Le dioptre sphérique

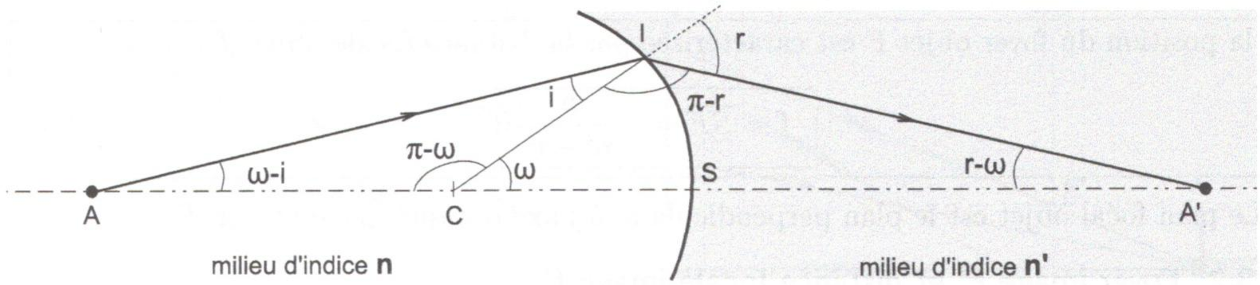
Définition et représentation schématique

Un dioptre sphérique est constitué de deux milieux transparents homogènes d'indices optiques différents, séparés par une surface sphérique.

Dioptre sphérique concave *Dioptre sphérique convexe*

Relations de conjugaison

Soit A un point lumineux sur l'axe optique et A' son image au travers du dioptre sphérique.



La relation des sinus dans le triangle (AIC) donne : $\dfrac{\sin(i)}{CA} = \dfrac{\sin(\omega - i)}{CI}$

De même dans le triangle (A'IC) :

$$\frac{\sin(\pi - r)}{CA'} = \frac{\sin(r - \omega)}{CI} \quad \text{soit} \quad \frac{\sin(r)}{CA'} = \frac{\sin(r - \omega)}{CI}$$

Comme pour le miroir sphérique, le stigmatisme n'est pas rigoureux. Toutefois, dans le cadre des conditions de Gauss (angles i, r et ω très petits), les égalités précédentes se simplifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{i}{CA} = \dfrac{\omega - i}{SC} \\ \dfrac{r}{CA'} = \dfrac{r - \omega}{SC} \end{array} \right. \qquad \text{soit} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{CA} = \dfrac{-1}{SC} + \dfrac{1}{SC}\dfrac{\omega}{i} \\ \dfrac{1}{CA'} = \dfrac{1}{SC} - \dfrac{1}{SC}\dfrac{\omega}{r} \end{array} \right.$$

On obtient donc :

$$\frac{n'}{CA} + \frac{n}{CA'} = \frac{1}{SC}(n - n') \; + \; \frac{\omega}{SC}\frac{n'.r - n.i}{i.r} \tag{6.1}$$

La loi de la réfraction dans les conditions de Gauss $n'.r = n.i$ annule le second terme de l'expression (6.1), il reste simplement :

$$\frac{n'}{CA} + \frac{n}{CA'} = \frac{n - n'}{SC} \tag{6.2}$$

Relation de conjugaison avec l'origine au centre C

La (6.2) sous forme algébrique constitue la relation de conjugaison avec l'origine au centre C :

$$-\frac{n'}{\overline{CA}} + \frac{n}{\overline{CA'}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}} \tag{6.3}$$

Relation de conjugaison avec l'origine au sommet S

La (6.3) peut s'exprimer par rapport au sommet S (voir calculs miroir sphérique) :

$$\boxed{-\frac{n}{\overline{SA}} + \frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}} \tag{6.4}$$

Foyer objet F et distance focale objet f

Le foyer objet F est le point de l'axe optique dont l'image est située à l'infini ($\frac{n'}{\overline{SA'}} = 0$), la relation (6.4) donne : $-\frac{n}{\overline{SF}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$

la position du foyer objet F est caractérisée par la distance focale objet f :

$$\boxed{f = \overline{SF} = -\frac{n}{n'-n}\overline{SC}} \tag{6.5}$$

Le plan focal objet est le plan perpendiculaire à l'axe optique, passant par F.

Foyer image F' et distance focale image f'

Le foyer image F' est l'image d'un point objet situé sur l'axe et à l'infini ($\frac{n'}{\overline{SA}} = 0$), donc $\frac{n'}{\overline{SF'}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$

la position du foyer image F' est caractérisée par la distance focale image f' :

$$\boxed{f' = \overline{SF'} = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}} \qquad f' \text{ et } f \text{ sont liées par la relation : } \quad \frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'} \tag{6.6}$$

Le plan focal image est le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F'.

