Probabilités sur un ensemble fini

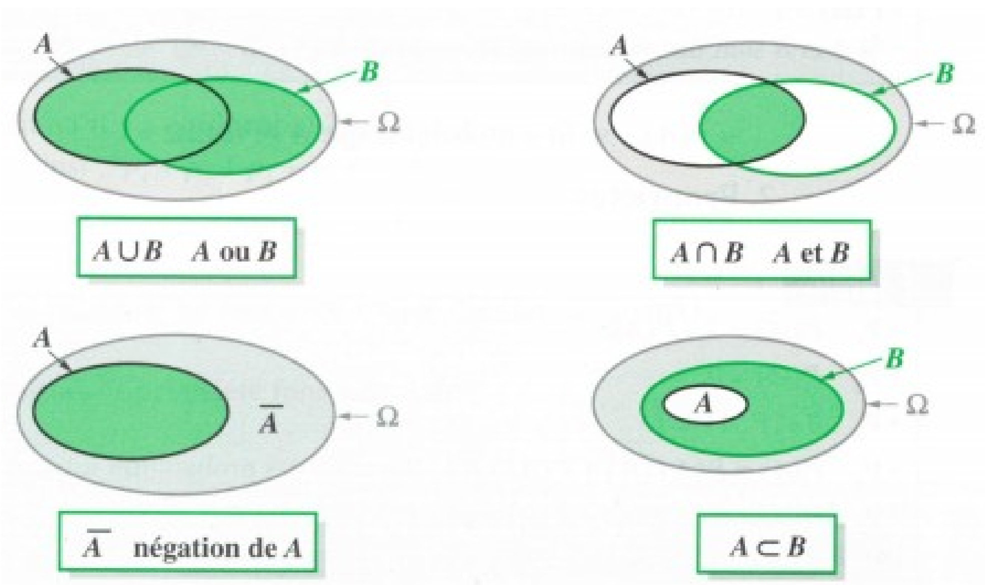
1. Langage

Une **expérience aléatoire** ou **épreuve** (*on lance un dé*) est une expérience ou les résultats dépendent du hasard.
Les résultats possibles sont des **éventualités** ou **possibilités** (*1, 2, 3, 4, 5 ou 6*).
L'ensemble des éventualités est appelé **univers,** noté en général Ω ($\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$).
Un **événement** est une partie de l'univers ($A=\{1,3,4\}$).
Événement élémentaire : partie qui contient une seule éventualités $A=\{6\}$
Événement certain : c'est la partie égale à l'univers $A=\Omega$
Événement impossible : c'est l'ensemble vide $A=\emptyset$
L'événement *A* se lit « l'événement *A* est réalisé ».

2. Opérations et événements

L'**événement contraire** de *A*, noté $\bar{A}$, est l'événement qui contient toutes les éventualités qui ne sont pas dans *A* (*si* $A=\{1,3\}$ $\bar{A}=\{2,4,5,6\}$).
La **réunion** de deux événements *A* et *B*, notée $A\cup B$, est l'événement qui contient toutes les éventualités de *A* **ou** de *B* (soit $A=\{1,3,5\}$ et $B=\{1,2,3,4\}$ $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$).
L'**intersection** de deux événements *A* et *B*, notée $A\cap B$, est l'événement qui contient les éventualités communes à A **et** à B (soit $A=\{1,3,5\}$ et $B=\{1,2,3,4\}$ $A\cap B=\{1,3\}$).
Si $A\cap B=\emptyset$, on dit que les événements *A* et *B* sont des **événements incompatibles** (soit $A=\{2,3,4\}$ et $B=\{6\}$ $A\cap B=\emptyset$).
Inclusion. *A* est inclus dans *B*, noté $A\subset B$, signifie : Si A est réalisé alors B est réalisé (soit $A=\{2,4,6\}$ et $B=\{1,2,4,6\}$ $A\subset B$).

