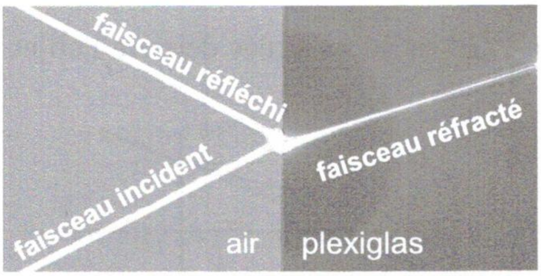
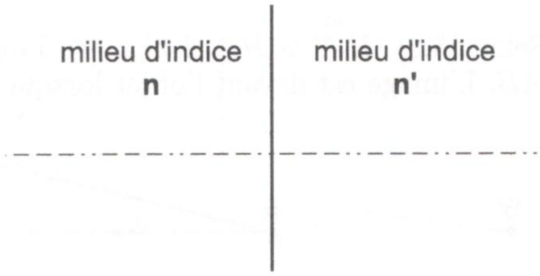
Le dioptre plan

Définition et représentation schématique

Un dioptre plan est constitué de deux milieux transparents d'indices optiques différents, séparés par une surface plane.

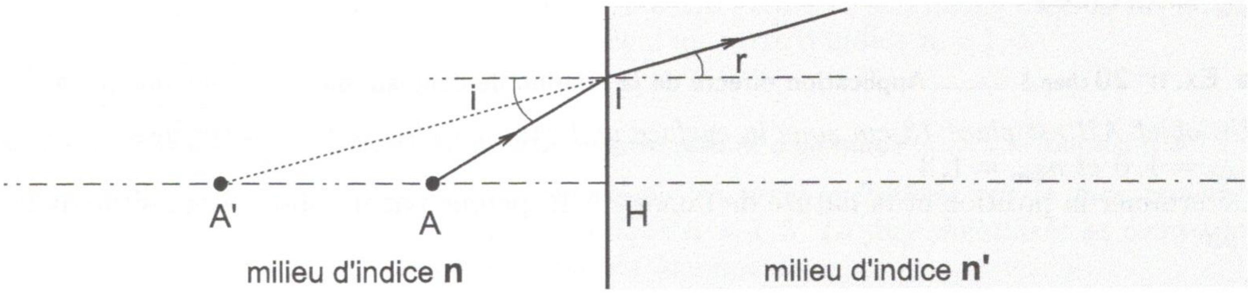




Une partie de la lumière est réfléchie, l'autre pénètre dans le second milieu suite à une réfraction.

Stigmatisme non rigoureux du dioptre plan

Un rayon issu d'un point lumineux A de l'axe optique aborde l'interface entre les deux milieux sous une incidence i. On note r son angle de réfraction et A' l'intersection de son prolongement avec l'axe optique. Le point A' est donc l'image (virtuelle) produite par le dioptre plan à partir du point A.



Dans le triangle (AHI), on a :

$$HA.\tan i = IH$$

de même, dans le triangle (A'HI) :

$$HA'.\tan r = IH$$

On obtient donc :

$$HA' = HA\frac{\tan i}{\tan r} = HA\frac{\sin i}{\sin r} \cdot \frac{\cos r}{\cos i}$$

Cette relation se simplifie partiellement en utilisant la loi de la réfraction :

$$n.\sin i = n'.\sin r \qquad \text{donc} \qquad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n'}{n} \qquad \text{et} \qquad HA' = HA \cdot \frac{n'}{n} \cdot \frac{\cos r}{\cos i} \tag{5.1}$$

La position du point A' dépend en général de l'incidence i du rayon. Le dioptre plan n'est donc pas rigoureusement stigmatique.

Stigmatisme approché et relation de conjugaison

Si l'angle i est très petit, il en est de même pour l'angle r et dans ce cas, $\cos i \simeq 1$ et $\cos r \simeq 1$. La relation (5.1) ne dépend plus de l'angle i puisque $\dfrac{\cos r}{\cos i} \simeq 1$.

Le dioptre plan peut être considéré comme stigmatique approché dans les conditions de Gauss (angle d'incidence très petit). La relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n'}{\overline{HA'}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\frac{\overline{HA'}}{n'} = \frac{\overline{HA}}{n}} \tag{5.2}$$

Selon (5.2), $HA' > HA$ si $n' > n$: l'image virtuelle $A'B'$ est alors située derrière l'objet AB. L'image est devant l'objet lorsque $n' < n$.

