ÉCOLE
D'INGÉNIEURS

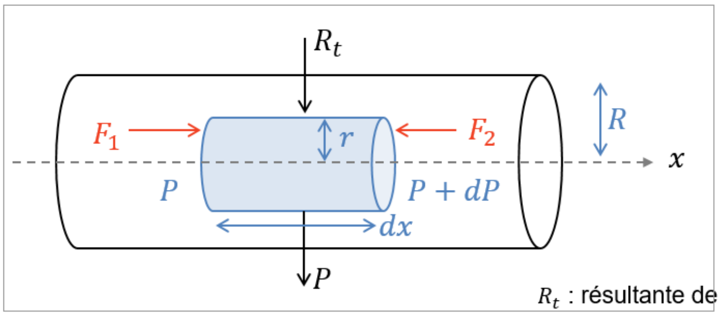
PROJET MECANIQUE DES FLUIDES
PROSIT 1 - WORKSHOP

02/10/2020

Table des matières

1 ÉCOULEMENT LAMINAIRE DANS UN TUBE (FLUIDE RÉEL)

- Hypothèses :
  - Le tube est horizontal.
  - Le tube a une section circulaire constante de rayon R.
  - L'écoulement est constant, le débit est donc constant.
  - L'écoulement est laminaire : la vitesse est parallèle à l'axe du tube et ne dépend que de la distance r à l'axe du tube.
  - L'écoulement se fait dans la direction Ox.



R_t : résultante de force de contact

Commenté [LS1]: Non pertinent d'utiliser le même symbole *P* pour désigner à la fois le poids et la pression !!! Source de confusion inévitable pour les élèves !!

Suggestion pour ne pas modifier la suite du corrigé, appeler le poids F_P plutôt que *P* ?

- Inventaire des forces selon l'axe x :
  - Forces de pression exercées sur la face amont : $F_1 = P \cdot \pi r^2$
  - Forces de pression exercées sur la face aval : $F_2 = -(P + \mathrm{d}P) \cdot \pi r^2$
  - Forces de viscosité : $\mu \frac{\partial v}{\partial n} \cdot \mathrm{d}S = \mu \frac{\partial v}{\partial r} \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}x$

  En utilisant le PFD, déterminer l'expression de dv en fonction de dr

$$\sum F_{\text{ext}} = P \cdot \pi r^2 - (P + \mathrm{d}P) \cdot \pi\, r^2 + \mu \frac{\partial v}{\partial r} \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}x = 0$$

La vitesse dépend de *r* uniquement donc :

$$\mathrm{d}v = \frac{r}{2\mu} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}r$$

- Intégration de *v* :

$$v(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} r^2 + C^{st}$$

- À la paroi, les particules de fluides sont immobiles : $v(R) = 0$

$$C^{st} = -\frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}R^2$$

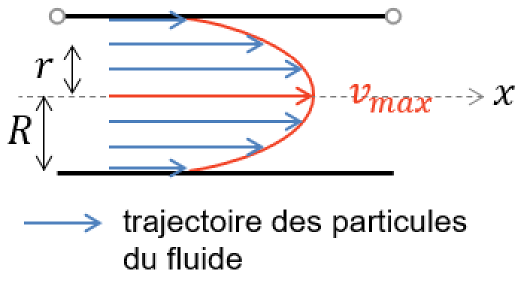
Donc l'expression de la vitesse est :

$$\boxed{v(r) = -\frac{1}{4\,\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(R^2 - r^2)}$$

C'est l'équation d'une parabole centrée sur l'axe x.

$v_{\max}$ dans l'axe du tube vaut :

$$\boxed{v_{\max} = -\frac{1}{4\,\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}R^2}$$



- Débit : formule de Poiseuille.

$\mathrm{d}q_v = v \cdot \mathrm{d}S = v(r) \cdot 2\,\pi r \cdot \mathrm{d}r$ donc $q_v = \int_0^R -\frac{\pi}{2\,\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(R^2 - r^2) r \cdot dr$ donc :

$$\boxed{q_v = -\frac{\pi}{8\,\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}R^4}$$

- Vitesse moyenne $\bar{v}$ vaut donc :

$$\boxed{\bar{v} = \frac{q_v}{S} = -\frac{1}{8\,\mu}\frac{dP}{dx}R^2}$$

En connaissant la longueur *L* (m) de la conduite, on obtient :

$\boxed{\bar{v} = -\frac{1}{8\,\mu}\frac{\Delta P}{L}R^2}$ avec ΔP la variation de pression sur la longueur L de la conduite.

Exemple Poiseuille :

On pompe une huile de densité 0,86 par une conduite horizontale de diamètre D = 10 cm, de longueur L = 15 m avec un débit volumique q_V = 1,2 L·s^{-1}. La différence de pression entre les deux extrémités de la conduite est de 4,6 mbar.

Déterminer la vitesse moyenne, le régime et la viscosité.

Correction

Selon la loi de Poiseuille, pour un écoulement en régime laminaire dans une conduite cylindrique, la vitesse moyenne du fluide est donnée par l'équation suivante :

$u_{moy} = \frac{R^2}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{\Delta p}{L}$ soit $\mu = \frac{R^2}{8 \cdot u_{moy}} \cdot \frac{\Delta p}{L}$

Or $u_{\text{moy}} = \frac{q_V}{\pi \cdot R^2} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}05^2} \approx 0{,}153 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Finalement : $\mu = \frac{0{,}05^2 \times 4{,}6 \cdot 10^2}{8 \times 0{,}153 \times 15} \approx 0{,}063 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

et $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0{,}063}{860} \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Vérification a posteriori du régime laminaire :

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = \frac{860 \cdot 0,153 \cdot 0,1}{0,063} \approx 209$$

$Re < 2000$, le régime d'écoulement est bien laminaire.

