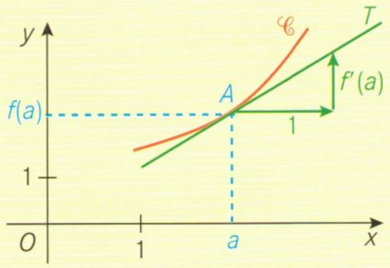
5 Nombre dérivé

f est une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a et $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
On suppose que $\mathscr{C}$ admet en son point A d'abscisse a une tangente T non parallèle à l'axe des ordonnées.

On appelle nombre dérivé de f en a le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point $A(a\,;f(a))$.

On le note $f'(a)$.

On dit que f est dérivable en a (ou dérivable au point a).



6 Fonction dérivée

f est une fonction définie sur un intervalle I.

Si pour tout réel x de I la fonction f est dérivable, on dit que f est dérivable sur I.

On appelle alors fonction dérivée de f la fonction qui associe à tout réel x de I le nombre dérivé $f'(x)$. On la note f'.

7 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x) = ax + b$ a, b réels	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b, c réels	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = u^n(x)$ n entier naturel non nul	$f'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$
$f(x) = \ln(u(x))$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$

8 Règles de dérivation

1. Opérations usuelles avec les dérivées

u et v désignent deux fonctions dérivables sur un même intervalle I et k est un nombre réel.

Dérivée d'une somme : $(u + v)' = u' + v'$

Dérivée du produit par un réel k : $(ku)' = ku'$

Dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$

Dérivée de l'inverse : si u ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

Dérivée d'un quotient : si v ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

2. Dérivée d'une fonction composée

• **Fonction de la forme $u^n(x)$; n entier naturel non nul.**

Si $f(x) = u^n(x)$ alors $f'(x) = n\,u^{n-1}(x) \times u'(x)$.

• **Fonction de la forme $\ln(u(x))$; u fonction strictement positive.**

Si $f(x) = \ln(u(x))$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

• **Fonction de la forme $e^{u(x)}$.**

Si $f(x) = e^{u(x)}$ alors $f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$.

9 Dérivée et sens de variation d'une fonction

f est une fonction dérivable sur un intervalle I ; f' est la fonction dérivée de f.

- **Si pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.**
- **Si pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.**
- **Si pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.**

10 Maximum ou minimum local d'une fonction

f est une fonction dérivable sur un intervalle I ; f' est la fonction dérivée de f.

Si, pour la valeur x_0 de I, la dérivée f' s'annule en changeant de signe, alors la fonction f admet en x_0 un maximum local ou un minimum local.

Le tableau de variation permet de savoir s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

Comment calculer à la main une dérivée ?

Pour calculer une dérivée, on utilise le tableau des dérivées des fonctions usuelles et les règles de dérivation donnés dans l'Essentiel pages 236 et 237.

Exemple. *Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.*

$f=\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=\ln x$ et $v(x)=x^2$ d'où : $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$; $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v'(x)=2x$

ainsi : $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x^2-\ln x\times(2x)}{x^4}$; $\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}}$.

Comment calculer une dérivée à l'aide d'un logiciel de calcul formel ?

On utilise une calculatrice formelle (Casio ou TI) ou le logiciel Xcas.

Utilisation de la calculatrice Casio Graph 100+

Pour calculer la dérivée de la fonction définie par l'expression $f(x)$, on sélectionne `CAS` dans le menu principal.
Pour obtenir diff, on tape `F2` (pour `CALC`) `1` (pour `1:diff`).
Après `diff(` on écrit $f(x)$, puis `)` `EXE`.

Exemple. *Calcul de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto xe^x$.*

Dans `CAS` *la séquence est la suivante :*

`F2` `1` `X,θ,t` `×` `SHIFT` `ln` `X,θ,t` *(pour e^x)* `)` `EXE` .

On obtient l'écran suivant :

```
diff(X×eX)
e^X X+e^X
```

donc $f'(x)=e^x x+e^x=(x+1)e^x$.

Utilisation de la calculatrice TI 89

Pour obtenir la dérivée de la fonction définie par l'expression $f(x)$, dans Home on écrit d($f(x)$, x).

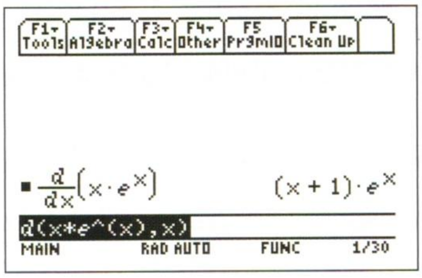
d(s'obtient en appuyant sur les touches $\boxed{\text{2ND}}$ et $\boxed{8}$.

