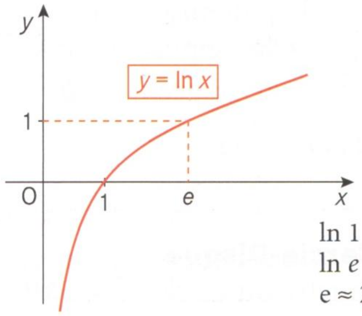
Fonctions logarithme népérien, exponentielle, puissances

1 Fonction logarithme népérien

● Définition. Courbe représentative

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$. Pour tout $x > 0$, si $f(x) = \ln x$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\Vert$		$+$		
$f(x) = \ln x$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$
$e \approx 2{,}71\,828$

● Propriétés

Pour tout $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln a\,b = \ln a + \ln b\,;\ \ln a^n = n \ln a \ (n \text{ entier relatif})$$

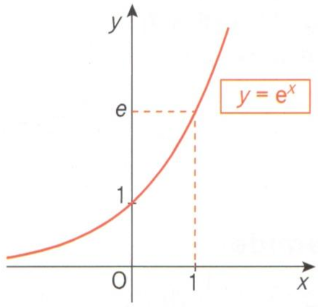
$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b\,;\ \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

2 Fonction exponentielle

● Définition. Courbe représentative

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel, si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x) = e^x$				$+$			
$f(x) = e^x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$



● Propriétés

Pour a et b réels quelconques : $e^{a+b} = e^a \times e^b\,;\ e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}\,;\ (e^a)^n = e^{na}$ (n entier relatif)

Pour $b > 0$: $e^a = b$ équivaut à $a = \ln b$.

3 Fonctions puissances

Pour α réel, la fonction puissance d'exposant α est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}}$$

Pour tout $x > 0$, **si $f(x) = x^\alpha$ alors $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$.**

Les résultats dits de « croissances comparées à l'infini des fonctions logarithme, exponentielle et puissance sont donnés dans **L'essentiel** du chapitre 1.

Comment résoudre une équation ou une inéquation où figure la fonction logarithme ou la fonction exponentielle ?

On utilise :

– les résultats concernant « Équations et Inéquations » rappelés dans le Mémento page 302 ;

– les règles de calcul relatives à la fonction logarithme et à la fonction exponentielle rappelées dans le Mémento page 303 ;

– les propriétés du tableau suivant :

• l'équation $\ln x = a$ a pour solution : $x = e^a$.	• l'équation $e^x = a$, avec $a > 0$, a pour solution : $x = \ln a$.
• $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$.	• $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.
• $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.	• $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Exemple 1. Résoudre l'équation $e^{-0,5x+1} - 2 = 0$.

L'équation s'écrit : $e^{-0,5x+1} = 2$.

En prenant le logarithme népérien de chaque membre, on obtient : $-0,5x + 1 = \ln 2$,

d'où, successivement : $-0,5x = \ln 2 - 1$; $x = \dfrac{\ln 2 - 1}{-0,5} = 2(1 - \ln 2)$.

L'équation proposée admet une solution : $\boldsymbol{x = 2(1 - \ln 2)}$; $\boldsymbol{x \approx 0,61}$.

Exemple 2. Résoudre l'inéquation $2 \ln (x + 4) > \ln (2 - x)$

On doit avoir $x + 4 > 0$ et $2 - x > 0$ soit $\boldsymbol{-4 < x < 2}$.

On écrit : $\ln (x + 4)^2 > \ln (2 - x)$ d'où $(x + 4)^2 > 2 - x$

c'est-à-dire : $x^2 + 8x + 16 > 2 - x$ d'où $x^2 + 9x + 14 > 0$.

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + 9x + 14 = 0$ a pour solutions : $x_1 = -7$; $x_2 = -2$.

Dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 9x + 14 > 0$ pour x tel que $x < -7$ ou $x > -2$.

On doit avoir $-4 < x < 2$, donc l'inéquation proposée a pour solutions ***les réels x tels que*** $\boldsymbol{-2 < x < 2}$.

Exemple 3. Résoudre l'équation $e^x - 10 = -3e^{2x}$.

L'équation s'écrit : $3e^{2x} + e^x - 10 = 0$ soit $3(e^x)^2 + e^x - 10 = 0$.

En posant $X = e^x$, on obtient l'équation du second degré $3X^2 + X - 10 = 0$.

Cette équation a pour solutions dans $\mathbb{R}$: $X_1 = -2$ et $X_2 = \dfrac{5}{3}$.

Il faut alors résoudre les équations d'inconnue x : $e^x = -2$; $e^x = \dfrac{5}{3}$.