2 PERTES DE CHARGES (FLUIDES RÉELS)

- Pour un fluide réel, il n'y a pas conservation de la charge :

$$P_A + \rho . g . z_A + \frac{1}{2}\rho . v_A^2 \neq P_B + \rho . g . z_B + \frac{1}{2}\rho . v_B^2$$

$$P_A + \rho . g . z_A + \frac{1}{2}\rho . v_A^2 = P_B + \rho . g . z_B + \frac{1}{2}\rho . v_B^2 + \Delta P$$

Il existe deux types de pertes de charges ΔP :

  - Les pertes de charges régulières (ou linéaires) dues aux frottement au sein du fluide et contre les parois,
  - Les pertes de charges singulières liées aux accidents de parcours : coude, élargissement, rétrécissement, etc.

- Les pertes de charges régulières dans une canalisation :

$\boxed{\Delta P_{\text{rég}} = \frac{\lambda \cdot L \cdot \rho \cdot v^2}{2 \cdot D}}$ $\boxed{H_{\text{rég}} = \frac{\lambda \cdot L \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot D}}$ $\boxed{J_{\text{rég}} = \frac{\lambda \cdot L \cdot v^2}{2 \cdot D}}$

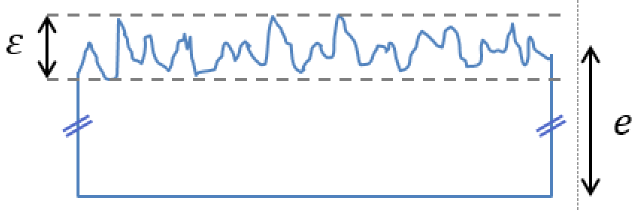
(Pa) *ou* (J·m^{-3}) (mCF) (J·kg^{-1})

mCF := Mètre de colonne de Fluide

- Nombre de Darcy en régime laminaire de Poiseuille : $\lambda = \frac{64}{Re}$
- Nombre de Darcy en régime de Blasius (écoulement turbulent dans une conduite parfaitement lisse) : $\lambda = 0{,}3164 Re^{-0{,}25}$
  - λ : nombre de Darcy (sans unité),
  - L : longueur canalisation (m),
  - D : diamètre canalisation (m),
  - ρ : masse volumique (kg·m^{-3}),
  - v : vitesse (m·s^{-1}).
- Nombre de Darcy en régime turbulent rugueux parfaitement établi : $\lambda = 0{,}79\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$ avec ε la rugosité d'une paroi d'épaisseur *e* et ε / D la rugosité relative (cf. abaque de Moody).

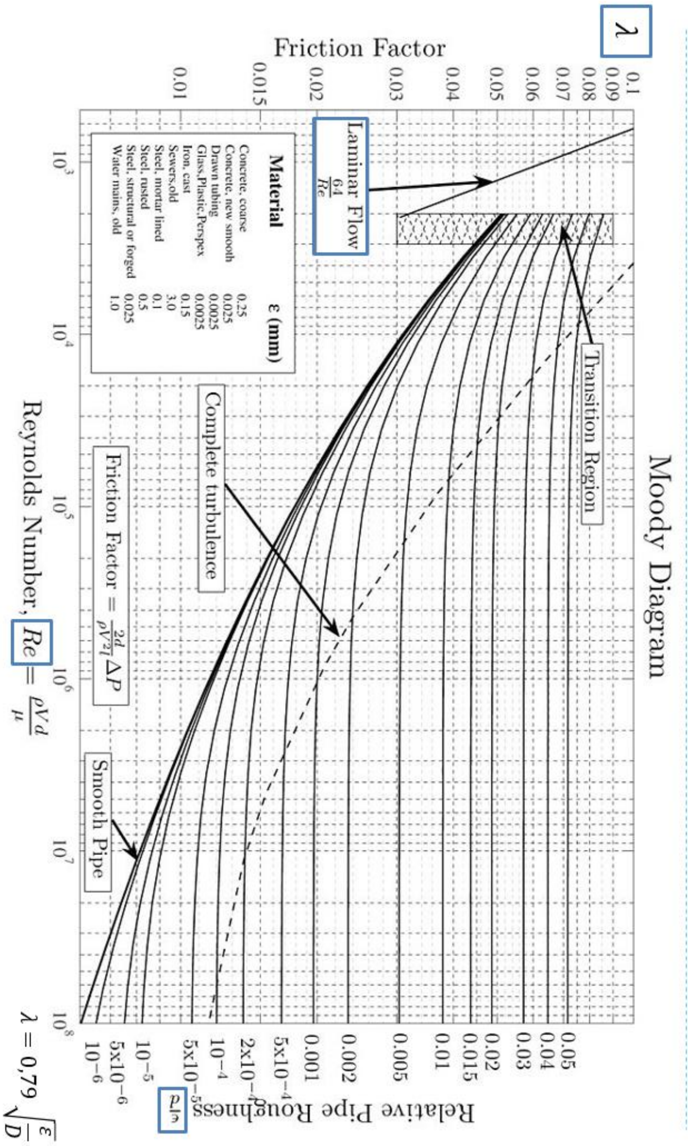
Commenté [LS2]: ne parle-t-on pas plutôt de « coefficient de perte de charge » davantage que de « nombre » ?

