Ex 5

$$y' + y = 2x e^{-x} \qquad (E)$$

1. $g(x) = a x^2 e^{-x}$ est solution de (E) si

$$g' + g = 2x e^{-x} \qquad (*)$$

$g(x) = uv$ avec $u = ax^2$ $\quad v = e^{-x}$

$u' = 2ax$ $\quad v' = -e^{-x}$

$$g'(x) = u'v + uv' = 2ax\, e^{-x} + ax^2 \left(-e^{-x}\right) =$$

$$= 2ax e^{-x} - ax^2 e^{-x}$$

$(*)$ $\quad 2ax e^{-x} - \cancel{ax^2} e^{-x} + a\cancel{x^2} e^{-x} = 2x e^{-x}$

$$2ax e^{-x} = 2x e^{-x}$$

Donc $\quad a = 1$

2. Les solutions de (E_0) sont :

$$y_0(x) = K e^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

3. Les solutions de (E) sont :

$$y_E(x) = K e^{-x} + x^2 e^{-x}$$

4. $f(x)$ est solution de (E) donc :

$$f(x) = Ke^{-x} + x^2 e^{-x}$$

$$f(-1) = 2e \Rightarrow Ke^{-(-1)} + (-1)^2 e^{-(-1)} = 2e$$

$$Ke + e = 2e$$

$$\cancel{e}(K+1) = 2\cancel{e}$$

$$K + 1 = 2$$

$$K = 1$$

Donc $f(x) = e^{-x} + x^2 e^{-x} = e^{-x}(1 + x^2)$