– L'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution, car $e^x > 0$.

– L'équation $e^x = \dfrac{5}{3}$ a pour solution : $x = \ln \dfrac{5}{3}$.

Donc l'équation proposée a une seule solution : $\boldsymbol{x = \ln \dfrac{5}{3}}$; $\boldsymbol{x \approx 0,51}$.

Calculs ; équations et inéquations avec logarithmes ou exponentielles

Fiche méthode 1

1 Simplifier les expressions suivantes :

$\ln 3 + \ln \frac{1}{3}$; $\ln e^3 - \ln e$; $e^{-\ln 2}$.

2 **R** Simplifier les expressions suivantes :

$\ln \sqrt{e^5}$; $e^{\ln 5 - \ln 3}$; $\ln e^3 - e^{\ln 3}$.

Pour chacun des exercices 3 à 7*, résoudre les équations proposées.*

3 **R** $\ln x + 2 = 0$; $\ln(x+1) - 3 = 0$.

4 **C** $\ln(x+2) = \ln(2x+1)$; $2\ln x + \ln 3 = 0$.

5 $\ln x^2 = \ln 2 + \ln(x+1)$.

6 **R** $e^{2x} - 3 = 0$; $e^{2x} = e^{x+1}$.

7 **C** $e^{4x} - 2e^{3x} = 0$; $e^{0,2x} = 2e^{-0,2x}$.

8 **a)** Résoudre l'équation d'inconnue X :

$$X^2 - 2X - 3 = 0.$$

b) En déduire les solutions de l'équation d'inconnue x :

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0.$$

On posera $X = e^x$.

9 **a)** Résoudre l'équation d'inconnue X :

$$X^2 - 2X + 2 = 0.$$

b) En déduire les solutions de l'équation d'inconnue x :

$$e^{2x} - 2e^x + 2 = 0.$$

On posera $X = e^x$.

Pour chacun des exercices 10 à 15*, résoudre les inéquations proposées.*

10 **C** $\ln(x+1) < 0$; $\ln(2-x) > \ln 3$.

11 $\ln \frac{x+1}{x-1} > 0$.

12 **C** $3 - 2e^{0,5x} > 0$.

13 $e^x(e^x - 2) > 0$.

14 $e^{2x} - 4e^x < 0$.

15 **R** $1 - e^{0,5x-1} < 0$.

16 **C** Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $(e^x+1)(e^x-3)$.

Correction :

2 $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{3}$; **0**.

3 • Solution : $\boldsymbol{x = e^{-2}}$.

• Solution : $\boldsymbol{x = -1 + e^3}$.

4 • On doit avoir $x > -2$ et $x > -\frac{1}{2}$

soit $x > -\frac{1}{2}$.

On obtient : $x + 2 = 2x + 1$.
D'où la solution : $\boldsymbol{x = 1}$.

• On doit avoir $x > 0$.

On obtient : $2\ln x = -\ln 3$; $\ln x = -\frac{1}{2}\ln 3 = \ln \frac{1}{\sqrt{3}}$.

D'où la solution : $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$.

6 • $\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln 3}$.

• **1.**

7 • On écrit successivement :

$$e^{4x} = 2e^{3x} ;\ \frac{e^{4x}}{e^{3x}} = 2 ;\ e^x = 2.$$

D'où la solution : $\boldsymbol{x = \ln 2}$.
• On écrit successivement :

$$\frac{e^{0,2x}}{e^{-0,2x}} = 2 ;\ e^{0,4x} = 2 ;\ 0,4x = \ln 2.$$

D'où la solution : $x = \boldsymbol{\frac{1}{0,4}\ln 2}$.

10 • On doit avoir $x > -1$.
On obtient : $x + 1 < 1$ soit $x < 0$
Ensemble des solutions : **]– 1 ; 0[**.

• On doit avoir $x < 2$.
On obtient : $2 - x > 3$ soit $x < -1$.
Ensemble des solutions : **]– ∞ ; – 1[**.

12 On obtient : $3 > 2e^{0,5x}$ soit $e^{0,5x} < \frac{3}{2}$.

D'où $0,5x < \ln\frac{3}{2}$; $\boldsymbol{x < 2\ln\frac{3}{2}}$.

15 $\boldsymbol{x > 2}$.

16 Puisque $e^x + 1 > 0$, le signe de $(e^x+1)(e^x-3)$ est celui de $e^x - 3$ d'où les résultats suivants :

– si $x < \ln 3$, alors $(e^x+1)(e^x-3) < 0$;
– si $x > \ln 3$, alors $(e^x+1)(e^x-3) > 0$.