Variable aléatoire discrète

Exemple :

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3, indiscernables au toucher. On procède à deux tirages successifs d'une boule, en remettant à chaque tirage le boule dans l'urne. On s'interesse à la somme des numéros inscrits sur le 2 boules tirées.

a) Quels sont les tirages possibles ? En déduire l'univers.

$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

b) Quels sont les sommes possibles ?

Les sommes possibles sont : 2, 3, 4, 5 et 6.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir l'une de ces sommes ?

Les événements élémentaires de Ω sont équiprobables :
$P(\{(1,1)\})=P(\{(1,2)\})=...=\frac{1}{9}$.

À chaque couple, on fait correspondre la somme des numéros.

On définit ainsi une application X de Ω dans $\mathbb{R}$.

La somme 2 correspond à l'événement $\{(1,1)\}$, noté $X=2$ d'où

$P(X=2)=P(\{(1,1)\})=\frac{1}{9}$

On définit de même :

$P(X=3)=P(\{(1,2),(2,1)\})=\frac{2}{9}$

$P(X=4)=P(\{(1,3),(2,2),(3,1)\})=\frac{3}{9}$

$P(X=5)=P(\{(2,3),(3,2)\})=\frac{2}{9}$

$P(X=6)=P(\{(3,3)\})=\frac{1}{9}$.

Définition

Soit Ω un univers fini à N éventualités, $\Omega=\{\omega_1,\omega_{2,...},\omega_N\}$ $(N\in\mathbb{N})$.
On appelle **variable aléatoire** toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$

$$X:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$$

$$\omega_i\rightarrow x_i$$

x_i est appelé **valeur** de la variable aléatoire X .

Lorsque l'univers Ω est fini la variable aléatoire X est dite **discrète**.

Loi de probabilité d’une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire de valeurs x_i .
L’ensemble des couples $(x_i, P(X=x_i))$ constitue la **loi de probabilité de la variable aléatoire**.

Par rapport à l'exemple précédent :

La loi de probabilité de X est définie par le tableau de probabilité suivant :

Valeurs de x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

On vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

Valeurs caractéristique d’une variable aléatoire à *n* valeurs réelles

On appelle **espérance mathématique** de la variable aléatoire X le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n \quad .$$

L’espérance mathématique correspond à la moyenne arithmétique définie en statistique.

Par rapport à l'exemple précédent : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i=\frac{1}{9}\times 2+\frac{2}{9}\times 3+\frac{3}{9}\times 4+\frac{2}{9}\times 5+\frac{1}{9}\times 6=4$.

On appelle **variance** de la variable aléatoire X le réel positif, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2-[E(X)]^2 \quad .$$

L’**écart type** de la variable aléatoire X est le réel positif $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)} \quad .$$

Par rapport à l'exemple précédent :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2-[E(X)]^2=\frac{1}{9}\times 2^2+\frac{2}{9}\times 3^2+\frac{3}{9}\times 4^2+\frac{2}{9}\times 5^2+\frac{1}{9}\times 6^2-4^2=\frac{4}{3}\approx 1{,}33$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}15 \quad .$$

Exercices

Ex 1 : Une machine est alimentée en résistances de 1 à 2 ohms. Elle doit souder successivement trois résistances en série : deux de 2 ohms, puis une de 1 ohm.
Elle se dérègle et soude trois résistances au hasard. Un résultat est donné sous la forme d'un triplet : par exemple (1,1,2). Tous les triplets sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le montage prévu ?
2. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la somme des trois résistances. Définir la loi de probabilité de X.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un résultat inférieur ou égal à 4.
4. Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance et son écart type.

Ex 2 : Une entreprise fabrique des moteurs électriques en deux phases indépendantes.
La première est susceptible de faire apparaître un défaut électrique A sur 2 % des moteurs et la seconde un défaut mécanique B sur 4 % des moteurs.
On prélève un moteur au hasard dans la production.

1. Calculer la probabilité des événements suivants.
   a) Le moteur présente les 2 défauts.
   b) Le moteur ne présente aucun des défauts.
   c) Le moteur présente au moins un des deux défauts.
   d) Le moteur présente un seul défaut.

2. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de types de défaut (A ou B) présentés par les moteurs.
   a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
   d) Calculer la variance $V(X)$ et en déduire l'écart type de X. On donnera les résultat à 10^{-2} prés.