2.1 Représentation graphique



3. Probabilité sur un univers fini

3.1 Définition

À savoir

Soit Ω un univers fini, et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.
Dans une épreuve, on appelle probabilité définie sur Ω, toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui vérifie :
- **$P(\Omega) = 1$**
- **Si A et B sont des événements incompatibles ($A \cap B = \varnothing$) alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.**

« $P(A)$ » se lit « probabilité que A se réalise ».

3.2 Propriétés

À savoir

- **P_1** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- **P_2** $P(\varnothing) = 0$.
- **P_3** $0 \leq P(A) \leq 1$.
- **P_4** $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ **(formule des probabilités totales).**
- **P_5** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **P_6** $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = P(\overline{A \cup B})$.

3.3 Équiprobabilité

Définition

Soit Ω un univers fini.
On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

- Soit le jeu de lancer d'un dé.

On utilise comme notation : $P(\{i\}) = p_i$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les probabilités des événements élémentaires du jeu de dé (dé non pipé) sont :
$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \dfrac{1}{6}$.
On dit qu'il y a **équiprobabilité**.
On a ainsi : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.

- Pour une pièce équilibrée : $P(\{F\}) = P(\{P\}) = \dfrac{1}{2}$.

- Pour un jeu de 52 cartes non truqué : $P(\{\text{As de cœur}\}) = \dfrac{1}{52}$.

À savoir

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, alors $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$ pour tout entier i de l'intervalle $[1, n]$.

Propriété fondamentale

Soit A un événement de Ω **dans une situation d'équiprobabilité**, on a :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}.$$

Exemple

Reprenons le jeu de dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
Soit A l'événement : « obtenir un nombre pair ». $A = \{2, 4, 6\}$.
Nombre de cas favorables : 3. Nombre de cas possibles : 6.
On obtient : $P(A) = \frac{3}{6}$; $P(A) = \frac{1}{2}$.

4. Probabilités conditionnelles

Définition 1

Soit A un événement de probabilité non nulle.
On appelle **probabilité conditionnelle relative à A**, la probabilité définie par :
Pour tout $B \in \Omega$, $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$P_A(B)$ se note aussi $P(B/A)$.
On lit : « la probabilité de B **sachant** A » ou « la probabilité de B **si** A », c'est-à-dire : la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé.

À savoir

• **Formule pratique :** $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

Exercice résolu

Les individus d'une population peuvent être atteints de deux maladies a et b. On choisit un individu au hasard dans la population.

On note A l'événement « L'individu est atteint de la maladie a » et B l'événement « L'individu est atteint de la maladie b ».

On donne $P(A) = 0{,}02$; $P(B) = 0{,}03$ et $P(A \cap B) = 0{,}015$.

Calculer $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}015}{0{,}03} = 0{,}5$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}015}{0{,}02} = 0{,}75$$

Comment construire et utiliser un arbre pour résoudre un problème faisant intervenir des probabilités conditionnelles ?

L'objectif est de traduire l'énoncé en terme de probabilités, puis de construire un arbre figurant les cas possibles.

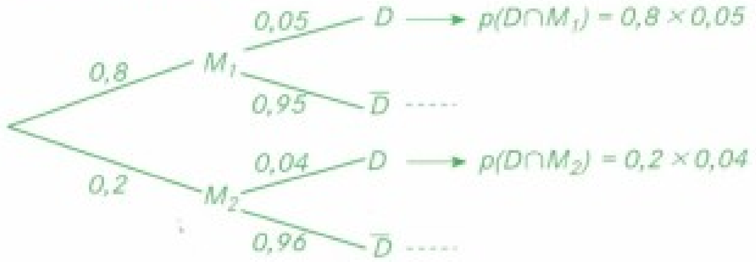
Exemple

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2, fonctionnant de manière indépendante, produisent des pièces de même type. La machine M_1 fournit les 80 % de la production, la machine M_2 en fournit 20%.
Parmi ces pièces, certaines sont défectueuses : c'est le cas pour 5 % des pièces produites par M_1 et pour 4 % des pièces produites par M_2.
On prélève au hasard une pièce dans la production de l'atelier.