Commenté [LS3]: Si λ n'est pas de dimension 1, les expressions ci-dessus des pertes de charge régulières ne sont plus homogènes !!!



Commenté [LS4]: Le schéma introduit une variable *e* qui n'apparaît nulle part ailleurs. À définir !!

Pertes de charges régulières
Abaques $\boldsymbol{\lambda = f(\varepsilon/D)}$



Pertes de charges singulières

Elles apparaissent à chaque incident de parcours.

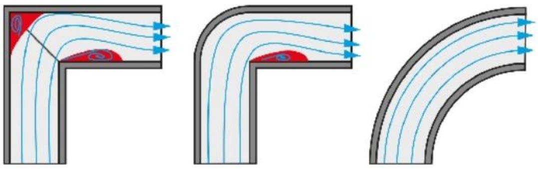
$$\boxed{\Delta P_{\text{sing}} = \frac{\zeta .\ \rho . v^2}{2}} \quad \boxed{H_{\text{sing}} = \frac{\zeta . v^2}{2 . g}} \quad \boxed{J_{\text{sing}} = \frac{\zeta \cdot v^2}{2}}$$

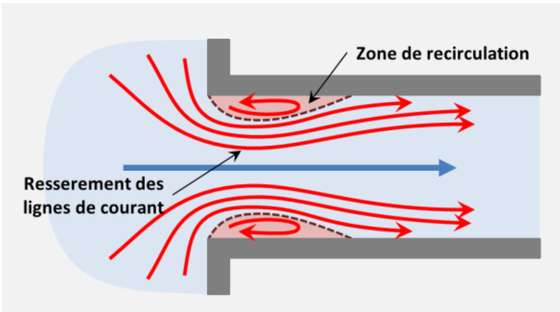
(Pa) *ou* (J·m^{-3}) (mCF) (J·kg^{-1})

ζ : coefficient de contraction (sans unité), parfois aussi noté K,

ρ : masse volumique (kg·m^{-3}),

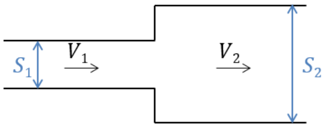
v : vitesse en amont de la singularité (m·s^{-1}).





- Évasement brusque :

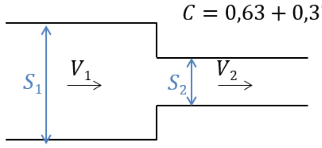
$$\zeta_{th} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$



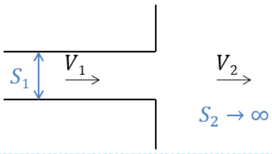
- Rétrécissement brusque :

$$\zeta_{th} = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2$$

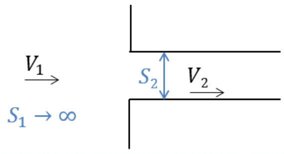
$$C = 0{,}63 + 0{,}37\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$$



- Arrivée d'une tuyauterie dans un réservoir : $\zeta_{th} = 1$

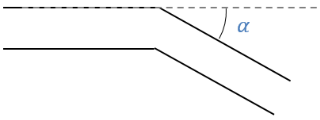


- Sortie d'un réservoir par une tuyauterie : $\zeta_{th} = 0{,}5$



- Coude incliné :

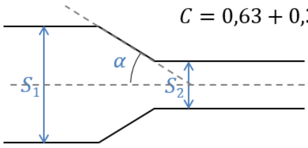
$$\zeta_{th} = 1{,}3(1 - \cos\alpha)$$



- Rétrécissement incliné :

$$\zeta_{th} = \sin\alpha\left(\frac{1}{C} - 1\right)^2$$

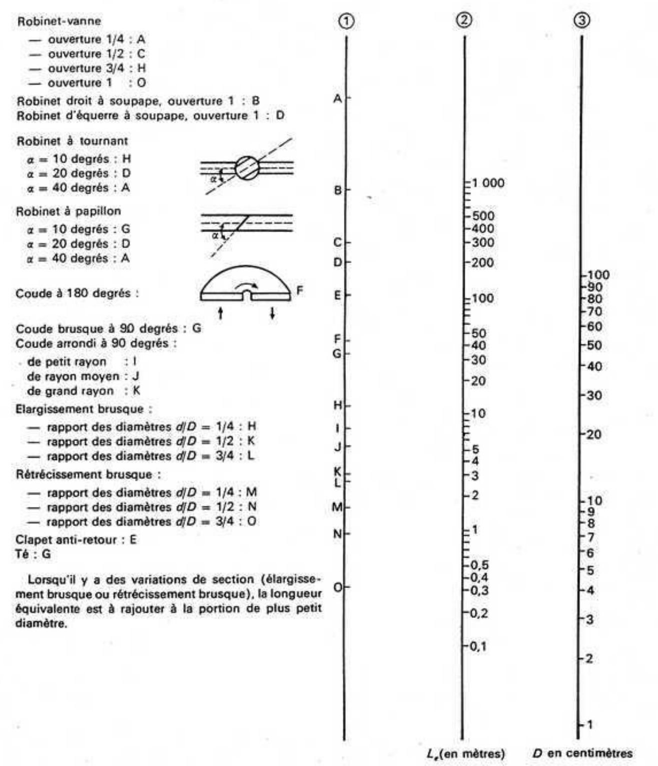
$$C = 0{,}63 + 0{,}37\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$$



- Coude à angle droit : $\zeta_{th} = 1$
- Coude à 45° : $\zeta_{th} = 0{,}7$

- Il existe des abaques rédigés par les fournisseurs.

