Les suites

Une suite est « comme une fonction », la différence est que la variable (le x) est nécessairement un nombre entier naturel noté n .

Calculer les premiers termes d'une suite

On considère les suites suivantes :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 3n^2 - 1$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = 2v_n - 1$$
$$v_0 = 2$$

La suite (u_n) est définie comme une fonction : on peut calculer la valeur de u directement à partir de la valeur de n (par exemple : $u_8 = 3 \times 8^2 - 1 = 191$).

La suite (v_n) est différente car il n'est pas possible de calculer un terme à partir de la valeur de n . Il est nécessaire de connaître la valeur du terme précédent (par exemple : $v_8 = 2 \times v_7 - 1$). On dit que la suite (v_n) est définie par récurrence.

On calcule les premiers termes :

1) $u_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1$

$u_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2$

$u_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11$

$u_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26$

etc...

2) $v_0 = 2$

$v_1 = 2 \times v_0 - 1 = 3$

$v_2 = 2 \times v_1 - 1 = 5$

$v_3 = 2 \times v_2 - 1 = 9$

etc...

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$. Obtenir une représentation graphique des 5 premiers termes. Peut-on conjecturer que la suite (u_n) est croissante ou décroissante ?

a) $u_n = \dfrac{10n}{n+1}$ b) $u_n = 2 + \dfrac{5}{n+1}$ c) $u_n = (-1)^n \times n^2$

Exercice 2 : L'algorithme suivant permet de calculer le terme u_p de rang p de la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$.

Début
Lire p .
u_p prend la valeur $\dfrac{p^2}{p+1}$.
Afficher u_p .
Fin

À partir de cet algorithme, établir un algorithme permettant d'obtenir la liste des 10 premiers termes de la suite (u_n) .

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n-2}{n+2}$.
Donner un algorithme permettant d'obtenir la liste des 15 premiers termes.

Exercice 4 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par son premier terme $u_0 = 20$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1$.

1. Établir un algorithme permettant d'obtenir le terme u_4.
2. Adapter cet algorithme pour obtenir la liste de 10 premiers termes.

Exercice 5 : Les services de la maire d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1200 personnes s'y installent. En 2012, la ville comptait 40000 habitants. On note u_n le nombre d'habitants de la ville en l'année (2012+*n*). On a ainsi $u_0 = 40000$.

1. Calculer le nombre d'habitants de la ville en 2013 et en 2014.
2. On admet que la suite (u_n) est définie par $u_0 = 40000$ et, pour tout entier naturel n, par la relation :
$$u_{n+1} = 0{,}875 u_n + 1200 .$$
On considère l'algorithme suivant :

Début
Variables : u, n.
Initialisation :
u prend la valeur 40000 ;
n prend la valeur 0.
Traitement :
Tant que $u > 10000$:
n prend la valeur $n+1$;
u prend la valeur $0{,}875 \times u + 1200$;
Fin *Tant que*.
Sortie : Afficher n.
Fin

Que permet d'obtenir l'algorithme ?

Reconnaître une suite arithmétique et une suite géométrique

(u_n) suite <u>arithmétique</u> de raison r :	(u_n) suite <u>géométrique</u> de raison q :
$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=q\times u_n$

Exemples :

- $u_0=4$ et $u_{n+1}=u_n+3$: arithmétique de raison $r=3$ et premier terme $u_0=4$.
- $u_0=7$ et $u_{n+1}=3u_n$: géométrique de raison $q=3$ et premier terme $u_0=7$.
- $u_1=-2$ et $u_{n+1}=u_n-5$: arithmétique de raison $r=-5$ et premier terme $u_1=-2$.
- $u_0=-3$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{3}$: géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et premier terme $u_0=-3$.

Démontrer qu'une suite est arithmétique

La suite (u_n) définie par $u_n=7-9n$ est-elle arithmétique ?

(u_n) est suite arithmétique de raison r si $u_{n+1}=u_n+r$.

On peut réécrire cette relation sous la forme : $u_{n+1}-u_n=r$.

Donc, prouver que la suite (u_n) est arithmétique signifie vérifier que la différence $u_{n+1}-u_n$ est une constante.

On calcule alors :

$u_{n+1}-u_n=7-9(n+1)-(7-9n)=7-9n-9-7+9n=-9$.