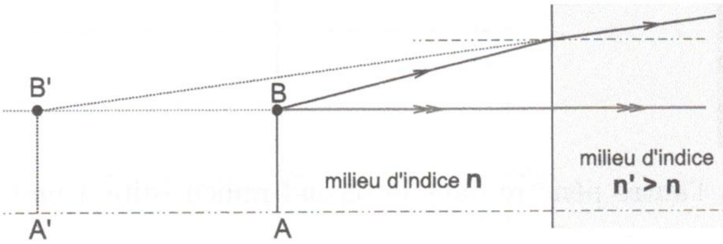


image virtuelle $A'B'$ située derrière AB si $n' > n$

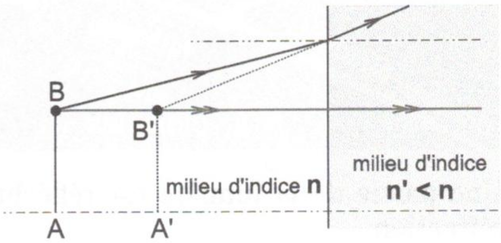


image située devant AB si $n' < n$

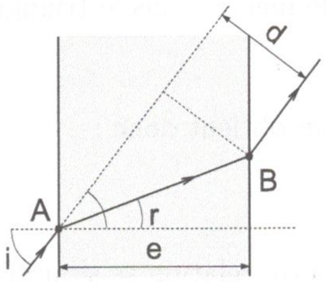
La taille de l'image produite par un dioptre plan est identique à celle de l'objet (grandissement transversal égal à $+1$).

Ex 20 : Application directe de la relation de conjugaison

Un objet AB est placé 13 cm sous la surface de l'eau, parallèlement à la surface.
$n_{air} = 1,0$ *et* $n_{eau} = 1,3$
Déterminer la position et la nature de l'image A'B' perçue par un observateur situé dans l'air.

Ex 21 : Décalage d'un rayon au travers d'une vitre

Lorsqu'un faisceau lumineux traverse une vitre en verre d'épaisseur e, dont les faces sont supposées parfaitement parallèles, il ressort de la seconde face en conservant la direction incidente, mais avec un certain décalage.



1. Montrer que le décalage d entre les rayons incident et émergent vérifie la relation :

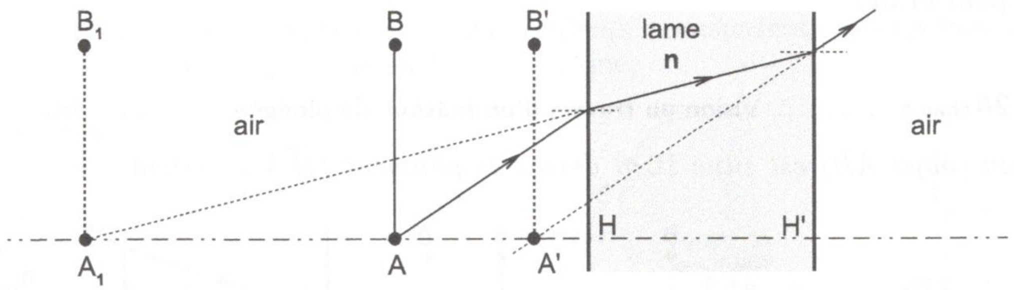
$$d = e\frac{\sin(i-r)}{\cos r}$$

2. Simplifier cette expression dans le cas où l'angle d'incidence i est faible. Calculer la valeur de d pour une vitre d'épaisseur $e = 10\,mm$ et d'indice optique $n = 1,5$ eclairée par un faisceau sous une incidence $i = 15°$.
3. Vérifier le calcul précédent à l'aide d'une construction graphique.

