10 Maximum ou minimum local d'une fonction

f est une fonction dérivable sur un intervalle I ; f' est la fonction dérivée de f.

Si, pour la valeur x_0 de I, la dérivée f' s'annule en changeant de signe, alors la fonction f admet en x_0 un maximum local ou un minimum local.

Le tableau de variation permet de savoir s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

11 Équation $f(x) = k$

f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a ; b]$; k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Si pour tout x de $]a ; b[$, on a $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique x_0 dans $[a ; b]$.

12 Développement limité

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 ; n est un entier naturel.

On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε tels que :

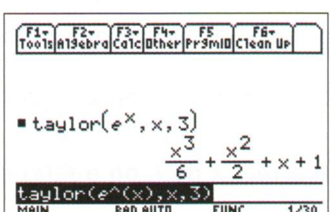
$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Pour obtenir le développement limité d'une fonction, on utilise un logiciel de calcul formel (voir fiche méthode 7).

Exemple

Pour la fonction $x : \mapsto e^x$, en utilisant la calculatrice Ti 89, on obtient l'écran suivant :



Le développement limité à l'ordre 3, en 0, de la fonction $x : \mapsto e^x$ est :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$