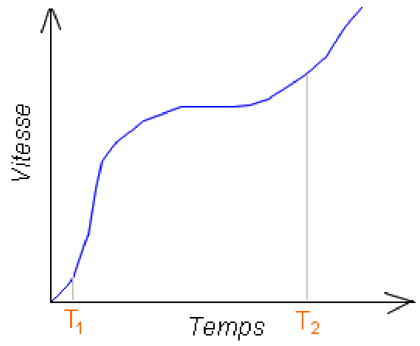
Le nombre dérivé

Le **nombre dérivé** a été inventé pour mesurer la pente des courbes : le nombre dérivé d'une fonction pour une abscisse x=a est une mesure de la pente de sa courbe à cette abscisse.

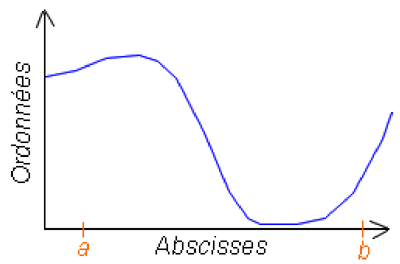
Exemple : lancement d'une fusée



Le nombre dérivé au point d'abscisse T_1 est supérieur au nombre dérivé au point d'abscisse T_2 car la courbe monte plus vite.

L'accélération de la fusée à l'instant T_1 est donc plus grande que celle à l'instant T_2, bien que la vitesse soit inférieure.

À ton avis, le nombre dérivé au point d'abscisse *a* est-il inférieur ou supérieur à celui au point d'abscisse *b*?

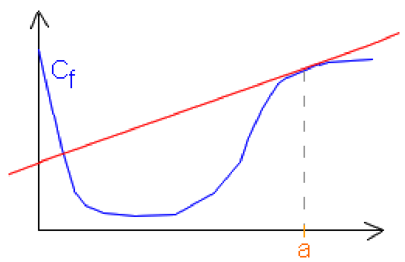


Calcul du nombre dérivé d'une fonction en un point

1. La tangente

On appelle **tangente à une courbe en un point** la droite qui touche la courbe en ce point en suivant sa direction. Comme nous savons mesurer la pente d'une droite (avec le coefficient directeur), on définit **le nombre dérivé d'une fonction en un point** comme **le coefficient directeur de la tangente à la courbe de cette fonction en ce point**.

Exemple



La droite rouge est la tangente à la courbe bleue au point d'abscisse *a*.

Le nombre dérivé de *f* en a est le coefficient directeur de la droite rouge.

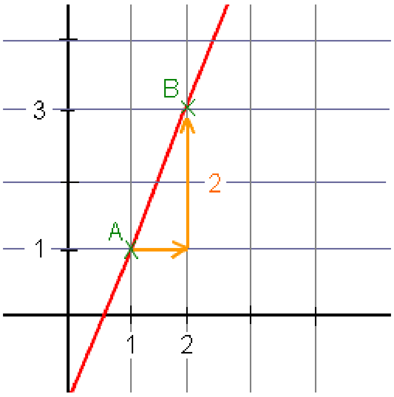
2. Rappels sur le coefficient directeur

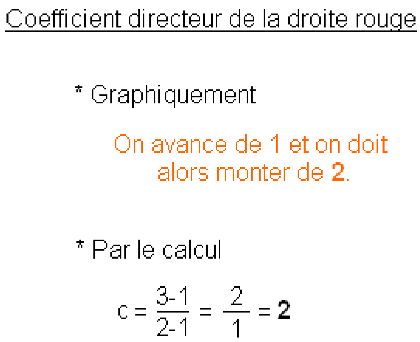
Il y a deux manières de connaître le coefficient directeur d'une droite.

- **1. Graphiquement**
  On choisit un point sur la droite, puis à partir de ce point on avance d'une unité à droite, puis on compte de combien on doit monter ou descendre pour revenir sur la droite. Le nombre obtenu est le coefficient directeur.

- **2. Par le calcul**
  À partir des coordonnées de deux points A et B de la droite, le coefficient directeur se calcule avec la formule $c = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple

