Correction DST Math Oct 2019 TOP2

Exercice 1 :

Partie 1

1. $\boxed{y_H = Ke^{-t}}$ (Rappel: $ay'+by=0 \Rightarrow y = Ke^{-\frac{b}{a}x}$)

2. $g = ate^{-t}$ (⚠ $g = uv$ $u = at$ $v = e^{-t}$)

g doit être une solution de (E) : $g' + g = 2e^{-t}$

Calcul de g' : $g' = ae^{-t} - ate^{-t}$ (⚠ $g' = u'v + uv'$)

On obtien alors:

$$\underbrace{ae^{-t} - ate^{-t}}_{g'} + \underbrace{ate^{-t}}_{g} = 2e^{-t}$$

$$\Rightarrow ae^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow g = 2te^{-t}$$

3. $y_E = y_H + g = Ke^{-t} + 2te^{-t}$

$$\Rightarrow \boxed{y_E = e^{-t}(2t + K)}$$

4. f est solution de $(E) \Rightarrow f$ a la même forme de y_E :

$$f(t) = e^{-t}(2t + K)$$

f vérifie $f(0{,}025) = 0$:

$$f(0{,}025) = e^{-0{,}025}(2 \times 0{,}025 + K)$$

$$\Rightarrow e^{-0{,}025}(2 \times 0{,}025 + K) = 0 \Rightarrow K = -0{,}05$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = (2t - 0{,}05)e^{-t}}$$

Partie 2

1. $f(t) = (2t - 0{,}05)e^{-t}$ (⚠ $f = uv$ $u = 2t - 0{,}05$ $v = e^{-t}$)

$f'(t) = u'v + uv'$ $u' = 2$ $v' = -e^{-t}$

$f'(t) = 2e^{-t} - (2t - 0{,}05)e^{-t} = e^{-t}(2{,}05 - 2t)$

2. $f' > 0 \Rightarrow e^{-t}(2{,}05 - 2t) > 0$

$e^{-t} > 0$ e^{-t} est toujours positif	$2{,}05 - 2t > 0$ $-2t > -2{,}05$ $2t < 2{,}05$ $t < 1{,}025$

t	$0{,}025$		$1{,}025$		$+\infty$
signe de f'		+	0	−	
variations de f		↗		↘	

3. La fonction f a un maximum quand $t = 1{,}025$

$\Rightarrow f(1{,}025) = (2 \times 1{,}025 - 0{,}05)e^{-1{,}025}$

$\Rightarrow \boxed{f(1{,}025) = 0{,}718}$

4. $F(t) = (-2t - 1{,}95)e^{-t}$ est une primitive de f si $F' = f$.

$F = uv$ $u = -2t - 1{,}95$ $v = e^{-t} \Rightarrow F' = u'v + uv'$ $u' = -2$ $v' = -e^{-t}$

$F' = -2e^{-t} - (-2t - 1{,}95)e^{-t} = e^{-t}(2t - 0{,}05) \Rightarrow \boxed{F' = f}$

$\Rightarrow F$ est une primitive de f

5. Le taux d'alcool moyen est

$$\frac{1}{4-2}\int_2^4 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[F(4) - F(2)\right] = 0{,}312.$$

Exercice 2 :

1. 60 % des propiétaires habitent une maison individuelle.
C'est à dire : 60 % de propiétaires ne habitent pas un appartement.

$\Rightarrow \boxed{P_P(\bar{A}) = 0,6}$

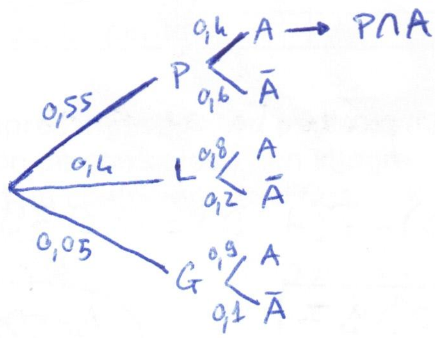
80 % des locataires habitent un appartement

$\Rightarrow \boxed{P_L(A) = 0,8}$

10 % des occupants à titre gratuit habitent un maison individuelle. C'est à dire : 10 % des occupants à titre gratuit ne habitent pas un appartement.