La relation de conjugaison du dioptre sphérique peut s'écrire de façon symétrique :

$$\boxed{\frac{f}{\overline{SA}} + \frac{f'}{\overline{SA'}} = 1} \tag{6.7}$$

Relation de Newton pour le dioptre sphérique

Comme pour le miroir sphérique, la relation de conjugaison avec origine aux foyers s'écrit :

$$\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'} = f.f'} \tag{6.8}$$

Grandissement transversal

En procédant comme pour le miroir sphérique on obtient les expressions suivantes :

- par rapport au sommet S du dioptre sphérique : $\boxed{g_y = \frac{n}{n'}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}}$ (6.9)
- par rapport aux foyers F et F' : $\boxed{g_y = -\frac{f}{\overline{FA}}}$ et $\boxed{g_y = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}}$ (6.10)

Construction graphique d'une image

Les plans focaux du dioptre simplifient le tracé des rayons issus du point objet B :

① Le rayon passant par le centre de courbure C est transmis sans aucune déviation.

② Le rayon incident parallèle à l'axe optique est réfracté en passant par le foyer image F' du dioptre.

③ Le rayon incident passant par le foyer objet F est transmis dans le second milieu, parallèle à l'axe optique.

④ Comme pour le miroir sphérique, l'utilisation du plan focal image et d'un foyer secondaire permet de construire la marche de n'importe quel autre rayon.

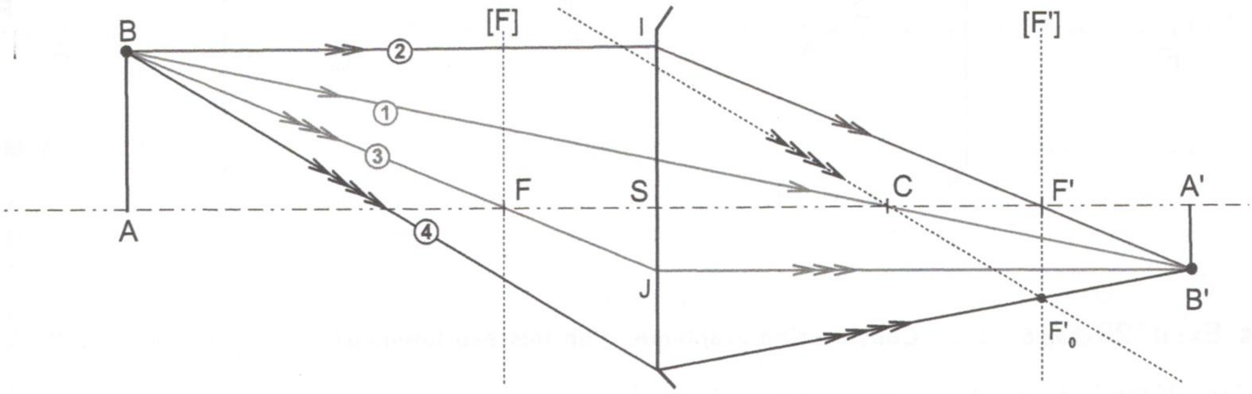


FIG. 6.1 - *Construction graphique d'une image*

Ex 25 : Grandissement transversal

1. **Grandissement transversal avec origine au centre**

   En utilisant le théorème de Thalès (FIG. 6.1), montrer que : $g_y = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$

2. **Grandissement avec origine aux foyers**

   2.1. Toujours à l'aide du théorème de Thalès, montrer : $g_y = -\dfrac{\overline{F'A'}}{f'}$ et $g_y = -\dfrac{f}{\overline{FA}}$

   2.2. En déduire la relation de Newton : $\overline{FA}.\overline{F'A'} = f.f'$

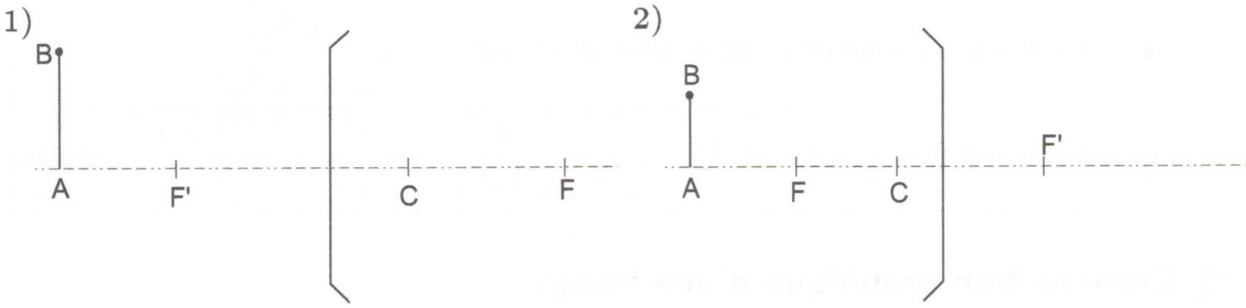
3. **Grandissement transversal avec origine au sommet**

   La relation de Chasles permet d'écrire : $\overline{SA} = \overline{SF} + \overline{FA}$ *et* $\overline{SA'} = \overline{SF'} + \overline{F'A'}$

