2 Loi de Poisson

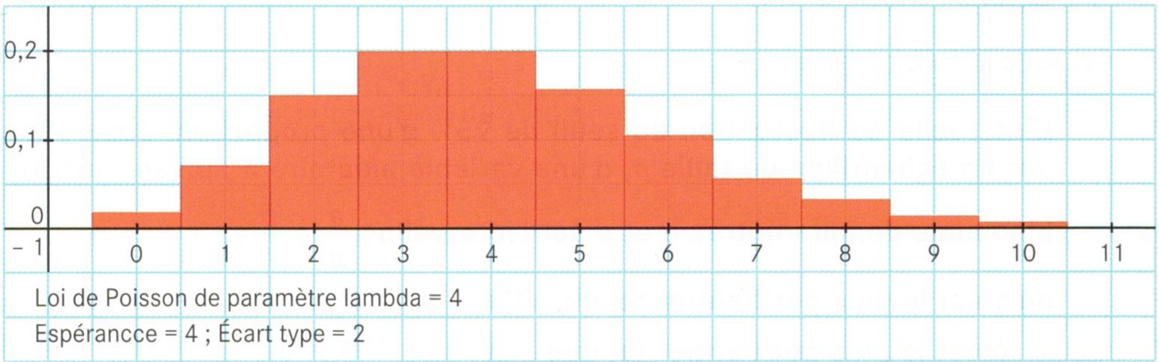
La loi de Poisson intervient dans la modélisation de phénomènes aléatoires où le futur est indépendant du passé.

Exemples : pannes de machines, appels téléphoniques dans un standard, sinistres, files d'attente…

1. Définition

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$ notée $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque pour tout entier naturel k :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!} \quad \text{où} \quad k! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times k \text{ si } k \neq 0 \text{ et } 0! = 1.$$



2. Propriété

Si une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ on a :

$$E(X) = \lambda \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Remarque : tous les calculs avec la loi de Poisson seront effectués avec la calculatrice ou un logiciel.

3 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On admet que si n est « grand », p « voisin de 0 » et np pas trop grand, alors la **loi binomiale de paramètres n et p, $\mathcal{B}(n, p)$**, peut être approchée par **la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$**.

Comment calculer des probabilités dans le cadre d'une loi de Poisson avec une calculatrice ou un logiciel ?

L'objectif est de savoir utiliser une calculatrice (Casio ou TI) ou un logiciel (Sine Qua Non) pour utiliser une loi de Poisson.

Exemple.

Soit une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre 2,8. calculer les probabilités suivantes :

a) $P(X = 3)$ b) $P(x \leqslant 3)$.

Utilisation d'une calculatrice Casio Graph 35+

a) *On tape* MENU STAT EXE, *puis* F5 *pour* DIST .

On tape F6 *pour* ▶, *puis* F1 *pour* POISN *et* F1 *pour* Ppd .

On tape F2 *pour* Var .

On rentre 3 après x: EXE .

On rentre 2.8 après μ: EXE EXE *et on obtient l'écran suivant :*

```
Poisson P.D
     p=0.22248374
```

Soit $P(X = 3) = 0{,}22248\ldots$

b) *On tape* MENU STAT EXE, *puis* F5 *pour* DIST .

On tape F6 *pour* ▶, *puis* F1 *pour* POISN *et* F2 *pour* Pcd .

On tape F2 *pour* Var *.On tape la valeur 3 après* x: .

