Ex 1 : Développer les expressions suivantes

$A = (2x+3)^2 \qquad B = (5-2x)^2 \qquad C = (x+4)(x-4)$

Correction :

$A = (2x)^2 + 2(2x)(3) + (3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

$B = (5)^2 - 2(5)(2x) + (2x)^2 = 25 - 20x + 4x^2$

$C = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$

Ex 2 : Factoriser les expressions suivantes

$D = 4(2x-1)(x-1) - 3x(x-1)$

$E = 2(x+2)(x^2-9) + 2(x+3)(x+2)(x-2)$

$F = x^2 - 4 - (x-2)(4-3x)$

Correction :

$D = (x-1)[4(2x-1) - 3x] = (x-1)(8x-4-3x) =$

$= (x-1)(5x-4)$

$E = 2(x+2)(x+3)(x-3) + 2(x+3)(x+2)(x-2) =$

$= 2(x+2)(x+3)[(x-3)+(x-2)] =$

$= 2(x+2)(x+3)(x-3+x-2) =$

$= 2(x+2)(x+3)(2x-5)$

$F = (x+2)(x-2) - (x-2)(4-3x) =$

$= (x-2)\left[(x+2)-(4-3x)\right] =$

$= (x-2)(x+2-4+3x) = (x-2)(4x-2) =$

$= 2(x-2)(2x-1)$

<u>Ex 3</u> : Résoudre les équations suivantes

1. $5x - 4 = 2(x-1)$

2. $5x^2 - 4x = 0$ 3. $x^2 - 3x = 0$

4. $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{3}x$ 5. $x^2 - 4 = 0$ 6. $x^2 + 4 = 0$

7. $2x^2 + 3x - 20 = 0$ 8. $-9x + x^2 = 22$

9. $2x^4 - 12x^2 + 16 = 0$

Correction :

1. $5x - 4 = 2x - 2 \iff 5x - 2x = -2 + 4$

$\iff 3x = 2 \iff x = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

2. $5x^2 - 4x = 0$

1^{er} méthode : Factorisation

$5x^2 - 4x = 0 \iff x(5x-4) = 0 \rightarrow$ Équation produit

$x = 0$ ou $5x - 4 = 0$

$x = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow S = \left\{0 ; \frac{4}{5}\right\}$

$2^{ème}$ méthode : Équation 2^{nd} degré $ax^2+bx+c=0$

$5x^2-4x=0 \quad a=5 \quad b=-4 \quad c=0$

$\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4(5)(0) = 16$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 solutions

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{16}}{2(5)} = \frac{4-4}{10} = 0$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+\sqrt{16}}{2(5)} = \frac{4+4}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow S = \left\{0 ; \frac{4}{5}\right\}$$

3. $x(x-3)=0 \rightarrow$ Éq. produit

$x=0$ ou $x-3=0$

$x=3 \quad \Rightarrow S=\{0;3\}$

4. $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)=0 \rightarrow$ Éq. produit

$x=0$ ou $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=0$

$x=\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$$

5. $x^2-4=0$

1^{er} méthode : Factorisation

$x^2-4=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)=0 \rightarrow$ Éq. produit

$x+2=0$ ou $x-2=0$

$x=-2 \quad x=2 \quad \Rightarrow S=\{-2;2\}$

2ème méthode : Éq. 2nd degré

$x^2 - 4 = 0 \qquad a = 1 \quad b = 0 \quad c = -4$

$\Delta = 0^2 - 4(1)(-4) = 16 > 0 \rightarrow$ 2 solutions

$x_1 = \dfrac{-0 - \sqrt{16}}{2(1)} = \dfrac{-4}{2} = -2$

$x_2 = \dfrac{-0 + \sqrt{16}}{2(1)} = \dfrac{4}{2} = 2$

$\Rightarrow \quad S = \{-2 ; 2\}$

6. $x^2 + 4 = 0$

1er méthode :

Je remarque que x^2+4 est strictement positif pour toutes valeurs de x.

Il est donc impossible que x^2+4 soit nul.

L'équation $x^2+4=0$ n'a pas de solution.