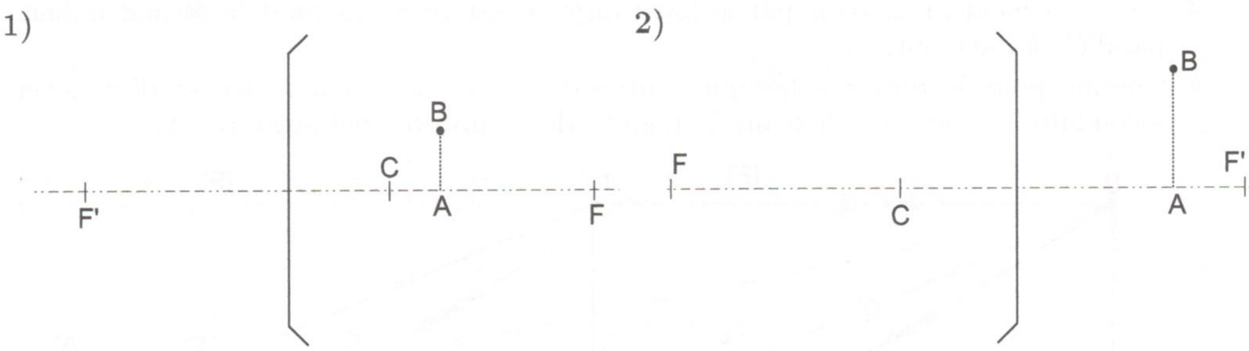
   En déduire l'égalité suivante : $\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\dfrac{f'}{f} g_y$ puis $g_y = \dfrac{n}{n'} \dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

Ex 26 : Construction graphique - objet réel

Construire graphiquement l'image de l'objet AB au travers du dioptre sphérique dans les deux cas suivants :

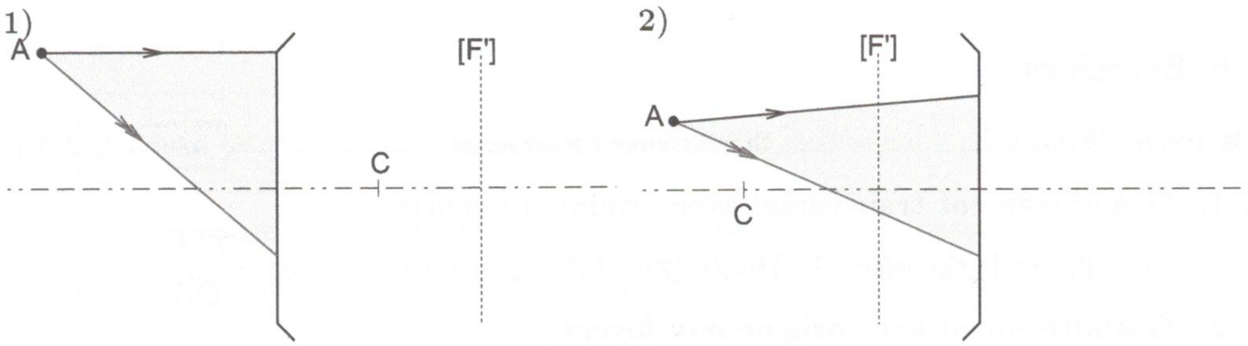


Ex 27 : Construction graphique - objet virtuel

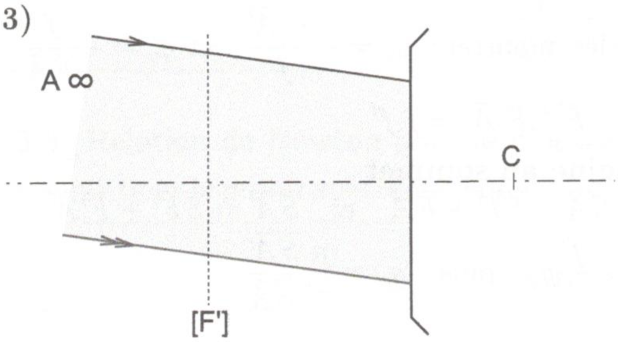


Ex 28 : Construction graphique d'un faisceau lumineux

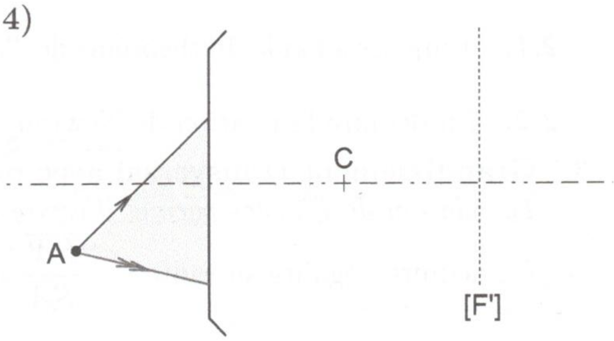
Compléter le tracé du faisceau délimité par les deux rayons dans les cas suivants :



