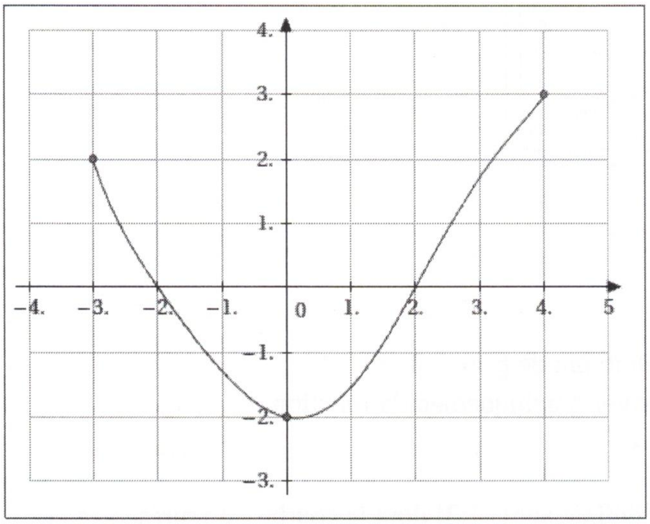
Exercice 1

La courbe ci-dessous représente une fonction .



1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Donner le tableau de variations de la fonction .
3. Quel est le maximum de la fonction sur :
   a. son ensemble de définition
   b. [-3 ; 2]
4. Quel est le minimum de la fonction sur :
   a. son ensemble de définition
   b. [2 ; 4]

Exercice 2

Indiquez les erreurs dans les tableaux de variation suivants :

Tableau 1

x	0		1		2		5
$f(x)$	-1	↘	1	↗	$\frac{4}{5}$	↘	2

Tableau 2

x	-3		$\frac{7}{2}$		2		10
$g(x)$	3	↗	2	↘	1	↗	100

Exercice 3

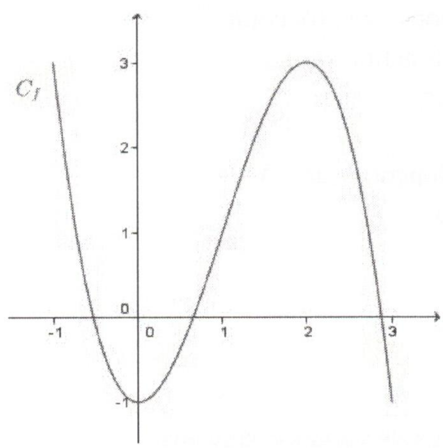
Voici le tableau de variation d’une fonction définie sur l’intervalle .

x	-3		0		2		4
$g(x)$	1	↘	-4	↗	0	↘	-3

1. Décrire les variations de la fonction.
2. Comparer lorsque cela est possible :
   • g(-3) et g(-1)
   • g(1) et g(3)
3. Lire le maximum de g sur [0 ; 4] et le minimum de g sur [-3 ; 4].
4. Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction .

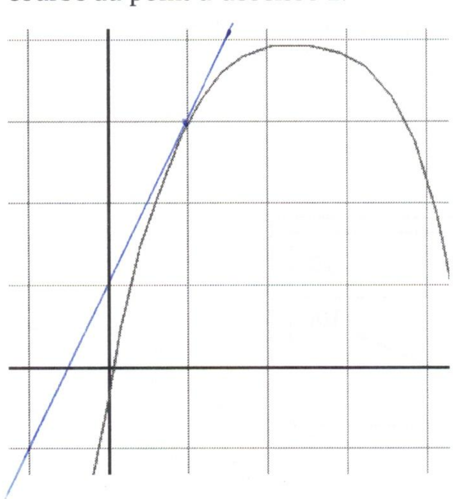
Exercice 4

Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur [−1;3] dont la courbe est représentée ci-dessous.



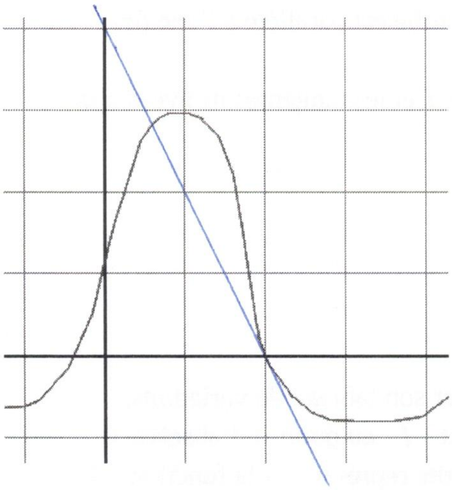
Exercice 5

Quel est le nombre dérivé de f en x=1? Ecris sous la forme y=mx+p l'**<u>équation de la tangente</u>** à la courbe au point d’abscisse 1.



