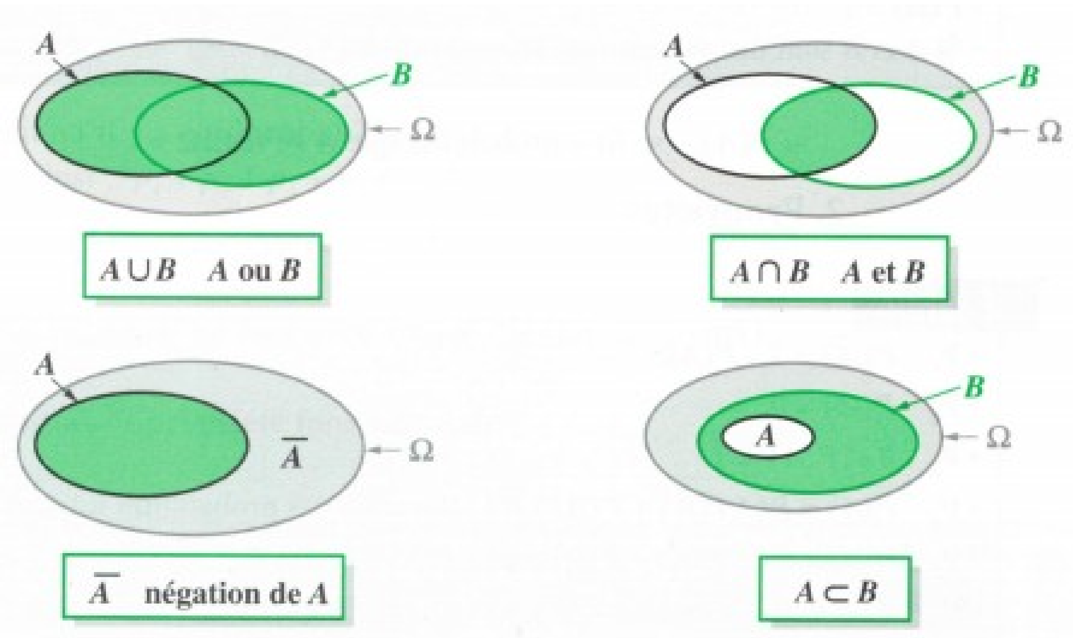
# Probabilités sur un ensemble fini

## Vocabulaire

- Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable, dont le résultat ne peut pas être prévu, et qui, renouvelée dans des conditions identiques ne donne pas forcément le même résultat à chaque renouvellement
- Chaque renouvellement de l'expérience est appelé une **épreuve**.
- Un **univers** est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire, il est souvent noté $\Omega$ .
- Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé une **issue**.
- Un ensemble d'issues est appelé un **évènement**. Un évènement $A$ est un sous-ensemble de $\Omega$ : $A \subset \Omega$ .
- Un **évènement élémentaire** est un évènement qui contient une seule issue.
- L'**évènement contraire** de $A$ est l'ensemble $\bar{A}$ des éléments de $\Omega$ n'appartenant pas à $A$ .
- L'**évènement certain** est la partie égale à l'univers : $A = \Omega$ .
- L'**évènement impossible** est l'ensemble vide : $A = \emptyset$ .
- La **réunion** de deux événements $A$ et $B$ , notée $A \cup B$ , est l'événement qui contient toutes les éventualités de $A$ **ou** de $B$ .
- L'**intersection** de deux événements $A$ et $B$ , notée $A \cap B$ , est l'événement qui contient les éventualités communes à $A$ **et** à $B$ .
- Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que $A$ et $B$ sont **incompatibles**.



## Définition

L’ensemble des événements de l’univers $\Omega$ est noté $\wp(\Omega)$ .

Une **probabilité** définie sur $\Omega$ est une application $P$ de $\wp(\Omega)$ dans $[0;1]$ telle que :

- $P(\Omega)=1$ .
- Pour tout $A\in\wp(\Omega)$ et tout $B\in\wp(\Omega)$ , si $A\cap B=\emptyset$ , on a $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ .

« $P(A)$ » se lit « probabilité que $A$ se réalise ».

## Propriétés

Pour tout $A\in\wp(\Omega)$ et tout $B\in\wp(\Omega)$ :

- $P(\emptyset)=0$ ;
- $P(\bar{A})=1-P(A)$ ;
- $0\leq P(A)\leq 1$ ;
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ .

## Équiprobabilité

On dit qu’il y a **équiprobabilité** quand tous événements élémentaires ont **la même** probabilité.