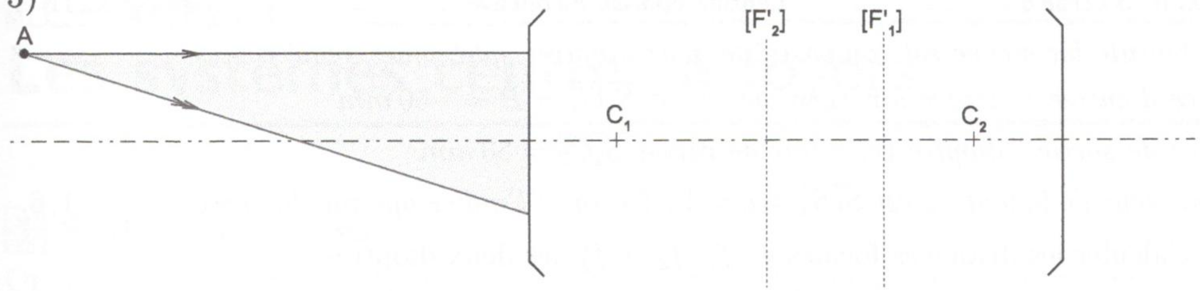
3)



4)



5)

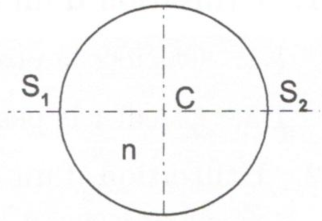


Ex 29 : Relations de conjugaison

On considère un dioptre sphérique air/verre ($n_{air} = 1,0$ et $n_{verre} = 1,5$). Son rayon de courbure vaut $\overline{SC} = 30\,mm$.

1. Représenter graphiquement le dioptre (échelle horizontale : 1/1), en plaçant le sommet, le centre ainsi que les foyers objet et image.
2. *Un objet AB de hauteur $\overline{AB} = 20\,mm$ est placé $30\,mm$ devant le sommet du dioptre.* Construire graphiquement l'image $A'B'$ de l'objet AB donnée par le dioptre.
3. Déterminer, par le calcul :
   - **3.1.** La position de l'image par rapport au sommet S.
   - **3.2.** Le grandissement transversal g_y de l'image.
4. Déterminer la position de l'objet de sorte que son image se forme $14\,cm$ derrière le sommet du dioptre. L'image est-elle plus grande ou plus petite que l'objet ?

Ex 30 : La lentille boule



Les lentilles «boule» sont des lentilles sphériques, souvent de petites tailles ; elles sont utilisées par exemple dans le couplage des fibres optiques.
La lentille a un rayon $R = 1,0\,cm$, son indice optique vaut $n = 2,0$.
Un objet AB de hauteur $5\,mm$ est placé devant la lentille : $\overline{CA} = -1,5\,cm$.
On note A_1B_1 l'image de AB donnée par le 1^{er} dioptre (air/verre) ; le second dioptre (verre/air) donne l'image finale $A'B'$:

$$AB \xrightarrow{\text{dioptre 1}} A_1B_1 \xrightarrow{\text{dioptre 2}} A'B'$$

1. Calculer les distances focales objet et image f_1, f'_1, f_2 et f'_2 des deux dioptres sphériques.

2. **Image intermédiaire A_1B_1**

2.1. Placer les foyers F_1, F_1' , F_2 et F_2' sur une construction graphique (échelle horizontale : 2/1), et construire graphiquement A_1B_1.

2.2. Calculer la valeur de $\overline{S_1A_1}$. Quelle est la nature de l'image intermédiaire ?

2.3. Calculer le grandissement transversal de l'image intermédiaire A_1B_1.

3. **Image finale A'B'**

3.1. Construire graphiquement $A'B'$.

3.2. Calculer la valeur de $\overline{S_2A'}$.

3.3. Calculer le grandissement transversal de l'image finale par rapport à l'objet AB.

Ex 31 : Lentille épaisse biconcave

Une lentille biconcave est composée de deux dioptres sphériques symétriques :

- *face d'entrée : dioptre air/verre de rayon* $\overline{S_1C_1} = R = -50\,mm$
- *face de sortie : dioptre verre/air de rayon* $\overline{S_2C_2} = 50\,mm$

L'épaisseur de la lentille est $\overline{S_1S_2} = e = 12{,}5\,mm$ *et l'indice optique du verre est* $n = 1{,}6$.

1. Calculer les distances focales f_1 f_1', f_2 et f_2' des deux dioptres.

Un objet est placé $200\,mm$ *devant le foyer objet* F_1 *de la face d'entrée :* $\overline{F_1A} = -200\,mm$.

2. Calculer la position et le grandissement de l'image $A'B'$ en utilisant la relation de Newton.

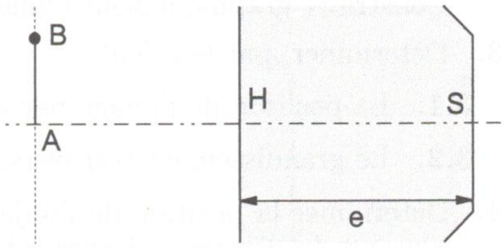
Ex 32 : Objectif de microscope

La lentille objet d'un objectif de microscope est assimilable à l'association d'un dioptre plan air/verre et d'un dioptre sphérique verre/air.

Cette lentille d'épaisseur $e = 5{,}0\,mm$, *est taillée dans un verre d'indice* $n = 1{,}5$.

La distance focale objet du dioptre sphérique est $f = -8{,}0\,mm$.

L'objet observé AB est situé $4{,}0\,mm$ *devant la lentille :* $\overline{HA} = -4{,}0\,mm$.



