Comment résoudre à la main une équation différentielle du premier ordre ?

Pour résoudre l'équation (1) $ay' + by = c(x)$:

1. On écrit l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre associée :

$$(2) \quad ay' + by = 0.$$

Ce sont les fonctions définies par $y_0(x) = ke^{-\frac{b}{a}x}$ (k réel quelconque).

2. On recherche une fonction f solution de l'équation (1) $ay' + by = c(x)$.

Dans les cas usuels :

– soit l'énoncé propose une fonction solution ; il suffit de vérifier ;

– soit l'énoncé fournit des indications ; on suit ces indications.

3. On écrit l'ensemble des solutions de l'équation (1), ce sont les fonctions définies par :

$$y(x) = ke^{-\frac{b}{a}x} + f(x) \text{ ; } k \text{ réel quelconque.}$$

Exemple

Résoudre l'équation (1) $3y' + 2y = 4x$.

On vérifiera que la fonction $f : x \mapsto 2x - 3$ est une solution de l'équation (1).

__1.__ L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre associée (2) $3y' + 2y = 0$, est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_0(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} \text{ avec } k \text{ réel quelconque.}$$

__2.__ On vérifie que la fonction f proposée est bien une solution de l'équation (1).

Si $f(x) = 2x - 3$ alors $f'(x) = 2$,

ainsi $3f'(x) + 2f(x) = 3 \times 2 + 2(2x - 3)$,

soit $3f'(x) + 2f(x) = 4x$.

La fonction f est bien une solution de l'équation (1).

__3.__ L'ensemble des solutions de l'équation (1) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3 \text{ ; } k \text{ réel quelconque.}$$

Comment déterminer à la main la fonction solution d'une équation différentielle du premier ordre vérifiant une condition initiale donnée ?

Pour déterminer, à la main, la fonction g solution de l'équation (1) $ay' + by = c(x)$, qui vérifie une condition initiale donnée :

1. On détermine l'ensemble des solutions de l'équation (1) (voir fiche méthode 14).

L'expression de ces solutions est de la forme $y(x) = ke^{-\frac{b}{a}x} + f(x)$.

Cette expression fait apparaître une constante réelle k.

2. On traduit la condition initiale donnée par une équation d'inconnue k ; on résout cette équation.

3. On écrit l'expression de la fonction g solution.

***Exemple.** Déterminer la fonction g solution de l'équation (1) $3y' + 2y = 4x$, qui vérifie la condition $g(0) = 0$.*

***1.** On écrit l'expression des solutions de l'équation (1) (voir fiche méthode 14) :*

$$y(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3.$$

***2.** $g(x)$ est de la forme $g(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3$.*

$g(0) = 0$ s'écrit $ke^{-\frac{2}{3}\times 0} + 2 \times 0 - 3 = 0$, soit, puisque $e^0 = 1$, $k - 3 = 0$, donc $k = 3$.

***3.** La fonction g solution de l'équation $3y' + 2y = 4x$ telle que $g(0) = 0$ est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3e^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3$.*