Résoudre une équation où figure la fonction exponentielle

Il existe deux types d'équations dont on connaît la solution :

1) $\boxed{e^x = a \quad \text{avec } a > 0}$, a pour solution $\boxed{x = \ln a}$

2) $\boxed{e^a = e^b}$ équivaut à $\boxed{a = b}$

Dans chaque exercice, l'objectif est de revenir à l'un de ces deux cas.

Ex 1 : $e^{2x} - 3 = 0$

En isolant la fonction exp on revient au cas 1)

$e^{2x} = 3$, avec $3 > 0 \Rightarrow 2x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 3}{2}$

Ex 2 : $e^{2x} = e^{x+1}$

On est dans le cas 2)

$\Rightarrow 2x = x + 1 \Leftrightarrow x = 1$

Ex 3 : $e^{4x} - 2e^{3x} = 0$

Ici, on ne trouve pas le cas 1) ni le cas 2).

On doit factoriser puis résoudre une équation-produit.

On factorise l'exponentielle de degré le plus bas:

$e^{4x} - 2e^{3x} = e^{3x}(e^{x} - 2)$

L'équation devient:

$$e^{3x}(e^{x} - 2) = 0 \rightsquigarrow \text{Équation-produit}$$

Donc

$$\underbrace{e^{3x} = 0}_{\substack{\downarrow \\ \text{impossible,} \\ \text{car la fonction} \\ \text{exp est positive.}}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{e^{x} - 2 = 0}_{\substack{\downarrow \\ \text{On est dans le cas 1)}}}$$

$e^{x} = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2}$

<u>Ex 4:</u> $e^{0,2x} = 2e^{-0,2x}$

Même situation qu'à l'exercice 3.

On doit factoriser:

$e^{0,2x} - 2e^{-0,2x} = 0$

$$e^{-0,2x}\left(e^{0,4x} - 2\right) = 0 \rightsquigarrow \text{Équation-produit}$$

Donc $\underbrace{e^{-0,2x} = 0}_{\substack{\downarrow \\ \text{impossible}}}$ ou $\underbrace{e^{0,4x} - 2 = 0}$

$e^{0,4x} = 2 \Rightarrow 0,4x = \ln 2$

$\Longleftrightarrow \boxed{x = \dfrac{\ln 2}{0,4}}$

Ex 5 : $e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0$

On ne peut pas factoriser l'exp à cause du -3 à la fin.

Dans ce cas, on utilise le changement de variable :

$X = e^{x}$ avec $X > 0$

$X^2 = e^{2x}$

L'équation devient : $X^2 - 2X - 3 = 0$

On détermine X avec la méthode du Δ :

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$

$X_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ $\qquad X_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

On avait imposé : $X = e^{x}$ avec $X > 0$

Donc $X_1 = -1 \rightarrow$ impossible

$X_2 = 3 \rightarrow e^{x} = 3 \Rightarrow \boxed{x = \ln 3}$