On considère la chaîne d'image suivante :

$$AB \xrightarrow{\text{dioptre plan}} A_1B_1 \xrightarrow{\text{dioptre sphérique}} A'B'$$

1. **Utilisation d'un objectif sec**

1.1. Calculer la position $\overline{SA_1}$ de l'image intermédiaire A_1B_1 par rapport à S.

1.2. Calculer la position et le grandissement transversal de l'image finale $A'B'$.

2. **Utilisation d'un objectif à immersion**

En microscopie à immersion, on dépose une goutte d'huile d'indice optique $n = 1{,}5$ *entre l'objet et le dioptre plan de la lentille de l'objectif.*

Calculer la nouvelle position de l'image finale $A'B'$ ainsi que la nouvelle valeur du grandissement transversal.

SOLUTIONS

Ex 25 : Grandissement transversal

1. Le théorème de Thalès dans le triangle (CAB) donne : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$ donc $\boxed{g_y = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}}$

2. Grandissement avec origine aux foyers

2.1. Dans le triangle (ABF), $(SJ)//(AB)$, le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{\overline{JS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{SF}} \qquad \text{donc} \qquad \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FA}}{f} \qquad \boxed{g_y = -\frac{f}{\overline{FA}}}$$

On montre de la même façon dans le triangle $(A'B'F')$: $\boxed{g_y = -\dfrac{\overline{F'A'}}{f'}}$

2.2. Le quotient des deux expressions précédentes donne :

$$\frac{g_y}{g_y} = \frac{\overline{F'A'}}{f'} \times \frac{\overline{FA}}{f} = \frac{\overline{F'A'}.\overline{FA}}{f.f'} \quad \text{d'où le résultat :} \quad \boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'} = f.f'}$$

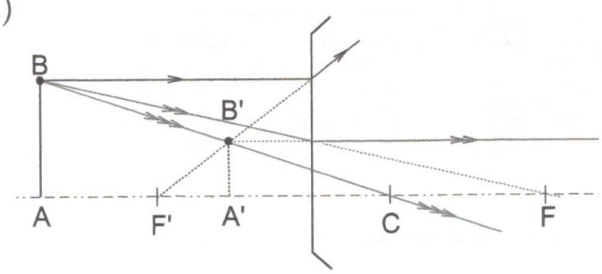
3. Grandissement transversal avec origine au sommet

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SF'} + \overline{F'A'}}{\overline{SF} + \overline{FA}} = \frac{f' + \overline{F'A'}}{f + \overline{FA}} = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{f'}{f}.\frac{1 + \dfrac{\overline{F'A'}}{f'}}{1 + \dfrac{f}{\overline{FA}}} = \frac{f'}{f}\frac{1 - g_y}{1 - \dfrac{1}{g_y}} = -\frac{f'}{f}.g_y$$

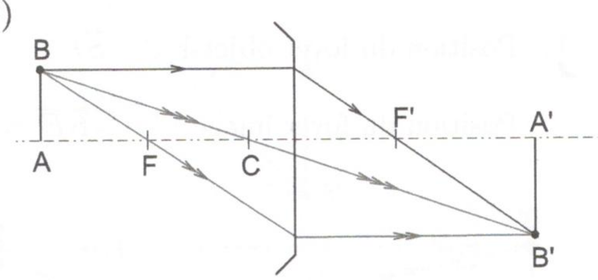
On en déduit l'expression du grandissement transversal : $\boxed{g_y = \dfrac{n}{n'}\dfrac{\overline{S'A'}}{\overline{SA}}}$

Ex 26 : Construction graphique - objet réel

1)

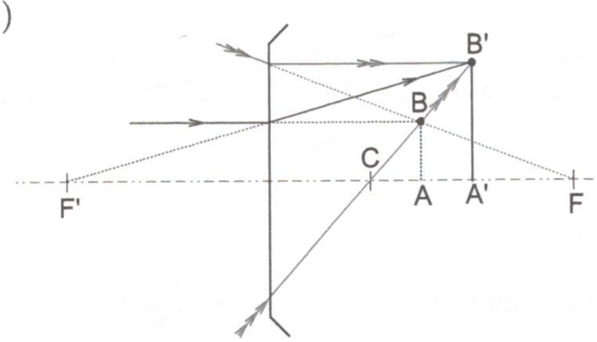


2)

