Comment résoudre une équation ou une inéquation où figure la fonction logarithme ou la fonction exponentielle ?

On utilise :

– les résultats concernant « Équations et Inéquations » rappelés dans le Mémento page 302 ;

– les règles de calcul relatives à la fonction logarithme et à la fonction exponentielle rappelées dans le Mémento page 303 ;

– les propriétés du tableau suivant :

• l'équation $\ln x = a$ a pour solution : $x = e^a$. • $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$. • $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.	• l'équation $e^x = a$, avec $a > 0$, a pour solution : $x = \ln a$. • $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$. • $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Exemple 1. Résoudre l'équation $e^{-0,5x+1} - 2 = 0$.

L'équation s'écrit : $e^{-0,5x+1} = 2$.

En prenant le logarithme népérien de chaque membre, on obtient : $-0,5x + 1 = \ln 2$,

d'où, successivement : $-0,5x = \ln 2 - 1$; $x = \dfrac{\ln 2 - 1}{-0,5} = 2(1 - \ln 2)$.

L'équation proposée admet une solution : $\boldsymbol{x = 2(1 - \ln 2)}$ ***;*** $\boldsymbol{x \approx 0,61}$.

Exemple 2. Résoudre l'inéquation $2\ln(x + 4) > \ln(2 - x)$

On doit avoir $x + 4 > 0$ et $2 - x > 0$ soit $\boldsymbol{-4 < x < 2}$.

On écrit : $\ln(x + 4)^2 > \ln(2 - x)$ d'où $(x + 4)^2 > 2 - x$

c'est-à-dire : $x^2 + 8x + 16 > 2 - x$ d'où $x^2 + 9x + 14 > 0$.

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + 9x + 14 = 0$ a pour solutions : $x_1 = -7$; $x_2 = -2$.

Dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 9x + 14 > 0$ pour x tel que $x < -7$ ou $x > -2$.

On doit avoir $-4 < x < 2$, donc l'inéquation proposée a pour solutions ***les réels x tels que*** $\boldsymbol{-2 < x < 2}$.

Exemple 3. Résoudre l'équation $e^x - 10 = -3e^{2x}$.

L'équation s'écrit : $3e^{2x} + e^x - 10 = 0$ soit $3(e^x)^2 + e^x - 10 = 0$.

En posant $X = e^x$, on obtient l'équation du second degré $3X^2 + X - 10 = 0$.

Cette équation a pour solutions dans $\mathbb{R}$: $X_1 = -2$ et $X_2 = \dfrac{5}{3}$.

Il faut alors résoudre les équations d'inconnue x : $e^x = -2$; $e^x = \dfrac{5}{3}$.

– L'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution, car $e^x > 0$.

– L'équation $e^x = \dfrac{5}{3}$ a pour solution : $x = \ln \dfrac{5}{3}$.

Donc l'équation proposée a une seule solution : $\boldsymbol{x = \ln \dfrac{5}{3}}$ ***;*** $\boldsymbol{x \approx 0,51}$.