INSTITUT SUPÉRIEUR D'OPTIQUE

Classe : TOP 2 / TS2
Date : Décembre 2019

BTS Blanc Mathématiques

Durée: 2 H

Présentation et orthographe seront pris en compte dans le barème de notation.
Les calculatrices graphiques sont autorisées pour ce sujet.

EXERCICE 1 5 points/20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{2x}+e^{x}-x-2 \quad .$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Calculer $f'(x)$. $f' = 2e^{2x} + e^{x} - 1$
2. Vérifier que pour tout x réel :

$$f'(x)=2(e^{x}+1)\left(e^{x}-\frac{1}{2}\right) \quad .$$

3. Établir le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$\ln 1/2$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

4. Déduire l'équation de la tangente T à la courbe C en son point d'abscisse 0. $T: \; y = 2x$
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;3]$.

69,933

EXERCICE 2 4 points/20

On considère l'équation différentielle *(E)* :

$$y'+2y=-5e^{-2x}$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x , et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle *(E₀)* : $y'+2y=0$. $y_H = Ke^{-2x}$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=-5xe^{-2x} \quad .$$

Démontrer que la fonction g est une solution de l'équation *(E)*. $g' + 2g = -5e^{-2x}$

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle *(E)*. $y_E = y_H + g$
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle *(E)* vérifiant la condition initiale $f(0)=1$.

$f(x) = e^{-2x} - 5xe^{-2x}$

Classe : TOP 2
Date : Décembre 2019

EXERCICE 3 5 points/20

Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit. Elle étudie la demande pour ce nouveau produit, afin d'essayer de déterminer le prix de vente qui lui permettra d'obtenir la plus grande recette.

Dans les questions 2. et 3., on utilisera les fonctions de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas demandé.

Dans le tableau suivant figure une partie des résultats d'une enquête réalisée pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels de ce nouveau produit en fonction de son prix de vente.

Prix de vente x_i (en €)	200	250	300	350	450	500
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	632	475	305	275	266	234

1. On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points. On effectue le changement de variable $z_i=ln(y_i)$ où ln désigne le logarithme népérien.

   Calculer les différentes valeur prises par la variable z ; on en donnera les valeurs z_i arrondies à 10^{-3} près. z_i | 6,449 | 6,163 | 5,720 | 5,617 | 5,583 | 5,455 |

2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation de la série statistique double (x_i,z_i). Le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine. $r = -0,897$

3. Donner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z=ax+b$ (a sera donné à 10^{-4} près par excès et b à 10^{-2} près par excès). $z = -0,003x + 6,86$

4. En déduire une estimation du nombre d'acheteurs potentiels y, en fonction de x, sous la forme $y=ke^{-\lambda x}$ où k et λ sont des constantes (k sera arrondi à l'entier près par excès). $y = e^{6,86} e^{-0,003x} = 954 e^{-0,003x}$

5. Utiliser cette estimation pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels, si le prix de vente est fixé à 400 €. $y = 287$

EXERCICE 4 6 points/20

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Une chaîne de magasins de bricolage commercialise deux types de ponceuses : des ponceuses « elliptiques » et des ponceuses « à bande ».

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Classe : TOP 2/TS2
Date : Décembre 2019

<u>*Partie A. Loi binomiale*</u>

On note *D* l'évènement : « Une ponceuse elliptique prélevée au hasard dans un stock important de la chaîne est défectueuse ». On suppose que $P(D)=0{,}08$.

On prélève au hasard 25 ponceuses elliptiques dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 ponceuses.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de ponceuses défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. épreuves élémentaires indépendantes.
   soit succès $p=0{,}08$, soit échec $q=1-p=0{,}92 \Rightarrow \mathcal{B}(25;0{,}08)$
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement quatre ponceuses défectueuses. $P(X=4)=0{,}09$
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins une ponceuse défectueuse. $P(X \geqslant 1)=1-P(X=0)=0{,}88$

<u>*Partie B. Probabilités conditionnelles*</u>

Les ponceuses à bande proviennent de deux fabricants, notés « fabricant 1 » et « fabricant 2 ».

50 % des ponceuses provenant du fabricant 1 nécessitent un réglage et 37 % des ponceuses provenant du fabricant 2 nécessitent un réglage.

On prélève au hasard une ponceuse dans un stock important contenant 60 % des ponceuses provenant du fabricant 1 et le reste du fabricant 2.