- Si $\Omega$ contient $n$ éléments, la probabilité d’un événement élémentaire est: $\frac{1}{n}$ .
- Si un événement $A$ contient $k$ éléments: $P(A)=\frac{k}{n}$ ,

$$P(A)=\frac{nombre\ \ de\ \ cas\ \ favorables}{nombre\ \ de\ \ cas\ \ possibles} .$$

Exemples :

• Soit le jeu de lancer d’un dé.
On utilise comme notation : $P(\{i\})=p_i$ pour $i\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les probabilités des événements élémentaires du jeu de dé (dé non pipé) sont :
$p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\frac{1}{6}$.
On dit qu’il y a **équiprobabilité**.
On a ainsi : $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$.

• Pour une pièce équilibrée : $P(\{F\})=P(\{P\})=\frac{1}{2}$.

• Pour un jeu de 52 cartes non truqué : $P(\{\text{As de cœur}\})=\frac{1}{52}$.

# Exercices

**Ex 1 :** On lance un dé à 12 faces bien équilibré. On lit après chaque lancer le numéro de la face supérieure.

1. Déterminer l'univers $\Omega$ associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité de l'événement $A$ : « Faire apparaître un numéro pair inférieur à 9 ». On notera $P(A)$ la probabilité de $A$.
3. Calculer la probabilité de l'événement $B$ : « Faire apparaître un numéro pair ou un numéro inférieur à 5 ».

**Ex 2 :** Dans une boite, on place quatre cartons portant chacun une des lettres du mot « NOTE ». On tire au hasard un carton et on le pose à côté de la boite. On recommence cette opération deux autres fois et, à chaque nouveau tirage, on place la lettre à droite de la précédente. On obtient ainsi un mot de trois lettres ( il n'est pas nécessaire qu'il figure dans le dictionnaire). On donnera les résultats sous forme de fraction, puis on en donnera une valeur approchée à $10^{-2}$ près.

1. Vérifier à l'aide d'un arbre, que l'on peut ainsi former 24 mots différents.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir le mot : « NET ».
3. On note $A$ l'événement « le mot obtenu commence par une consonne » et $B$ l'événement « le mot obtenu comporte une voyelle en son milieu ».
   **a)** Calculer la probabilité $P(A)$ de l'événement $A$.
   **b)** Calculer la probabilité $P(B)$ de l'événement $B$.
   **c)** Calculer la probabilité $P(A\cap B)$ de l'événement « $A$ et $B$ ».
4. En déduire la probabilité $P(A\cup B)$ de l'événement « $A$ ou $B$ ».

**Ex 3 :** À la cantine on peut lire :

| **Menu** |
|---|
| **3 entrées au choix :** carottes, tomates, jambon |
| **4 plats au choix :** œufs, steak, mouton, canard |
| **2 dessert au choix :** fromage, tarte |

1. Combien de repas différents peut-on composer en choisissant une entrée, un plat et un dessert ?
2. Un élève distrait choisit au hasard une entrée, un plat et un dessert. Quelle est la probabilité pour qu'il choisisse un repas sans viande ?

**Ex 4 :** On lance un dé à six faces truqué : les probabilités de chaque résultat pair sont égales au double des probabilités de chaque résultat impair. Déterminer les probabilités des événement élémentaires.

**Ex 5 :** On donne les événements $A$ et $B$ tels que : $P(A)=0{,}61$ et $P(B)=0{,}27$ .
Calculer $P(A\cup B)$ dans les cas suivants :

1. $A$ et $B$ sont incompatibles ;
2. $P(A\cap B)=0{,}13$ .

**Ex 6:** Une machine fabrique 10000 pièces par jour. En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défauts : *a* et *b*.

- 8 % des pièces présentent le défaut *a* au moins.
- 15 % des pièces présentent le défaut *b* au moins.
- 5 % des pièces présentent à la fois les défauts *a* et *b* et sont directement mises au rebut.
- 90 % des pièces qui présentent un seul défaut peuvent être réparées et les autres sont mises au rebut.

**1.** Compléter le tableau suivant :

| | Nombre de pièces présentant le défaut *a* | Nombre de pièces ne présentant pas le défaut *a* | Total |
|---|---|---|---|
| Nombre de pièces présentant le défaut *b* | | | |
| Nombre de pièces ne présentant pas le défaut *b* | | | |
| Total | | | 10000 |

**2.** On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

**a)** Calculer la probabilité $p_1$ qu'elle présente un seul défaut.
**b)** Calculer la probabilité $p_2$ qu'elle n'ait aucun défaut.

