Introduction à la géométrie euclidienne

Le mot **géométrie** vient du grec et signifie **mesure de la terre**. Au cours du VI^e siècle avant J.C., la connaissance géométrique des Égyptiens et des Babyloniens a été introduite en Grèce, en particulier par **Thalès** et **Pythagore**. Pendant environ trois siècles, l'étude de la géométrie a progressé en Grèce. L'œuvre d'**Euclide** (III^e siècle avant J.C.) les "Éléments" a constitué le point de départ de l'enseignement de la géométrie au cours des siècles. La géométrie que nous allons étudier est en fait appelée **géométrie euclidienne**.

Les éléments constitutifs de la géométrie euclidienne sont les **points**, les **droites** et les **plans**.

La construction d'Euclide se fonde sur cinq **axiomes** :

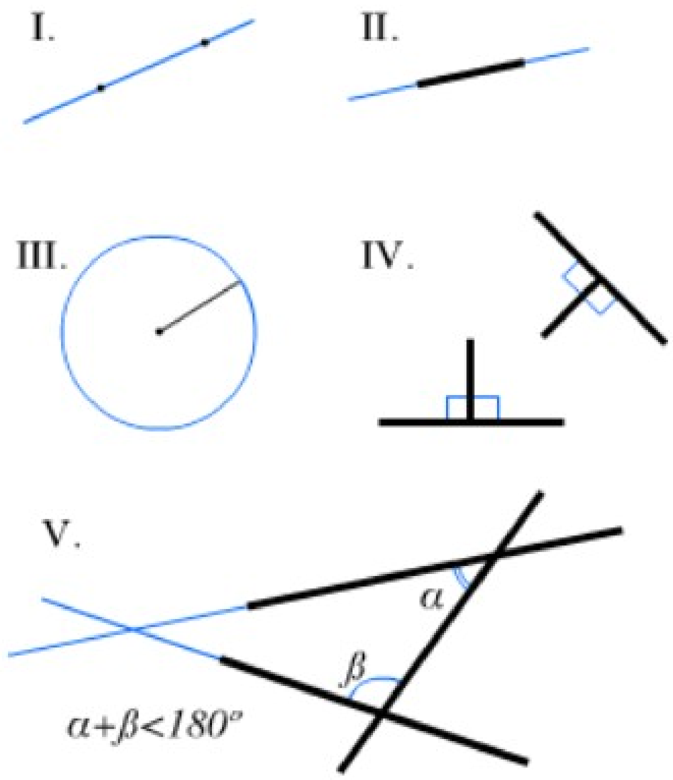
I. un **segment** de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts ;

II. un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite ;

III. étant donné un segment de droite quelconque, un **cercle** peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre ;

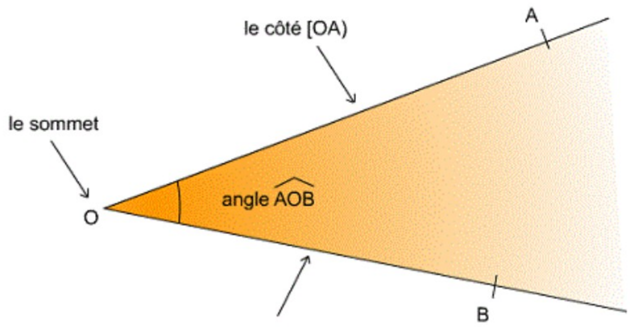
IV. tous les **angles droits** sont **congruents** ;

V. si deux lignes sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est strictement inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