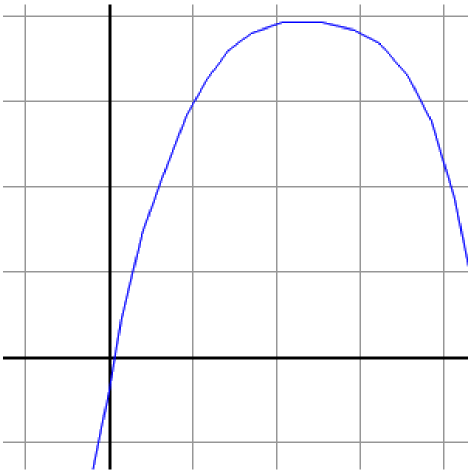




3. Le nombre dérivé

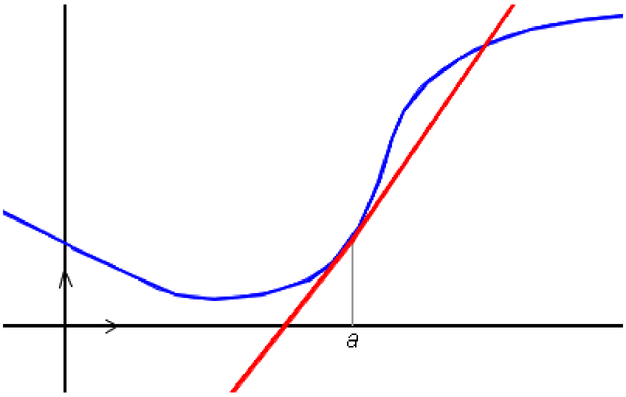
Comme écrit précédemment, le nombre dérivé d'une fonction *f* en un nombre *a* est **le coefficient directeur de la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse *a***.

Le nombre dérivé de *f* en *a* est noté **f'(a)**. Combien fait f'(1)?



4. Calcul du nombre dérivé

Considérons un nombre *a* et une fonction *f* dont on connaît l'expression, et cherchons une formule permettant de calculer f'(a).

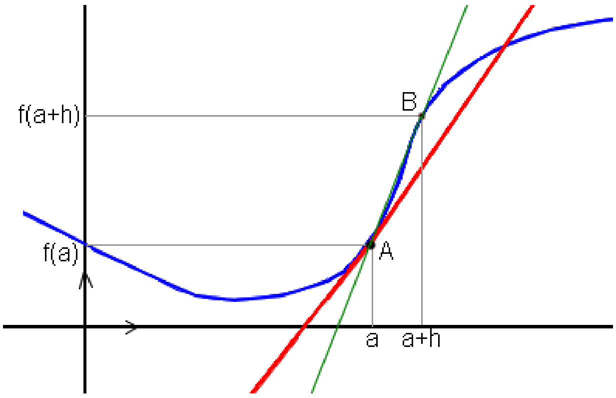


Nous devons calculer le coefficient directeur de la droite rouge uniquement à partir de *f* et de *a*.

Pour calculer le coefficient directeur, nous ne connaissons qu'une formule : $c=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

Pour utiliser cette formule, nous avons besoin des coordonnées **de deux points** de la droite.
Mais nous n'avons les coordonnées que d'un seul : $A(a;f(a))$.

Prenons donc un nombre *h* au hasard et introduisons le point $B(a+h;f(a+h))$.



Nous pouvons maintenant calculer le coefficient directeur de la droite (AB).

$c=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Nous obtenons un résultat, mais bien sûr, cette droite verte (AB) n'est pas la tangente que nous recherchions !

Cependant, on remarque que plus h est proche de zéro, plus la droite verte se rapproche de la droite rouge, et plus le nombre *c(h)* que nous pouvons calculer est donc proche de f'(a).

Nous allons donc ***"faire tendre"*** h vers 0 et alors c(h) va ***"tendre vers"*** f'(a).

On écrit $\lim_{h\to 0} c(h) = f'(a)$, ce qui se lit : "*limite quand h tend vers zéro de c de h égal f prime de a*".

Nous avons donc la formule :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Cette formule est la plus difficile à comprendre de la classe de première, alors si tu as compris, il ne peut plus rien t'arriver !

5. Utilisation de la formule

Méthode
Pour calculer le nombre dérivé d'une fonction *f* en un point *a*:

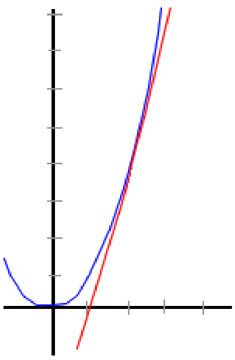
- **1.** On calcule le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, aussi appelé *taux de variation* de f entre *a* et *a*+*h*.
- **2.** On fait "tendre" h vers 0. Dans les exercices de première, il faut juste remplacer h par zéro dans le résultat du calcul de l'étape 1. Cela se compliquera sérieusement en terminale.

Exemple
Calcul de f'(2) pour la fonction $f : x \mapsto x^2$.