1. Démontrer que la probabilité que cette pièce soit défectueuse est 0,048.

2. Sachant que cette pièce est défectueuse, déterminer la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1.

1. *Traduisons l'énoncé en terme de probabilités. Notons :*
– M_1 l'événement : « La pièce a été produite par la machine M_1 » ;
– M_2 l'événement : « La pièce a été produite par la machine M_2 » ;
– D l'événement : « La pièce est défectueuse ».
La machine M_1 fournit les 80 % de la production se traduit par : $p(M_1) = 0,8$.
De même on a : $p(M_2) = 0,2$.
5 % des pièces produites par M_1 sont défectueuses se traduit par :
la probabilité de D sachant M_1 est 0,05, soit $p_{M_1}(D) = 0,05$.
De même on a : $p_{M_2}(D) = 0,04$,
On obtient l'arbre suivant :



Règle 1 *: la somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égal à 1.*
Règle 2 *: sur les branches secondaires on indique la probabilité conditionnelle de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.*
Règle 3 *: la probabilité d'un trajet est le produit des probabilités le constituant.*
d'où $\mathbf{p(D)} = p(D \cap M_1) + p(D \cap M_2) = \mathbf{p_{M_1}(D) \times p(M_1) + p_{M_2}(D) \times p(M_2)}$.

$p(D) = 0,8 \times 0,05 + 0,2 \times 0,04 = 0,04 + 0,008 = 0,048.$

2. $\mathbf{p_D(M_1) = \dfrac{p(D \cap M_1)}{p(D)}} = \dfrac{0,04}{0,048} = 0,833.$

5. Indépendance de deux événements

Définition

On dit que **deux événements A et B sont indépendants** si la probabilité de leur intersection est égale au produit de leurs probabilités :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Conséquence : Si A et B sont deux événements indépendants de probabilité non nulle :

$$P_A(B) = P(B) \text{ et } P_B(A) = P(A).$$

Exercice résolu

Une usine fabrique des pièces pouvant présenter deux défauts : un défaut de longueur noté l et un défaut d'épaisseur noté e.
On note E l'événement « La pièce présente le défaut e » et L l'événement « La pièce présente le défaut l ». On admet que $P(E) = 0{,}03$ et $P(L) = 0{,}05$.
Les événements E et L sont indépendants. On choisit une pièce au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :
E_1 : « La pièce choisie présente les deux défauts » ;
E_2 : « La pièce choisie présente au moins un défaut » ;
E_3 : « La pièce choisie ne présente aucun défaut ».

$P(E_1) = P(E \cap L) = P(E) \times P(L) = 0{,}03 \times 0{,}05 = 0{,}0015.$

$P(E_2) = P(E \cup L) = P(E) + P(L) - P(E \cap L) = 0{,}03 + 0{,}05 - 0{,}0015 = 0{,}0785.$

$P(E_3) = P(\overline{E} \cap \overline{L}) = 1 - P(E \cup L) = 1 - 0{,}0785 = 0{,}9215.$

Exercices résolus

On jette un dé non pipé.
On prend les événements suivants :
A : « obtenir un six »
B : « obtenir un nombre impair »
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

D'après les hypothèses, $A = \{6\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$ d'où $A \cap B = \varnothing$.
Les probabilités de chacun des événements sont :
$P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(A \cap B) = 0.$
On vérifie aisément que $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

À savoir

A et B sont deux événements indépendants si et seulement si le tableau de Karnaugh vérifie :

	A	$\overline{A}$	
B	$p_1 p_2$	$q_1 p_2$	p_2
$\overline{B}$	$p_1 q_2$	$q_1 q_2$	q_2
	p_1	q_1	

En posant $P(B) = p_2$, $P(\overline{B}) = q_2 = 1 - p_2$

En posant $P(A) = p_1$, $P(\overline{A}) = q_1 = 1 - p_1$

Exemple : Les événements A et B, dont les tableaux de Karnaugh sont les suivants, sont-ils indépendants ?