$\Rightarrow \boxed{P_G(\bar{A}) = 0,1}$

2. << la famille est propietaire <u>et</u> habite un appartement >> : $P \cap A$



$\boxed{P(P \cap A) = 0,55 \times 0,4 = 0,22}$

$\left[\begin{array}{l} P(P) = 0,55 \\ P_P(A) = 0,4 \end{array} \right]$

3. En utilisant l'arbre :

$$P(A) = 0,55 \times 0,4 + 0,4 \times 0,8 + 0,05 \times 0,9 = 0,585$$

$$[= P(P) \times P_P(A) + P(L) \times P_L(A) + P(G) \times P_G(A)]$$

4. $P_A(P) = \dfrac{P(P \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,22}{0,585} \simeq 0,376$

$\boxed{P_A(P) = 0,376}$

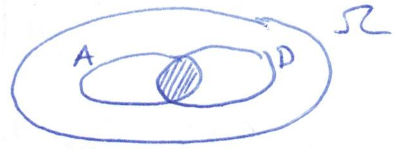
Exercice 3 :

1. A et D sont indépendants.

$A \cap D$: « une étiquette présente les deux défauts »

$$P(A \cap D) = P(A) \times P(D) = 0{,}01 \times 0{,}03 = 0{,}0003$$

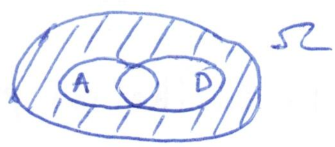
$$\boxed{P(A \cap D) = 3 \times 10^{-4}}$$



2. $\overline{A \cup D}$: « une étiquette ne présente aucun des deux défauts »

$$P(\overline{A \cup D}) = 1 - P(A \cup D) =$$
$$= 1 - [P(A) + P(D) - P(A \cap D)] =$$
$$= 1 - [0{,}01 + 0{,}03 - 0{,}0003] = 0{,}9603$$

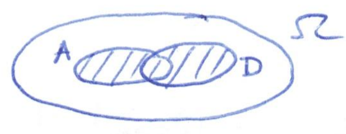
$$P(\overline{A \cup D}) = 0{,}9603$$



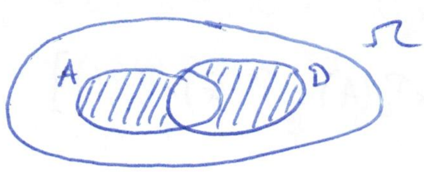
3. $A \cup D$: « une étiquette présente au moins un défaut »

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = 0{,}0397$$

$$\boxed{P(A \cup D) = 0{,}0397}$$



4.



$\Rightarrow P(A \cup D) - P(A \cap D)$

$\Rightarrow \boxed{P(A \cup D) - P(A \cap D) = 0{,}0394}$

Classe : TOP 2
Date : Octobre 2019

DST Mathématiques

Durée: 1 H 45

Présentation et orthographe seront pris en compte dans le barème de notation.
Les calculatrices graphiques sont autorisées pour ce sujet.

EXERCICE 1 10 points/20

Dans une entreprise, lors d'une intervention sur la sécurité routière, on s'intéresse au taux d'alcool dans le sang. Dans cet exercice, ce taux sera utilisé sans précision de l'unité.

Partie 1 : Résolution d'une équation différentielle (5p)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=2e^{-t}$ où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle [0,025 ; +∞ [, et y' la fonction dérivée de la fonction y.

1p 1. Déterminer les solutions sur l'intervalle [0,025 ; +∞ [de l'équation différentielle (H) : $y'+y=0$

1,5p 2. Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction g définie sur l'intervalle [0,025 ; +∞[par $g(t)=at\,e^{-t}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle E.

1p 3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle E.