On rentre 2.8 après μ: EXE EXE *et on obtient l'écran suivant :*

```
Poisson C.D
     p=0.69193743
```

Soit $P(X \leqslant 3) = 0{,}69193\ldots$

Utilisation d'une calculatrice TI 82 stats.fr ou 83 Plus

a) *On tape* 2nde var *pour distrib.*

On sélectionne B:poissonFdp(entrer .

poissonFdp(2.8, 3) entrer *donne l'écran suivant :*

```
poissonFdp(2.8,3
)
      .2224837491
```

Soit : $P(X = 3) = 0{,}22248\ldots$

b) *On tape* 2nde var *pour distrib.*

On sélectionne C:poissonFRép(entrer .

poissonFréq(2.8, 3) entrer *donne l'écran suivant :*

```
poissonFRép(2.8,
3)
       .6919374328
```

Soit $P(X \leqslant 3) = 0{,}6919\ldots$

Exercices : (Loi de Poisson)

12 **C** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 3. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X=0)$; **b)** $P(X=1)$;
c) $P(X \leqslant 3)$; **d)** $P(X > 2)$.

13 **R** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 1,6. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X=3)$; **b)** $P(X \leqslant 2)$; **c)** $P(X \geqslant 1)$.

14 **C** Le service qui gère les commandes d'une entreprise de vente par correspondance a relevé pour les années passées une moyenne de 5 erreurs pour 100 commandes.

On suppose que la variable aléatoire qui mesure le nombre d'erreurs pour 100 commandes suit la loi de Poisson de paramètre 5.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

a) A : « Il y a exactement 5 erreurs » ;
b) B : « Il y a moins de 5 erreurs » ;
c) C : « Il y a au moins 5 erreurs ».

15 **R** Un livre de 300 pages contient 225 fautes d'impression distribuées au hasard. Soit X la variable aléatoire qui mesure le nombre de fautes par page, on suppose que X suit une loi de Poisson.

1. Déterminer le paramètre de cette loi.

2. Déterminer la probabilité qu'une page donnée contienne :

a) deux fautes d'impression ;

b) moins de deux fautes d'impression ;

c) au moins trois fautes d'impression.

16 Une entreprise de location de bateaux s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, un été donné, aux bateaux de sa flotte. Soit X la variable aléatoire qui à tout bateau tiré au hasard dans la flotte, associe le nombre de sinistres survenant pendant l'été considéré ; on admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 0,28.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : « Un bateau tiré au hasard dans la flotte n'a aucun sinistre pendant l'été considéré ».

2. Calculer la probabilité de l'événement « Un bateau tiré au hasard dans la flotte a au plus deux sinistres pendant l'été considéré ».

17 **C** On note X la variable aléatoire qui, à toute période de 100 jours consécutifs tirés au hasard dans les jours ouvrables de l'année, associe le nombre de panne d'une machine. Une étude menée par le constructeur permet d'admettre que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}5$.

Déterminer :

a) $P(X \leqslant 2)$;

b) la probabilité de l'événement : « La machine a au plus quatre pannes pendant la période de 100 jours consécutifs » ;

c) le plus petit entier n tel que : $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}99$.

Correction :

12 En utilisant la calculatrice comme indiqué fiche méthode 33, on obtient les résultats suivants (arrondis à 10^{-4}).

a) $P(X=0) = \mathbf{0{,}0498}$.
b) $P(X=1) = \mathbf{0{,}1494}$.
c) $P(X \leqslant 3) = \mathbf{0{,}6472}$.
d) $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$
$P(X > 2) = \mathbf{0{,}5768}$.

13 **a)** $P(X=3) = \mathbf{0{,}1378}$.
b) $P(X \leqslant 2) = \mathbf{0{,}7834}$.
c) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = \mathbf{0{,}7981}$.

14 **a)** $P(A) = P(X=5) = \mathbf{0{,}1755}$.
b) $P(B) = P(X<5) = P(X \leqslant 4) = \mathbf{0{,}4405}$.
c) $P(C) = P(X \geqslant 5) = 1 - P(X<5)$
$P(C) = 1 - P(B) = \mathbf{0{,}5595}$.

15 **1.** Dans la loi de Poisson on a :
$E(X) = \lambda$ (moyenne) ;
donc $\lambda = \dfrac{225}{300} = 0{,}75$.
2. a) $P(X=2) = \mathbf{0{,}1329}$.
b) $P(X<2) = P(X \leqslant 1) = \mathbf{0{,}8266}$.
c) $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) = \mathbf{0{,}0405}$.

