Equations différentielles

1. Equation différentielle du premier ordre

On appelle équation différentielle du premier ordre toute relation entre :
– une variable x
– une fonction de x notée $y(x)$
– la dérivée première de cette fonction : $y'(x)$

2. Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation différentielle de la forme :

$$ay'(x)+by(x)=f(x)$$

où a , b sont des réels donnés et $f(x)$ est une fonction connue de x et où $y(x)$ est la fonction de x à déterminer.

Exemples

Remarque : Pour alléger les écritures on notera parfois :

- y au lieu de $y(x)$

- y' au lieu de $y'(x)$

- et donc $ay'+by$ au lieu de $ay'(x)+by(x)$

3. Résoudre une équation différentielle

Résoudre ou Intégrer une équation différentielle du premier ordre, c'est trouver **toutes** les fonctions qui vérifient la relation caractérisant cette équation.

4. Résolution de l'équation

On doit résoudre sur IR une équation différentielle du type :
(E): $ay'+by=f(x)$ où est une fonction de x définie sur IR

La résolution se fait en plusieurs étapes:

a) **Résolution de l'équation différentielle linéaire sans second membre ou homogène :** $ay'+by=0$ **notée (H)**

Les fonctions solution sont donc les fonctions définies par $y_H=Ce^{-\frac{b}{a}x}$ **(**$C\in$**IR)**

b) **On recherche une solution particulière f_0 de l'équation (E)**

L'énoncé vous donnera cette solution ou vous guidera pour la trouver(méthode par identification).
Il vous suffira de partir de l'hypothèse que f_0 est solution de (E), c'est-à-dire que

$af_0'(x)+bf_0(x)=f(x)$

c) **Ensemble solution de l'équation (E)**

On en déduit les solutions y_E de (E) qui sont de la forme $y_E = y_H + f_0$ où f_0 est la solution du b). et y_H les fonctions trouvées au a)

Exemple

Soient les équations différentielles suivantes définies sur $\mathbb{R}$:
(E) $y'+y=x+2$
(H) $y'+y=0$

1. Déterminer les solutions de l'équation (H).
2. Déterminer les réels m et p pour que la fonction affine f_0 définie par $f_0(x)=mx+p$ soit solution de (E).
3. Déterminer les solutions de l'équation (E).

1. $y_H = Ce^{-x}$

2. $f_0' + f_0 = x+2$

$m + mx + p = x + 2 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ p=1 \end{cases} \Rightarrow f_0(x) = x+1$

$mx + m + p = x + 2$

3. $y = y_H + f_0 = Ce^{-x} + x + 1$

EXERCICE 1 :

Soient les équations différentielles suivantes définies sur IR:

(E) $y' - 0{,}3\, y = 0$

1. Déterminer les solutions de l'équation (H).

2. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 20$

EXERCICE 2

Soient les équations différentielles suivantes définies sur IR:

(E) $y' - 2y = 2x + 1$

(H) $y' - 2y = 0$

1. Déterminer les solutions de l'équation (H).

2. Montrer qu'il existe une fonction affine f_0 solution de (E).

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

4. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$

EXERCICE 3 :

Soient les équations différentielles suivantes définies sur IR:

(E) $y' - 2y = -2x^2 - 2x$

(H) $y' - 2y = 0$

1. Déterminer les solutions de l'équation (H).

2. Montrer que la fonction h définie sur IR par $h(x) = (x+1)^2$ est solution particulière de (E).

3. Déterminer les solutions de l'équation (E).

4. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(1) = 1$

EXERCICE 4

On désigne par y une fonction de la variable réelle *x*, définie et dérivable sur [-1;3] qui vérifie l'équation différentielle (*E*) : $y' + 2y = -\frac{5}{3}e^{-3x}$ où y' désigne la fonction dérivée de la fonction y .

1. Déterminer les solutions définies sur [-1;3] de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$
2. Soit *g* la fonction définie sur [-1;3] par $g(x) = \frac{5}{3}e^{-3x}$. Montrer que *g* est solution de (*E*).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (*E*).

4. Déterminer la solution particulière *f* de l'équation différentielle (*E*) qui prend la valeur $-\frac{5}{6}$ en 0.

EXERCICE 5

On désigne par y une fonction de la variable réelle *x*, définie et dérivable sur [0;+∞] qui vérifie l'équation différentielle (*E*) : $y'+y=2xe^{-x}$ où y' désigne la fonction dérivée de la fonction y .

1. Déterminer le réel *a* tel que la fonction *g*(*x*) = ax^2e^{-x} soit solution de l'équation différentielle (*E*)
2. Déterminer les solutions, sur [0;+∞ [, de l'équation différentielle (E_0) : $y'+y=0$
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (*E*).
4. Déterminer la solution particulière *f* de l'équation différentielle (*E*) qui vérifie la condition initiale *f*(-1)=2*e*.