Les identités remarquables

L'égalité $\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$ est la **première identité remarquable**.

Exemple : $(7x+1)^2=(7x)^2+2\times7x\times1+1^2=49x^2+14x+1$

L'égalité $\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$ est la **deuxième identité remarquable**.

Exemple : $(3x-4)^2=(3x)^2-2\times3x\times4+4^2=9x^2-24x+16$

L'égalité $\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$ est la **troisième identité remarquable**.

Exemple : $(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$

Exercice 1
Quelle est la forme développée de $(x+1)^2$?
Exercice 2
Quelle est la forme développée de $(x-7)^2$?
Exercice 3
Quelle est la forme développée de $(3x-4)(3x+4)$?
Exercice 4
Quelle est la forme développée de $(5x+2)^2$?
Exercice 5
Quelle est la forme développée de $\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{5}x\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{2}{5}x\right)$?
Exercice 6
Développe puis réduis l'expression $(x-2)^2-(2x+2)(2x-2)$.
Exercice 7
Quelle est la forme factorisée de l'expression $100-x^2$?
Exercice 8
Quelle est la forme factorisée de $2-x^2$?
Exercice 9
Factorise l'expression $(x+7)^2-(3x-2)^2$.
Exercice 10
Développe $(n+1)^2-n^2$.
Exercice 11
Factorise l'expression $1-81x^2+1-9x+(1-9x)^2$.
Exercice 12
En utilisant une identité remarquable, écris la forme factorisée de x^2+4x+4.
Exercice 13
Quelle est la forme factorisée de x^2-4 ?
Exercice 14
Quelle est la forme factorisée de $(1+2x)(1-4x)+1-4x^2$?
Exercice 15
Quelle est la forme factorisée de $4x^2-9-(4x-9)(2x+3)$?

Les équations du 1er degré

Méthode de résolution

- **1. On passe les termes contenant des "x" à gauche du = et les termes formés de nombres à droite du =.** Lorsqu'on change un terme de côté, on change son signe (le signe qui est devant lui). Par exemple, 4x+5=13+2x devient 4x-2x=13-5.
- **2. On réduit** les expressions littérales obtenues. 4x-2x=13-5 devient 2x=8.
- **3. On divise les deux côtés par le nombre qui est devant "x"** , y compris s'il est négatif. Pour notre exemple, on obtient x=8÷2 donc x=4. Si on avait eu -7x=14, on aurait calculé x=14÷**(-7)**.

Exercice 1
-4 est-il solution de l'équation $x^2+x+20=0$?

Exercice 2
Quelle est la solution de l'équation 3x-7=11?

Exercice 3
Quelle est la solution de l'équation -3x+36=96?

Exercice 4
Quelle est la solution de l'équation -3x+27=6x-18?

Exercice 5
Si ax+b=c alors : x= ?

Exercice 6
Si -nx+t=-y alors x= ?

Exercice 7
Quelle est la solution de l'équation $\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}=\frac{3}{4}x+\frac{1}{3}$?

Exercice 8
Quelle est la solution de l'équation $\frac{1+2x}{3}=\frac{4+5x}{6}$?

Exercice 9
Quelle est la solution de l'équation 6-5x(2x-4)=2x(-5x-2)+3?

Exercice 10
Quelle est la solution de l'équation (x+1)(x-4)=(x-2)(x-3)?

Exercice 11
Écrire la solution de l'équation 5(2x-4)-3(x-2)=x sous la forme d'une fraction irréductible $x=\frac{a}{b}$.

Exercice 12
Résoudre l'équation $7(6x-5)-4(3x-2)^2=1-(6x)^2$ puis écris le résultat sous la forme d'une fraction irréductible $x=\frac{a}{b}$.

L'équation-produit

Si un produit est nul, alors au moins un de ses facteurs est nul.

Pour résoudre $(2x+4)(3x-9)=0$ on doit donc chercher les solutions des équations $2x+4=0$ et $3x-9=0$.

On obtient deux solutions : $x=-2$ et $x=3$.

<u>Exemples</u> :

- Résolution de l'équation $2x^2=-3x$
  1. $2x^2+3x=0$.
  2. $x(2x+3)=0$.
  3. $x=0$ ou $2x+3=0$, donc $x=0$ ou $x=-1,5$. On écrit $S=\{-1,5;0\}$.

- Résolution de l'équation $x^2=9$
  1. $x^2-9=0$.
  2. $x^2-3^2=0$ donc $(x+3)(x-3)=0$
  3. $x+3=0$ ou $x-3=0$, donc $x=-3$ ou $x=3$. On écrit $S=\{-3;3\}$.