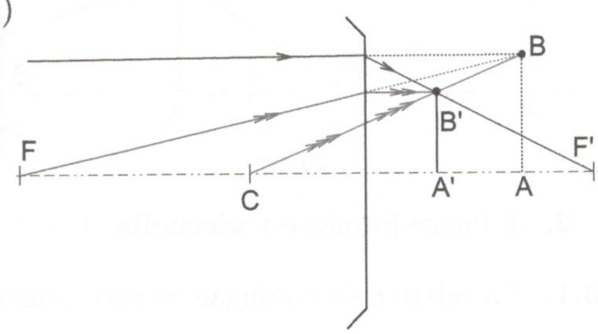


Ex 27 : Construction graphique - objet virtuel

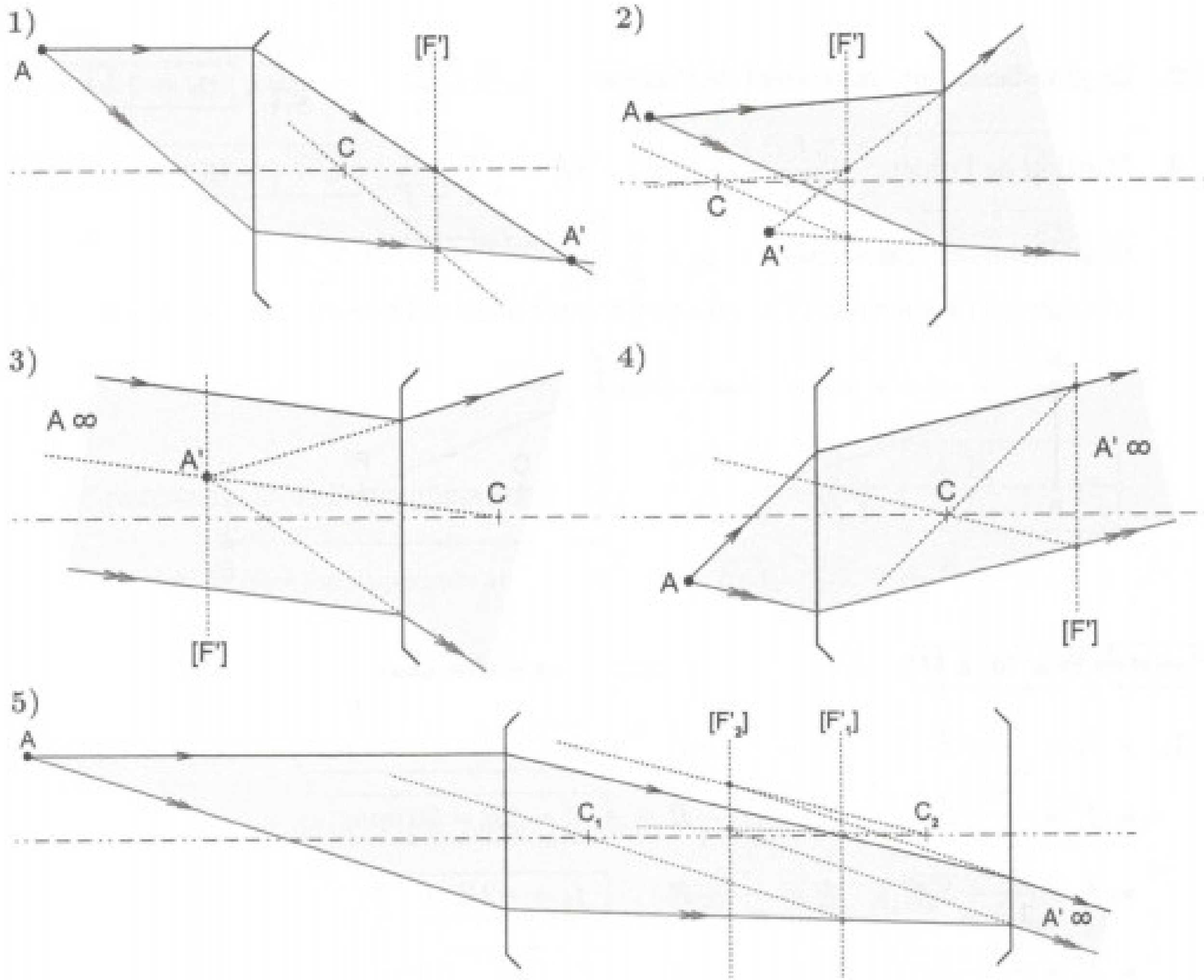
1)



2)



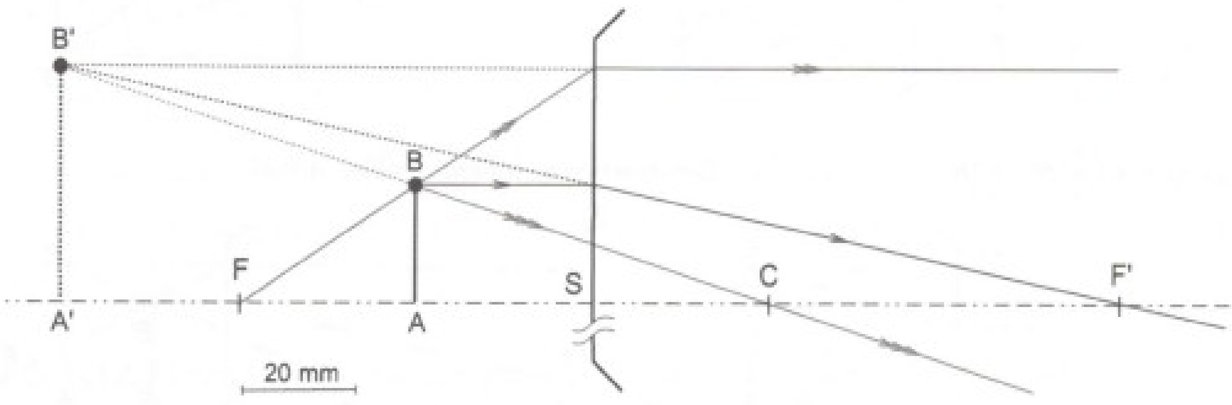
Ex 28 : Construction graphique d'un faisceau lumineux



