1 Loi exponentielle

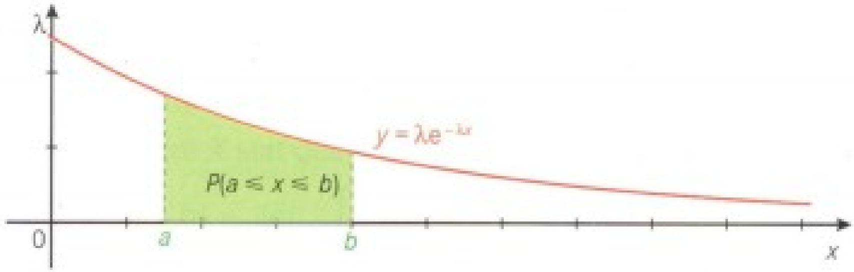
La loi exponentielle s'applique dans de nombreuses situations, notamment à la durée de fonctionnement des systèmes qui ne sont pas sujets à un phénomène d'usure.

1. Définition

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Pour tout réel a et b de $[0\,;+\infty[$ avec $a \leqslant b$:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$



Remarque : comme pour les autres lois à densité, pour tout t : $P(x = t) = 0$; et donc, $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$.

2. Propriétés

Si une variable aléatoire X suit une loin exponentielle de paramètre λ, alors :

1. Pour tout réel t : $P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $P(X > t) = e^{-\lambda t}$.

2. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

3. Vocabulaire de la fiabilité

• La variable aléatoire T qui à tout dispositif associe sa durée de vie est appelée **temps de bon fonctionnement** (noté T.B.F.).
• La fonction F définie par $F(t) = P(T \leqslant t)$ est appelée **fonction de défaillance**.
• La fonction R définie par $R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - F(t)$ est appelée **fonction de fiabilité du système**.
• L'espérance mathématique de T est **la durée de vie moyenne du système**, elle est notée M.T.B.F.

Dans le cas de la loi exponentielle ou durée de vie sans vieillissement, on a :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}\ ;\quad R(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad E(T) = \frac{1}{\lambda} = \text{M.T.B.F.}$$

Comment calculer des probabilités dans le cadre d'une loi exponentielle ?

Savoir ce que « suivre une loi exponentielle » signifie pour une variable aléatoire et quels résultats en découlent.

Exemple

Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre 0,4.

1. Donner la densité de probabilité de X.

2. Calculer $P(X \leqslant 3)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

3. En déduire $P(X > 3)$.

1. *La densité de probabilité de X est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :*

$$f(x) = 0{,}4\,e^{-0{,}4x}.$$

2. $P(X \leqslant 3) = \int_0^3 0{,}4\,e^{-0{,}4x}\,dx = \left[-e^{-0{,}4x}\right]_3^0 = -e^{-1{,}2} - (-1) = 1 - e^{-1{,}2}.$

$P(X \leqslant 3) \approx 0{,}699.$

3. *Les événements $(X \leqslant 3)$ et $(X > 3)$ sont des événements contraires donc :*

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leqslant 3) \quad \text{soit} \quad P(X > 3) = e^{-1{,}2}.$$

Exercices :

1 C Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}5$.

1. Donner la loi de densité de X.

2. Calculer $P(X \leqslant 2)$, puis $P(X > 2)$.

3. Calculer $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

2 Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 200$.

1. Donner la loi de densité de X.

2. Calculer $P(X < 0{,}1)$.

3. Calculer $P(0{,}05 \leqslant X \leqslant 0{,}15)$.

3 C Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle d'espérance 500.

1. Déterminer le paramètre λ de cette loi.

2. Calculer $P(X \leqslant 5)$.

4 R La durée d'un match de tennis suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}32$.
Quelle est la probabilité que ce match dure plus de cinq heures ?

5 C La durée de vie d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}225$.

1. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? Plus de 8 ans ?

2. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

6 La durée de vie d'un robot, exprimée en années, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

1. À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

2. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0{,}4}$.

7 La durée d'attente à une caisse de supermarché, exprimée en minutes, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.

1. Quelle est la probabilité qu'un client attende moins de 5 min ?

2. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de 10 min ?

8 La durée de vie, exprimée en heures, d'un téléphone portable est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,26$.

1. Calculer $P(X \leqslant 1\,000)$ et $P(X \geqslant 1\,000)$.

2. Sachant que l'événement $(X \geqslant 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X \geqslant 2\,000)$.

3. Sachant qu'un téléphone portable a fonctionné plus de 2 000 h, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 h ?

9 **C** On considère une production de lampes pour vidéo projecteurs. On admet que la variable aléatoire T qui, à toute lampe choisie au hasard dans la production, associe sa durée de vie, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Le constructeur annonce que la durée de vie moyenne d'une lampe est de 2 000 heures. En déduire la valeur de λ.

2. Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une telle lampe soit supérieure à 4 000 heures ?

3. Déterminer le réel t tel que $P(T \leqslant t) = 0{,}7$.

4. Sachant qu'une lampe a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité pour qu'elle tombe en panne avant 4 000 heures ?