***Exemple.** Calcul de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto xe^x$.*

La séquence est la suivante :

$\boxed{\text{2ND}}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\blacklozenge}$ $\boxed{\text{X}}$ *(pour e^x)* $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{X}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$.

On obtient l'écran suivant :



donc $f'(x) = (x + 1)e^x$.

Comment étudier les variations d'une fonction en utilisant la dérivée ?

1. **On calcule la dérivée $f'(x)$ de f.**
2. **On étudie sur l'intervalle I le signe de $f'(x)$ et on en déduit les variations de f.**
3. **On construit le tableau de variation.**

***Exemple.** Étudier les variations de f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.*

***1.** f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$; d'après un résultat précédent : $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$.*

***2.** Sur $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ a le signe de $1 - 2\ln x$. On a :*

- *$1 - 2\ln x < 0$ si $\ln x > \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire si $x > e^{\frac{1}{2}}$ soit si $x > \sqrt{e}$;*
- *$1 - 2\ln x > 0$ si $\ln x < \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire si $x < \sqrt{e}$.*

Donc sur $]0 ; \sqrt{e}[$, f est croissante ; sur $[\sqrt{e} ; +\infty[$, f est décroissante.

3.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘	0

On vérifiera que :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Calcul à la main de dérivées

Fiche méthode 4

Pour chacun des exercices 54 à 62, les fonctions f et g sont dérivables sur ℝ. Calculer leur fonction dérivée.

54 $f(x) = 2x^2 - 8x - 5$; $g(x) = -x^2 + 3x$.

55 **R** $f(x) = x^3 + x + 1$; $g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

56 **C** $f(x) = (2x+1)^3$; $g(x) = (x+2)(e^x + 1)$.

57 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4x+1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

58 $f(x) = (2x^2 + x)(x^2 + 1)$; $g(x) = \dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$.

59 **C** $f(x) = e^{2x+3}$; $g(x) = x + e^x$.

60 $f(x) = 3x - 4 + e^{-2x}$; $g(x) = 2x^2 - 4e^{-x}$.

61 $f(x) = \sin x + 2\cos x$; $g(x) = x\cos x$.

62 **C** $f(x) = e^{-x}\sin x$; $g(x) = \cos 2x + 3\sin 2x$.

Pour chacun des exercices 63 à 67, la fonction f est dérivable sur l'intervalle I de ℝ. Calculer f′(x).

63 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = x^2 - 3\ln x$.

64 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = 2(\ln x)^3 + x$.

65 **C** $I = \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[$; $f(x) = \dfrac{3}{1+2x}$.

66 $I =]1\,;+\infty[$; $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

67 $I = \left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$; $f(x) = \ln(3x+1)$.

Calcul de dérivées à l'aide d'un logiciel de calcul formel

Fiche méthode 5

Pour chacun des exercices 68 à 72, les fonctions f et g sont dérivables sur ℝ. Calculer leur fonction dérivée.

68 $f(x) = 2x^2 + 3e^{2x}$; $g(x) = 4e^{-x} + 2e^x$.

69 $f(x) = xe^{-2x}$; $g(x) = (x+1)e^{-x}$.

70 **R** $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$; $g(x) = \ln(x^2+1)$.

71 $f(x) = 3\cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{2}$;

$g(x) = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

72 **R** $f(x) = 4\sqrt{2}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

$g(x) = e^{-\frac{x}{2}}\cos 2x$.

Pour chacun des exercices 73 à 79, la fonction f est dérivable sur l'intervalle I de ℝ. Calculer sa fonction dérivée.

73 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = e^{-2x+1} + 2\ln x$.

74 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

75 **R** $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = x\sqrt{x} - \sqrt{x}$.

76 $I =]-3\,;+\infty[$; $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

77 $I = \left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$; $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$.

78 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$.

79 **R** $I = \left]\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[$; $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$.