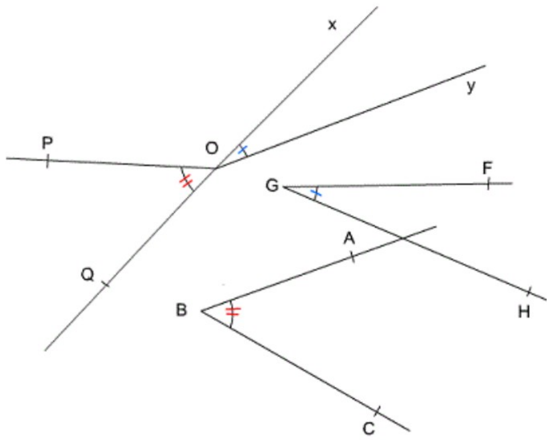


Les angles

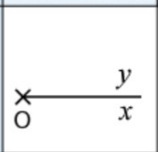
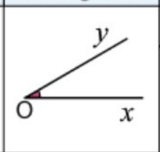
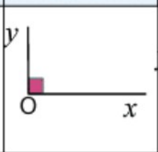
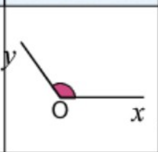
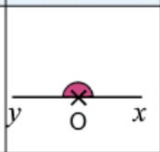
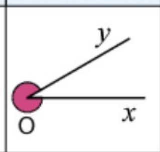
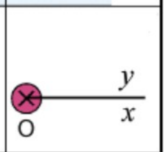
L'angle est une portion de plan délimitée par deux demi-droites de même origine. L'origine des demi-droites est le sommet de l'angle, et les demi-droites ses côtés.



Deux angles sont **superposables** si en déplaçant et tournant l'un si besoin, on recouvre exactement l'autre. On dit qu'ils sont **congruents**. On peut coder avec des symboles identiques les angles superposables.



Les différents types d’angles

Angle	Nul	Aigu	Droit	Obtus	Plat	Rentrant	Plein
Figure							
Mesure	0°	entre 0° et 90°	90°	entre 90° et 180°	180°	entre 180° et 360 °	360°
Position des côtés	confondus		perpendi-culaires		dans le prolongement l'un de l'autre		confondus

Angles **saillants**

L'**angle convexe** est l'angle mesurant plus de 0° mais moins de 180°.

L'**angle concave** est l'angle avec une amplitude supérieure à 180° et inférieure à 360°.

Mesure des angles : unités et conversions

Le degré

La mesure d'un angle en degrés est héritée des babyloniens qui avaient un système de numérotation en base 60. Les arabes ont ensuite utilisé le degré pour mesurer les angles astronomiques. Une année valant environ 360 jours, la rotation de la terre autour du soleil s'effectue avec un angle approximatif d'un degré par jour. La mesure du temps en a découlé, d'où la subdivision de l'heure en minutes et secondes.

Par définition, un degré (symbole °) correspond au 1/360ème d'un angle plein.
Les sous-unités du degré sont :

- La minute (symbole ′) : 1° = 60′
- La seconde (symbole ″) : 1′ = 60″, 1° = 3600″

La notation d'un angle sous forme décimale peut être utilisée : $90° \div 4 = 22{,}5°$.

On peut convertir la notation décimale en celle en degré/minute/seconde et vice versa en faisant un produit en croix :

$22{,}5° = 22° + 0{,}5°$

degré	minute
1	60
0,5	?

$0{,}5° = \left(\frac{0{,}5 \times 60}{1}\right)' = 30'$. Donc $22{,}5° = 22°\ 30'$.

Exemple 1 : Convertir en notation degré/minute/seconde l'angle $25{,}32°$.

$25{,}32° = 25° + 0{,}32°$

degré	minute
1	60
0,32	?

$0{,}32° = \left(\frac{0{,}32 \times 60}{1}\right)' = 19{,}2'$. Donc $25{,}32° = 25°\ 19{,}2'$.

Pour obtenir les secondes, on a besoin d'un autre produit en croix :

$19{,}2' = 19' + 0{,}2'$

minute	seconde
1	60
0,2	?

$0{,}2' = \left(\frac{0{,}2 \times 60}{1}\right)'' = 12''$. Donc $25{,}32° = 25°\ 19'\ 12''$.