On peut conclure que (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=-9$.

Démontrer qu'une suite est géométrique

La suite (u_n) définie par $u_n=3\times5^{n+1}$ est-elle géométrique ?

(u_n) suite géométrique de raison q si $u_{n+1}=q\times u_n$.

On peut réécrire cette relation sous la forme : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$.

Donc, prouver que la suite (u_n) est géométrique signifie vérifier que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante.

On calcule alors :

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3\times5^{n+1+1}}{3\times5^{n+1}}=\frac{5^{n+2}}{5^{n+1}}=5^{n+2-(n+1)}=5^{n+2-n-1}=5$.

On peut conclure que (u_n) est une suite géométrique de raison $q=5$.

Déterminer l'expression générale d'une suite arithmétique

Si (u_n) est suite arithmétique de raison r et premier terme u_0 , alors l'<u>expression générale</u> de la suite est : $$u_n = u_0 + nr$$	Si (u_n) est suite arithmétique de raison r et premier terme u_p , alors l'<u>expression générale</u> de la suite est : $$u_n = u_p + (n-p)r$$

Exemple : l'expression générale de la suite arithmétique définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 3$ est :

$$u_n = u_1 + (n-1)r = 5 + (n-1) \times 3 = 5 + 3n - 3 = 2 + 3n \text{ , donc } u_n = 2 + 3n \text{ .}$$

Déterminer l'expression générale d'une suite géométrique

Si (u_n) est suite géométrique de raison q et premier terme u_0 , alors l'<u>expression générale</u> de la suite est : $$u_n = u_0 \times q^n$$	Si (u_n) est suite géométrique de raison q et premier terme u_p , alors l'<u>expression générale</u> de la suite est : $$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple : l'expression générale de la suite géométrique définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n$ est :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 5 \times 2^{n-1} = 5 \times 2^n \times 2^{-1} = 2{,}5 \times 2^n \text{ , donc } u_n = 2{,}5 \times 2^n \text{ .}$$

Exercice 6 : Établir un algorithme permettant d'obtenir la liste des termes de rang 0 à 9 de la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = -8$ et de raison $r = 0{,}5$.

Exercice 7 : Une suite arithmétique (u_n) est telle que $u_2 = 10$ et $u_4 = 42$. Calculer la raison r et le premier terme u_0 .

Exercice 8 : La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1{,}5$ et de raison $r = 3{,}5$.

1. Exprimer le terme général u_n en fonction de n .
2. On considère l'algorithme suivant :

```
Début
    S prend la valeur 0 .
  Pour n allant de 0 à 2 :
      u prend la valeur −1,5+3,5n ;
      S prend la valeur S+u ;
    Afficher S ;
  Fin Pour.
Fin
```

Compléter le tableau suivant en mettant en œuvre à la main l'algorithme donné :

n	u_n	S
0	-1,5	
1		
2		

Que permet d'obtenir l'algorithme ?

Exercice 9 : Établir un algorithme permettant d'obtenir la liste des termes de rang 0 à 8 de la suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0=2$ et de raison $q=1{,}4$.

Exercice 10 : Une suite géométrique (u_n) est telle que $u_0=1{,}04$ et $u_3=11{,}2$. Calculer sa raison q .

Exercice 11 : La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=1{,}5$ et de raison $q=2$.

1. Exprimer le terme général u_n en fonction de n .
2. On considère l'algorithme suivant :

Début
  S prend la valeur 0 .
  Pour n allant de 0 à 2 :
    u prend la valeur $1{,}5\times 2^n$;
    S prend la valeur $S+u$;
   Afficher S ;
  Fin *Pour*.
Fin

Compléter le tableau suivant en mettant en œuvre à la main l'algorithme donné :

n	u_n	S
0	1,5	
1		
2		

Que permet d'obtenir l'algorithme ?

Limite et sens de variation d'une suite arithmétique

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison r et premier terme u_0 : $u_n=u_0+nr$.

La limite de cette suite est : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0+\lim\limits_{n\to+\infty} nr$. On a deux cas :

$r>0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0+\lim\limits_{n\to+\infty} nr=+\infty$	$r<0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0+\lim\limits_{n\to+\infty} nr=-\infty$

On peut conclure que une suite arithmétique est toujours divergeant.

