Variable aléatoire continue

Définition

Soit Ω un univers.
On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** si l'ensemble des valeurs de X est un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple :
Le jeu consiste à trouver un nombre compris entre 1 et 10.

1) On considère la variable aléatoire discrète X égale à un nombre **entier** compris entre 1 et 10.
   Soit x_0 le nombre choisi. La probabilité de trouver x_0 est $P(X=x_0)=\frac{1}{10}$.
2) On considère la variable aléatoire X égale à un **réel** compris entre 1 et 10.
   L'ensemble de valeurs de X est un intervalle de $\mathbb{R}$: **ensemble infini non dénombrable**.
   Soit x_0 le nombre choisi. La probabilité de trouver x_0 est $P(X=x_0)=0$.
   On ne peut pas dans ce cas définir de loi de probabilité de X avec de nombres $P(X=x_i)$.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Définition

On appelle **fonction de répartition de la variable aléatoire** X l'application F définie par :

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$$
$$x \mapsto F(x) = P(X \leqslant x).$$

Propriétés

Soit x et y deux réels sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- $P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F(x)$.
- $P(x < X \leqslant y) = P(X \leqslant y) - P(X \leqslant x) = F(y) - F(x)$.
- La fonction F est croissante.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
- La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

Densité de probabilité

Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** si :

- pour tout réel x : $f(x) \geqslant 0$;
- f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire continue et F la fonction de répartition de X.

- **La dérivée de F sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité de X notée f.**
- La fonction F est la primitive de f suivante :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

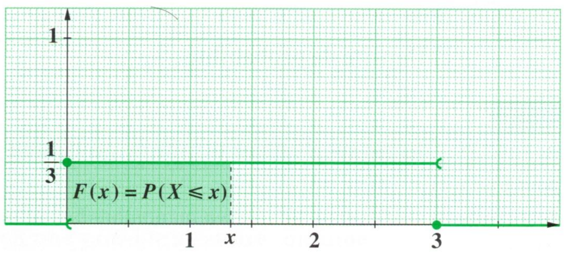
Exemple :
Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{3} & \text{si } x \in [0,\, 3[\\ f(x) = 0 & \text{si } x \geqslant 3. \end{cases}$$

1) La fonction *f* est-elle une densité de probabilité ?

f est bien une densité de probabilité car elle vérifie tous les critères de la définition :
a) Pour tout réel x : $f(x) \geqslant 0$.
b) *f* est continue sauf en 0 et en 3.
c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{1}{3}\,dx = \left[\frac{1}{3}x\right]_0^3 = 1$.

2) Représentons la fonction de répartition $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.



Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire continue

Définition

L'**espérance mathématique d'une variable aléatoire continue** X est le nombre réel, noté $\mathrm{E}(X)$, défini par :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On suppose que l'intégrale existe.

Définition

On appelle **variance de** X le nombre réel positif, noté $\mathrm{V}(X)$, défini par :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - [\mathrm{E}(X)]^2.$$

L'**écart type de** X, noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}.$$