

DST Mathématiques

Durée : 2 heures

*Présentation et orthographe seront pris en compte dans le barème de notation.
Les calculatrices graphiques sont autorisées pour ce sujet.*

Barème approximatif

EXERCICE 1 10 points

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 4te^{\frac{-t}{2}}$

- 1) Montrer que la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(t) = t^2 e^{\frac{-t}{2}}$ est solution de (E)
- 2) Soit l'équation $(E_0) : 2y' + y = 0$
Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0)
- 3) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
- 4) Déterminez la solution de l'équation (E) qui prend la valeur - 96 en 0.

Partie B : Etude de la fonction f

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = (t^2 - 96)e^{\frac{-t}{2}}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Déterminer l'expression de $f'(t)$ fonction dérivée de la fonction f .
3. Etudier le signe de $f'(t)$.
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative C de la fonction f au point d'abscisse 0.
6. Montrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(t) = 2(-t^2 - 4t + 88)e^{\frac{-t}{2}}$ est une primitive de f .

En déduire la valeur exacte de $\int_{-2}^0 f(t)dt$.

EXERCICE 2 10 points

Une entreprise est approvisionnée en « palets » pour la fabrication de lentilles.

Partie A

Dans un lot de ce type de palets, 98 % des palets sont conformes pour le rayon de courbure. On prélève au hasard 50 palets de ce lot pour vérification du rayon de courbure. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 palets.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 palets associe le nombre de palets non conformes pour le rayon de courbure.

Les résultats seront arrondis au centième dans cette partie.

1. Quelle est la loi suivie par X ? En donner les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, un palet et un seul ne soit pas conforme pour le rayon de courbure.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un palet ne soit pas conforme pour le rayon de courbure.

Partie B

Dans cette partie on donnera les valeurs exactes des probabilités.

A l'issue de la fabrication, les lentilles peuvent présenter deux types de défauts :

- une puissance défectueuse
- une épaisseur défectueuse.

On prélève une lentille au hasard dans la production d'une journée.

On note A l'évènement : « la lentille présente une puissance défectueuse »

On note B l'évènement : « la lentille présente une épaisseur défectueuse »

On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0.03$ et $P(B) = 0.02$ et on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement E : « la lentille prélevée présente les deux défauts »
2. Calculer la probabilité de l'évènement F : « la lentille prélevée présente au moins l'un des deux défauts »
3. Calculer la probabilité de l'évènement G : « la lentille prélevée ne présente aucun défaut »
4. Calculer la probabilité de l'évènement H : « la lentille prélevée présente un seul des deux défauts »

Un repas d'entreprise est organisé.

Le restaurateur propose trois types de menus : le premier à 40 €, le deuxième à 30 € et le troisième à 20 €. Il constate que 10 % des clients prennent le menu à 40 € et 50 % celui à 30 €.

De plus, parmi les clients prenant le menu à 40 €, 85 % donnent un pourboire au serveur ; parmi ceux prenant le menu à 30 €, 65 % donnent un pourboire au serveur et parmi ceux qui prennent le menu à 20 €, 25 % donnent un pourboire au serveur.

Pour un client on désigne par :

- A l'événement « prendre un menu à 40€ »
- B l'événement « prendre un menu à 30 € »
- C l'événement « prendre un menu à 20 € »
- S l'événement « donner un pourboire au serveur »

A la sortie du restaurant, on interroge un client choisi au hasard.

1. Calculer la probabilité :
 - a) qu'il ait pris un menu à 20 € ;
 - b) qu'il ait pris un menu à 30 € et qu'il ait laissé un pourboire ;
 - c) qu'il ait laissé un pourboire ;
 - d) qu'il ait pris un menu à 20 € sachant qu'il a laissé un pourboire au serveur (le résultat de cette question sera donné au centième);
2.
 - a) On suppose que quand un client laisse un pourboire au serveur, le montant de ce pourboire est égal à 5 % du prix du menu. On note X le montant du pourboire donné au serveur. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
 - b) Combien le serveur peut-il espérer gagner en pourboire en sachant que lors de ce repas 100 personnes étaient présentes