	A	$\overline{A}$	
B	0,12	0,28	0,4
$\overline{B}$	0,18	0,42	0,6
	0,3	0,7	

Tableau 1

	A	$\overline{A}$	
B	0	0,4	0,4
$\overline{B}$	0,3	0,3	0,6
	0,3	0,7	

Tableau 2

Le tableau 1 vérifie la propriété caractéristique donc A et B sont indépendants. Le tableau 2 ne la vérifie pas donc A et B ne sont pas indépendants.

6. Permutations

On réalise une **permutation** si on écrit **touts** les éléments de l’ensemble dans **un ordre déterminé**.

Exemple : Soit un ensemble $E=\{a,b,c\}$, (b,c,a) est une permutation des éléments de *E*.

Le **nombre de permutations** de n éléments est $n!$, se lit « factorielle *n* ».
$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times...1$ et $0!=1$.

On peut écrire toutes les triplets obtenus à l’aide des éléments de *E* :
$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$

On peut vérifier qu'ils sont en fait $3!=3\times2\times1=6$.

7. Combinaisons

Soit $p\leqslant n$.
On réalise une **combinaison** de p éléments parmi n si on les choisit dans un **ordre indifférent**.

Exemple : Soit un ensemble $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, $(1,2,4)$ est une combinaison à *p=3* éléments parmi les *n=6* de *E*.

Le **nombre de combinaisons** à *p* éléments parmi *n* est : $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Combien y a-t-il de grilles possibles avec 3 numéros parmi les 6 éléments de *E* ?
$(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),(1,5,6),$
$(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6),(2,5,6),$
$(3,4,5),(3,4,6),(3,5,6),$
$(4,5,6)$.

On peut vérifier qu'ils sont en fait $C_6^3=\frac{6!}{3!(6-3)!}=\frac{720}{36}=20$.

Attention : $(1,2,4)$ et $(1,4,2)$ sont des combinaisons équivalentes elles ne doivent donc être comptées qu'une seule fois.

Jeu du loto

Une grille de loto comporte 49 numéros différents de 1 à 49.
Combien y a-t-il de grilles possibles avec 6 numéros ?
Le nombre de grilles est $C_{49}^6=\frac{49!}{6!(43)!}=13\,983\,816$.
À chaque tirage du loto, une seule de ces combinaison à 6 numéros est gagnante !

4 Schéma de Bernoulli

Jacques Bernoulli (1654-1705) mathématicien suisse. Il travaille dans plusieurs domaines des mathématiques dont les probabilités. On lui doit une démonstration rigoureuse de la loi faible des grands nombres (chapitre 14).

On dit qu'on a un schéma de Bernoulli lorsqu'une épreuve est répétée un certain nombre de fois dans les mêmes conditions indépendamment les unes des autres avec seulement deux possibilités (échec ou réussite, pièce défectueuse ou pièce non défectueuse, etc.).

Application

Une usine fabrique en grande série des cylindres.
Une machine est utilisée pour effectuer cette production.
On suppose que 5 % des cylindres produits sont défectueux.
On tire au hasard 3 cylindres (on assimile cette épreuve à un tirage successif et avec remise des 3 pièces).

1. Quelle est la probabilité de tirer aucune pièce défectueuse ?

2. Quelle est la probabilité de tirer une pièce défectueuse ?

3. Quelle est la probabilité de tirer au plus une pièce défectueuse ?

Corrigé

Soit D_i l'événement « le cylindre est défectueux au i-ième tirage ».
Comme on assimile cette épreuve à un tirage successif avec remise, les événements D_1, D_2 et D_3 sont indépendants.
De plus : $P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = 0{,}05$.