- Résolution de l'équation $(x+4)(2x-5)-(x+4)(x+1)=0$
  1. $(x+4)[(2x-5)-(x+1)]=0$.
  2. $(x+4)(x-6)=0$
  3. $x+4=0$ ou $x-6=0$, donc $x=-4$ ou $x=6$. On écrit $S=\{-4;6\}$.

Exercice 1
Factoriser l'expression $2(x+1)-x(x+1)$ puis résoudre l'équation $2(x+1)-x(x+1)=0$.
Exercice 2
Factoriser l'expression $(x+1)^2-9$ puis résoudre l'équation $(x+1)^2-9=0$.
Exercice 3
Factoriser l'expression $(2x+4)^2-(x+1)^2$ puis résoudre l'équation $(2x+4)^2-(x+1)^2=0$.
Exercice 4
Quelles sont les solutions de l'équation $x^2=64$?
Exercice 5
Quelles sont les solutions de l'équation $9x^2=64$?
Écrire les résultats sous la forme de fractions.
Exercice 6
Quelles sont les solutions de l'équation $x^2=-5x$?
Exercice 7
Quelles sont les solutions de l'équation $x^2+x+1=1$?
Exercice 8
Quelles sont les solutions de l'équation $(x+5)^2=10x+29$?
Exercice 9
Quelles sont les solutions de l'équation $(x+9)^2=(3x+3)(x+9)$?
Exercice 10
Quelles sont les solutions de l'équation $(x+1)^2=4(3x+3)$?
Exercice 11
Quelles sont les solutions de l'équation $(4x+5)^2=(6x+8)^2$?
Écrire les solutions sous la forme de fractions.

Les inéquations du 1^er^ degré

Par exemple, 2x-8<10 est une inéquation : il faut trouver **tous les nombres** x pour lesquels 2x-8 est plus petit que 10. 1 et 7 sont des exemples de solutions, mais il y en a beaucoup d'autres.

Méthode

Une inéquation se résout comme une équation, mais à la dernière étape, **si le nombre devant x est négatif** (et que l'on doit donc diviser par un nombre négatif) **il faut changer le sens de l'inégalité** : < devient >, et > devient <. En effet, on a par exemple 20 qui est plus petit que 30, donc 20<30, mais si on divise 20 et 30 par le nombre négatif -10, on obtient -2 et -3, et -2>-3. On observe un changement dans le sens de l'inégalité.

<u>Exemple</u>

Résolution de l'inéquation $3x-6\leq 6x-12$.

$3x-6\leq 6x-12$

1. $3x-6x\leq -12+6$ On passe les "x" à gauche et les nombres à droite.
2. $-3x\leq -6 \quad \Rightarrow$ On réduit les expressions obtenues.
3. $x\geq (-6)\div(-3)$ On divise par le nombre qui est devant "x".
4. $x\geq 2$ On obtient les solutions.

On écrit l'ensemble des solutions : $\boxed{S=[2;+\infty[}$

Exercice 1
Comment peut-on écrire l'ensemble des nombres x tels que x≤2?

Exercice 2
Quelles sont les solutions de l'inéquation 5x+15<25?

Exercice 3
Quelles sont les solutions de l'inéquation 2x+6<4x-2?

Exercice 4
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}>\frac{1}{2}x-1$?

Exercice 5
Quelles sont les solutions de l'inéquation 2(6-3x)>-1-x?

Exercice 6
Quelles sont les solutions de l'inéquation (x-2)(x+5)<(x-3)(x-2)?

Exercice 7
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(x+5)^2-(x-2)(x+2)>1$?

Exercice 8
Résous l'inéquation $(5-5x)^2>(1+5x)^2$ puis écris les solutions sous la forme $x<\frac{a}{b}$, avec $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible. Combien trouves-tu pour a et b ?

Inéquations et tableaux de signes

Résolution de l'inéquation (2x-2)(4x+16)>0.

Méthode

- **1. On étudie le signe** de 2x-2 en fonction de x et celui de 4x+16 en fonction de x.
  Pour cela, on cherche les valeurs de x pour lesquelles ces expressions sont positives.

$2x-2>0$	$4x+16>0$
$2x>2$	$4x>-16$
$x>1$	$x>-4$

  Donc 2x-2>0 lorsque x>1 et 4x+16>0 lorsque x>-4.