1. On calcule $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$:

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2-2^2}{h}\\ &= \frac{4+4h+h^2-4}{h}\\ &= \frac{4h+h^2}{h}\\ &= 4+h \quad si \quad h\neq 0\end{aligned}$$

2. On remplace h par zéro. On obtient 4 donc f'(2)=4.



On peut vérifier notre résultat graphiquement.
La pente de cette courbe au point d'abscisse 2 est bien 4.

Remarque
Il peut arriver que la limite ne soit pas finie, par exemple si en remplaçant h par zéro on obtient une division par zéro. Dans ce cas, cela n'a pas de sens de calculer f'(a) (on n'écrira jamais f'(a)=+∞).

Calcul de f'(3) avec la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$.

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h}=\frac{\frac{3}{3(3+h)}-\frac{3+h}{3(3+h)}}{h}=\frac{\frac{3-3-h}{3(3+h)}}{h}=\frac{-\frac{h}{3(3+h)}}{\frac{h}{1}}=-\frac{h}{3(3+h)}\times\frac{1}{h}=-\frac{1}{3(3+h)}$$ donc $\boxed{f'(3)=-\frac{1}{9}}$.

Équation de la tangente

Pour une fonction f et une abscisse a donnés, la formule ci-dessous donne l'équation de la tangente à la courbe de f en a.

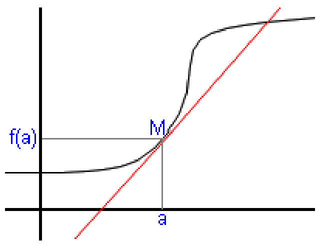
Formule

La tangente à la courbe d'une fonction *f* au point d'abscisse *a* a toujours pour équation :

$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$

<u>Démonstration</u>

Comme toute droite, cette droite possède une équation qui peut s'écrire sous la forme y=mx+p.
Par définition du nombre dérivé, le coefficient directeur de cette tangente est f'(a).
Nous avons donc y=f'(a)x+p.



La droite rouge a pour équation
$y=f'(a)x+p$

Cherchons à exprimer le nombre *p* en fonction de *f* et de *a*.
Comme $M(a;f(a))$ appartient à la droite, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

$f(a)=f'(a)a+p$ donc $p=f(a)-af'(a)$.

Remplaçons finalement cette valeur de *p* dans l'équation de la droite : $y=f'(a)x+f(a)-af'(a)$.
En factorisant par f'(a), on obtient la formule :

$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$.

Utilisation

Pour calculer l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction *f* en un point d'abscisse *a* :

<u>Méthode</u>

- **1.** On calcule f(a) et f'(a).
- **2.** On remplace les résultats obtenus dans la formule.
- **3.** On développe et réduit le résultat.

Exemple

Équation de la tangente à la courbe de $f : x \mapsto x^2$ en a=2.

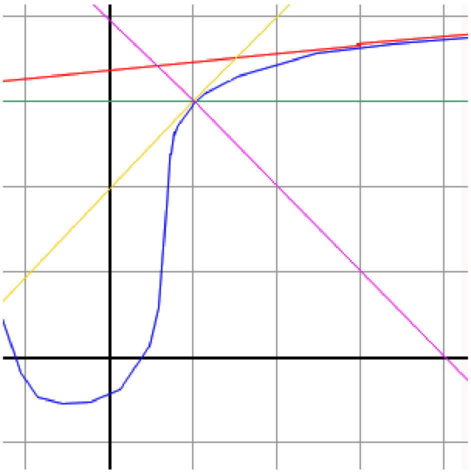
1. f(2)=4 et f'(2)=4.
2. y=4(x-2)+4.
3. y=4x-4.

Écris l'équation de la tangente à la courbe de $f : x \mapsto x^2$ en a=1.

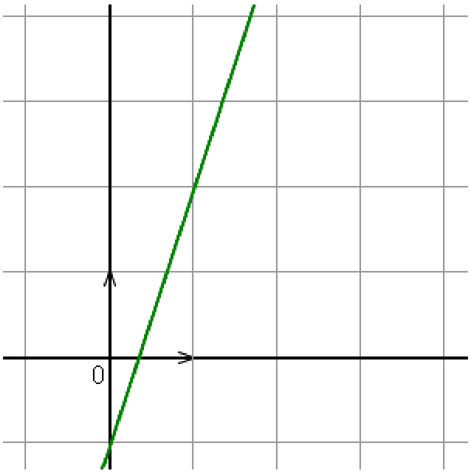
Exercice 1
Le nombre dérivé d'une fonction en un x permet :

De savoir si la fonction est croissante en ce x
De savoir si la fonction est positive en ce x
De savoir si la fonction admet un maximum en ce x
De faire partir cette fonction à la dérive à partir de ce x

Exercice 2
De quelle couleur est la tangente à la courbe bleue au point d'abscisse 3?