1. La probabilité de tirer aucune pièce défectueuse p_1 est égale à :

$$P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3) = P(\overline{D}_1) \times P(\overline{D}_2) \times P(\overline{D}_3)$$
$$= (0{,}95)^3$$
$$p_1 \approx 0{,}857 \quad \text{(voir \textit{tableau 1})}.$$

2. Par exemple, l'événement $(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3)$ convient, et :

$$P(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3) = P(D_1) \times P(\overline{D}_2) \times P(\overline{D}_3)$$
$$= 0{,}05 \times (0{,}95)^2$$
$$\approx 0{,}045.$$

La pièce défectueuse peut être tirée au 2e tirage ou au 3e tirage avec la même probabilité, donc :
la probabilité p_2 de tirer une pièce défectueuse est :
$p_2 = 3 \times 0{,}05 \times (0{,}95)^2 = 0{,}135$

3. « Tirer au plus une pièce défectueuse » signifie « tirer aucune pièce défectueuse » ou « tirer une pièce défectueuse », donc la probabilité de tirer au plus une pièce défectueuse p est égale à $p_1 + p_2$.
$p \approx 0{,}857 + 0{,}135$.

$$p \approx 0{,}992.$$

Calculs de probabilités

1 On lance un dé à 12 faces bien équilibré. On lit après chaque lancer le numéro de la face supérieure.

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience.

2. Calculer la probabilité de l'événement A : « Faire apparaître un numéro pair inférieur à 9. » On notera $p(A)$ la probabilité de A.

3. Calculer la probabilité de l'événement B : « Faire apparaître un numéro pair ou un numéro inférieur à 5. »

2 R Dans une boîte, on place quatre cartons portant chacun une des lettres du mot « NOTE ».

On tire au hasard un carton et on le pose à côté de la boîte. On recommence cette opération deux autres fois et, à chaque nouveau tirage, on place la lettre à droite de la précédente. On obtient ainsi un mot de trois lettres (il n'est pas nécessaire qu'il figure dans le dictionnaire). On donnera les résultats sous forme de fraction, puis on en donnera une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

1. Vérifier, à l'aide d'un arbre, que l'on peut ainsi former 24 mots différents.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir le mot : « NET ».

3. On note A l'événement « le mot obtenu commence par une consonne » et B l'événement « le mot obtenu comporte une voyelle en son milieu ».

a) Calculer la probabilité $P(A)$ de l'événement A.
b) Calculer la probabilité $P(B)$ de l'événement B.
c) Calculer la probabilité $P(A \cap B)$ de l'événement « A et B ».

4. En déduire la probabilité $P(A \cup B)$ de l'événement « A ou B ».

3 À la cantine, on peut lire :

Menu

3 entrées au choix :
carottes, tomates, jambon

4 plats au choix :
œufs, steak, mouton, canard

2 desserts au choix :
fromage, tarte

1. Combien de repas différents peut-on composer en choisissant une entrée, un plat et un dessert ?

2. Un élève distrait choisit au hasard une entrée, un plat et un dessert. Quelle est la probabilité pour qu'il choisisse un repas sans viande ?

4 C On lance un dé à six faces truqué : les probabilités de chaque résultat pair sont égales au double des probabilités de chaque résultat impair. Déterminer les probabilités des événements élémentaires.

5 C On donne les événements A et B tels que :

$p(A) = 0,61$ et $p(B) = 0,27$.

Calculer $P(A \cup B)$ dans les cas suivants :

a) A et B sont incompatibles ;
b) $p(A \cap B) = 0,13$.

6 R Une machine fabrique 10 000 pièces par jour. En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défauts : a et b.

