

PROJET MECANIQUE DES FLUIDES

PROSIT 1 - WORKSHOP

02/10/2020

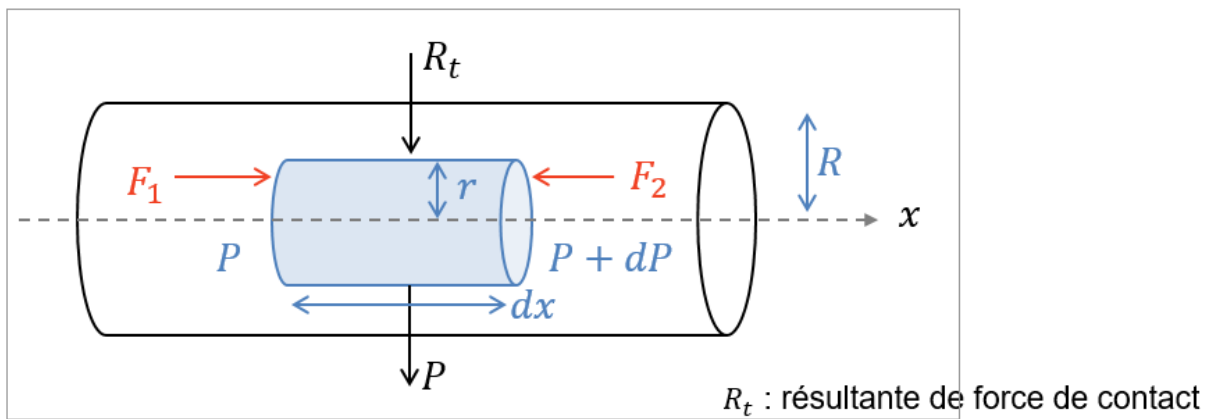
Table des matières

1 ÉCOULEMENT LAMINAIRE DANS UN TUBE (FLUIDE REEL)	2
Exemple Poiseuille :	4
2 PERTES DE CHARGES (FLUIDES REELS)	5
Pertes de charges régulières Abaques $\lambda = f(\varepsilon D)$	7
Pertes de charges singulières	8
Exercice 1	11
Exercice 2	12
Exercice 3 Tubes de Pitot	13
Exercice 4	14
Exercice 5 Effort exercé sur un coude	15
Exercice 6 Effort exercé sur un rétrécissement	15
Exercice 7	16
Exercice 8	19
Exercice 9	19
Exercice 10 Lavage automatique	19
3 RESSOURCES COMPLEMENTAIRES	22

1 ÉCOULEMENT LAMINAIRE DANS UN TUBE (FLUIDE REEL)

► Hypothèses :

- Le tube est horizontal.
- Le tube a une section constante de rayon R .
- L'écoulement est constant, le débit est donc constant.
- L'écoulement est laminaire : la vitesse est parallèle à l'axe du tube et ne dépend que de la distance r à l'axe du tube.
- L'écoulement se fait dans la direction Ox .



► Inventaire des forces selon l'axe x :

- Forces de pression exercées sur la face amont : $F_1 = P \cdot \pi r^2$
- Forces de pression exercées sur la face aval : $F_2 = -(P + dP) \cdot \pi r^2$
- Forces de viscosité : $\mu \frac{\partial v}{\partial n} \cdot dS = \mu \frac{\partial v}{\partial r} \cdot 2\pi r \cdot dx$

En utilisant le PFD, déterminer l'expression de dv en fonction de dr

$$\sum F_{ext} = P \cdot \pi r^2 - (P + dP) \cdot \pi r^2 + \mu \frac{\partial v}{\partial r} \cdot 2\pi r \cdot dx = 0$$

La vitesse dépend de r uniquement donc :

$$dv = \frac{r}{2\mu} \frac{dP}{dx} dr$$

► Intégration de v :

$$v(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} r^2 + C^{st}$$

- A la paroi, les particules de fluides sont immobiles : $v(R) = 0$

$$C^{st} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} R^2$$

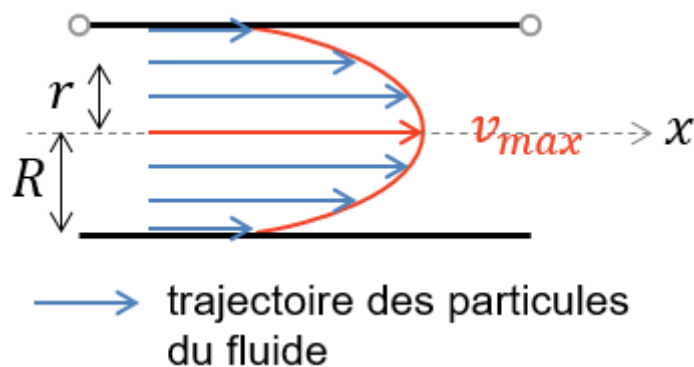
Donc l'expression de la vitesse est :

$$v(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2)$$

C'est l'équation d'une parabole centrée sur l'axe x .

v_{max} dans l'axe du tube vaut :

$$v_{max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} R^2$$



- Débit : formule de Poiseuille.

$$dq_v = v \cdot dS = v(r) \cdot 2\pi r \cdot dr \quad \text{donc} \quad q_v = \int_0^R -\frac{\pi}{2\mu} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2) r \cdot dr \quad \text{donc} :$$

$$q_v = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{dP}{dx} R^4$$

- Vitesse moyenne \bar{v} vaut donc :

$$\bar{v} = \frac{q_v}{S} = -\frac{1}{8\mu} \frac{dP}{dx} R^2$$

En connaissant la longueur L (m) de la conduite, on obtient :

$$\bar{v} = -\frac{1}{8\mu} \frac{\Delta P}{L} R^2 \quad \text{avec} \quad \Delta P \text{ la variation de pression sur la longueur } L \text{ de la conduite.}$$

Exemple Poiseuille :

On pompe une huile de densité 0,86 par une conduite horizontale de diamètre $D=10\text{cm}$, de longueur $L=15\text{m}$ avec un débit volumique $q_v=1,2\text{L.s}^{-1}$. La différence de pression entre les deux extrémités de la conduite est de 4,6mbar.