**3.** Montrer que la probabilité pour qu'une pièce prise au hasard soit acceptée (directement ou après réparation) est de 0,937.

**Ex 7 :** Une personne possède une cave de 2400 bouteilles de vin, rouge et blanc, de trois régions : Bordeaux, Bourgogne et Loire. La moitié de ses vins sont des Bordeaux, et il y a deux fois plus de bouteilles venant de Bourgogne que de bouteilles venant de Loire. 75 % de vins sont rouges et, parmi eux, 54 % viennent du Bordelais. Dans le vins de Loire, il y a autant de blancs que de rouges.

**1.** Compléter le tableau suivant :

| | Bordeaux | Bourgogne | Loire | Total |
|---|---|---|---|---|
| Blanc | | | | |
| Rouge | | | | |
| Total | | | | |

**2.** On prend au hasard, une bouteille dans cette cave. Calculer la probabilité des événements suivants :

**a)** $A$ : « Le vin est blanc » ;
**b)** $B$ : « Le vin vient de Bordeaux » ;
**c)** $A \cap B$
**d)** $A \cup B$

**3.** On choisit une bouteille de vin blanc. Calculer la probabilité que ce soit un Bordeaux.

**4.** On choisit une bouteille de Bourgogne. Calculer la probabilité que ce soit un vin blanc.

# Probabilités conditionnelles

## Définition

Soit $A$ un événement de probabilité non nulle.
On appelle **probabilité conditionnelle relative à** $A$, la probabilité définie par :

Pour tout $B \in \Omega$ , $\boxed{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

On lit : « la probabilité de $B$ **sachant** $A$ » ou « la probabilité de $B$ **si** $A$ », c'est-à-dire : la probabilité que $B$ se réalise sachant que $A$ est réalisé.

**Formules pratiques :**

- si $P(A) \neq 0$ alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ ;
- si $P(B) \neq 0$ alors $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$ .

## Construire et utiliser un arbre pour résoudre un problème faisant intervenir des probabilités conditionnelles

*Dans un atelier, deux machines $M_1$ et $M_2$, fonctionnant de manière indépendante, produisent des pièces de même type. $M_1$ fournit les 80 % de la production, $M_2$ en fournit 20 %.*
*Parmi ces pièces, certaines sont défectueuses : c'est le cas pour 5 % des pièces produites par $M_1$ et pour 4 % des pièces produites par $M_2$.*
*On prélève au hasard une pièce dans la production de l'atelier.*

1. *Démontrer que la probabilité que cette pièce soit défectueuse est 0,048.*
2. *Sachant que cette pièce est défectueuse, déterminer la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine $M_1$.*

## Exercices

**Ex 8 :** À l'atelier de coupe, deux machines $M_1$ et $M_2$ découpent les pièces, puis celles-ci sont stockées sans distinction de provenance.
La machine $M_1$ découpe 60 % des pièces et 5 % de ces pièces sont défectueuses.
La machine $M_2$ découpe 40 % des pièces et 2,5 % de ces pièces sont défectueuses.
On notera $E_1$ l'événement « La pièce a été découpée par la machine $M_1$ ».
On notera $E_2$ l'événement « La pièce a été découpée par la machine $M_2$ ».
On notera $D$ l'événement « La pièce est défectueuse ».

1. On prélève au hasard une pièce de la production totale.
   Calculer les probabilités $p(E_1 \cap D)$ , $p(E_2 \cap D)$ et $p(D)$ .
2. Déterminer les probabilités conditionnelles $p_D(E_1)$ et $p_D(E_2)$ .

**Ex 9 :** Une usine fabrique deux types de pièces, notées *a* et *b*, pour du matériel électrique.
Les pièces sont réalisées dans deux matériaux différents, métal et céramique.
Dans ce qui suit, sauf indication contraire, tous les résultats approchés sont arrondir à $10^{-2}$.
On admet que, dans un stock de 10000 pièces :
- 40 % des pièces fabriquées sont en céramique ;
- 30 % des pièces en céramique sont de type *a* ;
- dans les pièces de type *b*, il y a autant de pièces métalliques que de pièces en céramique.

1. Compléter le tableau ci-dessous.

| | Nombre de pièces de type *a* | Nombre de pièces de type *b* | Total |
|---|---|---|---|
| Nombre de pièces métalliques | | | |
| Nombre de pièces en céramique | | | |
| Total | | | 10000 |

2. On prélève une pièce au hasard dans le stock de 10000 pièces.
   Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies. On désigne par :
   - *A* l'événement « La pièce est de type *a* » ;
   - *B* l'événement « La pièce est de type *b*» ;
   - *M* l'événement « La pièce est en métal » ;
   - *C* l'événement « La pièce est en céramique » ;

   **a)** Calculer $p(A \cap C)$ .
   **b)** Calculer la probabilité que la pièce soit de type *a* ou en céramique.
   **c)** Calculer $p_A(C)$ .
   **d)** Calculer la probabilité qu'une pièce soit en métal sachant qu'elle est de type *b*.