- 8 % des pièces présentent le défaut a au moins.
- 15 % des pièces présentent le défaut b au moins.
- 5 % des pièces présentent à la fois les défauts a et b et sont directement mises au rebut.
- 90 % des pièces qui présentent un seul défaut peuvent être réparées et les autres sont mises au rebut.

1. Compléter le tableau suivant après l'avoir reproduit.

	Nombre de pièces présentant le défaut a	Nombre de pièces ne présentant pas le défaut a	Total
Nombre de pièces présentant le défaut b			
Nombre de pièces ne présentant pas le défaut b			
Total			10 000

2. On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée.

Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

a) Calculer la probabilité p_1 qu'elle présente un seul défaut.
b) Calculer la probabilité p_2 qu'elle n'ait aucun défaut.

3. Montrer que la probabilité pour qu'une pièce prise au hasard soit acceptée (directement ou après réparation) est de 0,937.

7 Une personne possède une cave de 2 400 bouteilles de vin, rouge et blanc, de trois régions : Bordeaux, Bourgogne et Loire.
La moitié de ses vins sont des Bordeaux, et il y a deux fois plus de bouteilles venant de Bourgogne que de bouteilles venant de Loire.
75 % des vins sont rouges et, parmi eux, 54 % viennent du Bordelais.
Dans les vins de Loire, il y autant de blancs que de rouges.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

	Bordeaux	Bourgogne	Loire	Total
Blanc				
Rouge				
Total				

2. On prend au hasard, une bouteille dans cette cave.
Calculer la probabilité des événements suivants :
– A : « Le vin est blanc » ;
– B : « Le vin vient de Bordeaux » ;
puis la probabilité des événements $A \cap B$ et $A \cup B$.

3. On choisit une bouteille de vin blanc.
Calculer la probabilité que ce soit un Bordeaux.

4. On choisit une bouteille de Bourgogne.
Calculer la probabilité que ce soit un vin blanc.

Probabilités conditionnelles

8 **C** À l'atelier de coupe, deux machines M_1 et M_2 découpent les pièces, puis celles-ci sont stockées sans distinction de provenance.
La machine M_1 découpe 60 % des pièces et 5 % de ces pièces sont défectueuses.
La machine M_2 découpe 40 % des pièces et 2,5 % de ces pièces sont défectueuses.

On notera E_1 l'événement « La pièce a été découpée par la machine M_1 ».
On notera E_2 l'événement « La pièce a été découpée par la machine M_2 ».
On notera D l'événement « La pièce est défectueuse ».

1. On prélève au hasard une pièce de la production totale.
Calculer les probabilités $p(E_1 \cap D)$, $p(E_2 \cap D)$ et $p(D)$.

2. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_D(E_1)$ et $p_D(E_2)$.

9 Une usine fabrique deux types de pièces, notées a et b, pour du matériel électrique.
Les pièces sont réalisées dans deux matériaux différents, métal et céramique.
Dans ce qui suit, sauf indication contraire, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.
On admet que, dans un stock de 10 000 pièces :
– 40 % des pièces fabriquées sont en céramique ;
– 30 % des pièces en céramique sont de type a ;
– dans les pièces de type b, il y a autant de pièces métalliques que de pièces en céramique.

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau ci-dessous à l'aide des informations précédentes.

	Nombre de pièces de type a	Nombre de pièces de type b	Total
Nombre de pièces métalliques			
Nombre de pièces en céramique			
Total			10 000

2. On prélève une pièce au hasard dans le stock de 10 000 pièces.
Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies. On désigne par :
• A l'événement « La pièce est de type a » ;
• B l'événement « La pièce est de type b » ;
• M l'événement « La pièce est en métal » ;
• C l'événement « La pièce est en céramique ».

a) Calculer $p(A \cap C)$.
b) Calculer la probabilité que la pièce soit de type a ou en céramique.
c) On note $p_A(C) = p(C/A)$ la probabilité de l'événement C sachant que l'événement A est réalisé. Calculer $p_A(C)$.
d) Calculer la probabilité qu'une pièce soit en métal sachant qu'elle est de type b.