Ex 22 : Lame à faces parallèles

Une lame à faces parallèles est constituée de deux dioptres plans parallèles. Son épaisseur est notée e et le verre qui la compose a un indice optique n.
On veut déterminer la position de l'image A'B' d'un objet AB au travers de la lame en s'appuyant sur la chaîne d'image suivante :

$$AB \xrightarrow{\text{dioptre air/verre}} A_1B_1 \xrightarrow{\text{dioptre verre/air}} A'B'$$



1. **Image A_1B_1 donnée par le 1er dioptre** $A \xrightarrow{\text{dioptre air/verre}} A_1$
Exprimer littéralement la distance algébrique $\overline{AH}$ en fonction de $\overline{A_1H}$.
2. **Image finale $A'B'$ donnée par le 2ème dioptre** $A_1 \xrightarrow{\text{dioptre verre/air}} A'$
Exprimer littéralement la distance algébrique $\overline{H'A'}$ en fonction de $\overline{H'A_1}$.
3. En utilisant la relation de Chasles, et les résultats précédents, montrer que :

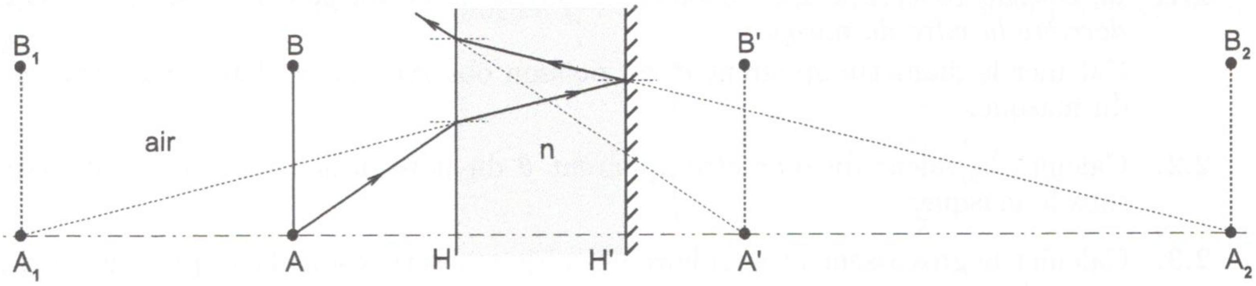
$$\boxed{\overline{AA'} = e \cdot (1 - \frac{1}{n})}$$

Calculer numériquement la distance $\overline{AA'}$ entre l'objet et son image dans le cas où la lame d'épaisseur $e = 1\,cm$ est constituée d'un verre d'indice $n = 1,5$.

Ex 23 : Association d'un dioptre plan et d'un miroir

Les miroirs usuels sont constitués d'une plaque en verre métallisée sur la face arrière. Le verre composant la vitre a un indice optique $n = 1,5$. La face métallisée se comporte comme un miroir plan. La chaîne d'image est la suivante :

$$AB \xrightarrow{\text{dioptre air/verre}} A_1B_1 \xrightarrow{\text{miroir plan}} A_2B_2 \xrightarrow{\text{dioptre verre/air}} A'B'$$



La plaque en verre a une épaisseur $HH' = 0,50\,cm$.
Un objet AB est placé $10\,cm$ devant la plaque en verre : $\overline{HA} = -10\,cm$.
L'image définitive donnée de l'objet AB par l'ensemble du système optique est notée $A'B'$.

1. **Image intermédiaire A_1 donnée par le dioptre de A** $\quad A \xrightarrow{\text{dioptre air/verre}} A_1$
   Calculer la valeur de $\overline{HA_1}$, déterminant la position de l'image intermédiaire A_1 produite par le dioptre.

2. **Image intermédiaire A_2 donnée par le miroir de A_1** $\quad A_1 \xrightarrow{\text{miroir plan}} A_2$
   Calculer la valeur de $\overline{H'A_2}$, puis celle de $\overline{HA_2}$

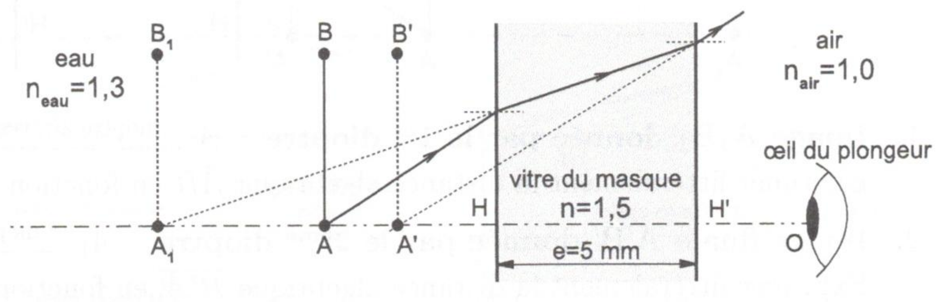
3. **Image finale A' donnée par le dioptre de A_2** $\quad A_2 \xrightarrow{\text{dioptre verre/air}} A'$

   3.1. Calculer la valeur de $\overline{HA'}$.

   3.2. Quelle serait la valeur de $\overline{HA'}$ en l'absence de verre, c'est à dire avec un miroir plan idéal ?

Ex 24 : Vision au travers d'un masque de plongée

Un poisson (objet AB) est situé $10\,m$ devant le plongeur ($\overline{HA} = -10\,m$).