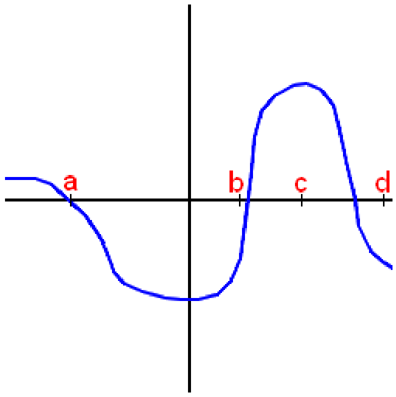


Exercice 3
Quel est le coefficient directeur de cette droite?



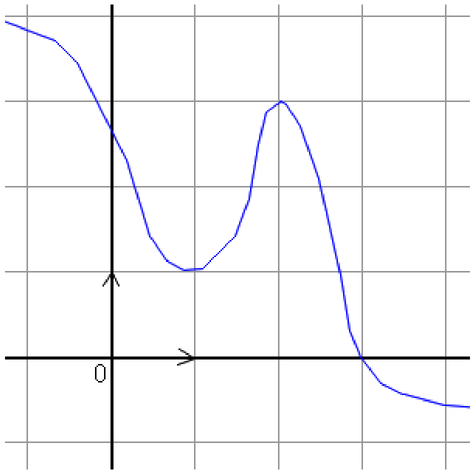
Exercice 4
Une droite passe par les points D(3;6) et E(6;-3).
Quel est son coefficient directeur?

Exercice 5
La courbe bleue est la courbe représentative d'une fonction f.

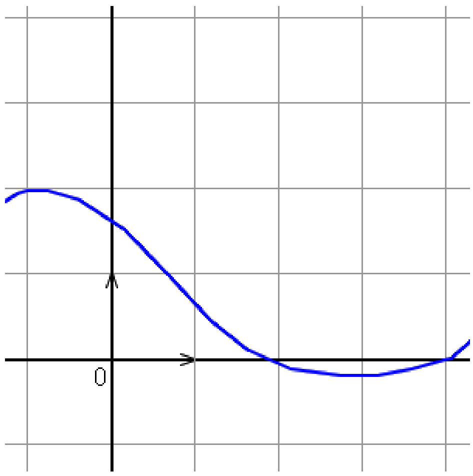


Lequel des nombres ci-dessous est le plus grand?
$f'(a)$ $f'(b)$ $f'(c)$ $f'(d)$

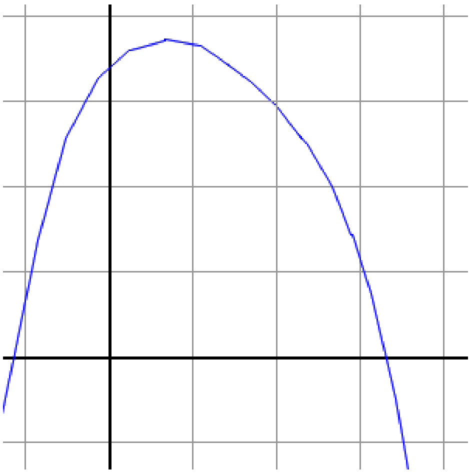
Exercice 6
Ecris une valeur de x pour laquelle f'(x)≥0.



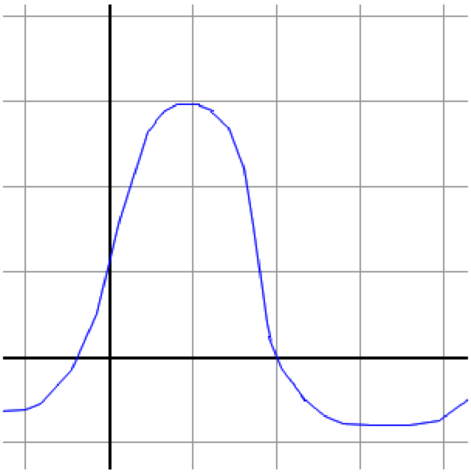
Exercice 7
Donne une valeur de x pour laquelle f'(x)=0.



Exercice 8
Quel est le nombre dérivé de f en x=2?



Exercice 9
Combien vaut f'(2)?



Exercice 10
On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.
Quel est son taux de variation entre 1 et 3?

Exercice 11
On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.
Combien vaut f'(-2)?

Exercice 12
Ecris sous la forme y=mx+p l'équation de la tangente à la courbe de $f : x \mapsto x^2$ en a=3.

Exercice 13
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.
Combien vaut f'(3), arrondi à 0,01 près?

Exercice 14
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
Combien vaut f'(4)?