10 **R** Deux machines A et B fabriquent des disques. La machine A produit 1 500 disques par jour ; la machine B produit 3 000 disques par jour.
La probabilité pour qu'un disque ait un défaut est de 0,02 sachant qu'il est produit par la machine A et de 0,035 sachant qu'il est produit par la machine B.
On tire au hasard un disque dans la production du jour.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
a) A : « Le disque est produit par la machine A » ;
b) B : « Le disque est produit par machine B » ;
c) D : « Le disque a un défaut ».

2. Le disque prélevé a un défaut.
Quelle est la probabilité pour qu'il ait été produit par machine A ? par la machine B ?

11 Sur un VTT, on considère que les probabilités de crevaison des pneus avant et arrière pour un parcours donné sont respectivement 3×10^{-3} et 7×10^{-3}.
On suppose de plus que la probabilité de crevaison du pneu arrière, sachant que le pneu avant est crevé, est de 0,5.

1. Calculer la probabilité :
a) d'avoir les deux pneus crevés ;
b) d'avoir au plus un pneu crevé.

2. Calculer la probabilité :
a) d'avoir un seul pneu crevé ;
b) de ne pas avoir de crevaison.

12 **R** Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque.
Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage.

Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante.
– La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.
– En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.
– En l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de 0,94.
On note C l'événement « La calculatrice présente un défaut de clavier » et A l'événement « La calculatrice présente un défaut d'affichage ».
On notera $p(E)$ la probabilité de l'événement E.
L'événement contraire de E sera noté $\overline{E}$.
$p_F(E)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'événement E sachant que l'événement F est réalisé.
Dans cet exercice, les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1. a) Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes $p_{\overline{C}}(\overline{A})$, $p_C(A)$ et $p(C)$.
b) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

2. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.
a) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.
b) Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.
c) En déduire $p(A)$.
d) Montrer que la probabilité de l'événement « La calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est égale à 0,902.

13 Une société de produits pharmaceutiques fabrique en très grande quantité un type de comprimés.
Un comprimé est conforme si sa masse exprimée en grammes appartient à l'intervalle [1,2 ; 1,3].
La probabilité qu'un comprimé soit conforme est 0,98.

On note :
– A l'événement : « Un comprimé est conforme » ;
– B l'événement : « Un comprimé est refusé ».
On contrôle tous les comprimés. Le mécanisme de contrôle est tel que :
– un comprimé conforme est accepté avec une probabilité de 0,98 ;
– un comprimé qui n'est pas conforme est refusé avec une probabilité de 0,99.
On connaît donc $P(A) = 0{,}98$, $P_A(\overline{B}) = 0{,}98$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}99$.

1. Déterminer $P_A(B)$, puis $P(B \cap A)$ et $P(B \cap \overline{A})$.

2. Calculer :
a) la probabilité qu'un comprimé soit refusé ;
b) la probabilité qu'un comprimé soit conforme, sachant qu'il est refusé.

14 Au rayon « image et son » d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine.
Une personne se présente :
• la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{3}{5}$;
• la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est $\frac{7}{10}$;
• la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\frac{1}{10}$.
On désigne par T l'événement : « La personne achète le téléviseur » et par L l'événement : « La personne achète le lecteur de DVD ».
On notera $\overline{T}$ et $\overline{L}$ les événements contraires respectifs de T et de L.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Déterminer les probabilités des événements suivants (les résultats seront donnés sous forme de fractions).
a) « La personne achète les deux appareils ».
b) « La personne achète le lecteur de DVD ».
c) « La personne n'achète aucun des deux appareils ».

3. Montrer que, si la personne achète le lecteur de DVD, la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur est $\frac{21}{23}$.