10 On s'intéresse à une machine à embouteiller prélevée au hasard dans le parc des machines sur le point d'être livrées par le constructeur. On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard dans le parc, associe sa durée de vie avant une défaillance.
On note $P(T > t)$, la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc n'ait pas de défaillance avant l'instant t, exprimé en jours.
On suppose que $P(T > t) = e^{-0{,}005t}$.

1. Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de 200 jours sans panne.

2. Déterminer t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans le parc fonctionne plus de t jours, soit égale à 0,8. Arrondir à l'entier par défaut.

11 **C** Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie, exprimée en années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit une loi exponentielle de paramètres λ ($\lambda > 0$). Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $P(X > 10) = 0{,}286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près est 0,125.
On prendra $\lambda = 0{,}125$ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes.
Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

Correction :

1 **1.** La loi de densité de X est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \mathbf{0{,}5e^{-0{,}5x}}$.

2. $P(X \leqslant 2) = 1 - e^{-0{,}5\times 2} = 1 - \mathbf{e^{-1}}$.
$P(X > 2) = e^{-0{,}5\times 2} = \mathbf{e^{-1}}$.

3. $P(1 \leqslant X \leqslant 3) = e^{-0{,}5\times 1} - e^{-0{,}5\times 3}$
$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \mathbf{e^{-0{,}5} - e^{-1{,}5}}$.

3 **1.** $E(X) = 500$ or $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

donc $\dfrac{1}{\lambda} = 500$ soit $\lambda = \dfrac{1}{500} = \mathbf{0{,}002}$.

2. $P(X \leqslant 5) = 1 - e^{-0{,}002\times 5} = \mathbf{1 - e^{-0{,}01}}$.

4 $P(X \geqslant 5) = e^{-0{,}32\times 5} \approx \mathbf{0{,}2019}$.

5 **1.** $P(X < 8) = 1 - e^{-0{,}225\times 8} \approx \mathbf{0{,}8347}$.
$P(X > 8) = e^{-0{,}225\times 8} \approx \mathbf{0{,}1653}$.

2. On doit déterminer une probabilité conditionnelle $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

$$P_{(X>3)}(X > 8) = \frac{P((X>8)\cap(X>3))}{P(X>3)}$$

donc $P_{(X>3)}(X > 8) = \dfrac{P(X>8)}{P(X>3)} = \dfrac{e^{-0{,}225\times 8}}{e^{-0{,}225\times 3}}$

$P_{(X>3)}(X > 8) \approx \mathbf{0{,}3247}$.

9 **1.** $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 2000$; $\lambda = \mathbf{0{,}0005}$.

2. $P(T > 4\,000) = e^{-0{,}0005 \times 4000} = e^{-2}$

$P(T > 4\,000) = \mathbf{0{,}1353}$.

3. $P(T \leqslant t) = 0{,}7$ **équivaut à :**

$1 - e^{-0{,}0005t} = 0{,}7$ **soit** $e^{-0{,}0005t} = 0{,}8$

d'où : $-0{,}0005t = \ln 0{,}3$ et $t = \frac{\ln 0{,}3}{-0{,}0005}$

$t \approx$ **2 408 h.**

4. $P_{(X > 2000)}(X < 4000) = \frac{P((X > 2000) \cap (X < 4000))}{P(X > 2000)}$

$P_{(X > 2000)}(X < 4000) = \frac{P(2000 < X < 4000)}{P(X > 2000)}$

$P_{(X > 2000)}(X < 4000) = \frac{e^{-0{,}0005 \times 2000} - e^{-0{,}0005 \times 4000}}{e^{-0{,}0005 \times 2000}}$

$P_{(X > 2000)}(X < 4000) \approx \mathbf{0{,}6321}$.

11 **1.** On a pour $t > 0$, $P(X > t) \approx e^{-\lambda t}$

$P(X > 10) \approx e^{-\lambda \times 10}$ donc $e^{-10\lambda} = 0{,}286$

soit $-10\,\lambda = \ln 0{,}286$ ou $\lambda = \frac{\ln 0{,}286}{-10}$.

On a bien $\lambda \approx \mathbf{0{,}125}$.

2. 6 mois = 0,5 année.

$P(X \leqslant 0{,}5) = 1 - e^{-0{,}125 \times 0{,}5} \approx \mathbf{0{,}061}$.

3. $P_{(X \geqslant 8)}(X \geqslant 10) = \frac{P((X \geqslant 8) \cap (X \geqslant 10))}{P(X \geqslant 8)}$

$P_{(X \geqslant 8)}(X \geqslant 10) = \frac{P(X \geqslant 10)}{P(X \geqslant 8)} \approx \mathbf{0{,}779}$.

4. La situation correspond à une épreuve à 2 issues répétée 15 fois.

La variable aléatoire donnant le nombre d'oscilloscopes ayant une durée de vie supérieure à 10 ans parmi les 15 commandés, suit la loi binomiale : $\mathcal{B}$ (15 ; 0,286).

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx \mathbf{0{,}994}$.