2 Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a\,;\,b]$

1. Définition

f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F est une primitive de f sur I, a et b sont deux nombres réels de I.

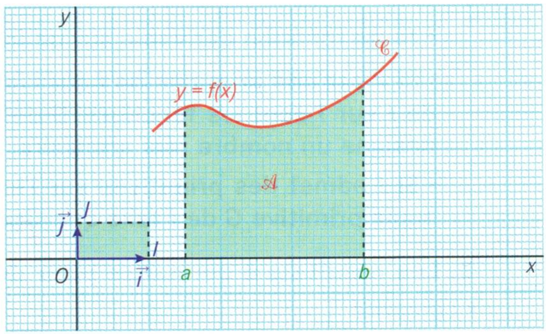
On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b) - F(a)$.

On le note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; on écrit : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

2. Interprétation géométrique dans le cas d'une fonction positive

L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés OI et OJ.

$\mathscr{A}$ est l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



En unités d'aire :

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si f est négative, $\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Propriétés

f et g sont des fonctions dérivables sur l'intervalle I.

a, b et c sont des nombres de I.

- $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

  $\int_a^b k\,f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (**k réel**)

- $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

- **On suppose $a < b$**

  – si sur $[a\,;\,b]$, $f(x) \geqslant 0$,

  alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

  – si sur $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$,

  alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

  – si sur $[a\,;\,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

  $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

- **La valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ est le nombre :**

  $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Intégration par parties

u et v sont deux fonctions dont les dérivées u' et v' sont dérivables sur I ; a et b sont des nombres de I.

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

(formule dite d'intégration par parties)