Déterminer la vitesse moyenne, le régime et la viscosité.

Correction

Selon la loi de Poiseuille, pour un écoulement en régime laminaire dans une conduite cylindrique, la vitesse moyenne du fluide est donnée par l'équation suivante :

$$u_{\text{moy}} = \frac{R^2}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{\Delta p}{L} \quad \text{soit} \quad \mu = \frac{R^2}{8 \cdot u_{\text{moy}}} \cdot \frac{\Delta p}{L}$$

Or
$$u_{\text{moy}} = \frac{q_v}{\Pi \cdot R^2} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{\Pi \cdot 0,05^2} \approx 0,153 \text{m.s}^{-1}$$

Finalement :
$$\mu = \frac{0,05^2 \cdot 4,6 \cdot 10^2}{8 \cdot 0,153 \cdot 15} \approx 0,063 \text{Pa.s}$$

et
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0,063}{860} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Vérification a posteriori du régime laminaire :

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = \frac{860 \cdot 0,153 \cdot 0,1}{0,063} \approx 209$$

$Re < 2000$, le régime d'écoulement est bien laminaire.

2 PERTES DE CHARGES (FLUIDES REELS)

- Pour un fluide réel, il n'y a pas conservation de la charge :

$$P_A + \rho \cdot g \cdot z_A + \frac{1}{2} \rho \cdot v_A^2 \neq P_B + \rho \cdot g \cdot z_B + \frac{1}{2} \rho \cdot v_B^2$$

$$P_A + \rho \cdot g \cdot z_A + \frac{1}{2} \rho \cdot v_A^2 = P_B + \rho \cdot g \cdot z_B + \frac{1}{2} \rho \cdot v_B^2 + \Delta P$$

Il existe deux types de pertes de charges ΔP :

- Les pertes de charges régulières (ou linéaires) dues aux frottement au sein du fluide et contre les parois,
- Les pertes de charges singulières liées aux accidents de parcours : coude, élargissement, rétrécissement, etc.
- Les pertes de charges régulières dans une canalisation :

$$\Delta P_{reg} = \frac{\lambda \cdot L \cdot \rho \cdot v^2}{2 \cdot D}$$

(Pa ou J.m⁻³)

$$H_{reg} = \frac{\lambda \cdot L \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot D}$$

(mCF)

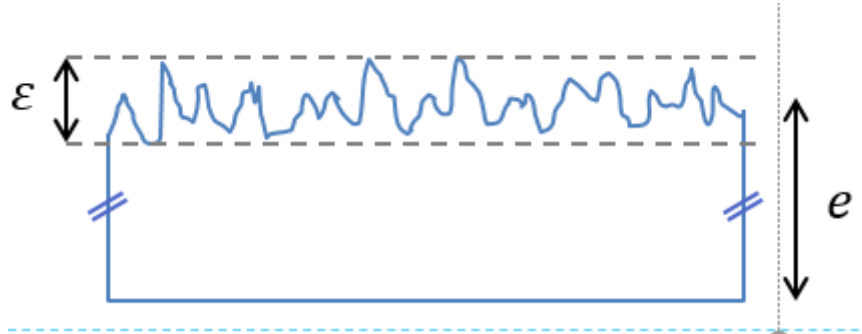
$$J_{reg} = \frac{\lambda \cdot L \cdot v^2}{2 \cdot D}$$

(J.kg⁻¹)