15 Une entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1 % des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5 % des chaudières à ventouse sont défectueuses.
On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les événements suivants :
A : « la chaudière est à cheminée » ;
B : « la chaudière est à ventouse » ;
D : « la chaudière présente un défaut ».

1. Déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

2. Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.

3. En remarquant que $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ et que les événements $D \cap A$ et $D \cap B$ sont incompatibles, calculer $P(D)$ et $P(\overline{D})$.

16 On arrondira les probabilités au millième.
Dans un lycée, le foyer des lycéens a dénombré les élèves utilisant l'internet mobile.
La répartition de ces élèves est donnée dans le tableau suivant.

	Filles	Garçons	Total
Utilisent l'Internet mobile	148	171	319
N'utilisent pas l'Internet mobile	81	50	131
Total	229	221	450

On prélève au hasard une fiche dans le fichier des élèves du lycée. On admettra que toutes les fiches ont la même probabilité d'être prélevées. On note :
– G l'évènement : « la fiche prélevée est celle d'un garçon » ;
– M l'évènement : « la fiche prélevée est celle d'un élève utilisant l'Internet mobile ».

1. Calculer la probabilité de prélever la fiche d'un garçon.

2. Montrer que la probabilité de prélever la fiche d'un garçon utilisant l'Internet mobile est égale à 0,38.

3. Calculer la probabilité de prélever la fiche d'une fille, sachant que l'élève correspondant n'utilise pas l'Internet mobile.

4. Calculer la probabilité $P_M(G)$ et interpréter le résultat.

Événements indépendants

17 **C** Soit A et B deux événements indépendants d'un même univers tels que $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}5$.
Calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.

18 **C** A et B sont deux événements.
On sait que :

$$P(A) = \frac{1}{3} \,;\, p(A \cup B) = \frac{1}{2} \text{ et } p(B) = \alpha \ (\alpha \text{ réel}).$$

Calculer α dans les cas suivants :
a) A et B sont incompatibles ;
b) A et B sont indépendants ;
c) A est une partie de B.

19 **C** Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard.
– A est l'événement « La carte tirée est un carreau ».
– B est l'événement « La carte tirée est un trèfle ».
– C est l'événement « La carte tirée est un as ».

1. Quels sont les événements incompatibles ?

2. Quels sont les événements indépendants ?

20 **R** Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : P_1 et P_2.
On note A l'événement : « Une pièce P_1 choisie au hasard dans la production des pièces P_1 est défectueuse ».
On note de même B l'événement : « Une pièce P_2 choisie au hasard dans la production des pièces P_2 est défectueuse ».
On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}07$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.
Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :
a) E_1 : « Les deux pièces du module sont défectueuses » ;
b) E_2 : « Au moins une des deux pièces du module est défectueuse » ;
c) E_3 : « Aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse ».

21 La commande d'un portail automatique est composée de trois éléments : une commande manuelle à infrarouges type plip, un récepteur et un vérin électrique.
Une étude statistique des pannes de chacun des trois éléments constitutifs du portail automatique permet d'estimer que la probabilité de panne à chaque utilisation est de :
• 0,001 pour le plip ;
• 0,0005 pour le récepteur ;
• 0,0001 pour le vérin.
Les pannes des trois éléments sont supposées indépendantes.
Calculer la probabilité de panne d'un tel système au cours d'une utilisation par l'usager.

22 **R** Un atelier produit un composant optique en deux phases indépendantes.
La première est susceptible de faire apparaître un défaut α sur 2 % des composants, la seconde un défaut β sur 4 % des composants.
On prélève un composant au hasard dans la production.
On appelle :
• A l'événement : « Le composant présente le défaut α » ;
• B l'événement : « Le composant présente le défaut β ».
Calculer à 10^{-4} près, la probabilité des événements suivants :
a) le composant présente les deux défauts ;
b) le composant ne présente aucun des deux défauts ;
c) le composant présente au moins un des deux défauts ;
d) le composant présente un et un seul des deux défauts.