**Ex 10 :** Deux machines *A* et *B* fabriquent des disques. La machine *A* produit 1500 disques par jour ; la machine *B* produit 3000 disques par jour.
La probabilité pour qu'un disque ait un défaut est de 0,02 sachant qu'il est produit par la machine *A* et de 0,035 sachant qu'il est produit par la machine *B*.

On tire au hasard un disque dans la production du jour.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
   **a)** *A* : « Le disque est produit par la machine *A* » ;

   **b)** $B$: « Le disque est produit par la machine $B$» ;
   **c)** D: « Le disque a un défaut » ;

2. Le disque prélevé a un défaut.
   Quelle est la probabilité pour qu'il ait été produit par la machine $A$ ? par la machine $B$ ?

**Ex 11 :** Sur un VTT, on considère que les probabilités de crevaison des pneus avant et arrière pour un parcours donné sont respectivement $3\times10^{-3}$ et $7\times10^{-3}$ .
On suppose de plus que la probabilité de crevaison du pneu arrière, sachant que le pneu avant est crevé, est de 0,5.

Calculer la probabilité :

1. d'avoir les deux pneus crevés ;
2. d'avoir au plus un pneu crevé ;
3. d'avoir un seul crevé ;
4. de ne pas avoir de crevaison.

**Ex 12 :** Une entreprise vend des calculatrices d'une certain marque.
Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux type de défaut, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage.
Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante.

- La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.
- En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.
- En l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de 0,94.

On note C l'événement « La calculatrice présente un défaut de clavier » et A l'événement « La calculatrice présente un défaut d'affichage ».
Les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1. Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes $p_{\bar{C}}(\bar{A})$ , $p_C(A)$ et $p(C)$ .
2. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.
3. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.
   **a)** Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.
   **b)** Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.
   **c)** En déduire $p(A)$ .
   **d)** Montrer que la probabilité de l'événement « La calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est égale à 0,902.

**Ex 13 :** Une société de produits pharmaceutiques fabrique en très grande quantité un type de comprimés.
Un comprimé est conforme si sa masse exprimée en grammes appartient à l'intervalle [1,2 ; 1,3].
La probabilité qu'un comprimé soit conforme est 0,98.
On note :

- $A$ l'événement : « Un comprimé est conforme » ;
- $B$ l'événement : « Un comprimé est refusé ».

On contrôle tous les comprimés. Le mécanisme de contrôle est tel que :

- un comprimé conforme est accepté avec une probabilité de 0,98 ;

- un comprimé qui n'est pas conforme est refusé avec une probabilité de 0,99.

On connaît donc $P(A)=0{,}98$ , $P_A(\bar{B})=0{,}98$ et $P_{\bar{A}}(B)=0{,}99$ .

1. Déterminer $P_A(B)$ , puis $P(B\cap A)$ et $P(B\cap \bar{A})$ .
2. Calculer :
   **a)** la probabilité qu'un comprimé soit refusé ;
   **b)** la probabilité qu'un comprimé soit conforme, sachant qu'il est refusé.

**Ex 14 :** Au rayon « image et son » d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine.
Une personne se présente :

- la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{3}{5}$ ;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est $\frac{7}{10}$ ;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\frac{1}{10}$ .

On désigne par $T$ l'événement : « La personne achète le téléviseur » et par $L$ l'événement : « La personne achète le lecteur de DVD ».

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer les probabilités des événements suivants (les résultats seront donnés sous forme de fractions).
   **a)** « La personne achète les deux appareils ».
   **b)** « La personne achète le lecteur de DVD ».
   **c)** « La personne n'achète aucun des deux appareils ».
3. Montrer que, si la personne achète le lecteur de DVD, la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur est $\frac{21}{23}$ .

**Ex 15 :** Une entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1 % des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5 % des chaudières à ventouse sont défectueuses.
On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les événements suivants :
$A$ : « la chaudière est à cheminée » ;
$B$ : « la chaudière est à ventouse » ;
$D$ : « la chaudière présente un défaut ».