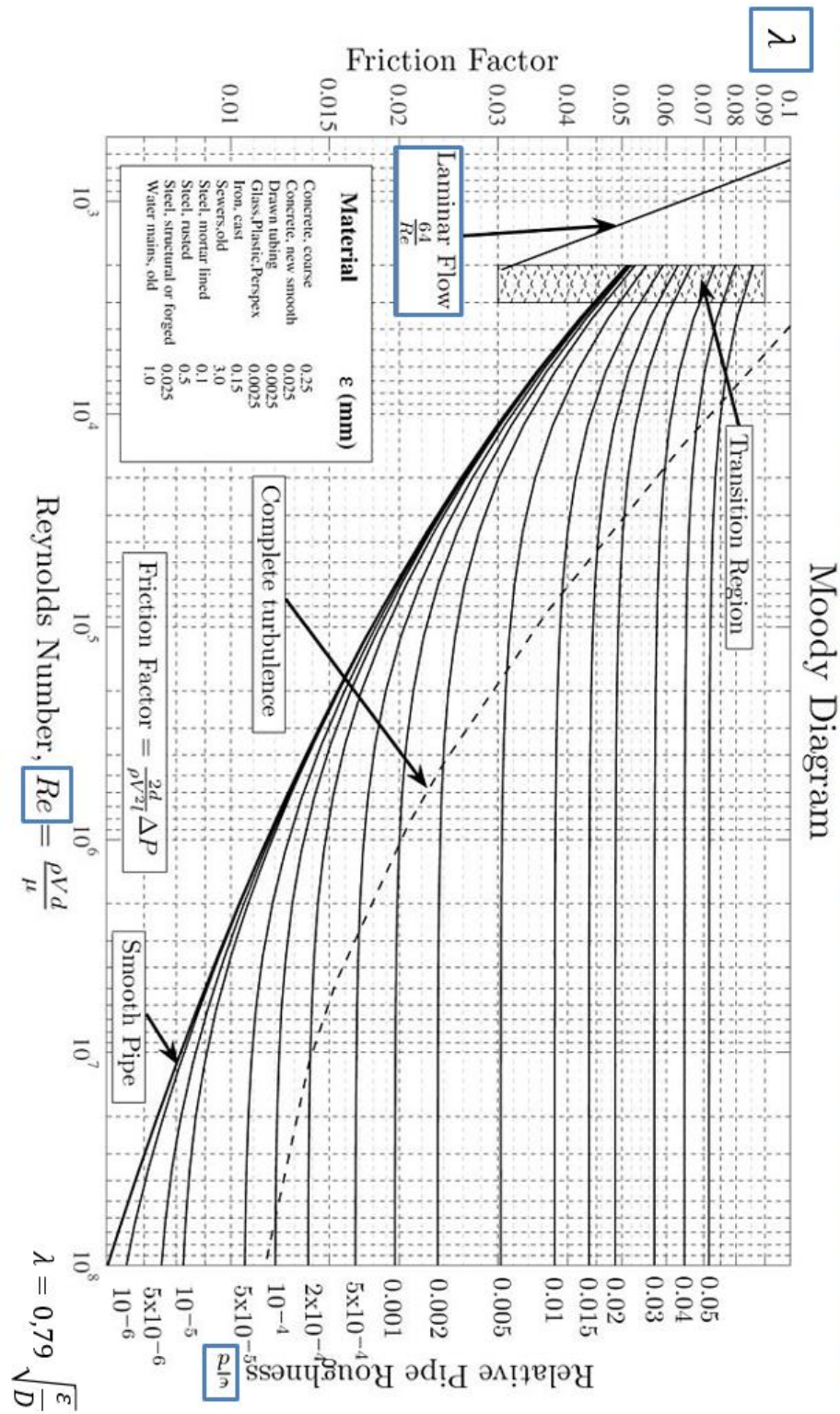
mCF := Mètre de colonne de Fluide

- Nombre de Darcy en régime laminaire de Poiseuille : $\lambda = \frac{64}{Re}$
- Nombre de Darcy en régime de Blasius : $\lambda = 0.3164 Re^{-0.25}$
 - λ : nombre de Darcy (Pa.m⁻¹),
 - L : longueur canalisation (m),
 - D : diamètre canalisation (m),
 - ρ : masse volumique (kg.m⁻³),
 - v : vitesse (m.s⁻¹).

- Nombre de Darcy en régime turbulent rugueux : $\lambda = 0,79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$



Pertes de charges régulières Abaques $\lambda = f(\varepsilon/D)$



Pertes de charges singulières

Elles apparaissent à chaque incident de parcours.

$$\Delta P_{sing} = \frac{\zeta \cdot \rho \cdot v^2}{2}$$

(Pa ou J.m⁻³)

$$H_{sing} = \frac{\zeta \cdot v^2}{2 \cdot g}$$

(mCF)

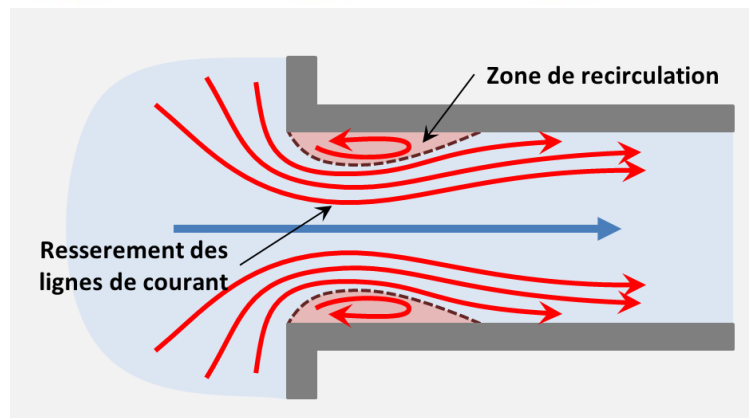
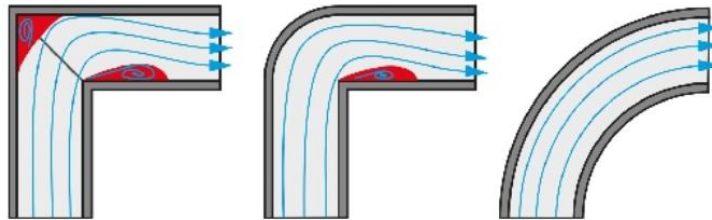
$$J_{sing} = \frac{\zeta \cdot v^2}{2}$$

(J.kg⁻¹)

ζ : coefficient de contraction (su), aussi noté K ,

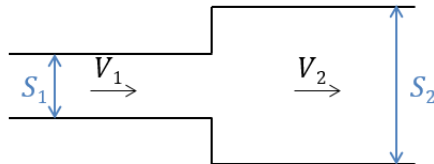
ρ : masse volumique (kg.m⁻³),

v : vitesse en amont de la singularité (m.s⁻¹).



- Évasement brusque :

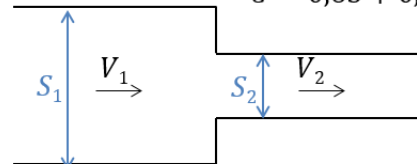
$$\zeta_{th} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$



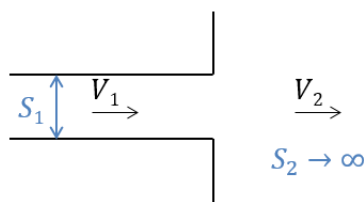
- Rétrécissement brusque :

$$\zeta_{th} = \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2$$

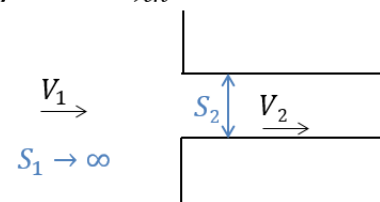
$$C = 0,63 + 0,37 \left(\frac{S_2}{S_1}\right)$$



- Arrivée d'une tuyauterie dans un réservoir : $\zeta_{th} = 1$

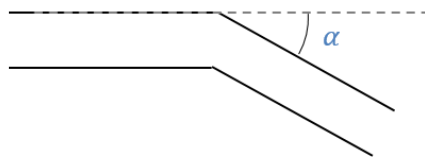


- Sortie d'un réservoir par une tuyauterie : $\zeta_{th} = 0,5$



- Coude incliné :