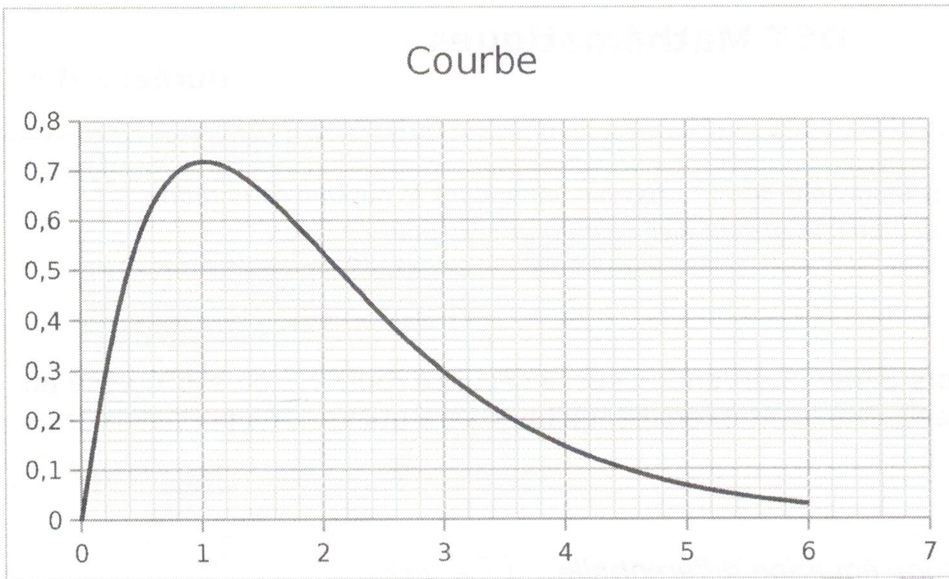
1,5p 4. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle E qui vérifie $f(0,025)=0$

Partie 2 : Étude d'une fonction (5p)

Une personne a ingéré une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à l'évolution du taux d'alcool dans le sang de cette personne, en fonction du temps t, en heures. Compte tenu du délai d'absorption par l'organisme, le taux d'alcool dans le sang de cette personne est donné par la fonction f définie sur [0,025 ; +∞[par $f(t)=(2t-0.05)e^{-t}$.

La représentation graphique C de la fonction f dans un repère orthogonal est fournie ci-dessous.

Classe : TOP 2
Date : Octobre 2019



1p 1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(t)$

1p 2. Étudier le signe de $f'(t)$ et les variations de la fonction f.

0,5p 3. En déduire la valeur exacte du maximum de la fonction f.

1,5p 4. Démontrer que la fonction F définie par $F(t)=(-2t-1,95)e^{-t}$ est une primitive de la fonction f sur [0,025 ; +∞[.

1p 5. Donner le taux d'alcool moyen entre 2 et 4 heures.

<u>EXERCICE 2</u> 5 points/20

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55% des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40% en sont locataires et enfin 5% occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupants à titre gratuit »). Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle, soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule famille

De plus, 60% des propriétaires habitent une maison individuelle, 80% des locataires habitent un appartement et enfin 10% des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle. On interroge au hasard une famille de la région et on note :
A l'événement : « la famille habite un appartement »,
L l'événement : « la famille est locataire »,
P l'événement : « la famille est propriétaire »,
G l'événement : « la famille occupe à titre gratuit »

Classe : TOP 2
Date : Octobre 2019

Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies au millième.

1,25p 1. Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes : $P_P(\bar{A})$, $P_L(A)$ et $P_G(\bar{A})$.
1,25p 2. Calculer la probabilité de l'événement : « la famille est propriétaire et habite un appartement ».
1,25p 3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,585.
1,25p 4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement. Calculer la probabilité pour qu'elle en soit propriétaire.

<u>EXERCICE 3</u> 5 points/20

Une entreprise agroalimentaire fabrique des arômes naturels servant à l'amélioration des préparations culinaires. Elle les conditionne dans des flacons de 58 ml qu'elle achète à une entreprise.

Une fois fabriquées, les étiquettes peuvent présenter deux défauts : un défaut du visuel (graphisme, photo, couleur ...) ou l'absence de la date limite de consommation.
On considère les évènements suivants :
• A « la date limite de consommation n'apparaît pas sur l'étiquette » avec p(A) = 0.01
• D « l'étiquette comporte un défaut visuel » avec p(D) = 0.03
On suppose que les évènements A et D sont indépendants.

1,25p 1. Calculer la probabilité qu'une étiquette prélevée au hasard dans la production présente les deux défauts
1,25p 2. Calculer la probabilité qu'une étiquette prélevée au hasard dans la production ne présente aucun des deux défauts.
1,25p 3. Montrer que la probabilité qu'une étiquette prélevée au hasard dans la production soit défectueuse, c'est-à-dire présente au moins un défaut, est 0,0397.
1,25p 4. Calculer la probabilité qu'une étiquette prélevée au hasard dans la production présente un et un seul défaut.