Exercice 1

Déterminer, dans chacun des cas, l'ensemble de définition de la fonction :

1. $x \to \dfrac{2x+3(x^2-1)}{3}$

2. $x \to \dfrac{2x+1}{3(x^2-1)}$

3. $x \to \dfrac{x(x+5)}{x^2+x}$

4. $x \longrightarrow \dfrac{4x}{x-5}$

Exercice 2

Dans chacun des cas, calculer $f'(x)$ en précisant l'ensemble de définition de f :

1. $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1$

2. $f(x) = 5x^3 - \dfrac{1}{x}$

3. $f(x) = (x^2+1)(x^3-2x)$

4. $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+7}$

5. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

6. $f(x) = -x+2+\dfrac{2}{3x}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x+x^2}$

8. $f(x) = (2x+1)^2$

9. $f(x) = x(5x-3)$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2 - x$.
Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe suivant les valeurs de x.
3. En déduire le variations de f.
4. Quels sont les points de la courbe $\mathcal{C}$, répresentative de la fonction f dans un repère orthonormé, pour lesquels le coefficient directeur de la tangente est égal à 9.

Exercice 5

Dans chacun des cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f au point x_0 :

1. $f(x) = x^3 \quad x_0 = 1$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad x_0 = -2$
3. $f(x) = x + x^2 \quad x_0 = 3$
4. $f(x) = \dfrac{x-1}{-2x+3} \quad x_0 = -1$

Exercice 6

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$

2. Déterminer l'expression algébrique de la dérivée f' de f.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

4. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ où la tangente :
   a. est horizontale
   b. admet un coefficient directeur égal à 3.

5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et un maximum sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Exercice 8

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -15x^4 + 80x^3 + 150x^2 - 3511$ admet un maximum.

Correction Ex 1

1. $\mathbb{R}$ 2. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ 3. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ 4. $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

Correction Ex 2

1. $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f'(x) = 15x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

3. $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$

4. $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{34x}{(x^2+7)^2}$

5. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

6. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f'(x) = -1 - \dfrac{2}{3x^2}$

7. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ $f'(x) = -\dfrac{1+2x}{(x+x^2)^2}$

8. $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = 8x + 4$

9. $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = 10x - 3$

Correction Ex 3

$D_f = \mathbb{R}$.

Variations :

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$-\frac{11}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Correction Ex 4

1. $D_f = \mathbb{R}$

2. $f'(x) = 3x^2 - 3$

3.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

4. $f'(x) = 9 \iff x = -2$ ou $x = 2$

Donc les points sont : $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Correction Ex 5

1. $y = 3x - 2$

2. $y = -\frac{1}{4}x - 1$

3. $y = 7x - 9$

4. $y = \frac{1}{25}x - \frac{9}{25}$

Correction Ex 6

1. $a = -1 \quad b = 2 \quad c = -1$

2. $f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2}$

3.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	4	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

4. a. $x = -1$ et $x = 1$

b. $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$

5. $T : \quad y = -\frac{3}{4}x + 3$

6. La courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des ordonnées n'ont pas de point d'intersection.

Le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisse est le point de coordonnées $(1 ; 0)$.

Correction Ex 7

1.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\searrow$	

2. La fonction f est croissante sur $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$ et donc f est croissante sur $[0 ; \sqrt{3}]$. La fonction f est decroissante sur $[\sqrt{3} ; +\infty]$. La dérivée f' est égale à zero pour $x = \sqrt{3}$. La fonction f admet donc un maximum en $\sqrt{3}$.

La fonction f est decroissant sur $]-\infty ; -\sqrt{3}]$ et croissante sur $[-\sqrt{3} ; 0]$. La dérivée f' est égale à zero pour $x = -\sqrt{3}$. La fonction f admet donc un minimum en $-\sqrt{3}$.

Correction Ex 8

x	$-\infty$		-1		0		5		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	-3456	$\searrow$	-3511	$\nearrow$	864	$\searrow$	

La fonction f admet donc un maximum en 5 qui vaut 864.