Exemple 2 : Convertir en notation décimale l’angle $83° \ 15' \ 36''$.

degré	minute
1	60
?	15

$15' = \left(\frac{15 \times 1}{60}\right)^{\circ} = 0{,}25°$.

degré	seconde
1	3600
?	36

$36'' = \left(\frac{36 \times 1}{3600}\right)^{\circ} = 0{,}01°$. Donc $83° \ 15' \ 36'' = (83 + 0{,}25 + 0{,}01)° = 83{,}26°$.

Exemple 3 : Calculer la différence $180° - 83° \ 22' \ 30''$.

On écrit : $180° \ = \ 179° + 1° \ = \ 179° \ 60' \ = \ 179° \ 59' \ 60''$.

Donc $180° - 83° \ 22' \ 30'' \ = \ 179° \ 59' \ 60'' \ - \ 83° \ 22' \ 30'' \ = \ 96° \ 37' \ 30''$.

Exercices

Ex 1 : Convertir en notation degré/minute/seconde les angles

$$34{,}53° \quad 22{,}7° \quad 12{,}41° \quad 96{,}33° \quad 108{,}56° .$$

Ex 2 : Convertir en notation décimale les angles

$$27° \ 17' \ 24'' \quad 50° \ 42' \quad 30° \ 15' \quad 27° \ 10' \ 30'' \quad 100° \ 24' \ 45'' .$$

Ex 3 : Calculer la différence $113° \ 15' \ 21'' \ - \ 66° \ 44' \ 39''$.

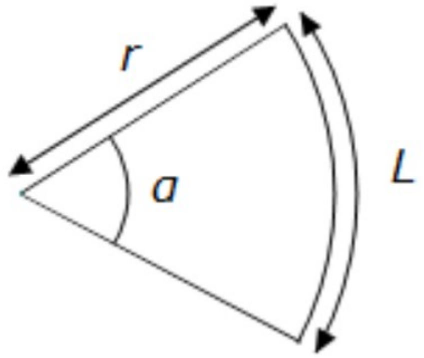
Ex 4 : Du point O appartenant au segment AB sortent, dans le même demi-plan, les demi-droites OC et OD de manière à former les angles $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}A$ congruents entre eux et la demi-droite OE perpendiculaire à AB .
Quelle est la mesure de l'angle $D\hat{O}A$? Démontrer que OE est bissectrice de l'angle $C\hat{O}D$.

Ex 5 : On considère un angle obtus $X\hat{O}Y$. Construire la demi-droites OX' à l'intérieur de l'angle $X\hat{O}Y$ perpendiculaire à OX . Construire ensuite la demi-droites OY' , à l'intérieur de l'angle $X\hat{O}Y$ perpendiculaire à OY .
Montrer que les angles $X\hat{O}Y'$ et $X'\hat{O}Y$ sont congruents, et que $XOY + X'OY' = 180°$.

Le radian

Le radian (symbole rad) se défini par rapport au nombre π (pi). Un tour complet vaut 2π .

Cette unité est très utilisée en mathématiques car est permet une relation directe entre un angle exprimé en radians et la longueur d'un arc de cercle associé.



La relation entre la longueur L d'un arc de cercle de rayon r et l'angle associé α exprimé en radians est égale à :

$$L = r\,\alpha \quad \text{et donc} \quad \alpha = \frac{L}{r} \;.$$

- **Angle nul** : 0 rad .
- **Angle droit** : $\frac{\pi}{2}$ rad .
- **Angle plat** : π rad .
- **Angle plein** : 2π rad .

La mesure de la circonférence C d'un cercle de rayon r est : $C = 2\pi r$.

