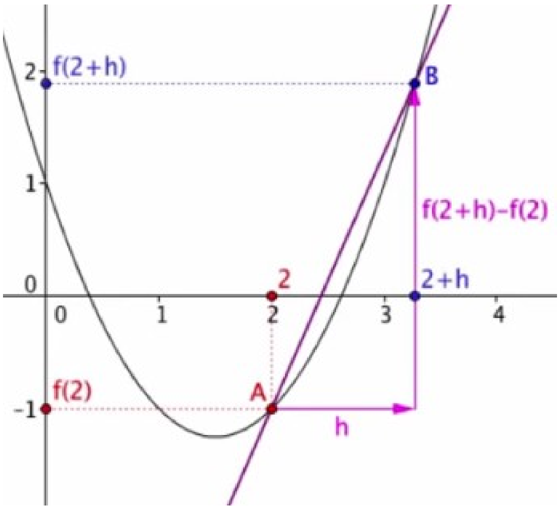
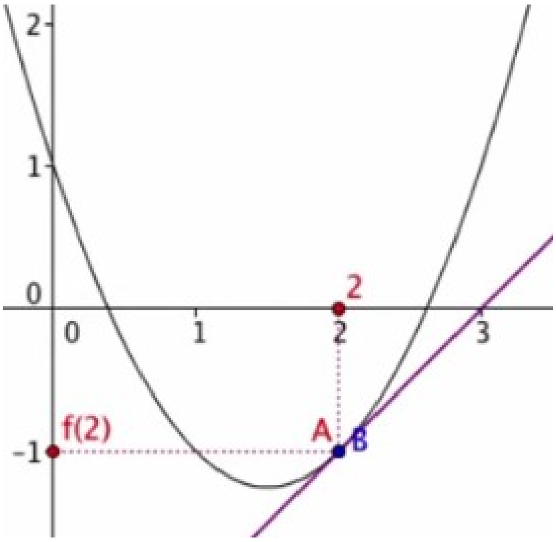
Le nombre dérivé

Définition et calcul du nombre dérivé

Déterminer que la fonction f définie par $f(x)=x^2-3x+1$ est dérivable en $x=2$. Calculer le nombre dérivé en 2.





- Les coordonnées des points A et B sont :
$$A(2;f(2)) \text{ et } B(2+h;f(2+h)) .$$
- Le coefficient directeur de la droite passant par A et B est :
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} .$$
- On rapproche de plus en plus les points A et B. Pour cela, on fait tendre h vers 0.
- Les points A et B coïncident. La droite devient la tangente en $x=2$.
- Le **coefficient directeur de la tangente** en $x=2$ est donc :
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} .$$

Propriété :

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L, tel que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=L .$$

L est appelé **nombre dérivé** de f en a.

On note : $f'(a)=L$.

Dérivabilité et calcul du nombre dérivé :

$f(2+h)=(2+h)^2-3(2+h)+1=4+4h+h^2-6-3h+1=h^2+h-1$.

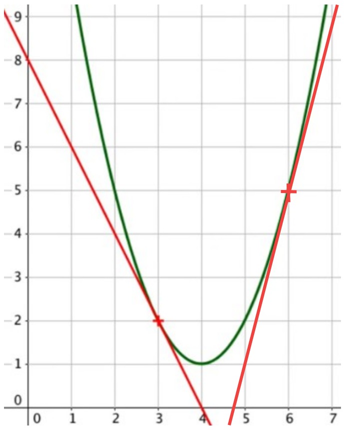
$f(2)=2^2-6+1=-1$.

Donc : $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h^2}{h}+\frac{h}{h}\right)=\lim_{h\to 0}(h+1)=1$.

On peut conclure que la fonction f est dérivable en $x=2$.

Le nombre dérivé en $x=2$ est égal à 1. On écrit $f'(2)=1$.

Déterminer graphiquement le nombre dérivé et l'équation de la tangente



Déterminer le nombre dérivé et l'équation de la tangente en $x=3$ et $x=6$.

- Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente.
- Équation de la tangente en $x=a$:

$$y=f'(a)(x-a)+f(a) .$$

Donc, le nombre dérivé en $x=3$ est $f'(3)=-2$ et en $x=6$ est $f'(6)=4$.

L'équation de la tangente en $x=3$ est :

$y=f'(3)(x-3)+f(3)=-2(x-3)+2=-2x+6+2=-2x+8$, donc $y=-2x+8$.

L'équation de la tangente en $x=6$ est :

$y=f'(6)(x-6)+f(6)=4(x-6)+5=4x-24+5=4x-19$, donc $y=4x-19$.

Déterminer l'équation de la tangente à une courbe représentative

Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2-5x+2$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x=1$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x=1$ est :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1) .$$

On a : $f(1)=1^2-5+2=-2$.

Le nombre dérivé est : $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$, où

$f(1+h)=(1+h)^2-5(1+h)+2=1+2h+h^2-5-5h+2=h^2-3h-2$,

donc : $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-3h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h-3)=-3$.

En remplaçant dans la formule pour la tangente on trouve : $y=-3(x-1)-2=-3x+1$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x=1$ est donc : $y=-3x+1$.

La fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la <u>fonction dérivée</u>.

Formule de la dérivée de la fonction $f(x)=x^2$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

On doit calculer le nombre dérivé de f en x :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad .$$

On a : $f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$ et $f(x)=x^2$ donc :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x \quad .$$

La fonction f est donc dérivable en x , pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a : $f'(x)=2x$.

$$\boxed{\text{Si } f(x)=x^2 \text{ , alors } f'(x)=2x}$$

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x) = ax + b$ a, b réels	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b, c réels	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

Règles de dérivation

Opérations usuelles avec les dérivées

Dérivée d'une somme : $(u+v)'=u'+v'$.

Dérivée d'un produit par un réel k : $(ku)'=ku'$.

Dérivée d'un produit : $(uv)'=u'v+uv'$.

Dérivée de l'inverse : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$.

Dérivée d'un quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Dérivée d'une fonction composée

Si $f=u^n$ alors $f'=nu^{n-1}u'$.

Exemple : $f(x)=(\ln x)^3$. Donc $f=u^3$ avec $u=\ln x$ et $u'=\frac{1}{x}$. Alors $f'(x)=\frac{3(\ln x)^2}{x}$.

Si $f=\ln(u)$ alors $f'=\frac{u'}{u}$.

Exemple : $f(x)=\ln(x^3)$. Donc $f=\ln(u)$ avec $u=x^3$ et $u'=3x^2$. Alors $f'(x)=\frac{3x^2}{x^3}=\frac{3}{x}$.

Si $f=\mathrm{e}^u$ alors $f'=\mathrm{e}^u u'$.

Exemple : $f(x)=\mathrm{e}^{x^3}$. Donc $f=\mathrm{e}^u$ avec $u=x^3$ et $u'=3x^2$. Alors $f'(x)=\mathrm{e}^{x^3}3x^2=3x^2\mathrm{e}^{x^3}$.

Dérivée et sens de variations d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ; f' est la fonction dérivée de f .

- Si pour tout $x\in I$, on a $f'>0$, alors f est <u>strictement croissante</u> sur I .
- Si pour tout $x\in I$, on a $f'<0$, alors f est <u>strictement décroissante</u> sur I .
- Si pour tout $x\in I$, on a $f'=0$, alors f est <u>constante</u> sur I .

Maximum ou minimum local d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ; f' est la fonction dérivée de f .

Si, pour la valeur x_0 de I , <u>la dérivée</u> f' <u>s'annule en changeant de signe</u>, alors la fonction f admet en x_0 un maximum ou un minimum local.

Le tableau de variations permet de savoir s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

Comment étudier les variations d’une fonction en utilisant la dérivée ?

1. On calcule la dérivée f' de f .
2. On étudie le signe de f' et on en déduit les variations de f .
3. On construit le tableau de variation et on détermine maximum et minimum.