  Exemple ci-dessous pour des vannes.



Exercice 1

On pompe une huile de densité 0,860 par un tube horizontal de diamètre D = 5 cm, de longueur L = 300 m avec un débit q_V = 1,20 l/s. L'écoulement est supposé laminaire. La perte de charge pour ce tronçon est de 21 m C.E. (colonne d'eau).
Quels sont les viscosités dynamique et cinématique de l'huile utilisée ?
Quel est le nombre de Reynolds de l'écoulement ?

Solution :

Perte de charge linéaire : $\boxed{H_{\text{rég}} = \frac{\lambda \cdot L \cdot u^2}{2 \cdot g \cdot D}}$

Ici $u = \frac{4q_V}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 1{,}2 \times 10^{-3}}{\pi 0{,}05^2} = 0{,}611 \text{ m/s}$

On en déduit

$$\lambda = \frac{2H_{\text{rég}}gD}{Lu^2}$$

avec $H_{\text{rég[mCE]}}\rho_{\text{eau}}g = H_{\text{rég[mCF]}}\rho_{\text{fluide}}g$ soit $H_{\text{rég[mCF]}} = H_{\text{rég[mCE]}}\frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho_{\text{fluide}}} = \frac{H_{\text{rég[mCE]}}}{d_{\text{fluide}}}$

$$\lambda = \frac{2 \times 21 \times 9{,}81 \times 0{,}05}{0{,}86 \times 300 \times 0{,}611^2} = 0{,}214$$

Si on suppose que l'écoulement est laminaire (à vérifier par le calcul du nombre de Reynolds ensuite), il vient que par la relation de Poiseuille : $\lambda = 64 \cdot Re^{-1}$

Commenté [LS5]: il est d'ores et déjà possible de le vérifier non ? :
Re = 64/λ = 299 << 2400, ce qui correspond bien à un régime laminaire

- pour la viscosité cinématique :

$\nu = \lambda u D/64 = 0{,}214 \times 0{,}611 \times 0{,}05/64 = 1{,}02\ 10^{-4}\ \text{m}^2\text{s}^{-1}$

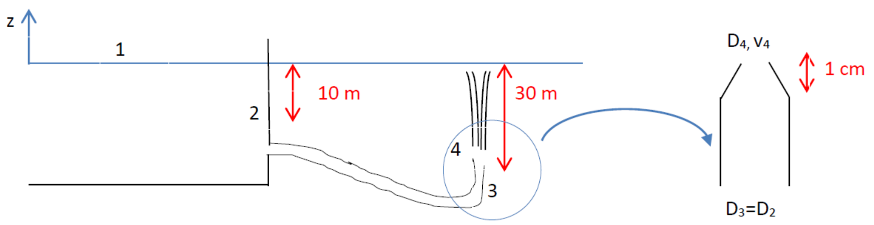
$\mu = \nu\rho = 1{,}02\ 10^{-4} \times 860 = 0{,}0877$ Poiseuille = 0,0877 Pa·s

Et Re = 64/λ = 299 << 2400, on est bien en régime laminaire

Exercice 2

Commenté [LS6]: Il faudrait donner la valeur de la pression atmosphérique considérée (a priori 100 000 Pa d'après le corrigé).

L'entrée *E* d'un tuyau de diamètre D_2 = 8 cm se trouve à 10 m sous la surface libre d'un réservoir d'eau de grandes dimensions, et la sortie à 30 m au-dessous de cette même surface libre. Il se termine par une courte tuyère de diamètre D_4 = 4 cm. On se place dans le cas d'un fluide parfait (ρ_{eau} = 1 kg/L).



1) Quelle est la valeur de la vitesse v_4 à la sortie de la tuyère ?
2) Quel est le débit d'eau qui s'écoule ?
3) Quel est dans le tuyau, la valeur de la pression en 2 ainsi que dans une section *S* située juste en amont de la tuyère de sortie ?

Corrigé :

1) $\boldsymbol{P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_4 + \rho g z_4 + \rho \frac{v_4^2}{2}}$

$$\boldsymbol{P_{atm} + 0 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_{atm} - 30g + \rho \frac{v_4^2}{2}}$$

$\boldsymbol{{v_1}^2 + 60g = {v_4}^2}$

Le débit massique est conservatif, la masse volumique étant constante, il en va de même pour le débit volumique : $\boldsymbol{S_1 v_1 = S_4 v_4}$ donc $\boldsymbol{v_1 = \frac{S_4 v_4}{S_1}}$

Donc $\boldsymbol{v_4 = \sqrt{\frac{60g}{1-\left(\frac{S_4}{S_1}\right)^2}}}$

Comme S_1>>S_4 alors $\boldsymbol{v_4 = \sqrt{60g} = 24{,}3\ \mathrm{m/s}}$

2) $\boldsymbol{q_{V4} = S_4 v_4 = \pi \left(\frac{D_4}{2}\right)^2 \cdot v_4 = \pi \times (2 \cdot 10^{-2})^2 \times 24{,}3 = 0{,}03\ \mathrm{m^3/s}}$
3) Le débit est conservatif : $\boldsymbol{S_3 v_3 = S_4 v_4 = S_2 v_2}$ donc $\boldsymbol{v_2 = v_3 = \frac{S_4 v_4}{S_3} = \frac{0{,}03}{\pi \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2} = 6\ \mathrm{m/s}}$

$$\boldsymbol{P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = P_4 + \rho g z_4 + \rho \frac{v_4^2}{2}}$$

$$P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = P_{\text{atm}} + \rho g z_4 + \rho \frac{v_4^2}{2}$$

$$P_2 = P_{\text{atm}} + \rho g (z_4 - z_2) + \frac{\rho}{2}(v_4^2 - v_2^2)$$

$$P_2 = 100000 + 1000 \times 9,8 \times (-30 + 10) + 500 \times (24,3^2 - 6^2) = 181245 \text{ Pa}$$

$$P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = P_3 + \rho g z_3 + \rho \frac{v_3^2}{2} \text{ car } v_2 = v_3$$