Exercice 6

Combien vaut f'(2)? Ecris sous la forme y=mx+p l'**<u>équation de la tangente</u>** à la courbe au point d'abscisse 2.



Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$. Combien vaut f'(-2)?

Exercice 8

Ecris sous la forme y=mx+p l'**<u>équation de la tangente</u>** à la courbe de $f : x \mapsto x^2$ au point d'abscisse 1.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Combien vaut f'(-2)?

Exercice 10

Déterminer l'ensemble de définition et le sens de variation des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$
2. $f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x + 4$
3. $f(x) = (x^2 - x - 1)(x - 2)$
4. $f(x) = \frac{5x-3}{x-1}$
5. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$

Exercice 11

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty]$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Démontrer que cette fonction admet un minimum qu'on précisera.

Exercice 12

On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-4}{2x-5}$ et on note C_f sa représentation graphique.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f noté D_f.

2. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction sur son ensemble de définition.
4. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 3.
5. Donner les coordonnées des points où la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abcisses.
6. Tracer dans un repère orthonormé, la courbe C_f, la droite T et les tangentes trouvées à la question précédente.

Exercice 13

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{10x+4}{5x^2+1}$.

1. Déterminer pour tout $\mathbb{R}$ l'expression de $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentant f au point A d'abscisse 0 .
4. Étudier la position relative de cette tangente et de la courbe représentant la fonction f .

Exercice 1 :

1. L'ensemble de definition de la fonction f est $D_f = [-3 ; 4]$.

2.

x	-3		0		4
$f(x)$	2	↘	-2	↗	3

3. a. Son maximum sur $[-3 ; 4]$ est 3 atteint pour $x = 4$

   b. Son maximum sur $[-3 ; 2]$ est 2 atteint pour $x = -3$

4. a. Son minimum sur $[-3 ; 4]$ est -2 atteint pour $x = 0$

   b. Son minimum sur $[2 ; 4]$ est 0 atteint pour $x = 2$

Exercice 2 :

Tableau 1 : La fonction ne peut pas décroître de la valeur -1 à la valeur 1. Elle ne peut pas croître de la valeur 1 à la valeur $\frac{4}{5}$. Elle ne peut pas non plus décroître de la valeur $\frac{4}{5}$ à la valeur 2.

Tableau 2 : $\frac{7}{2}$ n'est pas compris entre -3 et 2.
La fonction ne peut pas croître de 3 à 2.

Exercice 3 :

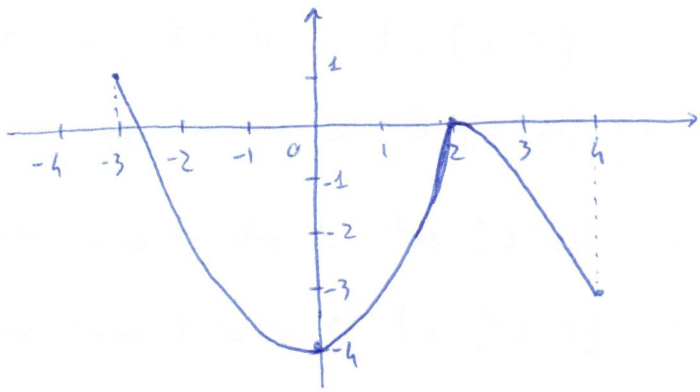
1. La fonction g est décroissante sur les intervalles $[-3 ; 0]$ et $[2 ; 4]$ et croissante sur $[0 ; 2]$.

2. -3 et -1 appartiennent tous les deux à l'intervalle $[-3 ; 0]$ sur lequel la fonction g est décroissante. Par conséquent $g(-3) > g(-1)$.
1 et 3 n'appartiennent pas à un intervalle sur lequel la fonction g est monotone. On ne peut pas comparer leur image.

3. Le maximum de la fonction g sur $[0 ; 4]$ est 0.
Il est atteint pour $x = 2$.

Le minimum de la fonction g sur $[-3 ; 4]$ est -4.
Il est atteint pour $x = 0$.