Exemple : Étudier les variations de f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

1. On calcule la dérivée f' de f :

   $f=\frac{u}{v}$ avec $u=\ln x$ et $v=x^2$. Donc $u'=\frac{1}{x}$ et $v'=2x$. Alors, on a :

   $$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{\frac{x^2}{x}-2x\ln x}{x^4}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}\ .$$

2. On étudie le signe de f' sur $]0;+\infty[$:

   Sur $]0;+\infty[$, f' a le signe de $1-2\ln x$. On a :

   $1-2\ln x>0$ si $\ln x<\frac{1}{2}$, c’est-à-dire si $x<\sqrt{e}$.

   On en déduit les variations de f :

   f est croissante sur $]0;e[$; f est décroissante sur $]e;+\infty[$.

3. On construit le tableau de variation :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

Où on a indiqué les limites :

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

La fonction f admet en $x=\sqrt{e}$ un maximum local avec $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$.

Exercices

Ex 1 : Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x)=2x^2-8x-5$ $\qquad g(x)=-x^2+3x$
2. $f(x)=x^3+x+1$ $\qquad g(x)=x^4-3x^2+2$
3. $f(x)=(2x+1)^3$ $\qquad g(x)=(x+2)(e^x+1)$

4. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+4x+1}$ $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

5. $f(x)=(2x^2+x)(x^2+1)$ $g(x)=\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$

6. $f(x)=e^{2x+3}$ $g(x)=x+e^x$

7. $f(x)=3x-4+e^{-2x}$ $g(x)=2x^2-4e^{-x}$

8. $f(x)=x^3-3\ln x$ $g(x)=2(\ln x)^3+x$

9. $f(x)=\dfrac{3}{1+2x}$ $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

10. $f(x)=\ln(3x+1)$ $g(x)=2x^2+3e^{2x}$

11. $f(x)=4e^{-x}+2e^x$ $g(x)=xe^{-2x}$

12. $f(x)=(x+1)e^{-x}$ $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

13. $f(x)=\ln(x^2+1)$ $g(x)=e^{-2x+1}+2\ln x$

14. $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ $g(x)=x\sqrt{x}-\sqrt{x}$

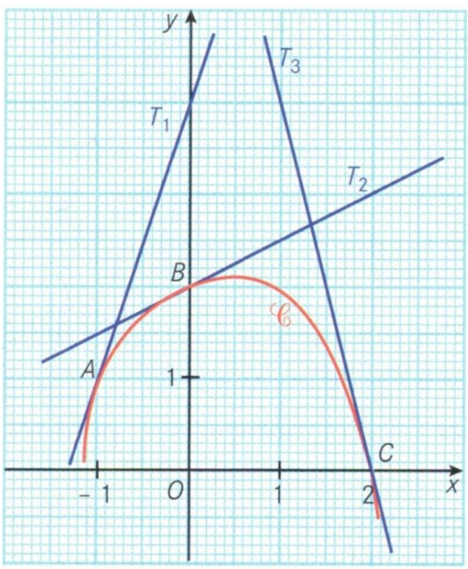
15. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ $g(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$

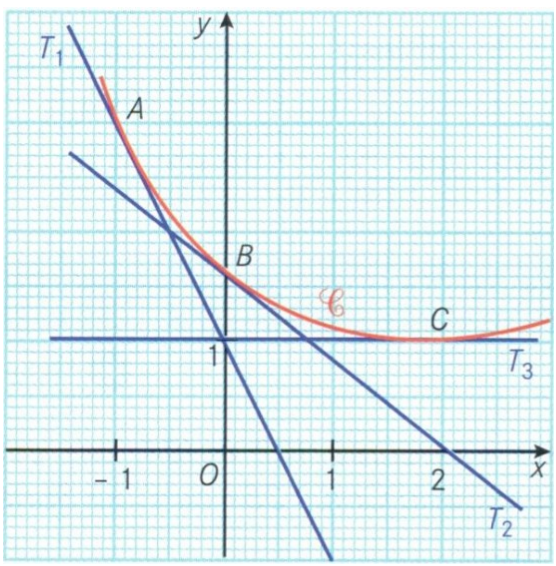
16. $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$ $g(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln x+1}$