Ex 29 : Relations de conjugaison

1. Position du foyer objet F : $\overline{SF} = -\dfrac{n}{n'-n}\overline{SC}$ $\boxed{f = \overline{SF} = -60\,mm}$

   Position du foyer image F' : $\overline{SF'} = \dfrac{n'}{n'-n}\overline{SC}$ $\boxed{f' = \overline{SF'} = 90\,mm}$



2. L'image formée est **virtuelle**

3.1. La relation de conjugaison avec origine au sommet s'écrit : $\dfrac{f}{\overline{SA}} + \dfrac{f'}{\overline{SA'}} = 1$

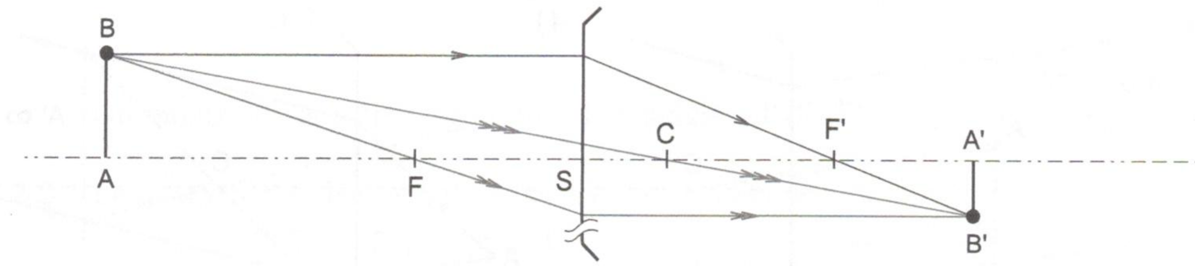
$$\frac{f'}{\overline{SA'}} = 1 - \frac{f}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA} - f}{\overline{SA}} \quad \text{et finalement} \quad \overline{SA'} = \frac{\overline{SA}.f'}{\overline{SA} - f} \quad \boxed{\overline{SA'} = -90\,mm}$$

3.2. Le grandissement transversal de l'image : $g_y = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{n}{n'}.\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ $\boxed{g_y = +2,0}$

4. Position de l'objet : $\dfrac{f}{\overline{SA}} + \dfrac{f'}{\overline{SA'}} = 1$ $\quad \overline{SA} = \dfrac{\overline{SA'}.f}{\overline{SA'} - f'}$ $\boxed{\overline{SA} = -16,8\,cm}$

Grandissement transversal : $g_y = \dfrac{n}{n'}.\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ $\boxed{g_y = -0,56}$

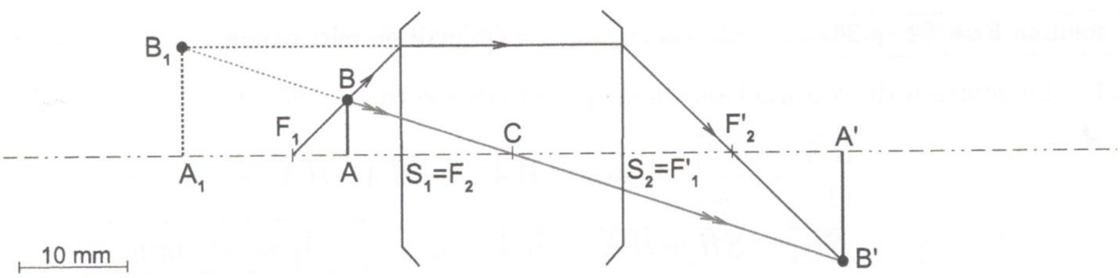
L'image est presque deux fois plus petite que l'objet et inversée par rapport à celui-ci.



Ex 30 : La lentille boule

1.
- $f_1 = \dfrac{-1}{n-1}\overline{S_1C}$ $\quad f_1 = \dfrac{-1}{n-1}R$ $\quad \boxed{f_1 = -R = -10\,mm}$
- $f'_1 = \dfrac{n}{n-1}\overline{S_1C}$ $\quad f'_1 = \dfrac{n}{n-1}R$ $\quad \boxed{f'_1 = 2R = 20\,mm}$
- $f_2 = \dfrac{-n}{1-n}\overline{S_2C}$ $\quad f_2 = \dfrac{-n}{n-1}R$ $\quad \boxed{f_2 = -2R = -20\,mm}$
- $f'_2 = \dfrac{1}{1-n}\overline{S_2C}$ $\quad f'_2 = \dfrac{1}{n-1}R$ $\quad \boxed{f'_2 = R = 10\,mm}$

2.1.



