Pour les exercices 1 et 2, résoudre les équations.

1 **C** $2y' + 3y = 0$; $y' + 2y = 0$.

2 $4y' + 5y = 0$; $2y' - 3y = 0$.

Pour chacun des exercices 3 à 5, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation proposée, puis résoudre l'équation.

3 $y' + 2y = 6$; $f(x) = 3$.

4 **C** $y' - y = x$; $f(x) = -x - 1$.

5 $2y' + y = e^x$; $f(x) = \frac{1}{3}e^x$.

6 On considère l'équation différentielle $y' + 3y = 5$.

1. Déterminer le réel a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a$ soit une solution de l'équation différentielle.

2. Résoudre l'équation.

Pour les exercices 7 et 8, déterminer la fonction f solution vérifiant la condition initiale donnée.

7 **C** $y' - 2y = 0$; $f(0) = 2$.

8 $y' + y = 0$; $f(-1) = 3$.

9 **R** On considère l'équation $5y' - y = x$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto -x - 5$ est une solution.

2. Déterminer la fonction g solution telle que $g(0) = 1$.

Ex 10

Première partie. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 2x - e^{-2x} \qquad \text{(E)}$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 0 \qquad \text{(E')}$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x - \frac{1}{2} - xe^{-2x}.$$

Démontrer que la fonction g est une solution de l'équation (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

TD Eq. diff. Correction

Ex 1

$2y' + 3y = 0 \quad \rightarrow \quad y_H = K e^{-\frac{3}{2}x}$

$y' + 2y = 0 \quad \rightarrow \quad y_H = K e^{-2x}$

Ex 2

$4y' + 5y = 0 \quad \rightarrow \quad y_H = K e^{-\frac{5}{4}x}$

$2y' - 3y = 0 \quad \rightarrow \quad y_H = K e^{\frac{3}{2}x}$

Ex 3

$y' + 2y = 6 \quad ; \quad f(x) = 3 \rightarrow$ solution

$f' + 2f = 6 \qquad f' = 0$

$0 + 2 \times 3 = 6$

$6 = 6 \rightarrow$ Vrai $\Rightarrow f$ est solution

$y_H = K e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad y_E = y_H + f = K e^{-2x} + 3$

Ex 4

$y' - y = x \qquad f(x) = -x - 1$

$f' - f = x \qquad f' = -1$

$-1 - (-x - 1) = x$

$-1 + x + 1 = x$

$x = x \rightarrow$ Vrai

$y_H = K e^{x} \quad \Rightarrow \quad y_E = y_H + f = K e^{x} - x - 1$

Ex 5

$2y' + y = e^x \qquad f(x) = \frac{1}{3} e^x$

$2f' + f = e^x \qquad f' = \frac{1}{3} e^x$

$2 \frac{1}{3} e^x + \frac{1}{3} e^x = e^x$

$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) e^x = e^x$

$e^x = e^x \rightarrow$ Vrai

$y_H = Ke^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow y_E = Ke^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3} e^x$

Ex 6

$y' + 3y = 5$

1) $f(x) = a$ soit une solution

$\Rightarrow f' + 3f = 5 \qquad f' = 0$

$0 + 3a = 5$

$a = \frac{5}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{3}$

2) $y_H = Ke^{-3x} \Rightarrow y_E = Ke^{-3x} + \frac{5}{3}$

Ex 7

$y' - 2y = 0$; $f(0) = 2$ avec f solution.

$f' - 2f = 0 \Rightarrow f = y_H \Rightarrow f = Ke^{2x}$

$f(0) = Ke^{2\times 0} = K$ et $f(0) = 2$

$\Rightarrow K = 2 \Rightarrow f(x) = 2e^{2x}$

Ex 8

$y' + y = 0$; $f(-1) = 3$ avec f solution.

$f' + f = 0 \Rightarrow f = y_H \Rightarrow f = Ke^{-x}$

$f(-1) = Ke^{-(-1)} = Ke$ et $f(-1) = 3$

$\Rightarrow Ke = 3$

$K = \frac{3}{e} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{e}e^{-x} = 3e^{-x-1}$

Ex 9

$5y' - y = x$

1) $x \longrightarrow -x-5 \Rightarrow f(x) = -x-5$ est solution

$\Rightarrow 5f' - f = x$ $\quad f' = -1$

$5 \times (-1) - (-x-5) = x$

$-5 + x + 5 = x$

$x = x \rightarrow$ Vrai

2) g est solution de $5y' - y = x \Rightarrow g = y_E$

$y_E = y_H + f$ avec $y_H = Ke^{\frac{1}{5}x}$ et $f = -x-5$

$\Rightarrow g(x) = Ke^{\frac{1}{5}x} - x - 5$ et $g(0) = 1$

$g(0) = Ke^{\frac{1}{5}\times 0} - 0 - 5 = K - 5$

$\Rightarrow K - 5 = 1 \Rightarrow K = 6$

$\Rightarrow g(x) = 6e^{\frac{1}{5}x} - x - 5$

Ex 10

$$y' + 2y = 2x - e^{-2x} \qquad (E)$$

1) $y' + 2y = 0 \rightarrow y_H = K e^{-2x}$

2) $g(x) = x - \frac{1}{2} - x e^{-2x}$ est solution de (E)

$\Rightarrow g' + 2g = 2x - e^{-2x}$

Calcul de g' :

$$g' = 1 - \underbrace{\left(e^{-2x} - x\, 2e^{-2x}\right)} = 1 - e^{-2x} + 2x e^{-2x}$$

$(uv)' = uv' + u'v$

$u = x \qquad v = e^{-2x}$

$u' = 1 \qquad v' = -2e^{-2x}$

$\Rightarrow \quad 1 - e^{-2x} + 2x e^{-2x} + 2\left(x - \frac{1}{2} - x e^{-2x}\right) = 2x - e^{-2x}$

$$\cancel{1} - e^{-2x} + \cancel{2x e^{-2x}} + 2x - \cancel{1} - \cancel{2x e^{-2x}} = 2x - e^{-2x}$$

$$2x - e^{-2x} = 2x - e^{-2x} \rightarrow \underline{\text{Vrai}}$$

3) $y_E = y_H + g = K e^{-2x} + x - \frac{1}{2} - x e^{-2x}$

4) f est solution de $(E) \Rightarrow f(x) = y_E$

$f(x) = K e^{-2x} + x - \frac{1}{2} - x e^{-2x}$ et $f(0) = 0$

$f(0) = K - \frac{1}{2} \Rightarrow K - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} + x - \frac{1}{2} - x e^{-2x}$$