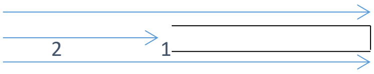
$$P_3 = P_2 + \rho g (z_2 - z_3) = 181245 + 1000 \times 9,8 \times 20 = 377245 \text{ Pa}$$

Exercice 3 Tubes de Pitot

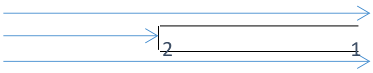
Commenté [LS7]: Dommage de ne pas aller jusqu'à l'expression de la vitesse déduite de mesures par tube de Pitot par exemple…

Montrer que pour un fluide parfait, dans un tube ouvert à une extrémité et fermé à l'autre :

1) la pression dans le tube est égale à la pression totale si l'extrémité ouverte est face à l'écoulement



2) la pression dans le tube est égale à la pression si l'extrémité ouverte est dos à l'écoulement



Corrigé :

1) $P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$

En 1, la vitesse est nulle car le fluide ne bouge pas dans le tube.

$$P_1 = P_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = \textit{pression totale du fluide}$$

2) $P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$

$\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v_2} = 0$ car la pression est nulle au bord du tube

$P_1 = P_2$

Exercice 4

Du fioul lourd circule d'A à B par un tuyau d'acier de diamètre D = 15 cm et de longueur L = 900 m. Sa densité est 0,915 et sa viscosité cinématique est de 4,13 10^{-4} $m^2 \cdot s^{-1}$. La pression en A est 110 mCE, celle en B de 3,5 mCE.
Quel est le débit en l/s ?

Solution :
On suppose que le régime est laminaire
Perte de charge linéaire : $\boxed{H_{\text{rég}} = \frac{\lambda \cdot L \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot D}}$ et $\Delta P_{\text{rég}} = \frac{\lambda \cdot L \cdot \rho \cdot v^2}{2 \cdot D}$ avec λ = 64·Re^{-1}

$$\Delta P_{\text{rég}} = \rho g \Delta H_{\text{rég}} = \frac{64 \cdot L \cdot \rho v^2}{Re \times 2 \cdot D} = \frac{64 \cdot L \cdot \rho v^2 \times \upsilon}{vD \times 2 \cdot D} = \frac{32\rho \cdot L \cdot v \times \upsilon}{D^2}$$

On travaille en pression car les colonnes d'eau mCE ne sont pas des colonnes de fioul.

$$v = \frac{\rho_{\text{eau}} g \cdot \Delta H D^2}{32 \upsilon \rho_{\text{fioul}} L} = \frac{1}{0{,}915} \frac{9{,}81 \times 106{,}5 \times 0{,}15^2}{32 \times 4{,}13 \cdot 10^{-4} \times 900} = 2{,}16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

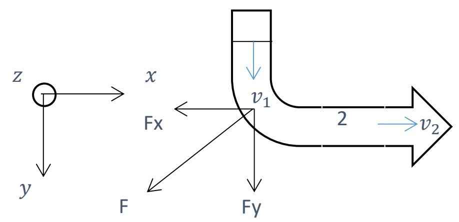
On vérifie de suite l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds : Re = 784 < 2400

On en déduit le débit volumique : $q_V = v \times \pi R^2$ = 38,2 10^{-3} m^3/s = 38,2 l/s

Exercice 5 Effort exercé sur un coude

Une conduite d'eau horizontale de diamètre intérieur D_1 = 100 mm est le siège d'un écoulement permanent d'eau (considéré comme un fluide parfait) de débit 30 L/s. À l'entrée du coude, la pression statique (relative) du fluide est de 2 bars.

Calculer la résultante horizontale des forces exercées par le fluide sur le coude.



Corrigé :

$\vec{F} = P_1 S_1 \vec{n_1} - P_2 S_2 \vec{n_2} + q_m(\vec{v_1} - \vec{v_2}) + \vec{P}$

$-Fx = -P_2 S_2 - q_m v_2 = -P_2 S_2 - \rho q_v v_2$

$Fy = P_1 S_1 + q_m v_1 = P_1 S_1 + \rho q_v v_1$

$Fz = P$

$P_1 + \cancel{\rho g} z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \cancel{\rho g} z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$

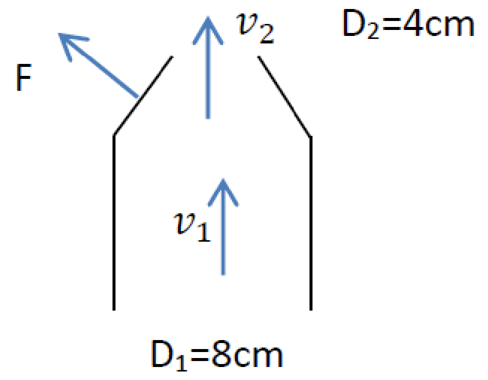
$v_1 = v_2$ car le débit est conservatif

Donc $P_1 = P_2$

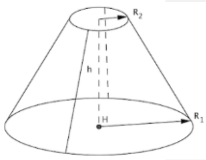
La suite suit en remplaçant dans $||\vec{F}|| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.

