

35 R Une personne prétend qu'elle peut souvent deviner à distance la couleur d'une carte tirée au hasard d'un jeu de cartes bien battu et comportant des cartes de deux couleurs différentes en nombre égal. On appelle p la probabilité que cette personne donne une réponse juste (succès) lors d'un tirage.

Si cette personne ment, on a $p = \frac{1}{2}$, sinon $p > \frac{1}{2}$.

On appellera échantillon de taille n toute réalisation de n tirages successifs d'une carte dans le jeu, avec remise. On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence des succès obtenus par le prétendant devin au cours des n tirages d'une carte.

On admet que F suit la loi normale de moyenne

inconnue p et d'écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

On construit un test unilatéral permettant de détecter, au risque de 5 %, si cette personne ment. On choisit $n = 100$;

comme hypothèse nulle $H_0 : p = \frac{1}{2}$,

et comme hypothèse alternative $H_1 : p > \frac{1}{2}$.

1. Calculer, sous l'hypothèse H_0 , le réel positif h tel que $P(F \leq h) = 0,95$.
2. Énoncer la règle de décision du test.
3. Sur un échantillon de taille 100, le magicien a obtenu 64 succès. Peut-on considérer, au risque de 5 %, que le magicien est un imposteur ?

Test d'hypothèse bilatéral relatif à une moyenne

Fiche méthode 40

36 C Une usine fabrique des billes métalliques. L'étude porte sur le diamètre de ces billes, mesuré en millimètres. Un client réceptionne une commande. Il prélève un échantillon de 125 billes choisies au hasard et avec remise dans le lot reçu et constate que le diamètre moyen est égal à 25,1. On rappelle que pour les billes fabriquées par

l'entreprise, la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les diamètres suit une loi normale d'écart type 0,44.

L'entreprise s'est engagée à ce que la moyenne des diamètres des billes fournies soit de 25.

Le client décide de construire un test bilatéral permettant de vérifier l'hypothèse selon laquelle le diamètre des billes du lot reçu est de 25.

1. Quelle est l'hypothèse nulle H_0 ? Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?

2. On désigne par \bar{X} la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 125 billes, prises au hasard et avec remise, associe la moyenne des diamètres obtenus.

a) Donner sous l'hypothèse nulle la loi de \bar{X} . En préciser les paramètres.

b) Déterminer la région d'acceptation au seuil de 5 %.

c) Énoncer la règle de décision du test.

d) Au vu de l'échantillon, au seuil de 5 %, que peut conclure le client sur le respect de l'engagement de l'entreprise ?

3. Reprendre la question 2. avec le seuil de 1 %.

37 R Monsieur A se fait livrer, par un marchand de bois, des bûches de 50 cm de long, en très grande quantité. Il désire contrôler à l'aide d'un test bilatéral si la longueur moyenne m des bûches livrées est bien égale à 50 cm.

Pour cela, il mesure les longueurs de 100 bûches prises au hasard et avec remise dans le stock qui lui a été livré et il calcule la moyenne des longueurs des bûches de l'échantillon ainsi constitué. On admet que la variable aléatoire \bar{X} qui, à tout échantillon de 100 bûches prises au hasard et avec remise dans le stock livré, associe la moyenne des longueurs des bûches de l'échantillon, suit une loi

normale de paramètres m et $\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$ où m et σ sont

respectivement la moyenne et l'écart type des longueurs des bûches livrées.

Par expérience, Monsieur A a établi que $\sigma = 5$ cm.

1. Construire un test bilatéral permettant d'accepter ou de refuser, au seuil de signification de