$\Rightarrow \quad S = \emptyset$

2ème méthode : Éq. 2nd degré

$x^2 + 4 = 0 \qquad a = 1 \quad b = 0 \quad c = 4$

$\Delta = 0^2 - 4(1)(4) = -16$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ pas de solution $\Rightarrow S = \emptyset$

7. $2x^2 + 3x - 20 = 0 \rightarrow$ Éq. 2nd degré

$a = 2 \quad b = 3 \quad c = -20$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-20) = 9 + 160 = 169$

$$x_1 = \frac{-3-13}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

$$x_2 = \frac{-3+13}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{-4 ; \frac{5}{2}\right\}$$

8. $-9x + x^2 = 22 \iff x^2 - 9x - 22 = 0 \rightarrow$ Éq. 2nd degré

$a = 1 \quad b = -9 \quad c = -22$

$\Delta = (-9)^2 - 4(1)(-22) = 169$

$$x_1 = \frac{9-13}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{9+13}{2} = \frac{22}{2} = 11 \quad \Rightarrow \quad S = \{-2 ; 11\}$$

9. $2x^4 - 12x^2 + 16 = 0$

Changement de variable :

$$X = x^2 \Rightarrow X^2 = x^4 \text{ et } X \geq 0$$

L'équation devient :

$2X^2 - 12X + 16 = 0 \rightarrow$ Éq. 2nd degré pour X

$a = 2 \quad b = -12 \quad c = 16$

$\Delta = (-12)^2 - 4(2)(16) = 144 - 128 = 16$

$X_1 = \frac{12-4}{4} = \frac{8}{4} = 2 \qquad X_2 = \frac{12+4}{4} = \frac{16}{4} = 4$

On cherche les valeurs de x :

$$\left.\begin{array}{ll} x^2 = 2 \iff & x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 = 4 \iff & x = \pm 2 \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{-2\,;\,-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;\,2\}$$

<u>Ex 4</u> : Résoudre les inéquations suivantes

1. $(3x-1)(x-2) > 0$
2. $(2x-1)(3-x) < 0$
3. $(x-5)(2-3x) \leq 0$
4. $(2-3x)(4x+1) \geq 2$
5. $4x + 18 + x^2 \leq 0$ 6. $2x - x^2 - \frac{3}{4} \geq 0$
7. $4x - x^2 > 0$ 8. $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$
9. $x^2 + 5x + 7 \leq 0$
10. $(2-x)(1-4x^2) > 0$
11. $(x^2-3x-4)(x^2-25) < 0$
12. $\frac{2-4x}{x^2+x+2} \geq 0$ 13. $\frac{x^2-4x-5}{(1-x)(-2x+3)^2} > 0$
14. $\frac{2}{x^2+1} - 1 > 0$ 15. $\frac{x}{x+2} < 5$

Correction

1. $(3x-1)(x-2)>0$

Tableau de signe pour $3x-1$:

$3x-1>0 \iff x>\frac{1}{3} \Rightarrow$

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	

Tableau de signe pour $x-2$:

$x-2>0 \iff x>2 \Rightarrow$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Tableau de signe pour $(3x-1)(x-2)$:

x	$-\infty$		$1/3$		2		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0		$+$		
$x-2$			$-$		0	$+$	
$(3x-1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Je cherche $(3x-1)(x-2)>0$ donc :

$$S = \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[\cup \left]2 ; +\infty\right[$$

Tableau de signe pour $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		opposé signe(a)	0	signe(a)	

2. $(2x-1)(3-x) < 0$

$2x-1>0 \iff x>\frac{1}{2}$ | $3-x>0 \iff -x>-3 \iff x<3$

x	$-\infty$		$1/2$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$			
$3-x$				$+$	0	$-$	
$(2x-1)(3-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Je cherche $(2x-1)(3-x)<0$ donc

$$S =]-\infty\,;\,\frac{1}{2}[\ \cup\ ]3\,;\,+\infty[$$

3. $(x-5)(2-3x) \leq 0$

$x-5>0 \iff x>5$ | $2-3x>0 \iff -3x>-2 \iff x<\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$2/3$		5		$+\infty$
$x-5$				$-$	0	$+$	
$2-3x$		$+$	0		$-$		
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S =]-\infty\,;\,\frac{2}{3}]\ \cup\ [5\,;\,+\infty[$$

4. $(2-3x)(4x+1) \geqslant 2$

$8x + 2 - 12x^2 - 3x \geqslant 2$

$-12x^2 + 5x + 2 - 2 \geqslant 0$

$-12x^2 + 5x \geqslant 0$

$x(-12x + 5) \geqslant 0$

$x > 0$ | $-12x + 5 > 0 \iff -12x > -5 \iff x < \frac{5}{12}$

x	$-\infty$		0		$5/12$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$			
$-12x+5$				$+$	0	$-$	
Pr		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S = \left[0 ; \frac{5}{12}\right]$$

5. $4x + 18 + x^2 \leq 0$

$x^2 + 4x + 18 \leq 0 \qquad a = 1 \qquad b = 4 \qquad c = 18$

Tableau de signe pour $ax^2 + bx + c$:

<table>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>signe(a)</td><td>0</td><td>opposé signe(a)</td><td>0</td><td>signe(a)</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>signe(a)</td><td>0</td><td>signe(a)</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>signe(a)</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>