

Fonction exponentielle

Définition

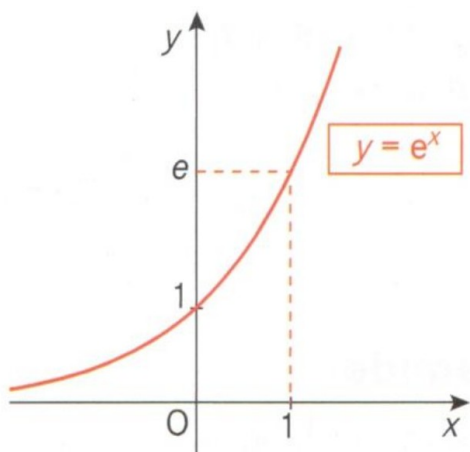
On appelle fonction exponentielle l'unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1.$$

On note cette fonction e^x .

Conséquence : $(e^x)' = e^x$ et $e^0 = 1$.

Courbe représentative



- La fonction exponentielle est strictement croissante.
- L'ensemble de définition est \mathbb{R} .
- L'ensemble des images est $]0, +\infty[$ ($e^x > 0$).
- L'image de 0 est $e^0 = 1$.
- L'image de 1 est $e^1 = e$ avec $e \approx 2,71828$.
- Si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x) = e^x$		+		
$f(x) = e^x$				

Propriétés

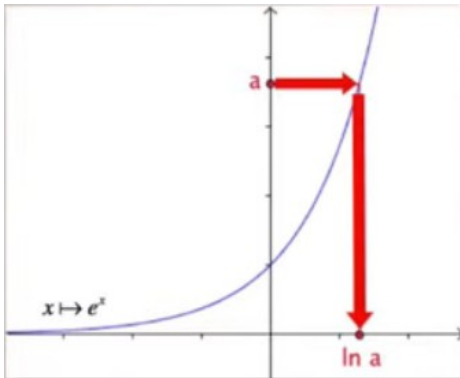
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^x > 0$; $(e^x)' = e^x$.

Pour a et b réels quelconques :

- $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $(e^a)^n = e^{an}$.
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$.

Fonction logarithme népérien

Définition

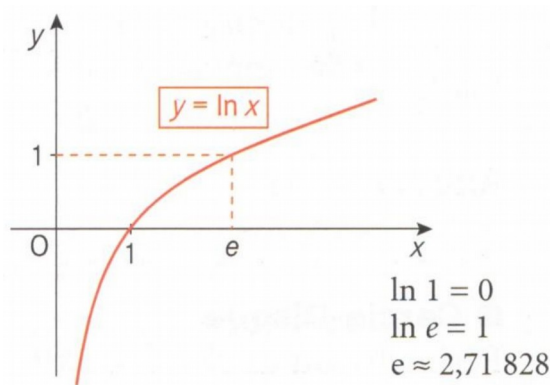


- On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a , l'unique solution de l'équation $e^x = a$.
- On la note $x = \ln a$.
- La fonction logarithme népérien est la fonction :

$$\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \ln x$$

Courbe représentative



- La fonction logarithme népérien est strictement croissante et définie uniquement sur les réels strictement positifs ($x > 0$).
- L'image de 1 est $\ln 1 = 0$.
- L'image de e est $\ln e = 1$.
- Pour $x > 0$, si $f(x) = \ln x$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Tableau de variations

x	0	1	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+	
$f(x) = \ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Propriétés

Pour tout $a > 0$ et $b > 0$:

- $\ln ab = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^n = n \ln a$; $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.
- $e^x = a$ équivaut à $x = \ln a$.
- Pour tout x , $\ln(e^x) = x$. Pour tout x strictement positifs, $e^{\ln x} = x$.

Comment résoudre une équation ou une inéquation où figure la fonction logarithme ou la fonction exponentielle ?

<ul style="list-style-type: none">• l'équation $\ln x = a$ a pour solution : $x = e^a$.• $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$.• $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.	<ul style="list-style-type: none">• l'équation $e^x = a$, avec $a > 0$, a pour solution : $x = \ln a$.• $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.• $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.
---	--

Exemple 1 : Résoudre l'équation $e^{-0,5x+1}-2=0$.

$$e^{-0,5x+1}=2 \Leftrightarrow -0,5x+1=\ln 2 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 2-1}{-0,5}=2(1-\ln 2) \text{ .}$$

L'ensemble des solutions est $S=\{2(1-\ln 2)\}$.

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation $2\ln(x+4)>\ln(2-x)$.

Ensemble de définition : $x+4>0$ et $2-x>0$ soit $-4<x<2$ donc $D=]-4;2[$.

$$\ln(x+4)^2>\ln(2-x) \Leftrightarrow (x+4)^2>2-x \Leftrightarrow x^2+9x+14>0 \Leftrightarrow x<-7 \text{ ou } x>-2 \text{ .}$$

On doit avoir $x \in D$, donc l'ensemble des solutions est $S=]-2;2[$.

Exemple 3 : Résoudre l'équation $e^x-10=-3e^{2x}$.

$$3e^{2x}+e^x-10=0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2+e^x-10=0 \text{ .}$$

Changement de variable : $X=e^x$, on obtient l'équation $3X^2+X-10=0$.

Cette équation a pour solutions : $X_1=-2$ et $X_2=\frac{5}{3}$.

Il faut alors résoudre les équations d'inconnue x :

- $e^x=-2$ n'a pas de solution, car $e^x>0$.
- $e^x=\frac{5}{3}$ a pour solution $x=\ln\frac{5}{3}$.

L'ensemble des solutions est $S=\{\ln\frac{5}{3}\}$.

Ex 1 : Simplifier les expressions suivantes.

$$\ln 3 + \ln \frac{1}{3} \quad ; \quad \ln e^3 + \ln e \quad ; \quad e^{-\ln 2} \quad ; \quad \ln \sqrt{e^5} \quad ; \quad e^{\ln 5 - \ln 3} \quad ; \quad \ln e^3 + e^{\ln 3} \quad .$$

Ex 2 : Résoudre les équations proposées.

1. $\ln x + 2 = 0 \quad ; \quad \ln(x+1) - 3 = 0 \quad .$
2. $\ln(x+2) = \ln(2x+1) \quad ; \quad 2 \ln x + \ln 3 = 0 \quad .$
3. $\ln x + 2 = 0 \quad .$
4. $e^{2x} - 3 = 0 \quad ; \quad e^{2x} = e^{x+1} \quad .$
5. $e^{4x} - 2e^{3x} = 0 \quad ; \quad e^{0,2x} = 2e^{-0,2x} \quad .$
6. $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \quad ; \quad e^{2x} - 2e^x + 2 = 0 \quad .$

Ex 3 : Résoudre les inéquations proposées.

1. $\ln(x+1) < 0 \quad ; \quad \ln(2-x) > \ln 3 \quad .$
2. $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0 \quad .$
3. $3 - 2e^{0,5x} > 0 \quad .$
4. $e^x(e^x - 2) > 0 \quad .$
5. $e^{2x} - 4e^x < 0 \quad .$
6. $1 - e^{0,5x-1} < 0 \quad .$
7. Étudier sur \mathbb{R} le signe de $(e^x + 1)(e^x - 3)$.