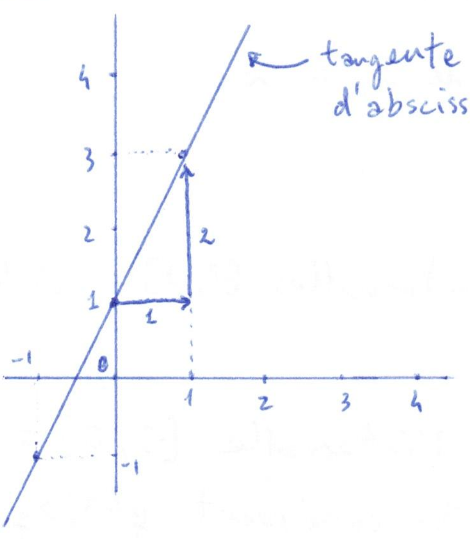
4. Une représentation possible (il en existe une infinité) est :



Exercice 4 :

x	-1		0		2		3
$f(x)$	3	↘	-1	↗	3	↘	-1

Exercice 5 :



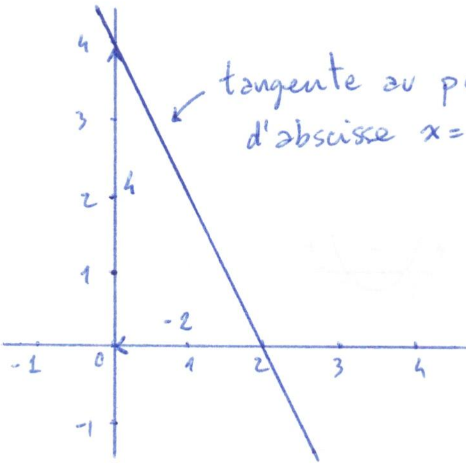
tangente au point d'abscisse $x = 1$.

$\Rightarrow f'(1) = \frac{2}{1} = 2$

Équation de la tangente :

$$y = 2x + 1$$

Exercice 6 :



tangente au point d'abscisse $x = 2$

$\Rightarrow f'(2) = \frac{4}{-2} = -2$

Équation de la tangente :

$y = -2x + 4$

Exercice 7 :

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(-2) = 2 \times (-2) = -4$

Exercice 8 :

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2 \times 1 = 2$

Équation de la tangente au point d'abscisse 1 :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 1^2 = 1$; $f'(1) = 2 \Rightarrow y = 2(x-1) + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$

Exercice 9 :

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$

Exercice 10 :

1. $f'(x) = -6x + 12 \Rightarrow -6x + 12 > 0 \Leftrightarrow x < 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+	0	−
$f(x)$	↗	7	↘

Ensemble de définition :

$D_f = \mathbb{R}$

2. Ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 18x - 21$

$3x^2 - 18x - 21 > 0$

$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 3 \times (-21) = 576 > 0$

$x_1 = \dfrac{18 - \sqrt{576}}{6} = -1 \qquad x_2 = \dfrac{18 + \sqrt{576}}{6} = 7$

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	15	$\searrow$	-241	$\nearrow$	

3. Ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = (2x-1)(x-2) + (x^2 - x - 1) = 2x^2 - 4x - x + 2 + x^2 - x - 1 =$

$= 3x^2 - 6x + 1$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 36 - 12 = 24 > 0$

$x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{24}}{6} = \dfrac{6}{6} - \sqrt{\dfrac{24}{36}} = 1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{24}}{6} = \dfrac{6}{6} + \sqrt{\dfrac{24}{36}} = 1 + \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

x	$-\infty$		$1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$		$1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{6}}{9} + 1$	$\searrow$	$1 - \frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$	

4. Ensemble de définition $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

$f(x) = \dfrac{5x-3}{x-1} = \dfrac{u}{v} \Rightarrow \begin{array}{l} u = 5x-3 \Rightarrow u' = 5 \\ v = x-1 \Rightarrow v' = 1 \end{array}$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{5(x-1)-(5x-3)}{(x-1)^2} = \frac{5x-5-5x+3}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
-2		$-$	‖	$-$	
$(x-1)^2$		$+$	‖	$+$	
f'		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

5. Ensemble de définition $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2} = \dfrac{u}{v} \Rightarrow \begin{array}{l} u = x^2-1 \\ v = x+2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = 2x \\ v' = 1 \end{array}$

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{2x(x+2)-(x^2-1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2+1}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

$x^2+4x+1 > 0$

$\Delta = 16-4 = 12$

$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{12}}{2} = -2-\sqrt{\dfrac{12}{4}} = -2-\sqrt{3}$

$x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{12}}{2} = -2+\sqrt{3}$

$(x+2)^2 > 0$

($x = -2$ V.I.)