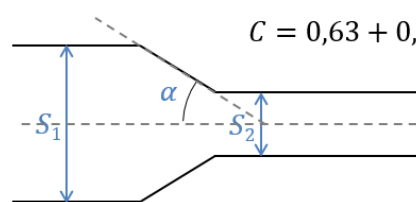
$$\zeta_{th} = 1,3(1 - \cos \alpha)$$



- Rétrécissement incliné :

$$\zeta_{th} = \sin \alpha \left(\frac{1}{C} - 1\right)^2$$

$$C = 0,63 + 0,37 \left(\frac{S_2}{S_1}\right)$$

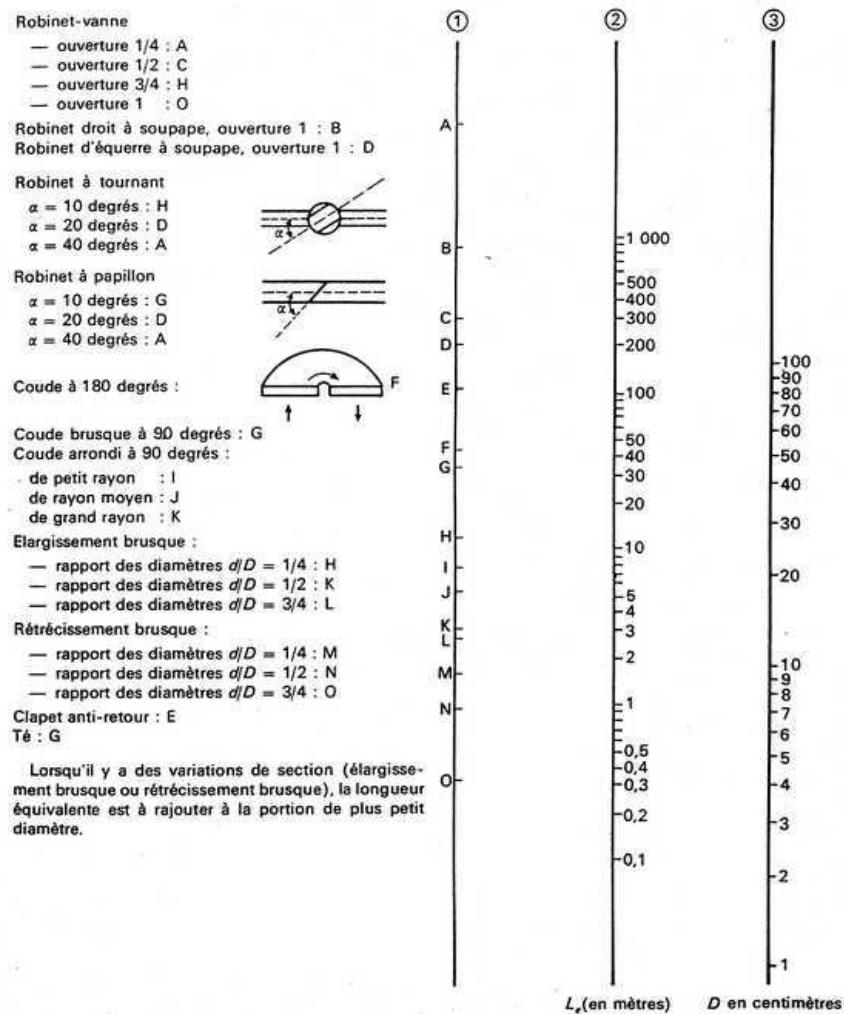


- Coude à angle droit : $\zeta_{th} = 1$

- Coude à 45° : $\zeta_{th} = 0,7$

- Il existe des abaques rédigés par les fournisseurs.

Exemple ci-contre pour des vannes.



Exercice 1

On pompe une huile de densité 0,860 par un tube horizontal de diamètre $D = 5$ cm, de longueur $L = 300$ m avec un débit $Q = 1,20$ l/s. L'écoulement est supposé laminaire. La perte de charge pour ce tronçon est de 21 m C.E. (colonne d'eau).

Quels sont les viscosités dynamique et cinématique de l'huile utilisée ?

Quel est le nombre de Reynolds de l'écoulement ?

Solution :

Perte de charge linéaire : $H_{reg} = \frac{\lambda \cdot L \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot D}$

Ici $u = \frac{4q}{\pi D^2} = 4 \times 1,2 \times 10^{-3} / \pi (0.05)^2 = 0,611$ m/s

On en déduit

$$\lambda = 21 \times 0,05 \times 2 \times 9,81 / (0,86 \times 300 \times 0,611^2) = 0,214$$

Si on suppose que l'écoulement est laminaire (à vérifier par le calcul du nombre de

Reynolds ensuite), il vient que par la relation de Poiseuille : $\lambda = 64 \cdot \text{Re}^{-1}$

- pour la viscosité cinématique :

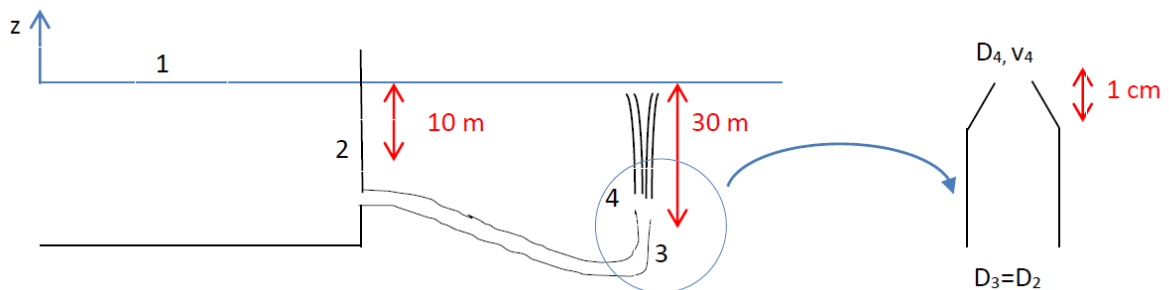
$$\nu = \lambda U D / 64 = 0,214 \times 0,611 \times 0.05 / 64 = 1,02 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\mu = \nu \rho = 1,02 \cdot 10^{-4} \times 860 = 0,0877 \text{ Poiseuille} = 0,0877 \text{ Pa.s}$$

Mais $\text{Re} = 64 / \lambda = 299 \ll 2400$, on est bien en laminaire

Exercice 2

L'entrée E d'un tuyau de diamètre $D_2=8\text{cm}$ se trouve à 10m sous la surface libre d'un réservoir d'eau de grandes dimensions, et la sortie à 30m au-dessous de cette même surface libre. Il se termine par une courte tuyère de diamètre $D_4=4\text{cm}$. On se place dans le cas d'un fluide parfait ($\rho_{\text{eau}}=1\text{kg/L}$).



