Comment rechercher une limite ?

Pour rechercher la limite d'une fonction, on utilise les résultats donnés dans l'Essentiel pages 233 et 234.

Il peut arriver que l'on soit dans un cas noté ? au paragraphe 3 page 234, cas où l'on ne peut conclure directement.

Dans ces conditions, l'énoncé donnera la méthode à suivre pour conclure.

Exemple 1. Rechercher les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 + 3e^x$.

• Limites en $+\infty$

$f(x) = u(x) + v(x)$ *avec* $u(x) = x + 2$ *et* $v(x) = 3e^x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^x = +\infty$.

On en déduit : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ *(limite d'une somme).*

• Limite en $-\infty$

D'une part, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x) = -\infty$, *d'autre part* $\lim\limits_{x \to -\infty} 3e^x = 0$.

On en déduit : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$ *(limite d'une somme).*

Exemple 2. Calculer $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}}$.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ *avec* $u(x) = x^2 + x + 1$ *et* $v(x) = x - 1$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 + x + 1) = 3$ *(fonction définie pour $x = 1$) et* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x - 1) = 0$

On est dans le cas où le tableau page 000 indique ∞ ; il faut donc utiliser la « règle des signes ».*

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 + x + 1) = 3$ *or* $3 > 0$ *et* $x - 1 > 0$ *donc* $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1} = +\infty}$.

Exemple 3. Calculer $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \ln x)}$; *indication : pour conclure, on mettra x^2 en facteur.*

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; *on ne peut conclure directement.*

On écrit : $x^2 - \ln x = x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$; *on sait que* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 1$ *d'où* $\boldsymbol{\lim x^2 \left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty}$ *(limite d'un produit).*