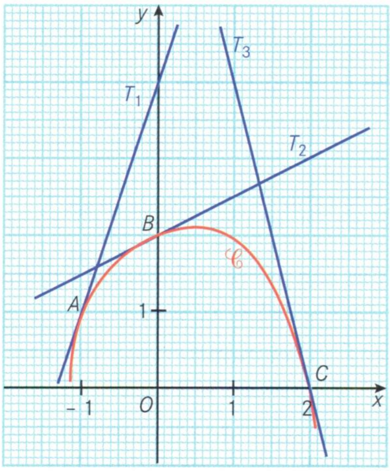
Utilisation d'un graphique

Fiche l'Essentiel

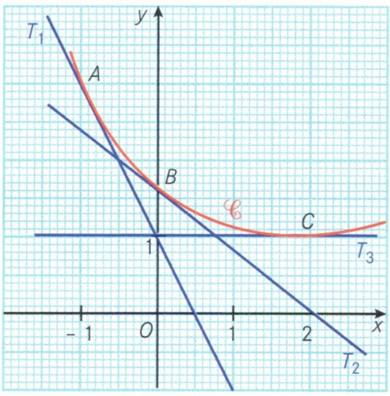
80 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable.
Les droites T_1, T_2, T_3 sont les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points A, B, C.

1. Déterminer par lecture graphique les nombres dérivés $f'(-1), f'(0), f'(2)$.

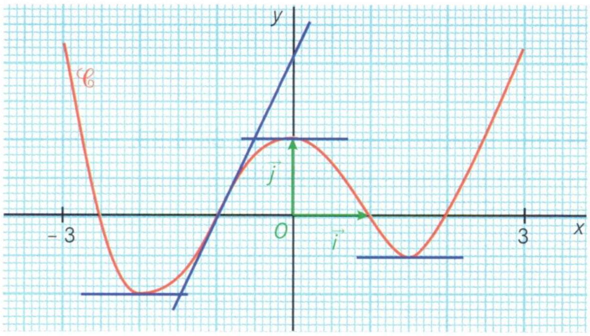
2. Donner une équation des droites T_1, T_2, T_3.



81 Reprendre l'exercice précédent dans le cas du graphique suivant.



82 **C** La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\,;3]$; f' désigne la dérivée de f. Les droites tracées en bleu sont tangentes à $\mathscr{C}$.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer le signe de $f(x)$, selon les valeurs de x.

2. Donner le tableau de variation de f.
En déduire les solutions de l'inéquation $f'(x) > 0$.

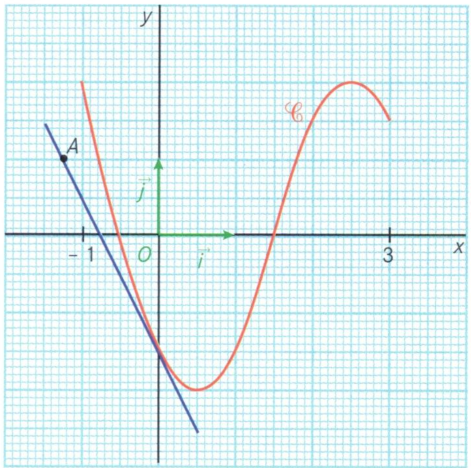
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse -1.

83 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-1\,;3]$.

1. Résoudre graphiquement les équations suivantes :

$$f(x) = 0\ ;\ f(x) = 3{,}5\ ;\ f'(x) = 0.$$

2. À partir de l'observation du graphique, donner le tableau de variation de f.



En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[-1\,;3]$.
La tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0 passe par $A\left(-\dfrac{5}{4}\,;1\right)$.

Déterminer $f'(0)$.

Variations de fonctions

Fiche méthode 6

***Pour chacun des exercices 84 à 98**, la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.*
Dans chaque cas :
– calculer $f'(x)$;
– étudier le signe de $f'(x)$ sur I ;
– dresser le tableau de variation de f.
L'étude des limites éventuelles de f n'est pas demandée ici.

84 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2x^2 - 8x - 3$.

85 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = -x^2 + 3x + 5$.

86 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

87 **R** $I = [0\,;+\infty[$; $f(x) = 2x^2 - 4e^{-x}$.

88 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

89 **R** $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = \ln x - x - 1$.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour déterminer le signe de $f'(x)$ sur I, il faudra résoudre l'inéquation $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$.
Il peut être utile dans certains cas de consulter les résultats rappelés dans le Mémento :
– Équations et inéquations, page 302 ;
– Fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissances, page 303.

90 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$.

91 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 3x^2 - 3x^3$.

92 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

93 **R** $I = [0\,;10]$; $f(x) = x + 10 - 5\ln(x+2)$.

94 **R** $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = x^2 - 18\ln x + 18$.

95 **C** $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$.

96 $I = [0\,;40]$; $f(x) = 45x^2 - x^3$.

97 **R** $I = [0\,;12]$; $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$.

98 **C** $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = 3 + 2\ln x - (\ln x)^2$.