- 1) Quelle est la valeur de la vitesse v_4 à la sortie de la tuyère ?
- 2) Quel est le débit d'eau qui s'écoule ?
- 3) Quel est dans le tuyau, la valeur de la pression en 2 ainsi que dans une section S située juste en amont de la tuyère de sortie ?

Corrigé :

$$1) P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_4 + \rho g z_4 + \rho \frac{v_4^2}{2}$$

$$P_{atm} + 0 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_{atm} - 30g + \rho \frac{v_4^2}{2}$$

$$v_1^2 + 60g = v_4^2$$

$$\text{Le débit est conservatif : } S_1 v_1 = S_4 v_4 \text{ donc } v_1 = \frac{S_4 v_4}{S_1}$$

$$\text{Donc } v_4 = \sqrt{\frac{60g}{1 - \left(\frac{S_4}{S_1}\right)^2}}$$

$$\text{Comme } S_1 \gg S_4 \text{ alors } v_4 = \sqrt{60g} = 24.3 \text{ m/s}$$

$$2) Q_{v4} = S_4 v_4 = \pi \left(\frac{D_4}{2}\right)^2 \cdot v_4 = \pi * (2.10^{-2})^2 * 24.3 = 0.03 \text{ m}^3/\text{s}$$

3) Le débit est conservatif : $S_3 v_3 = S_4 v_4 = S_2 v_2$ donc $v_2 = v_3 = \frac{S_4 v_4}{S_3} = \frac{0.03}{\pi \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2} = 6 \text{ m/s}$

$$P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = P_4 + \rho g z_4 + \rho \frac{v_4^2}{2}$$

$$P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = P_{atm} + \rho g z_4 + \rho \frac{v_4^2}{2}$$

$$P_2 = P_{atm} + \rho g (z_4 - z_2) + \frac{\rho}{2} (v_4^2 - v_2^2)$$

$$= 100000 + 1000 \cdot 9.8 \cdot (-30 + 10) + 500 \cdot (24.3^2 - 6^2)$$

$$= 181245 \text{ Pa}$$

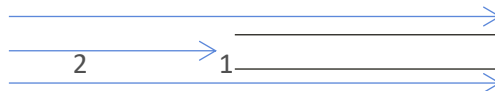
$$P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = P_3 + \rho g z_3 + \rho \frac{v_3^2}{2} \text{ car } v_2 = v_3$$

$$P_3 = P_2 + \rho g (z_2 - z_3) = 181245 + 1000 \cdot 9.8 \cdot 20 = 377245 \text{ Pa}$$

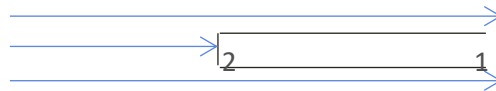
Exercice 3 Tubes de Pitot

Montrer que pour un fluide parfait, dans un tube ouvert à une extrémité et fermé à l'autre :

1) la pression dans le tube est égale à la pression totale si l'extrémité ouverte est face à l'écoulement



2) la pression dans le tube est égale à la pression si l'extrémité ouverte est dos à l'écoulement



Corrigé :

$$1) P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$$

En 1, la vitesse est nulle car le fluide ne bouge pas dans le tube.

$$P_1 = P_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} = \text{pression totale du fluide}$$

$$2) P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$$

$v_1 = v_2 = 0$ car la pression est nulle au bord du tube

$$P_1 = P_2$$

Exercice 4

Du fioul lourd circule d'A à B par un tuyau d'acier de diamètre $D = 15$ cm et de longueur $L = 900$ m. Sa densité est 0,915 et sa viscosité cinématique est de $4,13 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. La pression en A est 110 mCE, celle en B de 3,5 mCE.

Quelle est le débit en l/s ?

Solution :

On suppose que le régime est laminaire

Perte de charge linéaire : $H_{\text{rég}} = \frac{\lambda \cdot L \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot D}$ et $\Delta P_{\text{rég}} = \frac{\lambda \cdot L \cdot \rho \cdot v^2}{2 \cdot D}$ avec $\lambda = 64 \cdot \text{Re}^{-1}$

$$\Delta P_{\text{rég}} = \rho g \Delta H_{\text{rég}} = \frac{64 \cdot L \cdot \rho v^2}{\text{Re} \cdot 2 \cdot D} = \frac{64 \cdot L \cdot \rho v^2 \cdot v}{v D \cdot 2 \cdot D} = \frac{32 \rho \cdot L \cdot v \cdot v}{D D}$$

On travaille en pression car les colonnes d'eau MCE ne sont pas des colonnes de fioul.

$$U = \frac{\rho_{\text{eau}} g \cdot \Delta H D^2}{32 v \rho_{\text{fioul}} L} = 9,81 \times 106,5 \times (0,15)^2 / (32 \times 4,13 \cdot 10^{-4} \times 0,915 \times 900) = 2,16 \text{ m/s}$$

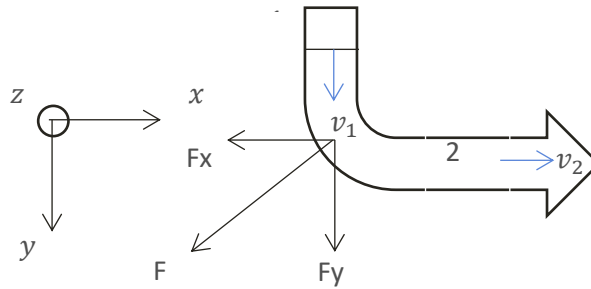
On vérifie de suite l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds : $\text{Re} = 784 < 2400$

On en déduit le débit volumique : $Q = U \times \pi R^2 = 38,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 38,2 \text{ l/s}$

Exercice 5 Effort exercé sur un coude

Une conduite d'eau horizontale de diamètre intérieur $D_1=100\text{mm}$ est le siège d'un écoulement permanent d'eau (considéré comme un fluide parfait) de débit 30L/s . A l'entrée du coude, la pression statique (relative) du fluide est de 2 bars.

Calculer la résultante horizontale des forces exercées par le fluide sur le coude.



