Primitives d'une fonction

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f. Pour tout nombre réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

• Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + C$ où C désigne un nombre réel arbitraire.

Exercices :

1 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4$; $f(x) = x^2 + 4x$.

b) $F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}x^2$; $f(x) = 2e^x + x$.

c) $F(x) = e^{-2x} + 3e^x + 5$; $f(x) = 3e^x - 2e^{-2x}$.

2 Dans chacun des cas suivants, indiquer en justifiant la réponse si la fonction F est une primitive sur l'intervalle I de la fonction f.

a) $I = \mathbb{R}$; $F(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 5x + 2$;
$f(x) = -4x^2 + 8x - 5$.

b) $I =]0 ; +\infty[$; $F(x) = 3\ln x + 5x^2 + 4$;
$f(x) = \frac{3}{x} + 10x$.

c) $I = \mathbb{R}$; $F(x) = 3e^{-2x} + 5e^x$;
$f(x) = e^{-2x} + 5e^x$.

d) $I =]0 ; +\infty[$; $F(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$;

$f(x) = -\frac{2}{x^3} + 3\ln x$.

Correction :

Ex 1 :

a) $F'(x) = x^2 + 4x = f(x)$

b) $F'(x) = 2e^x + x = f(x)$

c) $F'(x) = -2e^{-2x} + 3e^x = f(x)$

Ex 2 : F est primitive de f si $F' = f$:

a) $F'(x) = -4x^2 + 8x - 5 = f(x)$
donc oui.

b) $F'(x) = \frac{3}{x} + 10x = f(x)$
donc oui.

c) $F'(x) = -6e^{-2x} + 5e^x$
donc non.

d) $F'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}$

donc non.

Les résultats à connaître

F et G sont des primitives respectives de f et g sur un intervalle I ; k est un nombre réel. Alors, $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I et kF est une primitive de kf sur I.

Fonction f	Primitives F
$f(x) = a$; a réel	$F(x) = ax + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$	$F(x) = \ln x + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = x^n$ (n entier relatif ; $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Fonction f	Primitives F
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$

Fonction f	Primitives F
$f(x) = (u(x))^n \times u'(x)$ (n entier relatif ; $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ $(u(x) > 0)$	$F(x) = \ln(u(x)) + C$
$f(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$	$F(x) = e^{u(x)} + C$

Exemple 1. Déterminer les primitives de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 4x - 3e^x$.

• L'écriture de $f(x)$ fait intervenir uniquement la somme et le produit par un nombre de fonctions données dans les tableaux page 241.

• On lit dans les tableaux :

Fonctions	x^3	x	e^x
Primitives	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^2}{2}$	e^x

• En multipliant par les nombres convenables, on obtient :

Fonctions	$2x^3$	$4x$	$-3e^x$
Primitives	$2\frac{x^4}{4}$	$4\frac{x^2}{2}$	$-3e^x$

• Par addition, on obtient donc une primitive F de f : $F(x) = \frac{x^4}{2} + 2x^2 - 3e^x$; donc les primitives de f sont les fonctions G définies sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{G(x) = \frac{x^4}{2} + 2x^2 - 3e^x + C}$.

Exemple 2. Déterminer les primitives de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{3x}$.

• On pense à écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ke^{u(x)} \times u'(x)$ avec k réel.

On pose $u(x) = 3x$ d'où $u'(x) = 3$.

$e^{u(x)} \times u'(x) = e^{3x} \times 3$; on écrit alors $f(x) = 5 \times \frac{1}{3} \times e^{3x} \times 3$.

Ainsi $f(x) = \frac{5}{3}e^{u(x)} \times u'(x)$ d'où une primitive F de f : $F(x) = \frac{5}{3}e^{u(x)} = \frac{5}{3}e^{3x}$.

• Primitives de f : les fonctions G définies sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{G(x) = \frac{5}{3}e^{3x} + C}$.

Exemple 3. Déterminer les primitives de f définie sur [0 ; + ∞[par $f(x) = \frac{3}{2x+1}$.

• On pense à écrire f(x) sous la forme $f(x) = k\,\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec k réel.

On pose $u(x) = 2x + 1$ d'où $u'(x) = 2$.

$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{2x+1}$; on écrit alors $f(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x+1}$.

Ainsi, $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$; sur [0 ; + ∞[on a $u(x) > 0$;

d'où une primitive F de f : $F(x) = \frac{3}{2}\ln(u(x)) = \frac{3}{2}\ln(2x+1)$.

Primitives de f : les fonctions G définies sur [0 ; + ∞[par $\mathbf{G(x) = \frac{3}{2}\ln(2x+1) + C}$.

Exercices :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

3 $I = \mathbb{R}$.
$f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = -2x^3 + 4x - 5$.

4 R $I = \mathbb{R}$.
$f(x) = 4e^x - 2x$; $g(x) = 3x^2 + 5e^x$.

5 $I =]0 ; +\infty[$.
$f(x) = \frac{1}{x} + 3x$; $g(x) = x^2 - \frac{2}{x^2}$.

6 R $I =]0 ; +\infty[$.
$f(x) = 3x^2 - \frac{4}{x^2}$; $g(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}$.

7 R $I =]0 ; +\infty[$.
$f(t) = t + \frac{2}{t}$; $g(t) = 3e^t + \frac{5}{t}$.

9 R $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2e^{2x}$.

10 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = e^{-x}$.

11 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2e^{3x+1}$.

12 R $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x + 4e^{-3x}$.

13 C $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2x(e^{x^2})$.

14 $I =]2 ; +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

15 $I =]-1 ; +\infty[$; $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

16 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x(x^2+1)^3$.

17 $I =]2 ; +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Correction :

Ex 3 : $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + C$ $\qquad$ $G(x) = -\frac{x^4}{2} + 2x^2 - 5x + C$

Ex 4 : $F(x) = 4e^x - x^2 + C$ $\qquad$ $G(x) = x^3 + 5e^x + C$