Fonction exponentielle

Définition

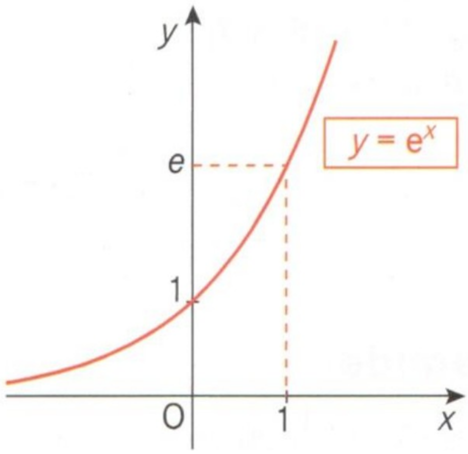
On appelle fonction exponentielle l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'=f \quad \text{et} \quad f(0)=1 \quad .$$

On note cette fonction e^x .

Conséquence : $(e^x)'=e^x$ et $e^0=1$.

Courbe représentative



- La fonction exponentielle est strictement croissante.
- L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des images est $]0,+\infty[$ $(e^x>0)$.
- L'image de 0 est $e^0=1$.
- L'image de 1 est $e^1=e$ avec $e\approx 2{,}71828$.
- Si $f(x)=e^x$ alors $f'(x)=e^x$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)=e^x$		+		
$f(x)=e^x$	0	1	e	$+\infty$ (croissante)

Propriétés

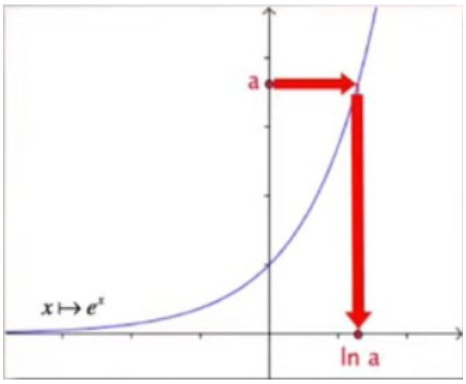
- $e^0=1$; $e^1=e$; $e^x>0$; $(e^x)'=e^x$.

Pour a et b réels quelconques :

- $e^{a+b}=e^a e^b$; $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$; $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$; $(e^a)^n=e^{an}$.
- $e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$; $e^a<e^b \Leftrightarrow a<b$; $e^a>e^b \Leftrightarrow a>b$.

Fonction logarithme népérien

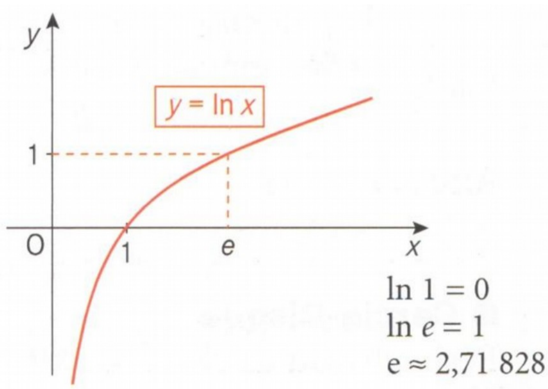
Définition



- On appelle <u>logarithme népérien</u> d'un réel strictement positif a , l'unique solution de l'équation $e^x = a$.
- On la note $x = \ln a$.
- La <u>fonction logarithme népérien</u> est la fonction :

$$\begin{array}{rl} \ln : &]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ & x \to \ln x \end{array}$$

Courbe représentative



- La fonction logarithme népérien est strictement croissante et définie uniquement sur les réels strictement positifs $(x>0)$.
- L'image de 1 est $\ln 1 = 0$.
- L'image de e est $\ln e = 1$.
- Pour $x>0$, si $f(x) = \ln x$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	‖		$+$		
$f(x) = \ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Propriétés

Pour tout $a>0$ et $b>0$:

- $\ln ab = \ln a + \ln b$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^n = n \ln a$; $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.
- $e^x = a$ équivaut à $x = \ln a$.
- Pour tout x , $\ln(e^x) = x$. Pour tout x strictement positifs, $e^{\ln x} = x$.

Comment résoudre une équation ou une inéquation où figure la fonction logarithme ou la fonction exponentielle ?

• l'équation $\ln x = a$ a pour solution : $x = e^a$. • $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$. • $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.	• l'équation $e^x = a$, avec $a > 0$, a pour solution : $x = \ln a$. • $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$. • $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Exemple 1 : Résoudre l'équation $e^{-0{,}5x+1}-2=0$ **.**

$$e^{-0{,}5x+1}=2 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}5x+1=\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\ln 2-1}{-0{,}5}=2(1-\ln 2) \ .$$

L'ensemble des solutions est $S=\{2(1-\ln 2)\}$.

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation $2\ln(x+4)>\ln(2-x)$.

Ensemble de définition : $x+4>0$ et $2-x>0$ soit $-4<x<2$ donc $D=]-4;2[$.

$$\ln(x+4)^2>\ln(2-x) \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2>2-x \quad \Leftrightarrow \quad x^2+9x+14>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-7 \text{ ou } x>-2 \ .$$

On doit avoir $x\in D$, donc l'ensemble des solutions est $S=]-2;2[$.

Exemple 3 : Résoudre l'équation $e^x-10=-3e^{2x}$.

$$3e^{2x}+e^x-10=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(e^x)^2+e^x-10=0 \ .$$

Changement de variable : $X=e^x$, on obtient l'équation $3X^2+X-10=0$.

Cette équation a pour solutions : $X_1=-2$ et $X_2=\frac{5}{3}$.

Il faut alors résoudre les équations d'inconnue x :

- $e^x=-2$ n'a pas de solution, car $e^x>0$.
- $e^x=\frac{5}{3}$ a pour solution $x=\ln\frac{5}{3}$.

L'ensemble des solutions est $S=\{\ln\frac{5}{3}\}$.

EXERCICES

Ex 1 : Simplifier les expression suivantes.

$$\ln 3+\ln\frac{1}{3} \quad ; \quad \ln e^3+\ln e \quad ; \quad e^{-\ln 2} \quad ; \quad \ln\sqrt{e^5} \quad ; \quad e^{\ln 5-\ln 3} \quad ; \quad \ln e^3+e^{\ln 3} \quad .$$

Ex 2 : Résoudre les équations proposées.

1. $\ln x+2=0 \quad ; \quad \ln(x+1)-3=0 \quad .$
2. $\ln(x+2)=\ln(2x+1) \quad ; \quad 2\ln x+\ln 3=0 \quad .$
3. $\ln x+2=0 \quad .$
4. $e^{2x}-3=0 \quad ; \quad e^{2x}=e^{x+1} \quad .$
5. $e^{4x}-2e^{3x}=0 \quad ; \quad e^{0,2x}=2e^{-0,2x} \quad .$
6. $e^{2x}-2e^x-3=0 \quad ; \quad e^{2x}-2e^x+2=0 \quad .$

Ex 3 : Résoudre les inéquations proposées.

1. $\ln(x+1)<0 \quad ; \quad \ln(2-x)>\ln 3 \quad .$
2. $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)>0 \quad .$
3. $3-2e^{0,5x}>0 \quad .$
4. $e^x(e^x-2)>0 \quad .$
5. $e^{2x}-4e^x<0 \quad .$
6. $1-e^{0,5x-1}<0 \quad .$
7. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $(e^x+1)(e^x-3) \quad .$