Corrigé :

$$\vec{F} = P_1 S_1 \vec{n}_1 - P_2 S_2 \vec{n}_2 + q_m (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \vec{P}$$

$$-Fx = -P_2 S_2 - q_m v_2 = -P_2 S_2 - \rho q_v v_2$$

$$Fy = P_1 S_1 + q_m v_1 = P_1 S_1 + \rho q_v v_1$$

$$Fz = P$$

~~$$P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$$~~

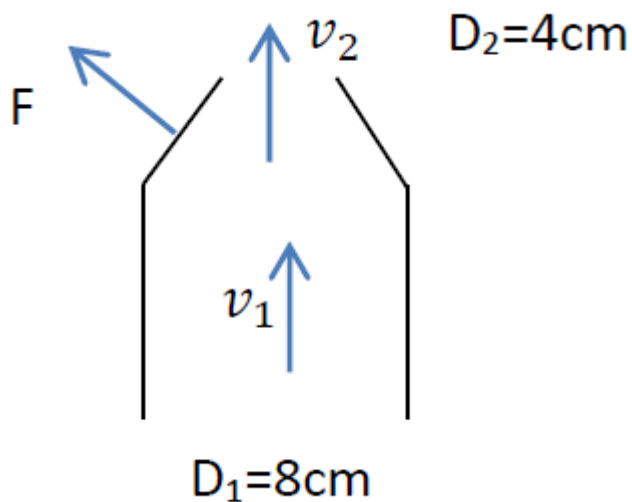
$v_1 = v_2$ car le débit est conservatif

Donc $P_1 = P_2$

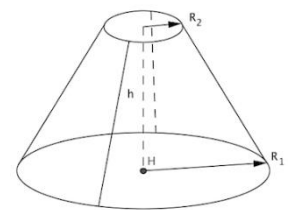
La suite suit en remplaçant dans $||\vec{F}|| = \sqrt{Fx^2 + Fy^2}$.

Exercice 6 Effort exercé sur un rétrécissement

Calculer la force exercée par l'écoulement sur la tuyère de l'exercice 1.



Corrigé :



Volume d'un cône tronqué : $(h \times \pi/3) \times (R_1^2 + R_2^2 + R_1 \times R_2)$

$$\vec{F} = P_1 S_1 \vec{n}_1 - P_2 S_2 \vec{n}_2 + q_m (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \vec{P}$$

$$F = P_1 S_1 - P_2 S_2 + q_m (v_1 - v_2) - \rho V g = 379000 \cdot \pi \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2 - 10^5 \cdot \pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 + 1000 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot (24.3 - 6) - 1000 \cdot 9.8 \cdot \frac{\pi \cdot 10^{-2}}{3} \cdot ((4 \cdot 10^{-2})^2 + (2 \cdot 10^{-2})^2 + (2 \cdot 10^{-2}) \cdot (4 \cdot 10^{-2}))$$

Exercice 7

Deux étangs, de volumes très importants, sont séparés par une paroi verticale. Une ouverture rectangulaire de largeur 10cm et de hauteur 20cm, pouvant être obturée par une vanne de mêmes dimensions, permet de les mettre en communication.

Données :

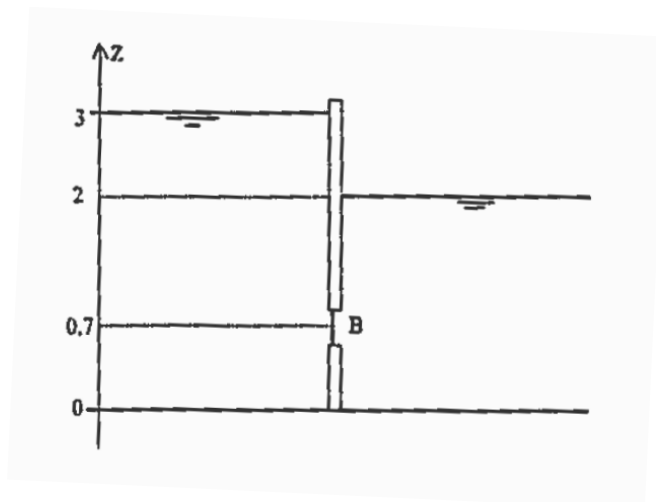
$$z_A = 3\text{m}$$

$$z_C = 2\text{m}$$

Coefficient de perte
singulière au niveau de l'ouverture : $\zeta_B = 0.8$

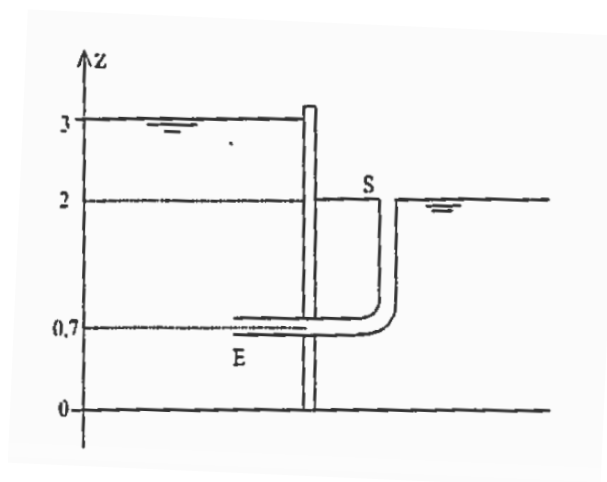
$$\eta_{\text{eau}} = 1.10^{-3} \text{ Pa.s}$$

