 1 \qquad f(1) = 1 - 1 - 0 = 0$

$\Rightarrow$ T : $y = x - 1$

7. $f(1) = 1 - 1 - 0 = 0$

8. Sur $[0,4 ; 0,6]$:

$f'(x) < 0$, $f(0,4) > 0$ et $f(0,6) < 0$

9. Avec un pas de 0,01 on obtient :

x	0,44	0,45	0,46	0,47
$f(x)$	0,015	0,001	-0,012	-0,024

On en déduit $\alpha \simeq 0,45$

10.