Une suite arithmétique est :

croissante si $u_{n+1}-u_n>0$	décroissante si $u_{n+1}-u_n<0$

Exemple : On considère une suite arithmétique (u_n) de raison $0{,}01$ et premier terme $u_2=4$.

1. Définir (u_n) .

   $u_{n+1}=u_n+0{,}01$ et $u_2=4$.

2. Déterminer l'expression générale de (u_n) .

   $u_n=u_2+(n-2)\times 0{,}01=4+0{,}01n-0{,}02=3{,}98+0{,}01n$.

3. Déterminer le sens de variation.

   $u_{n+1}-u_n=0{,}01 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1}-u_n>0$, donc (u_n) est croissante.

4. Déterminer la limite.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(3{,}98+0{,}01n)=3{,}98+\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}01n=+\infty$.

Limite et sens de variation d'une suite géométrique

On considère la suite arithmétique (u_n) de raison q et premier terme u_0 : $u_n=u_0\times q^n$.

La limite de cette suite est : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0\times\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$. On a quatre cas :

q	$q\leq-1$	$-1<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Exemple : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n=+\infty$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(3^n+2)=+\infty$.

Sens de variation :

	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$u_0>0$	décroissante	constante	croissante
$u_0<0$	croissante	constante	décroissante

Exemple :

1) $u_n=-4\times 2^n$. (u_n) est décroissante car $u_0=-4<0$ et $q=2>1$.

2) $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ et $v_0=-2$. (v_n) est croissante car $v_0=-2<0$ et $0<q=\frac{1}{2}<1$.

Déterminer l'expression générale d'une suite arithmético-géométrique

On considère la suite arithmético-géométrique (u_n) définie par :

$$u_{n+1}=1{,}03u_n+300 \quad \text{et} \quad u_0=5000 \quad .$$

On donne la suite (v_n) définie par : $v_n=u_n+10000$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   Le premier terme de la suite est : $v_0=u_0+10000=5000+10000=15000$.

   La suite (v_n) est une suite géométrique de raison q si $v_{n+1}=q\times v_n$.
   On cherche alors le terme v_{n+1} :

   $v_{n+1}=u_{n+1}+10000=1{,}03u_n+300+10000=1{,}03u_n+10300$.

   Attention ! Voici la partie un peu délicate de la démonstration !

   Il va falloir factoriser cette expression :

   $v_{n+1}=1{,}03u_n+10300=1{,}03\left(u_n+\dfrac{10300}{1{,}03}\right)=1{,}03(u_n+10000)=1{,}03v_n$.

   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q=1{,}03$ et premier terme $v_0=15000$.

2. Déterminer l'expression générale de (v_n) et (u_n) .

   Si (v_n) est suite géométrique de raison q et premier terme v_0 , alors l'expression générale de la suite est : $v_n=v_0\times q^n$.

   Donc : $v_n=15000\times 1{,}03^n$.

   En utilisant la définition de (v_n) , on peut écrire : $u_n=v_n-10000$.

   On peut conclure : $u_n=15000\times 1{,}03^n-10000$.

Exercice 12 : *(BTS OL 2019)*

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose d'antibiotique par voie intraveineuse. L'intervalle de temps entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, arrondi à la dizaine de minutes, soit 3 h 30. Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration d'antibiotique de 20 µg.L^{-1}.
On modélise la concentration de l'antibiotique, exprimée en µg.L^{-1}, immédiatement après la n-ième injection par la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 20 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à 1, } u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 20.$$

1° Quelle est la concentration plasmatique de l'antibiotique immédiatement après la deuxième injection ?

2° On pose, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $v_n = u_n - 40$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) On fournit les formules suivantes.