$$\rho_{\text{eau}} = 1\text{kg/L}$$

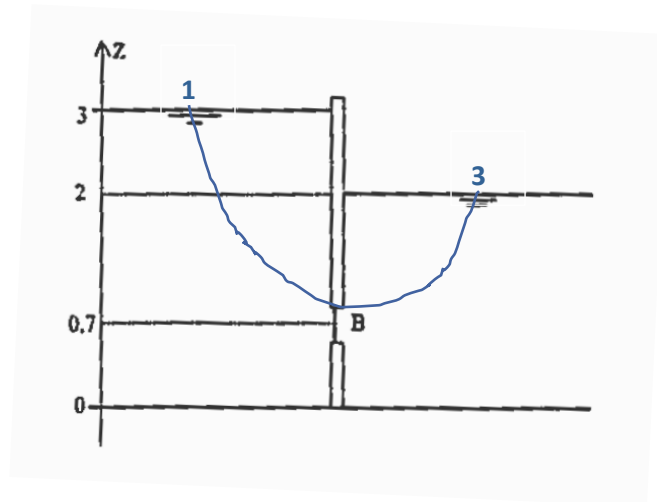


de charge

- 1) La vanne est ouverte, calculer avec quel débit l'étang 1 se vide dans l'étang 2.
- 2) On remplace l'ouverture rectangulaire par une ouverture circulaire, de rayon 10cm, dans laquelle on introduit une buse de même section, de longueur $L=3\text{m}$, coudée, et débouchant à l'air libre, juste au-dessus de la surface libre de l'étang 2. Les pertes de charge à considérer sont les pertes de charges singulières à l'entrée de la conduite $\zeta_E=0.5$, à la sortie de la conduite $\zeta_S=0$, dans le coude $\zeta_{\text{coude}}=1$, et les pertes de charges régulières dans la conduite. On supposera l'écoulement turbulent et on prendra pour valeur du nombre de darcy la valeur 0.025. Calculer avec quel débit l'étang 1 se vide dans l'étang 2. L'hypothèse d'un écoulement turbulent est-elle vérifiée ?



Corrigé :



1) Bernoulli entre 1 et 3 :

$$P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_3 + \rho g z_3 + \rho \frac{v_3^2}{2} + \zeta_B \frac{\rho v_B^2}{2}$$

A la surface : $v_1 = v_3 = 0, P_1 = P_3 = P_{atm}$

$$\cancel{P_{atm}} + \cancel{\rho g z_1} + \cancel{\rho \frac{v_1^2}{2}} = \cancel{P_{atm}} + \cancel{\rho g z_3} + \cancel{\rho \frac{v_3^2}{2}} + \zeta_B \frac{\rho v_B^2}{2}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_3)}{\zeta_B}} = \sqrt{\frac{2 * 9.8 * (3 - 2)}{0.8}} = 4.95 \text{ m/s}$$

$$q_v = S_B v_B = 4.95 * 0.1 * 0.2 = 0.099 \text{ m}^3/\text{s}$$

2)

$$\cancel{P_1} + \cancel{\rho g z_1} + \cancel{\rho \frac{v_1^2}{2}} = P_3 + \rho g z_3 + \rho \frac{v_3^2}{2} + (\zeta_E + \zeta_{coude}) \frac{\rho v_T^2}{2} + \frac{\lambda l}{D} \frac{\rho v_T^2}{2}$$

$$v_T = v_3$$

$$\frac{v_3^2}{2} (1 + (\zeta_E + \zeta_{coude}) + \frac{\lambda l}{D}) = g(z_3 - z_1)$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2g(z_3 - z_1)}{1 + (\zeta_E + \zeta_{coude}) + \frac{\lambda l}{D}}} = \sqrt{\frac{2 * 9.8 * (3 - 2)}{1 + 0.5 + 1 + \frac{0.025 * 3}{0.2}}} = 2.61 \text{ m/s}$$

$$q_v = S v = 2.61 * \pi * 0.1^2 = 0.082 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{1000 \cdot 2.61 \cdot 0.2}{1.10^{-3}} = 522000 \gg 4000 \text{ donc écoulement turbulent}$$

Exercice 8

- a) Déterminer le type d'écoulement ayant lieu dans une conduite de 30 cm de diamètre quand, à 15°C, circule de l'eau à la vitesse de 1 m/s ($v = 1,13 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).
- b) Déterminer le type d'écoulement ayant lieu dans une conduite de 30 cm de diamètre quand, à 15°C, circule du fuel-huile lourde avec la même vitesse ($v = 2,06 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$).

Solution

- a) $Re = 265\,490 \gg 2400$ régime largement turbulent
- b) $Re = 1\,456 \ll 2400$ régime laminaire

Exercice 9

Pour que les conditions soient celles d'un écoulement laminaire, quelle doit être la taille de la conduite, si elle doit transporter du fuel-oil moyen à 4,5°C à un débit de 350 l/mn, sachant que la viscosité cinématique $\nu = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Solution

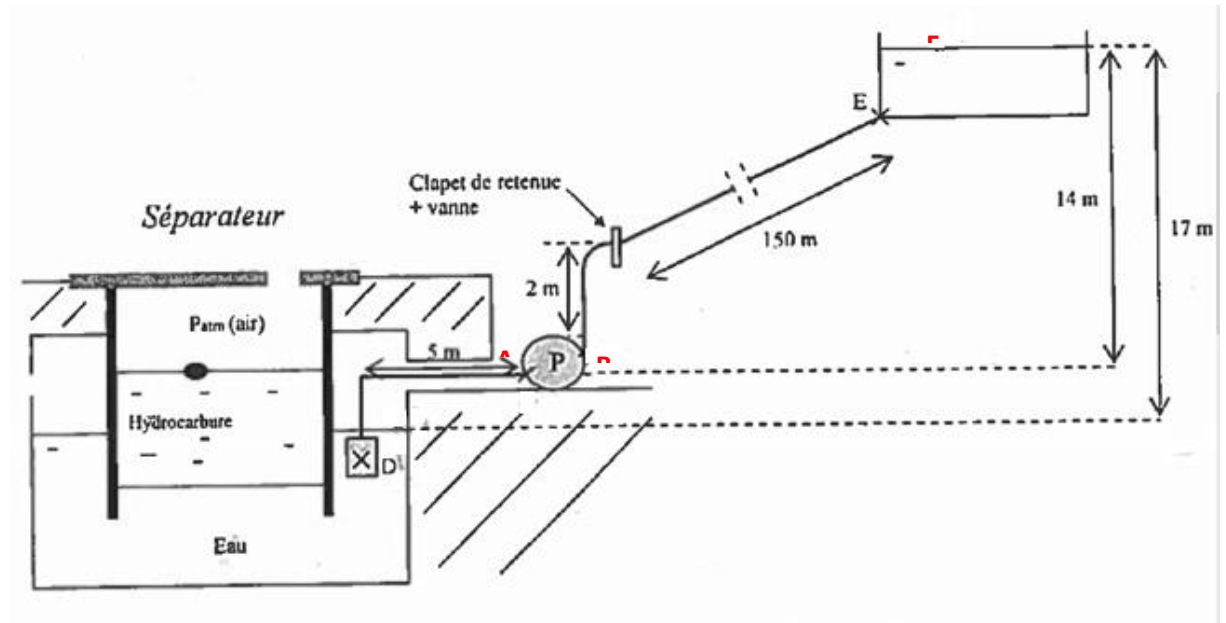
$$Q = 350 \text{ l/mn} = 350/60 \text{ l/s} = U \cdot \pi R^2$$