Exercice 6 Effort exercé sur un rétrécissement

Calculer la force exercée par l'écoulement sur la tuyère de l'exercice 1.



Corrigé :



Volume d'un cône tronqué : **(h × π/3) × (R_1^2 + R_2^2 + R_1 × R_2)**

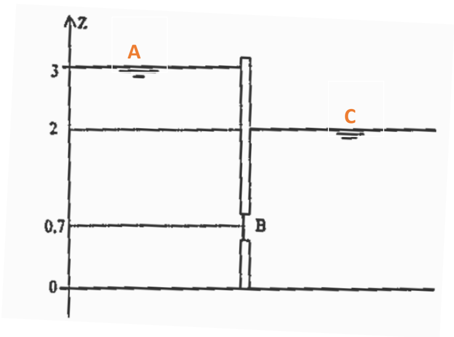
$\vec{F} = P_1 S_1 \vec{n_1} - P_2 S_2 \vec{n_2} + q_m(\vec{v_1} - \vec{v_2}) + \vec{P}$

$F = P_1 S_1 - P_2 S_2 + q_m(v_1 - v_2) - \rho V$

$$F = 379\,000 \times \mathrm{p} \times (4 \cdot 10^{-2})^2 - 10^5 \times \mathrm{p} \times (2 \cdot 10^{-2})^2$$
$$+1000 \times 30 \cdot 10^{-3} \times (24{,}3 - 6)$$
$$-1000 \times 9{,}8 \times \frac{\pi \times 1 \cdot 10^{-2}}{3} \times [(4 \cdot 10^{-2})^2 + (2 \cdot 10^{-2})^2 + (4 \cdot 10^{-2})^2 \times (2 \cdot 10^{-2})^2]$$

Exercice 7

Deux étangs, de volumes très importants, sont séparés par une paroi verticale. Une ouverture rectangulaire de largeur 10 cm et de hauteur 20 cm, pouvant être obturée par une vanne de mêmes dimensions, permet de les mettre en communication.



Données :

z_A = 3 m

z_C = 2 m

Coefficient de perte de charge singulière au niveau de l'ouverture : ζ_B = 0,8

η_{eau} = $1 \cdot 10^{-3}$ Pa·s

ρ_{eau} = 1 kg/L

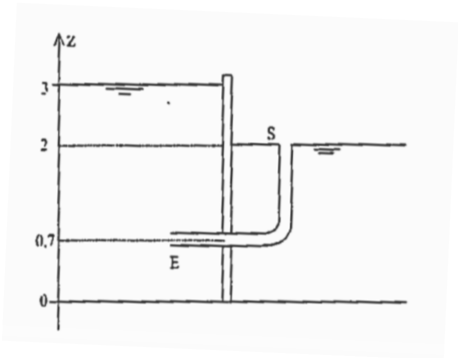
Commenté [LS8]: A et C n'apparaissaient pas sur le schéma !!?

Commenté [LS9]: Il serait bien dans le cours de préciser que la viscosité dynamique se note souvent « mu » mais peut aussi se noter « eta »…

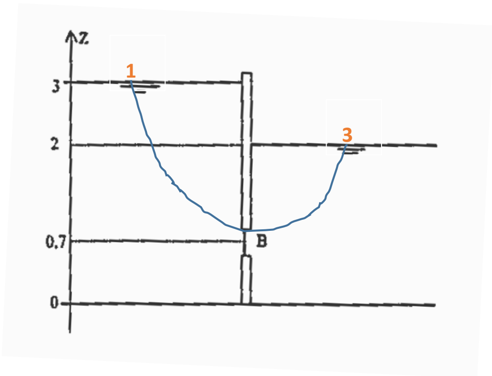
1) La vanne est ouverte, calculer avec quel débit l'étang 1 se vide dans l'étang 2.
2) On remplace l'ouverture rectangulaire par une ouverture circulaire, de rayon 10 cm, dans laquelle on introduit une buse de même section, de longueur L = 3 m, coudée, et débouchant à l'air libre, juste au-dessus de la surface libre de l'étang 2. Les pertes de charge à considérer sont les pertes de charges singulières à l'entrée de la conduite ζ_E = 0,5, à la sortie de la conduite ζ_S = 0, dans le coude ζ_{coude} = 1, et les pertes de charges régulières dans la conduite. On supposera l'écoulement

turbulent et on prendra pour valeur du nombre de darcy la valeur 0,025. Calculer avec quel débit l'étang 1 se vide dans l'étang 2. L'hypothèse d'un écoulement turbulent est-elle vérifiée ?

Commenté [LS10]: bof... ?



