6 Loi normale

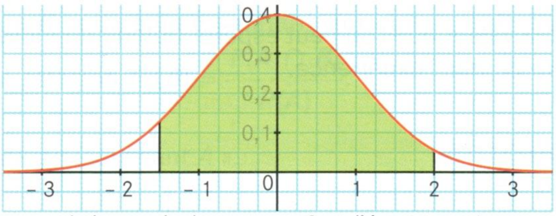
1. Définition

Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ, on note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Pour tout réel a, b on a : $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple :
La loi normale centrée réduite est la loi $\mathcal{N}(0, 1)$; sa fonction de densité est : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$;
sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



Loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1

avec le logiciel Sine Qua Non on obtient : $P(-1{,}5 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}910442$.

Remarque : comme pour la loi uniforme, on a pour tout réel t, $P(X = t) = 0$
et donc $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$.

2. Propriété de la loi normale

1. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.
L'aire comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses vaut 1.

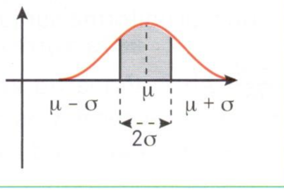
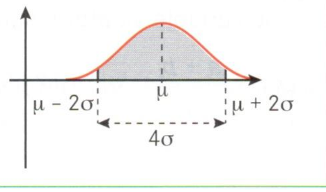
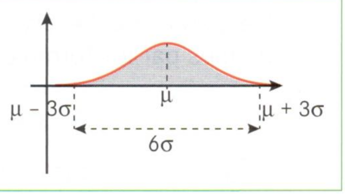
2. Si une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ, alors pour tout b de $\mathbb{R}$: $P(X \leqslant b) = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

3. $P(X \geqslant \mu) = P(X \leqslant \mu) = 0{,}5$.

3. Propriété

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors la variable aléatoire $T = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

4. Intervalles de fluctuations d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}68$	$p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}95$	$p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$
		

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, sa dispersion autour de μ dépend de σ de la façon suivante.
Ces valeurs remarquables sont à connaître.

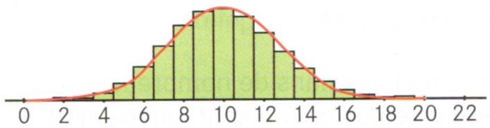
5. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

Lorsque le paramètre n est grand et que p n'est ni trop proche de zéro, ni trop proche de 1, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p, par la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où :

$$\mu = np \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Exemple :

Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(40 ; 0{,}25)$, la représentation graphique de la répartition des probabilités est :



La loi de X peut-être approchée par la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\mu = 40 \times 0{,}25 = 10$ et $\sigma = \sqrt{40 \times 0{,}25 \times 0{,}75} \approx 2{,}7386$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

▶ Fiche l'Essentiel

52 **C** **1.** Une étude statistique a permis d'estimer que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la clientèle d'un certain supermarché effectue un achat au rayon crémerie est 0,45.

On observe 100 clients pris au hasard dans ce supermarché. On suppose que ces clients font leurs achats en toute indépendance. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de ces personnes qui achètent un article au rayon crémerie.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer l'espérance mathématique de X, puis la valeur arrondie à l'entier le plus proche de l'écart type de X.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par la loi normale $\mathcal{N}(45 ; 25)$.
Utiliser cette approximation pour :

a) calculer la probabilité qu'au moins 50 des 100 clients observés effectuent un achat au rayon crémerie, c'est-à-dire calculer la probabilité de l'événement « $X \geqslant 49{,}5$ » ;

b) calculer la probabilité de l'événement suivant : « parmi les 100 clients observés, le nombre de ceux qui effectuent un achat au rayon crémerie est strictement compris entre 30 et 60 », c'est-à-dire encore, calculer la probabilité de l'événement « $30{,}5 \leqslant X \leqslant 59{,}5$ ».

53 Dans une entreprise, un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de gestion a été suivi par 25 % du personnel. Ainsi, la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans l'entreprise ait suivi ce stage est $p = 0{,}25$.

On choisit au hasard n personnes de cette entreprise. On suppose l'effectif suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

1. Dans cette question, $n = 10$.

On note X la variable aléatoire qui, à tout ensemble de 10 personnes ainsi choisies, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Indiquer les paramètres de cette loi.

b) Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité des événements suivants :

E_1 : « Parmi 10 personnes choisies au hasard, exactement 2 personnes ont suivi le stage » ;

E_2 : « Parmi 10 personnes choisies au hasard, au plus une personne a suivi le stage ».

2. Dans cette question, $n = 500$. On note Y la variable aléatoire qui, à tout ensemble de 500 personnes ainsi choisies, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0{,}25$.

a) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.

En donner une interprétation.

Déterminer une valeur approchée, arrondie à 10^{-1} près, de l'écart type de la variable aléatoire Y.

b) On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 125 et d'écart type 9,7.

On note Z une variable aléatoire suivant cette loi.

En utilisant cette approximation, calculer la probabilité qu'au plus 120 personnes, parmi les 500 choisies au hasard, aient suivi le stage, c'est-à-dire $P(Z \leqslant 120{,}5)$. Donner ce résultat à 10^{-2} près.

54 On lance un dé non truqué, la partie est gagnée si on obtient un 5 ou un 6. On joue 50 parties de suite.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Partie A. Loi binomiale

On considère la variable aléatoire X qui associe le nombre de parties gagnées au cours d'une suite de 50 parties.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité de l'évènement E : « on gagne 15 parties ».

3. Calculer la probabilité de l'évènement F : « on gagne 15, ou 16, ou 17 parties ».

Partie B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne $m = \dfrac{50}{3}$ et d'écart type $\sigma = \dfrac{10}{3}$.

On note Y une variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifier le choix des valeurs de m et de σ.

2. Justifier que $P(Y \geqslant 17{,}5)$ est une approximation de la probabilité de l'évènement : « le nombre de parties gagnées est au moins égal à 18 ».

3. Donner une valeur numérique de $P(Y \geqslant 17{,}5)$ arrondie à 10^{-2}.

4. En déduire une valeur approchée de la probabilité de l'évènement : « le nombre de parties gagnées est compris entre 15 et 17 ».