Toujours positif.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-4-2\sqrt{3}$	$\searrow$	‖	$\searrow$	$-4+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Exercice 11 :

$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ $\qquad D_f =]0;+\infty[$

$1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} > 0$

$x-1>0$	$x+1>0$	$x^2>0$
$x>1$	$x>-1$	Toujours positif ; $x=0$ V.I.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
f'		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Le minimum est 2 atteint pour $x = 1$.

Exercice 12 :

1. $2x-5=0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ V.I. $\Rightarrow D_f =]-\infty;\frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2};+\infty[$.

2. $f(x) = \frac{x^2-4}{2x-5} = \frac{u}{v}$ $\qquad \begin{array}{l} u = x^2-4 \\ v = 2x-5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = 2x \\ v' = 2 \end{array}$

$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{2x(2x-5)-(x^2-4)\times 2}{(2x-5)^2} = \frac{4x^2-10x-2x^2+8}{(2x-5)^2} =$$

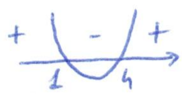
$$= \frac{2x^2-10x+8}{(2x-5)^2}$$

3. $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 10x + 8}{(2x-5)^2}$

$2x^2 - 10x + 8 > 0$

$\Delta = 100 - 4 \times 2 \times 8 = 36$

$x_1 = \dfrac{10-6}{4} = 1$ $\quad x_2 = \dfrac{10+6}{4} = 4$



$(2x-5)^2 > 0$

Toujours positif.

$x = \dfrac{5}{2}$ V.I.

x	$-\infty$		1		$5/2$		4		$+\infty$
$2x^2 - 10x + 8$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$(2x-5)^2$		$+$		$+$	||	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	1	↘	||	↘	4	↗	

4. $T: \quad y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$f'(3) = \dfrac{2 \times 9 - 10 \times 3 + 8}{(2 \times 3 - 5)^2} = \dfrac{18 - 30 + 8}{1} = -4$