1. **Position de l'image A'B' du poisson au travers du masque**

   1.1. Déterminer la position de l'image intermédiaire A_1 du point A au travers du 1^{er} dioptre (eau/verre)

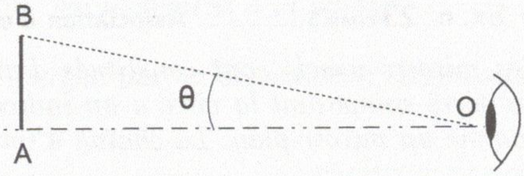
   1.2. Déterminer la position de l'image finale A'.

2. Grossissement de l'image

On appelle **diamètre apparent** l'angle $\boldsymbol{\theta}$ sous lequel un objet est vu par l'observateur.

$$\tan\theta = \frac{AB}{OA}$$

si l'angle θ est faible, $\theta \simeq \dfrac{AB}{OA}$



2.1. *Le poisson observé a une longueur de 30 cm. L'œil du plongeur est placé 2 cm derrière la vitre du masque.*

Calculer le diamètre apparent θ' du poisson observé par le plongeur au travers du masque.

2.2. Calculer la valeur du diamètre apparent θ du poisson si celui-ci était observé sans le masque.

2.3. Calculer le grossissement angulaire des objets observés sous l'eau par l'intermédiaire d'un masque.

SOLUTIONS

Ex 20 : Application directe de la relation de conjugaison

La relation de conjugaison donne : $\overline{HA'} = \overline{HA}\dfrac{n'}{n}$ $\boxed{\overline{HA'} = -10\,cm}$

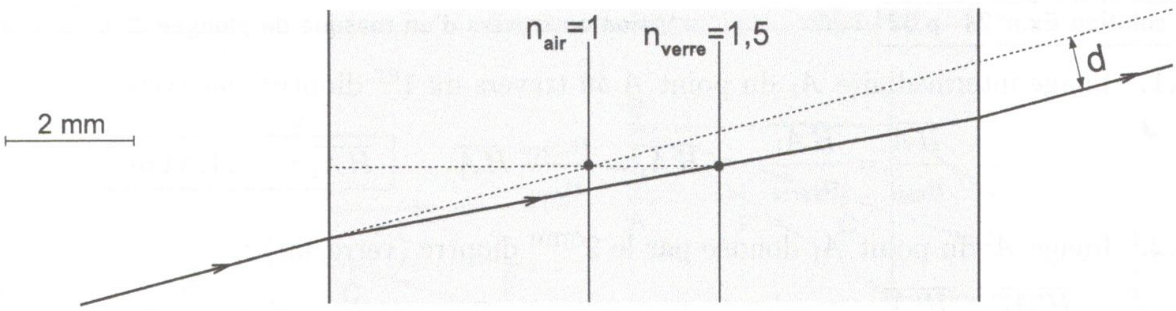
L'image est virtuelle. Elle est de même dimension et de même orientation que l'objet (le grandissement transversal est donc : $g_y = +1$). L'image est plus proche de la surface que l'objet, ce phénomène conduit l'observateur à sous-estimer les distances.

Ex 21 : Décalage d'un rayon au travers d'une vitre

1. $\cos r = \dfrac{e}{AB}$ et $\sin(r-i) = \dfrac{d}{AB}$ donc $d = e\dfrac{\sin(i-r)}{\cos r}$
2. Dans l'approximation des petits angles, $\sin(i-r) \simeq i - r$ et $\cos r \simeq 1$. Par ailleurs, la relation de Snell-Descartes devient : $i = n.r$, l'expression précédente se simplifie :

$$d \simeq e(1-\frac{1}{n})i \quad \text{avec } i \text{ en radians} : i = 15 \times \frac{\pi}{180} = 0,262\,rad \qquad \boxed{d = 0,87\,mm}$$

3. Pour construire graphiquement le rayon, on peut utiliser la méthode de Descartes dans la limite des faibles incidences.