- **2. On dessine** un tableau comme ci-dessous en faisant apparaître les valeurs pour lesquelles les expressions 2x-2 et 4x+16 sont égales à zéro (-4 et 1).

valeurs de x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
signe de 2 x - 2							
signe de 4 x + 16							
signe de (2x-2)(4x+16)							

- **3. On complète les premières lignes** en inscrivant des "-" si l'expression est négative pour les valeurs de x qui figurent au-dessus, des "+" le cas échéant, et un zéro sur la barre verticale correspondant à la valeur qui annule l'expression.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
signe de 2 x - 2		$-$		$-$	0	$+$	
signe de 4 x + 16		$-$	0	$+$		$+$	
signe de (2x-2)(4x+16)							

- **4. On remplit la dernière ligne** en effectuant sur chaque colonne le produit des signes des deux expressions en respectant les règles des signes pour un produit.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
signe de 2 x - 2		$-$		$-$	0	$+$	
signe de 4 x + 16		$-$	0	$+$		$+$	
signe de (2x-2)(4x+16)		$+$	0	$-$	0	$+$	

- **5. On lit les solutions** en regardant la première et la dernière ligne du tableau.
  On cherchait les solutions de (2x-2)(4x+16)>0.
  (2x-2)(4x+16)>0 (+) lorsque x est strictement plus petit que -4 et lorsque x est strictement plus grand que 1.
  Les solutions sont donc : $\boxed{S=\,]-\infty;-4[\,\cup\,]1;+\infty[}$

Le cas des quotient

On utilise la même méthode que pour les produits, mais à l'étape 4, on place une double barre sur la dernière ligne pour les valeurs de x pour lesquelles il y a une division par zéro. Comme une division par zéro est impossible, il faudra retirer ces valeurs de l'ensemble des solutions.

<u>Exemple</u> :

$$\frac{3x-9}{x+5} \leq 0$$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
signe de 3 x - 9		$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de x + 5		$-$	0	$+$	|	$+$	
signe du quotient		$+$	||	$-$	0	$+$	

$S =]-5;3]$

Et avec encore plus de lignes !

Dernier exemple avec la résolution de l'inéquation $\frac{(-2x-2)(2x-10)}{-9x-81} \geq 0$

On utilise toujours la même méthode.

$$-2x-2>0 \qquad 2x-10>0 \qquad -9x-81>0$$

$$-2x>2 \qquad 2x>10 \qquad -9x>81$$

$$\frac{-2x}{-2}<\frac{2}{-2} \qquad \frac{2x}{2}>\frac{10}{2} \qquad \frac{-9x}{-9}<\frac{81}{-9}$$

$$x<-1 \qquad x>5 \qquad x<-9$$

x	$-\infty$		-9		-1		5		$+\infty$
- 2 x - 2		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
2 x - 10		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
- 9 x - 81		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$\frac{(-2x-2)(2x-10)}{-9x-81}$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-9;-1] \cup [5;+\infty[$

Exercice 1
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(x-2)(x+4) \geq 0$?
Exercice 2
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(x+4)(5-x)(-x+6) \geq 0$?
Exercice 3
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} > 2$?
Exercice 4
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{(x-1)(x-5)}{16-8x} \geq 0$?
Exercice 5
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{x^2-7}{x} \geq 0$?
Exercice 6
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(x-7)(x+1)+(x-7)(x-1) \geq 0$?
Exercice 7
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(x+2)^2-(x+2)(2x+9) \geq 0$?
Exercice 8
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2+x} \geq 0$?
Exercice 9
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(3x-2)^2+2(3x-2) \leq x^2$?
Exercice 10
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{x^2+4x+4}{x^2-9} \leq 0$?

Équations du deuxième degré

Méthode de résolution

Pour résoudre une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ on utilisera la méthode suivante :

1. On calcule le nombre delta : $\mathbf{\Delta=b^2-4ac}$.
2. On regarde le signe de delta.
- Si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution.

- Si $\Delta=0$, l'équation possède une solution que l'on calcule avec la formule $\boxed{x=-\frac{b}{2a}}$.
- Si $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions que l'on calcule avec les formules

$\boxed{x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.

<u>Exemple</u> :

Pour l'équation $-2x^2+3x+4=0$:

1. On calcule delta. $\Delta=3^2-4\times(-2)\times4=9+32=41$.
2. Delta est positif.

3. Il y a deux solutions : $x_1=\frac{-3-\sqrt{41}}{-4}\simeq2{,}35$ et $x_2=\frac{-3+\sqrt{41}}{-4}\simeq-0{,}85$.

Exercice 1
Pour connaître le nombre de solutions d'une équation du deuxième degré on doit calculer delta.
Quelle est la formule de delta?

Exercice 2
On souhaite calculer delta pour connaître le nombre de solutions de l'équation $2x^2-x-5=0$.
Quels sont les nombres a, b et c que l'on doit utiliser?

Exercice 3
Résoudre les équations suivantes :

- $2x^2-x-5=0$
- $-x^2-x+1=0$
- $x^2+4x+4=0$
- $x^2=x+1$
- $x^2-7x+2=0$