Probabilités sur un ensemble fini

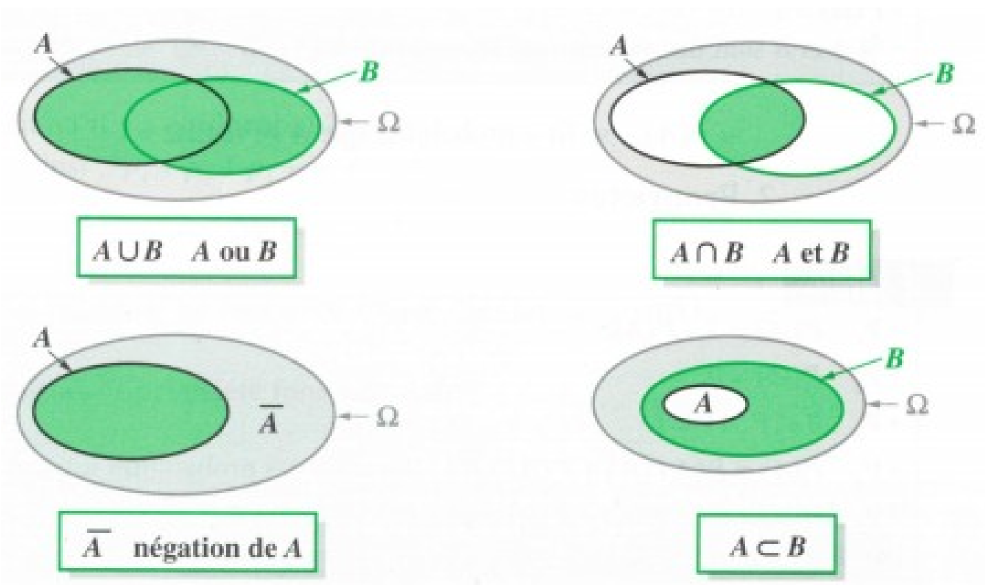
1. Langage

Une **expérience aléatoire** ou **épreuve** (*on lance un dé*) est une expérience ou les résultats dépendent du hasard.
Les résultats possibles sont des **éventualités** ou **possibilités** (*1, 2, 3, 4, 5 ou 6*).
L'ensemble des éventualités est appelé **univers,** noté en général Ω ($\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$).
Un **événement** est une partie de l'univers ($A=\{1,3,4\}$).
Événement élémentaire : partie qui contient une seule éventualités $A=\{6\}$
Événement certain : c'est la partie égale à l'univers $A=\Omega$
Événement impossible : c'est l'ensemble vide $A=\emptyset$
L'événement *A* se lit « l'événement *A* est réalisé ».

2. Opérations et événements

L'**événement contraire** de *A*, noté $\bar{A}$, est l'événement qui contient toutes les éventualités qui ne sont pas dans *A* (*si* $A=\{1,3\}$ $\bar{A}=\{2,4,5,6\}$).
La **réunion** de deux événements *A* et *B*, notée $A\cup B$, est l'événement qui contient toutes les éventualités de *A* **ou** de *B* (soit $A=\{1,3,5\}$ et $B=\{1,2,3,4\}$ $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$).
L'**intersection** de deux événements *A* et *B*, notée $A\cap B$, est l'événement qui contient les éventualités communes à A **et** à B (soit $A=\{1,3,5\}$ et $B=\{1,2,3,4\}$ $A\cap B=\{1,3\}$).
Si $A\cap B=\emptyset$, on dit que les événements *A* et *B* sont des **événements incompatibles** (soit $A=\{2,3,4\}$ et $B=\{6\}$ $A\cap B=\emptyset$).
Inclusion. *A* est inclus dans *B*, noté $A\subset B$, signifie : Si A est réalisé alors B est réalisé (soit $A=\{2,4,6\}$ et $B=\{1,2,4,6\}$ $A\subset B$).

2.1 Représentation graphique



3. Probabilité sur un univers fini

3.1 Définition

À savoir

Soit Ω un univers fini, et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.
Dans une épreuve, on appelle probabilité définie sur Ω, toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui vérifie :
- **$P(\Omega) = 1$**
- **Si A et B sont des événements incompatibles ($A \cap B = \varnothing$) alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.**

« $P(A)$ » se lit « probabilité que A se réalise ».

3.2 Propriétés

À savoir

- **P_1** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- **P_2** $P(\varnothing) = 0$.
- **P_3** $0 \leq P(A) \leq 1$.
- **P_4** $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ **(formule des probabilités totales).**
- **P_5** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **P_6** $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = P(\overline{A \cup B})$.

3.3 Équiprobabilité

Définition

Soit Ω un univers fini.
On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

- Soit le jeu de lancer d'un dé.

On utilise comme notation : $P(\{i\}) = p_i$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les probabilités des événements élémentaires du jeu de dé (dé non pipé) sont :
$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \dfrac{1}{6}$.
On dit qu'il y a **équiprobabilité**.
On a ainsi : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.

