Comment déterminer la région critique dans un test relatif à une proportion dans le cas d'une loi binomiale approximable par une loi normale ?

1. **On précise les paramètres de la loi normale utilisée.**

2. **On détermine l'intervalle de fluctuation *I* de la proportion étudiée.**

3. **On construit un test de validité : la région d'acceptation du test est l'intervalle *I*, la région critique est son complémentaire.**

Exemple.

On reprend l'exemple de la fiche méthode 5 en interrogeant 100 personnes.
Un constructeur affirme que la probabilité qu'un de ses ordinateurs ait une panne dans les 5 ans suivant son achat est égale à 0,15.
Sur les 100 personnes interrogées, 26 ont eu une panne dans les 5 ans suivant leur achat. Que peut-on penser de l'affirmation du constructeur au seuil de 5 % ?

On construit un test bilatéral permettant de vérifier l'affirmation du constructeur au seuil de 5 %.

L'hypothèse H_0 est $p = 0{,}15$, l'hypothèse alternative H_1 est $p \neq 0{,}15$.

L'enquête peut être assimilée à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de personnes ayant eu une panne dans les 5 ans suivant leur achat. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}15$.

n étant assez grand, on peut approcher la loi binomiale par une loi normale.

La région d'acceptation de H_0 est l'intervalle de fluctuation de la fréquence de panne au seuil de 95 %.

L'intervalle de fluctuation de la fréquence de panne au seuil $1 - \alpha$ est :

$$I = \left[p - u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

u_α est l'unique réel tel que u_α vérifie $P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$, où Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
Pour un seuil de 95%, on a $u_\alpha = 1{,}96$;

alors $I = \left[0{,}15 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}15 \times 0{,}85}{100}}\ ;\ 0{,}15 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}15 \times 0{,}85}{100}}\right]$ *soit* $I = [0{,}08\ ;\ 0{,}22]$.

La région d'acceptation du test est l'intervalle ***I = [0,08 ; 0,22].***

L'enquête donne $f_e = \dfrac{26}{100}$, soit $f_e = 0{,}26$.

$f_e \notin I$, on rejette l'hypothèse H_0, ***au seuil de 5% l'affirmation du constructeur est erronée.***

Remarque : cette situation montre l'importance de la taille des échantillons dans les enquêtes statistiques ainsi que la méthode utilisée.