1. Déterminer $P(A)$ et $P(B)$ .
2. Calculer $P(D\cap A)$ et $P(D\cap B)$ .
3. En remarquant que $D=(D\cap A)\cup(D\cap B)$ et que les événements $D\cap A$ et $D\cap B$ sont incompatibles, calculer $P(D)$ et $P(\bar{D})$ .

## Indépendance de deux événements

On dit que **deux événements *A* et *B* sont indépendants** si la probabilité de leur intersection est égale au produit de leurs probabilités :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

Conséquence : Si *A* et *B* sont deux événements indépendants de probabilité non nulle :

$$P_B(A)=P(A) \quad \text{et} \quad P_A(B)=P(B) \quad .$$

***Exemple*** : Dans une entreprise de 120 employés, on s'intéresse aux caractéristiques suivantes :

- $F$ « être fumeur » ;
- $C$ « être cadre ».

On a le tableau des effectifs suivant :

| | $C$ | $\bar{C}$ |
|---|---|---|
| $F$ | 16 | 32 |
| $\bar{F}$ | 24 | 48 |

On choisit un employé au hasard. Les événements $F$ et $C$ sont-ils indépendants ?
On a :

- $P(F)=\dfrac{48}{120}$ ; $P(C)=\dfrac{40}{120}$ ; $P(F\cap C)=\dfrac{16}{120}=\dfrac{2}{15}$ .
- $P(F)\times P(C)=\dfrac{48}{120}\times\dfrac{40}{120}=\dfrac{2}{15}$ .

Alors $P(F\cap C)=P(F)\times P(C)$ , donc les événements $F$ et $C$ sont indépendants.

## Exercices

**Ex 16 :** Soit $A$ et $B$ deux événements indépendants d'un même univers tels que $P(A)=0{,}3$ et $P(B)=0{,}5$ . Calculer $P(A\cap B)$ et $P(A\cup B)$ .

**Ex 17 :** $A$ et $B$ sont deux événements. On sait que :

$P(A)=\dfrac{1}{3}$ ; $P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$ et $P(B)=\alpha$ ( $\alpha$ réel).

Calculer $\alpha$ dans les cas suivants :

**a)** $A$ et $B$ sont incompatibles ;
**b)** $A$ et $B$ sont indépendants ;
**c)** $A$ est une partie de $B$ .

**Ex 18 :** Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard.

- A est l'événement « La carte tirée est un carreau ».
- B est l'événement « La carte tirée est un trèfle ».
- C est l'événement « La carte tirée est un as ».

1. Quels sont les événements incompatibles ?
2. Quels sont les événements indépendants ?

**Ex 19 :** Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : $P_1$ est $P_2$ .

On note $A$ l'événement : « Une pièce $P_1$ choisie au hasard dans la production des pièces $P_1$ est défectueuse ».
On note $B$ l'événement : « Une pièce $P_2$ choisie au hasard dans la production des pièces $P_2$ est défectueuse ».

On admet que les probabilités des événements $A$ et $B$ sont $P(A)=0{,}03$ et $P(B)=0{,}07$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.
Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à $10^{-4}$ près, la probabilité de chacun des événements suivants :

**a)** $E_1$ : « Les deux pièces du module sont défectueuses » ;
**b)** $E_2$ : « Au moins une des deux pièces du module est défectueuse » ;
**c)** $E_3$ : « Aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse ».

**Ex 20 :** La commande d'un portail automatique est composée de trois éléments : une commande manuelle à infrarouges type plip, un récepteur et un vérin électrique.
Une étude statistique des pannes de chacun des trois éléments constitutif du portail automatique permet d'estimer que la probabilité de panne à chaque utilisation est de :

- $0{,}001$ pour plip ;
- $0{,}0005$ pour le récepteur ;
- $0{,}0001$ pour le vérin.

Les pannes des trois éléments sont supposées indépendants.
Calculer la probabilité de panne d'un tel système au cours d'une utilisation par l'usager.

**Ex 21 :** Un atelier produit un composant optique en deux phases indépendantes.
La première est susceptible de faire apparaître un défaut $\alpha$ sur 2 % des composants, la seconde un défaut $\beta$ sur 4 % des composants.
On prélève un composant au hasard dans la production. On appelle :

- $A$ l'événement : « Le composant présente le défaut $\alpha$ » ;
- $B$ l'événement : « Le composant présente le défaut $\beta$ » ;

Calculer à $10^{-4}$ près, la probabilité des événements suivants :

**a)** le composant présente les deux défauts ;
**b)** le composant ne présente aucun des deux défauts ;
**c)** le composant présente au moins un des deux défauts ;
**d)** le composant présente un et un seul des deux défauts.