- Pour une pièce équilibrée : $P(\{F\}) = P(\{P\}) = \dfrac{1}{2}$.
- Pour un jeu de 52 cartes non truqué : $P(\{\text{As de cœur}\}) = \dfrac{1}{52}$.

À savoir

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, alors $P(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier i de l'intervalle $[1, n]$.

Propriété fondamentale

Soit A un événement de Ω **dans une situation d'équiprobabilité**, on a :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}.$$

Exemple

Reprenons le jeu de dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
Soit A l'événement : « obtenir un nombre pair ». $A = \{2, 4, 6\}$.
Nombre de cas favorables : 3. Nombre de cas possibles : 6.
On obtient : $P(A) = \dfrac{3}{6}$; $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

Calculs de probabilités

1 On lance un dé à 12 faces bien équilibré. On lit après chaque lancer le numéro de la face supérieure.

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience.

2. Calculer la probabilité de l'événement A : « Faire apparaître un numéro pair inférieur à 9. » On notera $p(A)$ la probabilité de A.

3. Calculer la probabilité de l'événement B : « Faire apparaître un numéro pair ou un numéro inférieur à 5. »

2 **R** Dans une boîte, on place quatre cartons portant chacun une des lettres du mot « NOTE ».

On tire au hasard un carton et on le pose à côté de la boîte. On recommence cette opération deux autres fois et, à chaque nouveau tirage, on place la lettre à droite de la précédente. On obtient ainsi un mot de trois lettres (il n'est pas nécessaire qu'il figure dans le dictionnaire). On donnera les résultats sous forme de fraction, puis on en donnera une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

1. Vérifier, à l'aide d'un arbre, que l'on peut ainsi former 24 mots différents.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir le mot : « NET ».

3. On note A l'événement « le mot obtenu commence par une consonne » et B l'événement « le mot obtenu comporte une voyelle en son milieu ».

a) Calculer la probabilité $P(A)$ de l'événement A.
b) Calculer la probabilité $P(B)$ de l'événement B.
c) Calculer la probabilité $P(A \cap B)$ de l'événement « A et B ».

4. En déduire la probabilité $P(A \cup B)$ de l'événement « A ou B ».

3 À la cantine, on peut lire :

Menu

3 entrées au choix :
carottes, tomates, jambon

4 plats au choix :
œufs, steak, mouton, canard

2 desserts au choix :
fromage, tarte

1. Combien de repas différents peut-on composer en choisissant une entrée, un plat et un dessert ?

2. Un élève distrait choisit au hasard une entrée, un plat et un dessert. Quelle est la probabilité pour qu'il choisisse un repas sans viande ?

4 **C** On lance un dé à six faces truqué : les probabilités de chaque résultat pair sont égales au double des probabilités de chaque résultat impair. Déterminer les probabilités des événements élémentaires.

5 **C** On donne les événements A et B tels que :

$$p(A) = 0{,}61 \text{ et } p(B) = 0{,}27.$$

Calculer $P(A \cup B)$ dans les cas suivants :

a) A et B sont incompatibles ;
b) $p(A \cap B) = 0{,}13$.

6 **R** Une machine fabrique 10 000 pièces par jour. En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défauts : a et b.

- 8 % des pièces présentent le défaut a au moins.
- 15 % des pièces présentent le défaut b au moins.
- 5 % des pièces présentent à la fois les défauts a et b et sont directement mises au rebut.
- 90 % des pièces qui présentent un seul défaut peuvent être réparées et les autres sont mises au rebut.

1. Compléter le tableau suivant après l'avoir reproduit.

	Nombre de pièces présentant le défaut a	Nombre de pièces ne présentant pas le défaut a	Total
Nombre de pièces présentant le défaut b			
Nombre de pièces ne présentant pas le défaut b			
Total			10 000

2. On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée.

Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

a) Calculer la probabilité p_1 qu'elle présente un seul défaut.
b) Calculer la probabilité p_2 qu'elle n'ait aucun défaut.

3. Montrer que la probabilité pour qu'une pièce prise au hasard soit acceptée (directement ou après réparation) est de 0,937.

7 Une personne possède une cave de 2 400 bouteilles de vin, rouge et blanc, de trois régions : Bordeaux, Bourgogne et Loire.
La moitié de ses vins sont des Bordeaux, et il y a deux fois plus de bouteilles venant de Bourgogne que de bouteilles venant de Loire.
75 % des vins sont rouges et, parmi eux, 54 % viennent du Bordelais.
Dans les vins de Loire, il y autant de blancs que de rouges.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

	Bordeaux	Bourgogne	Loire	Total
Blanc				
Rouge				
Total				

2. On prend au hasard, une bouteille dans cette cave.
Calculer la probabilité des événements suivants :
– A : « Le vin est blanc » ;
– B : « Le vin vient de Bordeaux » ;
puis la probabilité des événements $A \cap B$ et $A \cup B$.

3. On choisit une bouteille de vin blanc.
Calculer la probabilité que ce soit un Bordeaux.

4. On choisit une bouteille de Bourgogne.
Calculer la probabilité que ce soit un vin blanc.