On définit les évènements suivants :

A : « La ponceuse provient du fabricant 1 » ;

B : « La ponceuse provient du fabricant 2 » ;

E : « La ponceuse nécessite un réglage » .

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(A)$; $P(B)$; $P_A(E)$ et $P_B(E)$. $P(A)=0{,}6$ $P(B)=0{,}4$ $P_A(E)=0{,}5$ $P_B(E)=0{,}37$
2. Calculer $P(A\cap E)$ et $P(B\cap E)$. En déduire $P(E)$. $P(A\cap E)=0{,}3$ $P(B\cap E)=0{,}148 \simeq 0{,}15$
   $P(E)=0{,}45$
3. Calculer la probabilité que la ponceuse provienne du fabricant 1 sachant qu'elle nécessite un réglage. $P_E(A)=0{,}67$

Correction BTS Blanc Maths TS2/TOP2 Déc 2019

Exercice 1 :

1. $f'(x) = 2e^{2x} + e^x - 1$

2. $f'(x) = 2(e^x+1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right) =$

$$= 2\left(e^{2x} - \frac{1}{2}e^x + e^x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2e^{2x} - e^x + 2e^x - 1 = 2e^{2x} + e^x - 1$$

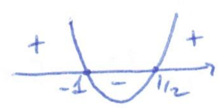
3. $2e^{2x} + e^x - 1 > 0$

Changement de variable $X = e^x$

$\Rightarrow \quad 2X^2 + X - 1 > 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$

$X_1 = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \qquad X_2 = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$



$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$e^x = -1$ impossible $\qquad e^x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \ln\frac{1}{2}$

(e^x toujours positif)

x	$-\infty$	$\ln\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

4. $T : \quad y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = 2 \qquad f(0) = 0$

$\Rightarrow T : \quad y = 2x$

5. $\frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)\,dx$

$$\int f(x)\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + e^{x} - \frac{x^2}{2} - 2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left[\frac{e^{2x}}{2} + e^{x} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{e^6}{2} + e^3 - \frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{e^6}{2} + e^3 - \frac{9}{2} - 6 - \frac{1}{2} - 1\right] \approx 69,933$$

Exercice 2 :

1. $y_H = Ke^{-2x}$

2. $g' + 2g = -5e^{-2x}$

$$g' = -5e^{-2x} - 5x(-2e^{-2x}) = -5e^{-2x} + 10xe^{-2x}$$

$$\Rightarrow -5e^{-2x} + \cancel{10xe^{-2x}} - \cancel{10xe^{-2x}} = -5e^{-2x}$$

$$-5e^{-2x} = -5e^{-2x}$$ Vrai

3. $y_E = Ke^{-2x} - 5xe^{-2x}$

4. $K = 1 \Rightarrow f(x) = e^{-2x} - 5xe^{-2x}$

Exercice 3 :

1.

x_i	200	250	300	350	450	500
z_i	6,449	6,163	5,720	5,617	5,583	5,455

2. $r = -0,897$

3. $z = -0,003x + 6,86$

4. $\ln y = -0,003x + 6,86$

$y = e^{-0,003x+6,86} = e^{6,86}\, e^{-0,003x}$

$\Rightarrow \quad y = 954\, e^{-0,003x}$

5. $x = 400 \Rightarrow y = 287$

Exercice 4 :

Partie A

1. Chaque prélèvement est constitué de 25 épreuves élémentaires indépendantes.
Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
- soit le succés $\rightarrow p = 0,08$
- soit l'échec $\rightarrow q = 1-p = 0,92$

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,08$.

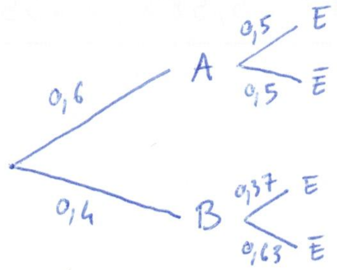
2. $P(X=4) = 0,09$

3. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0,88$

Partie B

1. $P(A) = 0,6 \qquad P(B) = 0,4 \qquad P_A(E) = 0,5 \qquad P_B(E) = 0,37$

2.



$P(A \cap E) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$

$P(B \cap E) = 0,4 \times 0,37 = 0,148 \simeq 0,15$

$P(E) = 0,3 + 0,15 = 0,45$

3. $P_E(A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(E)} = \dfrac{0,3}{0,45} = 0,67$