Ex 22 : Lame à faces parallèles

1. Image A_1B_1 donnée par le dioptre (air/verre) : $\overline{HA} = \dfrac{1}{n}\overline{HA_1}$ soit $\overline{AH} = \dfrac{1}{n}\overline{A_1H}$
2. Image finale $\mathbf{A'B'}$ donnée par le dioptre de A_1B_1 (verre/air) : $\overline{H'A'} = \dfrac{1}{n}\overline{H'A_1}$
3. $\overline{AA'} = \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{H'A'} = \dfrac{1}{n}\overline{A_1H} + \overline{HH'} + \dfrac{1}{n}\overline{H'A_1} = \overline{HH'} + \dfrac{1}{n}\overline{H'H} = e(1-\dfrac{1}{n})$

   La distance entre l'objet et l'image est indépendante de la position de l'objet.

   L'application numérique donne : $\boxed{\overline{AA'} = 3,3\,mm}$

   Ce décalage de l'image est imperceptible pour des objets distants de plusieurs mètres.

Ex 23 : Association d'un dioptre plan et d'un miroir

1. Les rayons issus de A passent d'un milieu d'indice 1 à un milieu d'indice n, la relation de conjugaison du dioptre plan permet d'écrire :

$$\frac{\overline{HA_1}}{n} = \frac{\overline{HA}}{1} \qquad \text{donc} \quad \overline{HA_1} = n\overline{HA} \qquad \boxed{\overline{HA_1} = -15\,cm}$$

2. A_2B_2 et A_1B_1 sont symétriques par rapport au plan du miroir : $\overline{H'A_2} = -\overline{H'A_1}$

$$\overline{H'A_2} = -(\overline{HA_1} + \overline{H'H}) = 15,5\,cm \quad \text{et} \quad \overline{HA_2} = \overline{H'A_2} + \overline{HH'} \qquad \boxed{\overline{HA_2} = 16\,cm}$$

3.1. Les rayons réfléchis par le miroir sont ensuite réfractés sur le dioptre verre/air :

$$\frac{\overline{HA'}}{1} = \frac{\overline{HA_2}}{n} \qquad \text{donc} \quad \overline{HA'} = \frac{1}{n}\overline{HA_2} \qquad \boxed{\overline{HA'} = 10,7\,cm}$$

3.2. En l'absence de verre, l'image A' serait simplement le symétrique de A par rapport à H' ; on aurait donc $HA' = 10,5\,cm$. Le verre a donc pour effet de rapprocher légèrement l'image de l'objet.

Ex 24 : Vision au travers d'un masque de plongée

1.1. Image intermédiaire A_1 du point A au travers du 1$^{\text{er}}$ dioptre (eau/verre) :

$$\frac{\overline{HA}}{n_{\text{eau}}} = \frac{\overline{HA_1}}{n_{\text{verre}}} \qquad \overline{HA_1} = \frac{n_{\text{verre}}}{n_{\text{eau}}}\,\overline{HA} \qquad \boxed{\overline{HA_1} = -11,54\,m}$$

1.2. Image A' du point A_1 donnée par le 2$^{\text{ème}}$ dioptre (verre/air) :

$$\frac{\overline{H'A_1}}{n_{\text{verre}}} = \frac{\overline{H'A'}}{n_{air}} \qquad \overline{H'A'} = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}\,\overline{H'A_1} = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}\,(\overline{HA_1} + \overline{H'H}) \qquad \overline{H'A'} = -7,7\,m$$

$$\overline{HA'} = \overline{H'A'} + \overline{HH'} \qquad \boxed{\overline{H'A'} \simeq -7,7\,m}$$

2.1. Diamètre apparent θ' du poisson observé par le plongeur au travers du masque :

$$\tan\theta' = \frac{A'B'}{OA'} \qquad \text{avec } OA' = A'H + HH' + H'O = 7,7\,m \qquad \boxed{\theta' = 3,9.10^{-2}\,rad}$$

2.2. Diamètre apparent θ du poisson si celui-ci était observé sans le masque :

$$\tan\theta = \frac{AB}{OA} \qquad \text{avec } OA \simeq 10\,m \qquad \boxed{\theta = 3,0.10^{-2}\,rad}$$

2.3. Grossissement angulaire : $\boxed{\dfrac{\theta'}{\theta} = 1,3}$

Le poisson est observé sous un angle 30% plus grand que la réalité.