

Comment déterminer à la main la fonction solution d'une équation différentielle du premier ordre vérifiant une condition initiale donnée ?

Pour déterminer, à la main, la fonction g solution de l'équation (1) $ay' + by = c(x)$, qui vérifie une condition initiale donnée :

1. On détermine l'ensemble des solutions de l'équation (1) (voir fiche méthode 14).

L'expression de ces solutions est de la forme $y(x) = ke^{-\frac{b}{a}x} + f(x)$. Cette expression fait apparaître une constante réelle k .

2. On traduit la condition initiale donnée par une équation d'inconnue k ; on résout cette équation.

3. On écrit l'expression de la fonction g solution.

Exemple. Déterminer la fonction g solution de l'équation (1) $3y' + 2y = 4x$, qui vérifie la condition $g(0) = 0$.

1. On écrit l'expression des solutions de l'équation (1) (voir fiche méthode 14) :

$$y(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3.$$

2. $g(x)$ est de la forme $g(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3$.

$g(0) = 0$ s'écrit $ke^{-\frac{2}{3} \times 0} + 2 \times 0 - 3 = 0$, soit, puisque $e^0 = 1$, $k - 3 = 0$, donc $k = 3$.

3. La fonction g solution de l'équation $3y' + 2y = 4x$ telle que $g(0) = 0$ est donc la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3e^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3$.