17 **a)** $P(X \leqslant 2) = \mathbf{0{,}9856}$.
b) $P(X \leqslant 4) = \mathbf{0{,}9998}$.
c) $P(X \leqslant 2) = 0{,}9856$ et $P(X \leqslant 3) = \mathbf{0{,}9982}$.
Le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) = 0{,}99$ est $\boldsymbol{n = 3}$.

Exercices : (Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson)

19 **C** Une usine fabrique en grande série des pièces susceptibles de présenter un défaut dans 3 % des cas. On prélève au hasard 250 pièces dans la production. Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 250 pièces, fait correspondre le nombre de pièces présentant un défaut.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

2. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson. En déterminer le paramètre λ.
Calculer alors la probabilité que, parmi les 250 pièces, il y en ait au plus 3 présentant un défaut.

20 **C** Une enquête a montré que 5 % des élèves d'un lycée disposent de deux ordinateurs chez eux. On interroge successivement 100 élèves du lycée, choisis au hasard. On admet que l'effectif du lycée est suffisamment important pour que les interrogatoires soient considérées comme indépendantes. Soit Y la variable aléatoire qui indique combien, parmi ces 100 élèves, disposent de deux ordinateurs chez eux.

1. a) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
b) Calculer à 10^{-2} près la valeur décimale arrondie de $P(Y=5)$.

2. a) On admet que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson ; préciser son paramètre.
b) En utilisant cette loi de Poisson, calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P(Y \leqslant 5)$.

21 Une entreprise fabrique des consoles de jeu. La probabilité qu'une console, tirée au hasard dans l'ensemble de la production, soit défectueuse est $p = 0{,}06$.

On prélève au hasard des lots de 50 consoles dans la production. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de consoles défectueuses d'un lot.

1. On admet que Y suit une loi binomiale.
a) Quels sont les paramètres de cette loi binomiale ?
b) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement une console défectueuse dans le lot.
c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une console défectueuse dans le lot.

2. On décide d'approcher la loi de Y par une loi de Poisson.
a) Préciser son paramètre.
b) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement une console défectueuse dans le lot.
c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une console défectueuse dans le lot.

22 Une machine fabrique en grande série des tuyaux de diamètre nominal 100 mm.
La probabilité qu'un tuyau prélevé au hasard dans la production d'une journée soit non conforme est 0,03.
On prélève au hasard n tuyaux. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage de n tuyaux avec remise.
On appelle Y la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de n tuyaux, associe le nombre de tuyaux non conformes.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.

2. Dans cette question, on prend $n = 9$. Déterminer une valeur décimale approchée, à 10^{-3} près, de la probabilité de l'événement E : « Obtenir exactement un tuyau non conforme ».

3. Dans cette question, on prend $n = 50$. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi ?
À l'aide de cette loi de Poisson, déterminer une valeur approchée, à 10^{-2} près, de la probabilité d'avoir au moins quatre tuyaux non conformes.

Correction :

19 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0{,}03$.

2. Le paramètre de la loi de Poisson est :
$\lambda = np = 250 \times 0{,}03$; $\lambda = \mathbf{7{,}5}$.
$P(X \leqslant 3) = \mathbf{0{,}0591}$.

20 **1. a)** L'épreuve a deux issues, le succès « L'élève dispose de 2 ordinateurs » a pour probabilité $p = 0{,}05$, l'échec « L'élève ne dispose pas de 2 ordinateurs » a pour probabilité $1 - p = 0{,}95$.
L'épreuve est répétée 100 fois de façon identique et indépendante. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100 ; 0{,}05)$.
b) $P(Y = 5) = \mathbf{0{,}18}$.

2. a) On peut approcher la loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 100 \times 0{,}05$; $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{5}$.
b) $P(Y \leqslant 5) = \mathbf{0{,}62}$.