

# DST

## Mathématiques

**Durée: 1h 30min**

**EXERCICE 1 : (10 points)**

Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit. Elle étudie la demande pour ce nouveau produit, afin d'essayer de déterminer le prix de vente qui lui permettra d'obtenir la plus grande recette.

On utilisera les fonctions de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas demandé.

Dans le tableau suivant figure une partie des résultats d'une enquête réalisée pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels de ce nouveau produit en fonction de son prix de vente.

Prix de vente $x_i$ (en €)	200	250	300	350	450	500
Nombre d'acheteurs potentiels $y_i$	632	475	305	275	266	234

1. Représenter le nuage de points  $M_i(x_i; y_i)$  dans un plan muni d'un repère orthogonal, en prenant pour unités 1 cm pour 50 € sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 acheteurs sur l'axe des ordonnées.
2. À l'aide du graphique et sans calcul, expliquer pourquoi un ajustement affine de  $y$  en  $x$  n'est pas approprié.
3. Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près du coefficient de corrélation de la série statistique double  $(x_i, y_i)$ . À l'aide de cette valeur, expliquer pourquoi un ajustement affine de  $y$  en  $x$  n'est pas approprié.
4. On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points. On effectue le changement de variable  $z_i = \ln(y_i)$  où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.  
Calculer les différentes valeurs prises par la variable  $z$  ; on en donnera les valeurs  $z_i$  arrondies à  $10^{-3}$  près.
5. Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près du coefficient de corrélation de la série statistique double  $(x_i, z_i)$ . Expliquer pourquoi le changement de variable est pertinent.
6. Donner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$  sous la forme  $z = ax + b$  ( $a$  sera donné à  $10^{-4}$  près par excès et  $b$  à  $10^{-2}$  près par excès).
7. En déduire une estimation du nombre d'acheteurs potentiels  $y$ , en fonction de  $x$ , sous la forme  $y = ke^{-\lambda x}$  où  $k$  et  $\lambda$  sont des constantes ( $k$  sera arrondi à l'entier près par excès).
8. Utiliser cette estimation pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels, si le prix de vente est fixé à 400 €.

**EXERCICE 2 : (10 points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{2x} + e^x - x - 2.$$

On note  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

*Indication.* On mettra  $e^x$  en facteur dans  $f(x)$ .

2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

3. Démontrer que la droite  $D$  d'équation  $y = -x - 2$  est une asymptote de la courbe  $C$ .

4. Étudier la position relative de  $C$  et  $D$ .

5. Calculer  $f'(x)$ .

6. Vérifier que pour tout  $x$  réel :

$$f'(x) = 2(e^x + 1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right).$$

7. Dédire de la question précédente le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

8. Établir le tableau de variation de  $f$ .

9. Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C$  en son point d'abscisse 0.