Utilisation d'un graphique

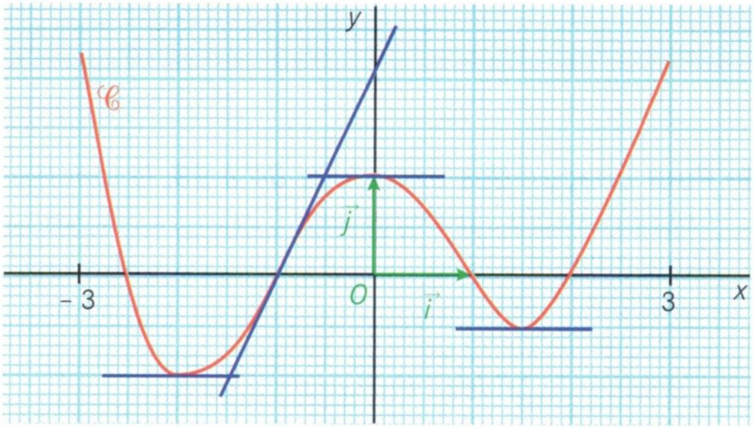
Ex 2 : C est la courbe représentative d'une fonction f dérivable.
Les droites T_1, T_2, T_3 sont tangentes à C aux points A, B, C.

1. Déterminer par lecture graphique les nombres dérivés $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(2)$.
2. Donner une équation des droites T_1, T_2, T_3.





Ex 3 : C est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3;3]$; f' désigne la dérivée de f. Les droites tracées sont tangentes à C.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

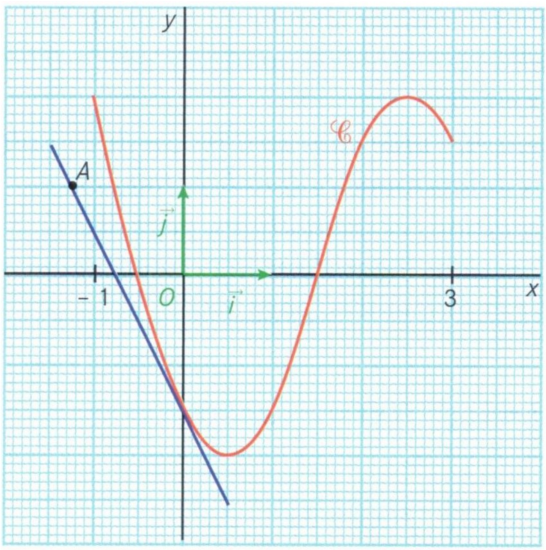
1. Déterminer le signe de $f(x)$, selon les valeurs de x.
2. Donner le tableau de variation de f.
3. En déduire les solutions de l'inéquation $f'(x)>0$.
4. Déterminer une équation de la tangente à C en son point d'abscisse -1.

Ex 4 : C est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-1;3]$.

1. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$$f(x)=0 \quad ; \qquad f(x)=3{,}5 \quad ; \qquad f'(x)=0 \quad .$$

2. À partir de l'observation du graphique, donner le tableau de variation de f.



3. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[-1;3]$.
4. La tangente à C en son point d'abscisse 0 passe par $A\left(-\frac{5}{4};1\right)$.

   Déterminer $f'(0)$.

Variations de fonctions

Ex 5 : Dans chaque cas calculer $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$ sur I et dresser le tableau de variations de f .

1. $I=\mathbb{R}$ $f(x)=2x^2-8x-3$
2. $I=\mathbb{R}$ $f(x)=-x^2+3x+5$
3. $I=\mathbb{R}$ $f(x)=x^3-3x+1$
4. $I=[0;+\infty[$ $f(x)=2x^2-4\mathrm{e}^{-x}$
5. $I=]0;+\infty[$ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$
6. $I=]0;+\infty[$ $f(x)=\ln x-x-1$
7. $I=\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x$
8. $I=\mathbb{R}$ $f(x)=3x^2-3x^3$
9. $I=]0;+\infty[$ $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$
10. $I=[0;10]$ $f(x)=x+10-5\ln(x+2)$
11. $I=]0;+\infty[$ $f(x)=x^2-18\ln x+18$
12. $I=\mathbb{R}$ $f(x)=2\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^{x}+2$
13. $I=[0;40]$ $f(x)=45x^2-x^3$
14. $I=[0;12]$ $f(x)=x^3-24x^2+144x$
15. $I=]0;+\infty[$ $f(x)=3+2\ln x-(\ln x)^2$

