La variable aléatoire F qui, à tout échantillon aléatoire prélevé avec remise et de taille n, associe la proportion du caractère considéré dans l'échantillon suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}\left(p\ ;\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$.

La proportion f dans un échantillon peut être encadrée avec une probabilité de 95 %. Cet intervalle I est appelé **intervalle de fluctuation** asymptotique au seuil de 95 %.

$$I = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

Plus généralement, si l'on fixe un seuil $1 - \alpha$, alors :

L'intervalle $I = \left[p - u_\alpha\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + u_\alpha\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$, u_α étant l'unique réel tel que $P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$ où Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, est l'intervalle de fluctuation de f au seuil $1 - \alpha$.

$P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$ équivaut à $P(Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ et on obtient u_α avec une calculatrice.

Valeurs courantes :

- si $\alpha = 0{,}01$; $1 - \alpha = 0{,}99$; $u_\alpha = 2{,}58$;
- si $\alpha = 0{,}05$; $1 - \alpha = 0{,}95$; $u_\alpha = 1{,}96$
- si $\alpha = 0{,}1$; $1 - \alpha = 0{,}9$; $u_\alpha = 1{,}645$.

Remarque : on peut aussi déterminer l'intervalle de fluctuation d'une proportion au seuil $1 - \alpha$ avec une calculatrice ou un logiciel en cherchant les réels a et b tels que :

$$P(a \leqslant F \leqslant b) = 1 - \alpha.$$

2. Intervalle de fluctuation d'une moyenne

Dans une population d'effectif N de moyenne m et d'écart type σ, la variable aléatoire $\overline{X}$ qui, à tout échantillon de taille n prélevé avec remise, associe la moyenne de cet échantillon suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}\left(m\ ;\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

Remarque : dans la plupart des cas où la population a un grand effectif, on assimile un tirage sans remise à un tirage avec remise.

La moyenne m_e du caractère dans un échantillon peut être encadrée avec une probabilité $1 - \alpha$.