Corrigé :



1) Bernoulli entre1 et 3 :

$$\boldsymbol{P_1 + \rho g z_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} = P_3 + \rho g z_3 + \rho\frac{v_3^2}{2}} + z_B\boldsymbol{\frac{\rho {v_B}^2}{2}}$$

À la surface : $\boldsymbol{v_1 = v_3 = 0, P_1 = P_3 = P_{atm}}$

$$\cancel{P}_{atm} + \rho g z_1 + \cancel{\rho\frac{v_1^2}{2}} = \cancel{P}_{atm} + \rho g z_3 + \cancel{\rho\frac{v_3^2}{2}} + z_B\frac{\rho {v_B}^2}{2}$$

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_3)}{z_{\mathrm{B}}}} = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}8 \times (3-2)}{0{,}8}} = 4{,}95\ \mathrm{m/s}$$

$$\boldsymbol{q_{\mathrm{V}} = S_{\mathrm{B}} v_{\mathrm{B}} = 4,95 \times 0,1 \times 0,2 = \ 0,099\ \mathrm{m^3/s}}$$

2)

$$\boldsymbol{\cancel{P_1} + \rho g z_1 + \cancel{\rho \frac{v_1^2}{2}} = P_3 + \rho g z_3 + \rho \frac{v_3^2}{2} + (z_E + z_{coude}) \frac{\rho v_T^2}{2} + \frac{ll}{D} \frac{\rho v_T^2}{2}}$$

$$v_T = v_3$$

$$\frac{v_3^2}{2}\left(1 + (z_{\mathrm{E}} + z_{\mathrm{coude}}) + \frac{ll}{D}\right) = \ g(z_3 - z_1)$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2g(z_3 - z_1)}{1 + (z_{\mathrm{E}} + z_{\mathrm{coude}}) + \frac{ll}{D}}} = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}8 \times (3-2)}{1 + 0{,}5 + 1 + \frac{0{,}025 * 3}{0{,}2}}} = 2{,}61\ \mathrm{m/s}$$

$$\boldsymbol{q_v = Sv = 2,61 \times \mathrm{p} \times 0,1^2 = \ 0,082\ \mathrm{m^3/s}}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\mathrm{h}} = \frac{1000 \times 2{,}61 \times 0.2}{1 \cdot 10^{-3}} = 522\,000 \gg 4000 \text{ donc écoulement turbulent}$$

Exercice 8

a) Déterminer le type d'écoulement ayant lieu dans une conduite de 30 cm de diamètre quand, à 15 °C, circule de l'eau à la vitesse de 1 m/s (ν_{eau} = 1,13 10^{-6} m^2/s).

b) Déterminer le type d'écoulement ayant lieu dans une conduite de 30 cm de diamètre quand, à 15°C, circule du fioul-huile lourde avec la même vitesse ($\nu_{fioulhuile\ lourde}$ = 2,06 10^{-4} m^2/s).

Commenté [LS11]: du fioul peut-être ou de l'huile lourde ? ou bel et bien du fioul-huile lourde ?

Solution

a) Re = 265 490 >> 2400 régime largement turbulent

b) Re = 1 456 << 2400 régime laminaire

Exercice 9

Pour que les conditions soient celles d'un écoulement laminaire, quelle doit être la taille de la conduite, si elle doit transporter du fuel-oil moyen à 4,5 °C à un débit de 350 l/min, sachant que la viscosité cinématique vaut $v = 7\ 10^{-6}$ m²/s.

Solution

q_V = 350 l/min = 350/60 l/s = $U.\pi R^2$

Re < 2400 Û $U{\cdot}2R/v$ < 2400 Û $q_V{\cdot}2R/(v\ \pi R^2)$ < 2400 Û $q_V{\cdot}2/(v\ \pi R)$ < 2400

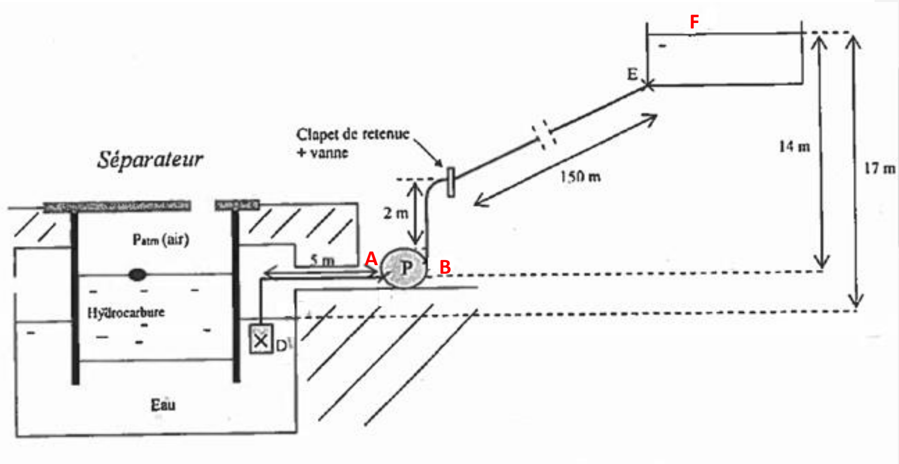
Û $q_V/(v\ \pi R)$ < 1200 Û $q_V/(1200 v\ \pi)$ < R

Soit R > 0,22 m soit D > 440 mm

Exercice 10 Lavage automatique

Commenté [LS12]: Il manque la valeur de P_{atm} dans les données de l'énoncé…

De l'eau est traitée par un séparateur puis stockée dans un bassin situé à 17 m au dessus du séparateur. L'eau est pompée par une pompe (P) nécessitant un débit volumique de q_v =40 L/s.



Données :

Coefficients de pertes de charge singulières ζ : ζ_{clapet} = 3,5, ζ_{coude} = 0,5, ζ_{vanne} = 0,2

Diamètre de toute la tuyauterie : 175 mm

λ = 0,056

ρ_{eau} = 1 kg/L

1) Calculer la perte de charge régulière entre D et E.
2) Calculer la perte de charge singulière entre D et E.
3) Calculer les pressions en entrée et en sortie de pompe.