$f(3) = \dfrac{9-4}{2 \times 3 - 5} = \dfrac{5}{1} = 5$

$\Rightarrow T: \quad y = -4(x-3) + 5$

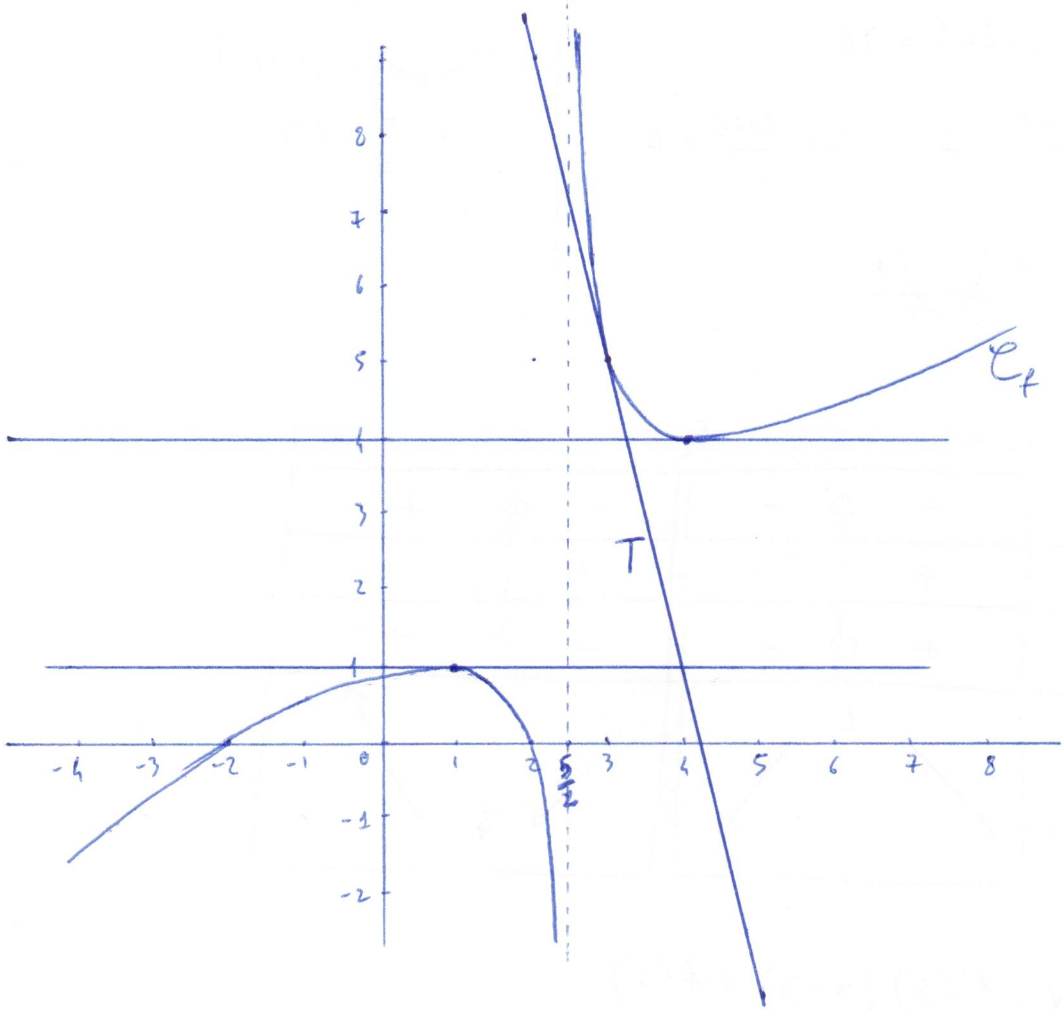
$T: \quad y = -4x + 12 + 5$

$\boxed{T: \quad y = -4x + 17}$

5. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$

$\downarrow$ Maximum $\qquad \downarrow$ Minimum

6.



Exercice 13 :

1. $f(x) = \dfrac{10x+4}{5x^2+1} = \dfrac{u}{v}$ $\qquad \begin{array}{l} u = 10x+4 \\ v = 5x^2+1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u' = 10 \\ v' = 10x \end{array}$

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{10(5x^2+1) - (10x+4)10x}{(5x^2+1)^2} = \frac{50x^2+10-100x^2-40x}{(5x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-50x^2-40x+10}{(5x^2+1)^2} = \frac{10(-5x^2-4x+1)}{(5x^2+1)^2}$$

2.

$10 > 0$ Toujours positif	$-5x^2-4x+1 > 0$ $\Delta = 16 - 4\times(-5) = 36$ $x_1 = \frac{4-6}{-10} = \frac{1}{5}$ $\quad x_2 = \frac{4+6}{-10} = -1$ -1, $1/5$: $-$ $+$ $-$	$(5x^2+1)^2$ Toujours positif

x	$-\infty$		-1		$1/5$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	

3. T: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = \dfrac{10}{1} = 10$ $f(0) = \dfrac{4}{1} = 4$

$\Rightarrow \boxed{y = 10x + 4}$

4. $\dfrac{10x+4}{5x^2+1} > 10x+4 \rightsquigarrow f(x) > T$

$$\frac{10x+4-(10x+4)(5x^2+1)}{5x^2+1} > 0$$

$$\frac{10x+4-(50x^3+10x+20x^2+4)}{5x^2+1} > 0$$

$$\frac{\cancel{10x}+\cancel{4}-50x^3-\cancel{10x}-20x^2-\cancel{4}}{5x^2+1} > 0$$

$$\frac{-50x^3-20x^2}{5x^2+1} > 0$$

$$\frac{-10x^2(5x+2)}{5x^2+1} > 0$$

$-10 > 0$ Toujour negatif | $x^2 > 0$ Toujour positif $x=0$ | $5x+2>0$ $x > -\frac{2}{5}$ | $5x^2+1>0$ Toujours positif.

x	$-\infty$		$-2/5$		0		$+\infty$
-10		$-$		$-$		$-$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$5x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x^2+1$		$+$		$+$		$+$	
Pr		$+$	0	$-$	0	$-$	

$\Rightarrow$ La fonction f est supérieure à la tangente T sur l'intervalle $]-\infty; -\frac{2}{5}[$.

La fonction f et la tangente T ont deux intersections aux points d'abscisses: $x = -\frac{2}{5}$ et $x = 0$.