Ex 6 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{2(\mathrm{e}^x+1)}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout x réel $f'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+2}{2(\mathrm{e}^x+1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variation de f .

Ex 7 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-7\mathrm{e}^x+5x+1$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout x réel $f'(x)=(\mathrm{e}^x-1)(2\mathrm{e}^x-5)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de f .

Ex 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-2x+\mathrm{e}^{2x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
2. En déduire que, pour tout réel x , on a $f(x)>0$.

Développement limité d'une fonction

Un **développement limité** d'une fonction en un point est une **approximation polynomiale** de cette fonction au voisinage de ce point.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si :

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0}\epsilon(x)=0 \ .$$

Comment exploiter un développement limité d'une fonction pour donner l'équation réduite de la tangente *T* à la courbe représentative *C* de cette fonction en son point d'abscisse 0 et préciser les positions relatives de *C* et *T* ?

Si le développement limité de f en 0 est :

$$f(x)=a_0+a_1x+a_nx^n+x^n\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0 \ ,$$

alors :

1. La courbe C passe par le point A de coordonnées $A(0;a_0)$.
2. La courbe C admet en A une tangente T dont l'équation réduite est :
$$y=a_0+a_1x \ .$$
3. La position de C par rapport à T est donnée par le signe du terme a_nx_n au voisinage de 0 .

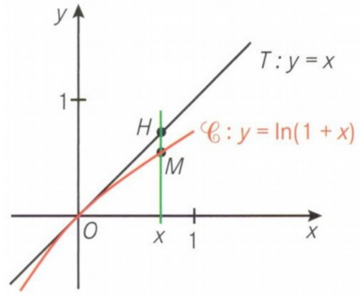
Dans les cas usuels, le 1[er] terme non nul après a_0+a_1x est a_2x_2 ou a_3x_3 , c'est-à-dire $n=2$ ou $n=3$.

Exemple : Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité de $f(x)=\ln(1+x)$, à l'ordre $n=2$, en 0 :

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0 \ .$$

Donc $a_0=0$, $a_1=1$ et $a_2=-\frac{1}{2}$.

On en déduit :



1. La courbe C passe par le point $O(0;0)$.
2. La courbe C admet en O une tangente T dont l'équation réduite est $y=x$.
3. $HM=f(x)-x$ donc, au voisinage de 0 , $HM\approx-\frac{x^2}{2}$.

Ainsi, pour tout x voisin de 0 , on a $HM<0$, donc C est au-dessous de T .

Exercices

Pour les exercices suivants, f *est une fonction définie sur l'intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.
On donne un développement limité de f *en* 0 .
En déduire l'équation réduite de la tangente T *à la courbe* C *représentative de* f *en son point d'abscisse* 0 *et la position de* C *par rapport à* T *au voisinage de ce point.*
Illustrer par un schéma cette situation.

Ex 1 : $I=]-1;+\infty[$; $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$.

À l'ordre 2, en 0 : $f(x)=1-2x+2x^2+x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0$.

Ex 2 : $I=]-1;+\infty[$; $f(x)=\sqrt{1+x}$.

À l'ordre 2, en 0 : $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0$.

Ex 3 : $I=\mathbb{R}$; $f(x)=\mathrm{e}^x+\cos(x)$.

À l'ordre 3, en 0 : $f(x)=2+x+\frac{x^3}{6}+x^3\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0$.

Ex 4 : $I=\mathbb{R}$; $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x$.

À l'ordre 3, en 0 : $f(x)=-2x-\frac{x^3}{3}+x^3\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x)=0$.