Corrigé :

1) $\Delta P_{\text{regulières}} = \frac{\text{l}L\rho_{\text{eau}}v^2}{2D} = \frac{\text{l}L\rho_{\text{eau}}q_{\text{V}}^2}{2DS^2} = \frac{0{,}056\times(3+5+2+150)\times1000\times0{,}04^2}{2\times0{,}175\times\pi^2\left(\frac{0{,}175}{2}\right)^4} = 70800\text{ Pa}$

2) $\Delta P_{\text{singulières}} = \Delta P_{\text{coudes}} + \Delta P_{\text{vanne}} + \Delta P_{\text{clapet}}$

$$= 2\text{z}_{\text{coude}}\frac{\rho v^2}{2} + \text{z}_{\text{vanne}}\frac{\rho v^2}{2} + \text{z}_{\text{clapet}}\frac{\rho v^2}{2}$$
$$= \frac{\rho q_{\text{V}}^2}{2S^2}\left(2\text{z}_{\text{coude}} + \text{z}_{\text{vanne}} + \text{z}_{\text{clapet}}\right)$$

$$= \frac{1000\times0{,}04^2\times(0{,}5\times2+3{,}5+0{,}2)}{2\times\pi^2\times\left(\frac{0{,}175}{2}\right)^4} = 6500\text{ Pa}$$

3) $P_{\text{D}} + \rho g z_{\text{D}} + \rho\frac{v_{\text{D}}^2}{2} = P_{\text{A}} + \rho g z_{\text{A}} + \rho\frac{v_{\text{A}}^2}{2} + (\text{z}_{\text{coude}})\frac{\rho v_{\text{A}}^2}{2} + \frac{\text{l}l}{D}\frac{\rho v_{\text{A}}^2}{2}$

$v_D = 0$

$v_{\text{A}} = \frac{q_{\text{V}}}{S} = \frac{q_{\text{V}}}{\pi R^2} = \frac{0{,}04}{\pi\times0{,}0875^2} = 1{,}7\text{ m/s}$

$$P_{\text{atm}} + \rho g z_D = P_A + \rho g z_{\text{A}} + \rho\frac{v_{\text{A}}^2}{2}\left(1 + \text{z}_{\text{coude}} + \frac{\text{l}l}{D}\right)$$
$$P_{\text{A}} = P_{\text{atm}} + \rho g(z_{\text{D}} - z_{\text{A}}) - \rho\frac{v_{\text{A}}^2}{2}\left(1 + \text{z}_{\text{coude}} + \frac{\text{l}l}{D}\right)$$
$$P_{\text{A}} = 100\,000 + 1000\times9{,}81\times(0-3) - \frac{1000\times1{,}7^2}{2}\left(1 + 0{,}5 + \frac{0{,}056\times8}{0{,}175}\right)$$
$$P_{\text{A}} = \mathbf{64\,700\ Pa}$$

$v_{\text{F}} = 0$

$$v_{\mathrm{B}} = \frac{q_{\mathrm{V}}}{S} = \frac{q_{\mathrm{V}}}{\pi R^2} = \frac{0{,}04}{\pi \times 0{,}0875^2} = 1{,}7\ \mathrm{m/s}$$

$$P_{\mathrm{B}} + \rho g z_{\mathrm{B}} + \rho \frac{v_{\mathrm{B}}^2}{2} = P_F + \rho g z_{\mathrm{F}} + \rho \frac{v_{\mathrm{F}}^2}{2} + \left(\mathrm{z}_{\mathrm{coude}} + \mathrm{z}_{\mathrm{vanne}} + \mathrm{z}_{\mathrm{clapet}}\right) \frac{\rho v_{\mathrm{B}}^2}{2} + \frac{\mathrm{l}l}{D} \frac{\rho v_{\mathrm{B}}^2}{2}$$

$$P_{\mathrm{B}} + \rho g z_{\mathrm{B}} + \rho \frac{v_{\mathrm{B}}^2}{2} = P_{\mathrm{atm}} + \rho g z_{\mathrm{F}} + \left(\mathrm{z}_{\mathrm{coude}} + \mathrm{z}_{\mathrm{vanne}} + \mathrm{z}_{\mathrm{clapet}}\right) \frac{\rho v_{\mathrm{B}}^2}{2} + \frac{\mathrm{l}l}{D} \frac{\rho v_{\mathrm{B}}^2}{2}$$

$$P_{\mathrm{B}} = P_{\mathrm{atm}} + \rho g (z_F - z_B) + \rho \frac{v_{\mathrm{B}}^2}{2} (-1 + \mathrm{z}_{\mathrm{coude}} + \mathrm{z}_{\mathrm{vanne}} + \mathrm{z}_{\mathrm{clapet}} + \frac{\mathrm{l}l}{D})$$

$$P_{\mathrm{B}} = 100000 + 1000 \times 9{,}81 \times 14 + \frac{1000 \times 1{,}7^2}{2} \left(-1 + 0{,}5 + 3{,}5 + 0{,}2 + \frac{0{,}056 \times 152}{0{,}175}\right)$$

$$P_{\mathrm{B}} = \mathbf{312\ 249\ Pa}$$

3 RESSOURCES COMPLÉMENTAIRES

Pertes de charges

http://gpip.cnam.fr/ressources-pedagogiques-ouvertes/hydraulique/co/4exo_applicationMoody1.html

https://tech-alim.univ-lille.fr/intro_gia/co/003_exo04.html

Calculateurs en ligne de pertes de charge linéaires
http://www.efluids.com/efluids/pages/calculators.htm

http://www.lmnoeng.com/darcy.htm

http://www.engineeringtoolbox.com/darcy-weisbach-equation-d_646.html