2.2. $\dfrac{f_1}{\overline{S_1A}} + \dfrac{f'_1}{\overline{S_1A_1}} = 1$ donc $\dfrac{f'_1}{\overline{S_1A_1}} = 1 - \dfrac{f_1}{\overline{S_1A}} = \dfrac{\overline{S_1A} - f_1}{\overline{S_1A}}$ $\quad \overline{S_1A_1} = \dfrac{f'_1.\overline{S_1A}}{\overline{S_1A} - f_1}$

$$\overline{S_1A} = \overline{S_1C} + \overline{CA} = -5,0\,mm \qquad \boxed{\overline{S_1A_1} = -20\,mm}$$

2.3. Grandissement transversal : $g_{y1} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{n}\dfrac{\overline{S_1A_1}}{\overline{S_1A}}$ $\boxed{g_{y1} = 2,0}$

3.2. Position de l'image finale :

$$\overline{S_2A'} = \frac{f'_2.\overline{S_2A_1}}{\overline{S_2A_1} - f_2} \quad \text{avec} \quad \overline{S_2A_1} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A_1} = -40\,mm \quad \boxed{\overline{S_2A'} = +20\,mm}$$

3.3. Grandissement lié au second dioptre : $g_{y\,2} = n\dfrac{\overline{S_2A'}}{\overline{S_2A_1}}$ $\quad g_{y\,2} = -1$

Grandissement global de la lentille boule : $g_y = g_{y\,1} \times g_{y\,2}$ $\quad \boxed{g_y = -2{,}0}$

Ex 31 : Lentille épaisse biconcave

1.

- $f_1 = -\dfrac{1}{n-1}\overline{S_1C_1}$ $\quad \boxed{f_1 = 83{,}3\,mm}$ $\quad f_1' = \dfrac{n}{n-1}\overline{S_1C_1}$ $\quad \boxed{f_1' = -133{,}3\,mm}$
- $f_2 = -\dfrac{n}{1-n}\overline{S_2C_2}$ $\quad \boxed{f_2 = 133{,}3\,mm}$ $\quad f_2' = \dfrac{1}{1-n}\overline{S_2C_2}$ $\quad \boxed{f_2' = -83{,}3\,mm}$

2. La relation de Newton appliquée au 1[er] dioptre donne :

$$\overline{F_1A} \cdot \overline{F_1'A_1} = f_1.f_1' \quad \text{donc} \quad \overline{F_1'A_1} = \frac{f_1.f_1'}{\overline{F_1A}} \quad \boxed{\overline{F_1'A_1} = 55{,}5\,mm}$$

Grandissement de l'image intermédiaire : $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\dfrac{f_1}{\overline{F_1A}}$ $\quad \boxed{\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = 0{,}42}$

Relation de Newton appliquée au 2[ème] dioptre : $\overline{F_2A_1} \cdot \overline{F_2'A'} = f_2.f_2'$ $\quad \overline{F_2'A'} = \dfrac{f_2.f_2'}{\overline{F_2A_1}}$

$$\text{avec} \quad \overline{F_2A_1} = \overline{F_2S_2} + \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F_1'} + \overline{F_1'A_1} = -f_2 - e + f_1' + \overline{F_1'A_1} = -223{,}6\,mm$$

$$\boxed{\overline{F_2'A'} = 49{,}6\,mm}$$

Grandissement de $A'B'$ par rapport à A_1B_1 : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = -\dfrac{\overline{F_2'A'}}{f_2'}$ $\quad \boxed{\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = 0{,}59}$

Grandissement transversal de la lentille : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \cdot \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$ $\quad \boxed{\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 0{,}25}$

Ex 32 : Objectif de microscope

1.1. La relation de conjugaison du dioptre plan s'écrit :

$$\frac{\overline{HA}}{1} = \frac{\overline{HA_1}}{n} \quad \text{soit} \quad \overline{HA_1} = n\overline{HA} \quad \overline{HA_1} = -6{,}0\,mm$$

$$\overline{SA_1} = \overline{SH} + \overline{HA_1} = \overline{HA_1} - e \quad \boxed{\overline{SA_1} = -11\,mm}$$

1.2. La relation de conjugaison du dioptre sphérique s'écrit : $\dfrac{f}{\overline{SA_1}} + \dfrac{f'}{\overline{SA'}} = 1$

$$\text{donc} \quad \overline{SA'} = \frac{f'.\overline{SA_1}}{\overline{SA_1} - f} \quad \text{avec } f' = -\frac{f}{n} = 5{,}33\,mm \quad \boxed{\overline{SA'} = 19{,}5\,mm}$$

Le dioptre plan ne modifie pas la taille de l'image ($\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$), le grandissement transversal de la lentille est donc simplement égal à celui du dioptre sphérique :

$$g_y = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = n\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA_1}} \quad \boxed{g_y = -2{,}66}$$

2. Utilisation d'un objectif à immersion

L'indice optique de l'huile est égal à celui du verre de la lentille, le dioptre plan ne joue plus aucun rôle. La chaîne d'image se simplifie : $AB \xrightarrow{\text{dioptre sphérique}} A'B'$

$$\overline{SA'} = \frac{f'.\overline{SA}}{\overline{SA} - f} \quad \text{avec} \quad \overline{SA} = \overline{HA} - e = -9,0\,mm \qquad \boxed{\overline{SA'} = 48,0\,mm}$$

Nouvelle valeur du grandissement transversal : $g_y = n.\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ $\boxed{g_y = -8,0}$