Classe : TOP2
Date : Février 2020

DST Mathématiques

Durée: 1h 45min

Présentation et orthographe seront pris en compte dans le barème de notation.
Les calculatrices graphiques sont autorisées pour ce sujet.

EXERCICE 1 *(4 points/20)*

Pour tester la résistance à la chaleur d'une plaque d'isolation phonique, on porte en laboratoire sa température à 100° C et on étudie l'évolution de sa température en fonction du temps *t* (en minutes).
Après 6 minutes la température est redescendue à 82° C.
La température ambiante du laboratoire est de 19° C.
Soit $\theta(t)$ la température (en degré Celsius) de la plaque à l'instant *t* (*t* exprimé en minutes).
En exploitant ces données, on peut affirmer que la fonction θ est solution de l'équation différentielle :

$$y'(t)+0{,}042\,y(t)=0{,}798 \qquad (E)$$

où y est la fonction inconnue, de la variable *t*, définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

1. Résoudre sur l'intervalle $[0;+\infty[$ l'équation différentielle :
$$y'(t)+0{,}042\,y(t)=0 \;.$$
2. Trouver une solution particulière de (*E*) constante du type $g(t)=a$, où a est un nombre réel à déterminer.
3. En déduire toutes les solutions de (*E*).
4. D'après l'énoncé donner $\theta(0)$, puis déterminer la solution θ de l'équation (*E*) vérifiant cette condition initiale.

EXERCICE 2 *(9 points/20)*

Une entreprise fabrique et commercialise des composants électroniques assemblés dans deux ateliers numérotés 1 et 2.
L'atelier 1 fournit 80 % de la production et l'atelier 2 fournit le 20 % restants.
On a remarqué que 1,5 % des composants issus de l'atelier 1 sont défectueux, et que 4 % des composants issus de l'atelier 2 sont défectueux.

Partie A
On prend au hasard un composant dans la production d'une journée et on considère les évènements suivants :
- évènement A : « le composant provient de l'atelier 1 » ;
- évènement B : « le composant provient de l'atelier 2 » ;
- évènement D : « le composant est défectueux ».

1. Déduire de l'énoncé les probabilités $P(A)$ et $P(B)$, ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
2. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré ou un tableau à double entrée.
3. Calculer la probabilité de l'évènement D .
4. On constate qu'un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de l'atelier 1.

Dans la suite, on supposera que 2 % des composants produits par l'entreprise sont défectueux.

Partie B

Dans cette partie, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au millième.
Un client commande un lot de 150 composants.
On assimile le choix des 150 composants à des tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de composants défectueux que contient ce lot.

1. Justifier le fait que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.
2. Donner l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X .
3. Calculer la probabilité d'avoir exactement 4 composants défectueux dans ce lot.

Partie C

On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi d'une variable aléatoire Y qui suit la loi de Poisson de paramètre 3.

1. Justifier cette valeur du paramètre.
2. Déterminer la probabilité d'avoir strictement plus de 4 composants défectueux dans ce lot.

EXERCICE 3 *(3 points/20)*

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
Une entreprise produit des batteries de téléphone portable. On s'intéresse à la durée de décharge des batteries. On note Y la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 batteries associe la moyenne des durées de décharge.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètre $m=80$ et $\sigma=0,4$.

1. Calculer la probabilité : $P(79 \leq Y \leq 81)$.
2. Déterminer le réel a tel que : $P(Y \geq a)=0,95$.
   On donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de a .
3. Calculer la probabilité de l'évènement : « $(Y \geq 80)$ sachant que $(Y \geq 79,34)$ ».

EXERCICE 4 *(4 points/20)*

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda>0$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X>5)=0,4$.
2. Dans cette question, on prendra $\lambda=0,18$.
   Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de pannes au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?
3. Dans cette question on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X>5)=0,4$.
   On considère un lot de 10 ordinateurs.
   a. Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.
   b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?