$$Re < 2400 \Leftrightarrow U \cdot 2R/\nu < 2400 \Leftrightarrow Q \cdot 2R/(\nu \pi R^2) < 2400 \Leftrightarrow Q \cdot 2/(\nu \pi R) < 2400 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q/(\nu \pi R) < 1200 \Leftrightarrow Q/(1200 \nu \pi) < R$$

$$\text{Soit } R > 0,22 \text{ m soit } D > 440 \text{ mm}$$

Exercice 10 Lavage automatique

L'eau est traitée par le séparateur puis stockée dans un bassin situé à 17m au dessus du séparateur. L'eau est pompée par une pompe (P) nécessitant un débit volumique de $q_v=40$ L/s.



Données :

Coefficient de pertes de charge singulière ζ : $\zeta_{\text{clapet}} = 3.5$, $\zeta_{\text{coude}}=0.5$, $\zeta_{\text{vanne}}=0.2$

Diamètre de toute la tuyauterie : 175mm

$\lambda=0.056$

$\rho_{\text{eau}}=1\text{kg/L}$

- 1) Calculer la perte de charge régulière entre D et E.
- 2) Calculer la perte de charge singulière entre D et E.
- 3) Calculer les pressions en entrée et en sortie de pompe.

Corrigé :

$$1) \Delta p_{\text{régulières}} = \frac{\lambda L \rho_{\text{eau}} v^2}{2D} = \frac{\lambda L \rho_{\text{eau}} q_v^2}{2DS^2} = \frac{0.056 \cdot (3+5+2+150) \cdot 1000 \cdot 0.04^2}{2 \cdot 0.175 \cdot \pi^2 \left(\frac{0.175}{2}\right)^4} = 70800 \text{ Pa}$$

$$2) \Delta p_{\text{singulières}} = \Delta p_{\text{coude}} + \Delta p_{\text{vanne}} + \Delta p_{\text{clapet}}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\zeta_{coude} \frac{\rho v^2}{2} + \zeta_{vanne} \frac{\rho v^2}{2} + \zeta_{clapet} \frac{\rho v^2}{2} \\
 &= \frac{\rho q_v^2}{2S^2} (2\zeta_{coude} + \zeta_{vanne} + \zeta_{clapet}) \\
 &= \frac{1000 * 0.04^2 * (0.5 * 2 + 3.5 + 0.2)}{2 * \pi^2 * (\frac{0.175}{2})^4} = 6500 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

$$3) P_D + \rho g z_D + \rho \frac{v_D^2}{2} = P_A + \rho g z_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + (\zeta_{coude}) \frac{\rho v_A^2}{2} + \frac{\lambda l}{D} \frac{\rho v_A^2}{2}$$

$$v_D = 0$$

$$v_A = \frac{qv}{S} = \frac{qv}{\pi R^2} = \frac{0.04}{\pi * 0.0875^2} = 1.7 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned}
 P_{atm} + \rho g z_D &= P_A + \rho g z_A + \rho \frac{v_A^2}{2} (1 + \zeta_{coude} + \frac{\lambda l}{D}) \\
 P_A &= P_{atm} + \rho g (z_D - z_A) - \rho \frac{v_A^2}{2} (1 + \zeta_{coude} + \frac{\lambda l}{D}) \\
 &= 100000 + 1000 * 9.81 * (0 - 3) - \frac{1000 * 1.7^2}{2} (1 + 0.5 \\
 &\quad + \frac{0.056 * 8}{0.175}) = \mathbf{64700 \text{ Pa}}
 \end{aligned}$$

$$v_F = 0$$

$$v_B = \frac{Q_v}{S} = \frac{Q_v}{\pi R^2} = \frac{0.04}{\pi * 0.0875^2} = 1.7 \text{ m/s}$$

$$P_B + \rho g z_B + \rho \frac{v_B^2}{2} = P_F + \rho g z_F + \rho \frac{v_F^2}{2} + (\zeta_{coude} + \zeta_{vanne} + \zeta_{clapet}) \frac{\rho v_B^2}{2} + \frac{\lambda l}{D} \frac{\rho v_B^2}{2}$$

$$P_B + \rho g z_B + \rho \frac{v_B^2}{2} = P_{atm} + \rho g z_F + (\zeta_{coude} + \zeta_{vanne} + \zeta_{clapet}) \frac{\rho v_B^2}{2} + \frac{\lambda l}{D} \frac{\rho v_B^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 P_B &= P_{atm} + \rho g (z_F - z_B) + \rho \frac{v_B^2}{2} (-1 + \zeta_{coude} + \zeta_{vanne} + \zeta_{clapet} + \frac{\lambda l}{D}) \\
 &= 100000 + 1000 * 9.81 * 14 + \frac{1000 * 1.7^2}{2} (-1 + 0.5 + 3.5 + 0.2 + \frac{0.056 * 152}{0.175}) \\
 &= \mathbf{312249 \text{ Pa}}
 \end{aligned}$$

3 RESSOURCES COMPLEMENTAIRES

Pertes de charges

http://gpip.cnam.fr/ressources-pedagogiques-ouvertes/hydraulique/co/4exo_applicationMoody1.html

https://tech-alim.univ-lille.fr/intro_gia/co/003_exo04.html

Calculateurs en ligne de pertes de charge linéaires

<http://www.efluids.com/efluids/pages/calculators.htm>

<http://www.lmnoeng.com/darcy.htm>

http://www.engineeringtoolbox.com/darcy-weisbach-equation-d_646.html