Suite géométrique de raison q	Terme général
$v_{n+1} = q \times v_n$	$v_n = v_0 \times q^n$ ou $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, u_n peut s'écrire :

$$u_n = 40 - 40 \times 0{,}5^n.$$

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

3° On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique immédiatement après une injection dépasse 38 µg.L^{-1}. L'objectif de cette question est de déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cette valeur.

a) On donne l'algorithme incomplet suivant :

```
n ← 1
u ← …
Tant que …
        n ← n + 1
        u ← …
Fin de Tant que
```

Remarque : dans cet algorithme n ← 1 *signifie que n prend la valeur 1.*

Recopier et compléter l'algorithme pour que la variable n en fin d'algorithme contienne le nombre minimal cherché.

b) Déterminer, en expliquant votre démarche, le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

Exercice 13 : *(BTS OL 2018)*

Un des magasins de l'entreprise « Beauzyeux » a constaté la progression suivante pour la vente d'un nouveau modèle de lentilles de couleur.
Le premier mois, 150 clients achètent les nouvelles lentilles de couleur. Chaque mois suivant, 5 % des anciens clients ne les rachètent pas alors que quatre nouveaux clients achètent ces lentilles.
On modélise le nombre de clients chaque mois par la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 150$;

$u_{n+1} = 0{,}95\ u_n + 4$, pour tout entier naturel n,

où n représente le rang du mois en prenant $n = 0$ pour le premier mois.
Ainsi, u_0 désigne le nombre de clients le premier mois et le nombre de clients du mois de rang n est estimé par l'arrondi à l'unité de u_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 80$.

1° Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2° a) En déduire une expression de v_n en fonction de n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 70 \times 0{,}95^n + 80$.

3° On considère l'algorithme suivant.

```
s ← 0
Pour n allant de 0 à 23
|   u ← 70 × 0,95^n + 80
|   s ← s + u
Fin Pour
```

Remarque : dans cet algorithme s ← 0 signifie que la valeur 0 est affectée à la variable s.

En sortie de cet algorithme, la valeur arrondie à l'unité de la variable s est 2 911. Que représente ce nombre dans le contexte ?

4° Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $70 \times 0{,}95^n + 80 \leq 100$. Interpréter la réponse dans le contexte.

Exercice 14 : *(BTS OL 2016)*

Pour augmenter sa part de marché, la direction de cette entreprise décide de lancer une campagne de communication.
En janvier 2014, l'entreprise compte 120 clients.
On modélise l'évolution du nombre de clients de l'entreprise chaque mois à partir de janvier 2014 à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 120$;

$u_{n+1} = 0{,}98\ u_n + 6$, pour tout entier naturel n,

où n représente le rang du mois en prenant $n = 0$ pour janvier 2014.
Ainsi, u_0 désigne le nombre de clients en janvier 2014.
Le nombre de clients au mois de rang n est estimé par l'arrondi à l'unité de u_n.

1° À l'aide de ce modèle, estimer le nombre de clients en mars 2014.

2° *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est correcte. Indiquer sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification.*
La réponse correcte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On souhaite réaliser un algorithme qui affiche en sortie le rang du premier mois, s'il existe, où le nombre de clients dépasse 150.
Quel est, parmi les algorithmes proposés, celui qui réalise cet objectif ?

algorithme 1	algorithme 2

Début
Variables : u, n
Initialisation
  u prend la valeur 120
  n prend la valeur 0
Traitement
  Tant que u ≤ 150
    u prend la valeur 0,98 × u + 6
  Fin Tant que
Sortie : afficher n
Fin
	Début
	Variables : u, n
	Initialisation
	  u prend la valeur 120
	  n prend la valeur 0
	Traitement
	  Tant que u ≥ 150
	    u prend la valeur 0,98 × u + 6
	  Fin Tant que
	Sortie : afficher n
	Fin

algorithme 3	algorithme 4

Début
Variables : u, n
Initialisation
  u prend la valeur 120
  n prend la valeur 0
Traitement
  Tant que u ≤ 150
    n prend la valeur n + 1
    u prend la valeur 0,98 × u + 6
  Fin Tant que
Sortie : afficher n
Fin
	Début
	Variables : u, n
	Initialisation
	  u prend la valeur 120
	  n prend la valeur 0
	Traitement
	  Tant que u ≥ 150
	    n prend la valeur n + 1
	    u prend la valeur 0,98 × u + 6
	  Fin Tant que
	Sortie : afficher n
	Fin

3° Pour tout entier naturel n, on pose :

$$v_n = 300 - u_n.$$

On a donc $v_0 = 300 - u_0 = 180$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98.
Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 300 - 180 \times 0{,}98^{\,n}.$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter, dans le contexte, le résultat obtenu.