Équation différentielle linéaire du premier ordre

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants une équation de la forme :

$$a\,y'(x)+b\,y(x)=c(x)$$

où a et b sont des constantes réelles, $c(x)$ est une fonction connue de la variable x et $y(x)$ est la fonction de la variable x à déterminer.

Comment résoudre à la main une équation différentielle du premier ordre ?

Pour résoudre l'équation (1) $ay' + by = c(x)$:

1. On écrit l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre associée :

$$(2) \quad ay' + by = 0.$$

Ce sont les fonctions définies par $y_0(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$ (k réel quelconque).

2. On recherche une fonction f solution de l'équation (1) $ay' + by = c(x)$.

Dans les cas usuels :

– soit l'énoncé propose une fonction solution ; il suffit de vérifier ;

– soit l'énoncé fournit des indications ; on suit ces indications.

3. On écrit l'ensemble des solutions de l'équation (1), ce sont les fonctions définies par :

$$y(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x} + f(x) \text{ ; } k \text{ réel quelconque.}$$

Exemple

Résoudre l'équation (1) $3y' + 2y = 4x$.

On vérifiera que la fonction $f : x \mapsto 2x - 3$ est une solution de l'équation (1).

__1.__ L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre associée (2) $3y' + 2y = 0$, est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_0(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} \text{ avec } k \text{ réel quelconque.}$$

__2.__ On vérifie que la fonction f proposée est bien une solution de l'équation (1).

Si $f(x) = 2x - 3$ alors $f'(x) = 2$,

ainsi $3f'(x) + 2f(x) = 3 \times 2 + 2(2x - 3)$,

soit $3f'(x) + 2f(x) = 4x$.

La fonction f est bien une solution de l'équation (1).

__3.__ L'ensemble des solutions de l'équation (1) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3 \text{ ; } k \text{ réel quelconque.}$$

Comment déterminer à la main la fonction solution d'une équation différentielle du premier ordre vérifiant une condition initiale donnée ?

Pour déterminer, à la main, la fonction g solution de l'équation (1) $ay' + by = c(x)$, qui vérifie une condition initiale donnée :

1. On détermine l'ensemble des solutions de l'équation (1) (voir fiche méthode 14).

L'expression de ces solutions est de la forme $y(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x} + f(x)$.
Cette expression fait apparaître une constante réelle k.

2. On traduit la condition initiale donnée par une équation d'inconnue k ; on résout cette équation.

3. On écrit l'expression de la fonction g solution.

Exemple.* *Déterminer la fonction g solution de l'équation (1) $3y' + 2y = 4x$, qui vérifie la condition $g(0) = 0$.

1. On écrit l'expression des solutions de l'équation (1) (voir fiche méthode 14) :

$$y(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3.$$

2. $g(x)$ est de la forme $g(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3$.

$g(0) = 0$ s'écrit $ke^{-\frac{2}{3}\times 0} + 2 \times 0 - 3 = 0$, soit, puisque $e^0 = 1$, $k - 3 = 0$, donc $k = 3$.

3. La fonction g solution de l'équation $3y' + 2y = 4x$ telle que $g(0) = 0$ est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3e^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3$.

Exercices :

***Pour les exercices 1 et 2**, résoudre les équations.*

1 **C** $2y' + 3y = 0$; $y' + 2y = 0$.

2 $4y' + 5y = 0$; $2y' - 3y = 0$.

***Pour chacun des exercices 3 à 5**, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation proposée, puis résoudre l'équation.*

3 $y' + 2y = 6$; $f(x) = 3$.

4 **C** $y' - y = x$; $f(x) = -x - 1$.

5 $2y' + y = \mathrm{e}^x$; $f(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^x$.

6 On considère l'équation différentielle $y' + 3y = 5$.

1. Déterminer le réel a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a$ soit une solution de l'équation différentielle.

2. Résoudre l'équation.

***Pour les exercices 7 et 8**, déterminer la fonction f solution vérifiant la condition initiale donnée.*

7 **C** $y' - 2y = 0$; $f(0) = 2$.

8 $y' + y = 0$; $f(-1) = 3$.

9 **R** On considère l'équation $5y' - y = x$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto -x - 5$ est une solution.

2. Déterminer la fonction g solution telle que $g(0) = 1$.

EXERCICE 1 :

Soient les équations différentielles suivantes définies sur IR:
(E) $y' - 0{,}3\, y = 0$

1. Déterminer les solutions de l'équation (E).

2. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 20$

EXERCICE 2

Soient les équations différentielles suivantes définies sur IR:
(E) $y' - 2y = 2x + 1$
(H) $y' - 2y = 0$
1. Déterminer les solutions de l'équation (H).

2. Montrer qu'il existe une fonction affine f_0 solution de (E).

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

4. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$

EXERCICE 3 :

Soient les équations différentielles suivantes définies sur IR:
(E) $y' - 2y = -2x^2 - 2x$
(H) $y' - 2y = 0$
1. Déterminer les solutions de l'équation (H).

2. Montrer que la fonction h définie sur IR par $h(x) = (x+1)^2$ est solution particulière de (E).

3. Déterminer les solutions de l'équation (E).

4. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(1) = 1$

EXERCICE 4

On désigne par y une fonction de la variable réelle *x*, définie et dérivable sur [-1;3] qui vérifie l'équation différentielle (*E*) : $y' + 2y = -\frac{5}{3}e^{-3x}$ où y' désigne la fonction dérivée de la fonction y.

1. Déterminer les solutions définies sur [-1;3] de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$
2. Soit *g* la fonction définie sur [-1;3] par $g(x) = \frac{5}{3}e^{-3x}$. Montrer que *g* est solution de (*E*).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (*E*).

4. Déterminer la solution particulière *f* de l'équation différentielle (*E*) qui prend la valeur $-\frac{5}{6}$ en 0.

EXERCICE 5

On désigne par y une fonction de la variable réelle *x*, définie et dérivable sur [0;+∞] qui vérifie l'équation différentielle (*E*) : $y'+y=2xe^{-x}$ où y' désigne la fonction dérivée de la fonction y .

1. Déterminer le réel *a* tel que la fonction *g*(*x*) = ax^2e^{-x} soit solution de l'équation différentielle (*E*)
2. Déterminer les solutions, sur [0;+∞ [, de l'équation différentielle (E_0) : $y'+y=0$
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (*E*).
4. Déterminer la solution particulière *f* de l'équation différentielle (*E*) qui vérifie la condition initiale *f*(-1)=2*e*.