99 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2(e^x+1)}.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} + 3e^x + 2}{2(e^x+1)^2}.$$

3. Dresser le tableau de variation de f.

100 **R** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 7e^x + 5x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout x réel :

$$f'(x) = (e^x - 1)(2e^x - 5).$$

2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

101 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - 2x + e^{2x}.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Dresser le tableau de variation de f (on ne demande pas les limites en $-\infty$ et en $+\infty$).

3. En déduire que, pour tout réel x, on a $f(x) > 0$.

Correction :

55 $f'(x) = \mathbf{3x^2 + 1}$; $g'(x) = \mathbf{4x^3 - 6x}$.

56 • $f = u^3$ avec $u(x) = 2x + 1$;
on lit dans le formulaire d'examen :
$(u^\alpha)' = \alpha\, u^{\alpha - 1}\, u'$;
d'où : $f' = 3u^2 u'$; $u'(x) = 2$.
Ainsi : $f'(x) = 3(2x+1)^2 \times 2 = \mathbf{6(2x+1)^2}$.
• $g = uv$ avec $u(x) = x + 2$ et $v(x) = e^x + 1$
d'où : $g' = u'v + uv'$; $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$
ainsi : $g'(x) = e^x + 1 + (x+2)e^x = \mathbf{xe^x + 3e^x + 1}$.

59 • $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x + 3$
d'où : $f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$; $u'(x) = 2$
ainsi : $f'(x) = \mathbf{2e^{2x+3}}$.

• $g = u + v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$
d'où : $g' = u' + v'$; $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$
ainsi : $g'(x) = \mathbf{1 + e^x}$.

62 • $f = uv$ avec $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = \sin x$
d'où : $f' = u'v + uv'$; $u'(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = \cos x$
ainsi $f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$.
$f'(x) = \mathbf{e^{-x}(\cos x - \sin x)}$.
• $g = u + 3v$ avec $u(x) = \cos 2x$ et $v(x) = \sin 2x$
d'où $g' = u' + 3v'$; $u'(x) = -2\sin 2x$ et $v'(x) = 2\cos 2x$
ainsi $g'(x) = \mathbf{-2\sin 2x + 6\cos 2x}$.

65 $f = 3 \times \frac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + 2x$;
$f' = 3 \times \left(\frac{-u'}{u^2}\right)$; $u'(x) = 2$ ainsi $f'(x) = \mathbf{\frac{-6}{(1+2x)^2}}$.

70 $f'(x) = \mathbf{-xe^{-\frac{x^2}{2}}}$; $g'(x) = \mathbf{\frac{2x}{x^2+1}}$.

72 $f'(x) = \mathbf{12\sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}$;

$g'(x) = \mathbf{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos 2x - 2e^{-\frac{x}{2}}\sin 2x}$.

75 $f'(x) = \mathbf{\frac{1}{2}\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$.

79 $f'(x) = \mathbf{\frac{2}{x(\ln x + 1)^2}}$.

82 **1.**

x	-3		$-2{,}5$		-1		1		2		3
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2.

x	-3		-2		0		$1{,}5$		3
$f(x)$		↘	-1	↗	1	↘	$-0{,}5$	↗	

$f'(x) > 0$ sur tout intervalle où f est croissante ;
$f'(x) > 0$ sur les intervalles $\mathbf{]-2\,;0[}$ et $\mathbf{]1{,}5\,;3]}$.

3. $f'(-1) = 2$; équation de la tangente : $\mathbf{y = 2x + 2}$.

87 $f'(x) = 4x + 4e^{-x}$; $f'(x) > 0$; f est **croissante**.

89 $f'(x) = \mathbf{\frac{1}{x} - 1}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	-2	↘	

93 $f'(x) = \mathbf{\frac{x-3}{x+2}}$.

x	0		3		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$10 - 5\ln 2$	↘	m	↗	$20 - 5\ln 12$

$m = 13 - 5\ln 5$.

94 $f'(x) = \mathbf{2\,\frac{(x-3)(x+3)}{x}}$.

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	m	↗	

m = 27 – 18 ln 3.

95 $\mathbf{f'(x) = e^x(4e^x - 5)}$; $f'(x)$ a le signe de $4e^x - 5$.

x	$-\infty$		$\ln\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\frac{9}{8}$	↗	

97 $f'(x) = \mathbf{3(x^2 - 16x + 48)}$.

x	0		4		12
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	256	↘	0

98 $f'(x) = \mathbf{\frac{2}{x}(1 - \ln x)}$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	4	↘	

100 **1.** $f'(x) = 2e^{2x} - 7e^x + 5 = \mathbf{(e^x - 1)(2e^x - 5)}$.

2.

x	$-\infty$		0		$\ln\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-5	↘	m	↗	

$m \approx -5{,}7$.