- L'arc de cercle associé à l'**angle plein** est la circonférence, donc dans ce cas :

$$L = 2\pi r \quad \text{et alors} \quad \alpha = \frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ \text{rad} .$$

- L'arc de cercle associé à l'**angle plat** est la moitié de la circonférence, donc dans ce cas :

$$L = \frac{2\pi r}{2} = \pi r \quad \text{et alors} \quad \alpha = \frac{L}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi \ \text{rad} .$$

- L'arc de cercle associé à l'**angle droit** est un quart de la circonférence, donc dans ce cas :

$$L = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2} \quad \text{et alors} \quad \alpha = \frac{L}{r} = \frac{\pi r}{2r} = \frac{\pi}{2} \ \text{rad} .$$

Exemple 1 : Convertir $15°$ en radians.

degré	radian
360	2π
15	?

Donc : $15° = \frac{15 \times 2\pi}{360} = \frac{15}{180}\pi = \frac{1}{12}\pi = \frac{\pi}{12}$ rad .

Exemple 2 : Convertir $\frac{3}{5}\pi$ en degrés.

degré	radian
360	2π
?	$\frac{3}{5}\pi$

Donc : $\frac{3}{5}\pi = \frac{3}{5}\pi \times \frac{360}{2\pi} = 108°$.

Exercices

Ex 1 : Convertir les angles suivants en radians

$$20° \quad 120° \quad 72° \quad 150° \quad 270° \quad 305° \quad 300° \ .$$

Ex 2 : Convertir les angles suivants en degrés

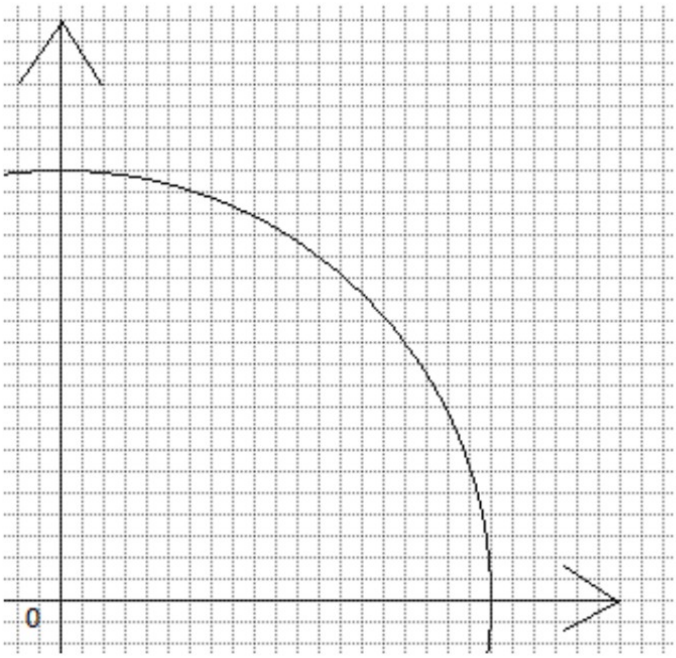
$$\frac{7}{12}\pi \quad \frac{6}{5}\pi \quad \frac{3}{4}\pi \quad \frac{3}{2}\pi \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{5}{6}\pi \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{8}{5}\pi \ .$$

Ex 3 : Complèter le tableau de proportionnalité suivant :

Angle en degré	$180°$		$72°$		$120°$	
Angle en radian	π	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{\pi}{6}$

Ex 4 : « ***Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit un sens d'orientation ou sens direct ou sens positif, c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre*** **».** Sur le quart de cercle trigonométrique ci-contre, à l'aide d'un rapporteur, placer les valeurs suivantes, correspondants aux mesures des angles en radians, représentant :

$$0 \ , \ \frac{\pi}{6} \ , \ \frac{\pi}{4} \ , \ \frac{\pi}{3} \ , \ \frac{\pi}{2} \ .$$



Ex 5 : Tracer un cercle trigonométrique et place les mesures d'angles suivantes :

$$-\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{6},\ -\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{5}{3}\pi,\ -\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{5}{6}\pi,\ -2\pi,\ -3\pi \ .$$

Ex 6 : Tracer un cercle trigonométrique et place les mesures d'angles suivantes :

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{7}{3}\pi \ .$$

Que peut-on conclure?