

Limites d'une fonction

Notion de limite d'une fonction

Partons d'un exemple très simple, on va introduire la fonction $f(x) = \frac{x}{(x-5)^2}$.

Par exemple :

- l'image de 3 par f est $f(3) = \frac{3}{(3-5)^2} = 0,75$,
- l'image de 10 par f est $f(10) = \frac{10}{(10-5)^2} = 0,4$,
- ... et l'image de 5 ?

On ne peut pas calculer l'image de 5 par f car c'est une valeur interdite !

Cependant, il est possible de calculer les images de valeurs assez proches de 5.

Par exemple :

- l'image de 4,9 par f est $f(4,9) = 490$,
- l'image de 4,999 par f est $f(4,999) = 4999000$,
- l'image de 4,9999 par f est $f(4,9999) = 499990000$.

La question est de savoir quel est le comportement de la fonction f lorsque x se rapproche de plus en plus de 5. On dira que x tend vers 5. On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty.$$

Donc, on est amené à faire des calculs de limites dans le cas où la fonction n'est pas définie.

Par ailleurs, on peut être amené à faire des calculs de limites lorsque x tend vers l'un des deux infinis, par exemple :

- l'image de 100 par f est $f(100) = 0,011080332$,
- l'image de 10000 par f est $f(10000) = 0,0001001$,
- ... et l'image de $+\infty$?

Je ne peux pas calculer l'image de l'infini car il n'est pas un nombre.

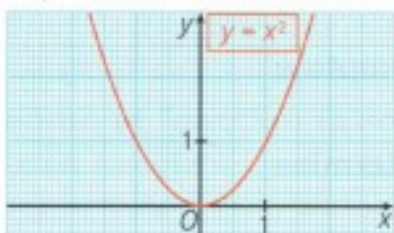
La question est de savoir quel est le comportement de la fonction f lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes. On dira que x tend vers $+\infty$. On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Limites de fonctions usuelles

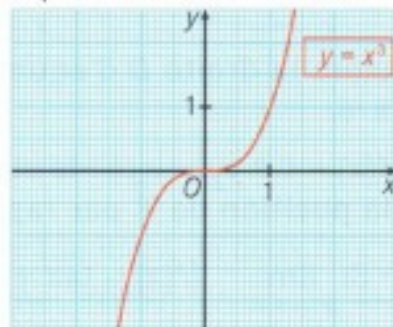
Fonction carré : $f(x) = x^2$

- f est définie sur \mathbb{R} .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$.
- Courbe représentative :



Fonction cube : $f(x) = x^3$

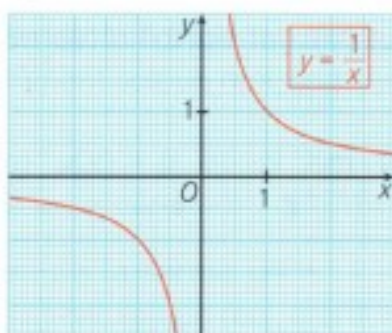
- f est définie sur \mathbb{R} .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$.
- Courbe représentative :



Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$

- f est définie sur chacun des intervalles $] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$.

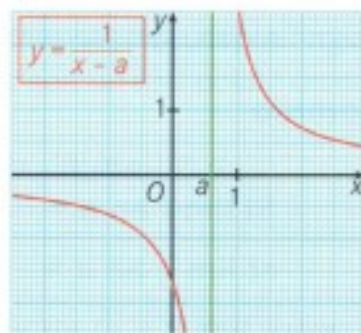
- Courbe représentative :



Fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-a}$: a réel

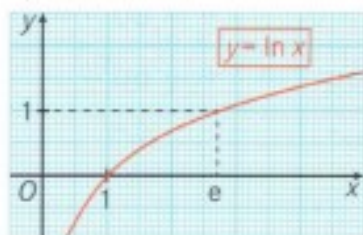
- f est définie sur chacun des intervalles $] -\infty ; a[$ et $] a ; +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x-a} \right) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-a} \right) = 0$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \left(\frac{1}{x-a} \right) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \left(\frac{1}{x-a} \right) = +\infty$.

- Courbe représentative :



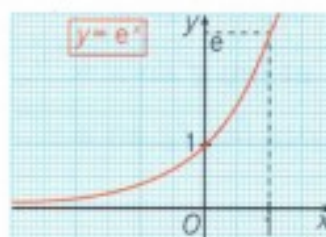
Fonction logarithme népérien : $f(x) = \ln(x)$

- f est définie sur \mathbb{R}^+ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Courbe représentative :



Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$

- f est définie sur \mathbb{R} .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty$.
- Courbe représentative :



Opérations sur les limites

- Somme : $\lim (f+g) = \lim f + \lim g$.
- Produit : $\lim (fg) = (\lim f)(\lim g)$.
- Quotient : $\lim \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\lim f}{\lim g}$.

Attention ! Il y a des cas dans lesquels on ne peut pas conclure directement :

- Somme : $\lim f = +\infty$ et $\lim g = -\infty$ alors $\lim (f+g) = +\infty - \infty = ?$.
- Produit : $\lim f = 0$ et $\lim g = \pm\infty$ alors $\lim (fg) = (0)(\pm\infty) = ?$.
- Quotient : 1. $\lim f = 0$ et $\lim g = 0$ alors $\lim \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{0}{0} = ?$,
2. $\lim f = \pm\infty$ et $\lim g = \pm\infty$ alors $\lim \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$.

Polynôme et fonction rationnelle

La limite en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty .$$

La limite en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) est celle du quotient de ses termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x-5)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 10x + 25} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

Comparaison des fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissance

Pour $\alpha > 0$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha \ln x = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x^\alpha} = -\infty$.

Comment calculer une limite ?

Exemple 1 : Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=x+2+3e^x$.

On pose : $f(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=x+2$ et $v(x)=3e^x$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (limite d'une somme).

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = 0$.

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (limite d'une somme).

Exemple 2 : Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

On pose : $u(x)=x^2+x+1$ et $v(x)=x-1$.

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} u(x) = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} v(x) = 0$.

Attention ! $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0$, il faut donc utiliser la règle des signes en faisant le quotient.

On en déduit : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \frac{3}{0} = +\infty$.

Exemple 3 : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x)$.

On pose : $f(x)=u(x)-v(x)$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=\ln x$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty = ?$.

On ne peut pas conclure directement.

Pour conclure on met x^2 en facteur :

$$x^2 - \ln x = x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2} \right) ; \text{ on sait que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 ,$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2} \right) = (+\infty)(1+0) = (+\infty)(1) = +\infty$ (limite d'un produit).

Exercices

Ex 1 : Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$

2. $f(x) = -\frac{4}{3}x^4 - 3x^2 + \frac{1}{3}$; $f(x) = 6x^3 - 4x$

3. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$; $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$; $f(x) = \frac{2x^2-1}{4x^2+5}$

Ex 2 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + \frac{2}{x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \ln x)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + e^x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-2x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 e^x$; $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3 \ln x$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \ln(x-2)$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{x+1}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x})$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}}$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{\ln x}{x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{x^2} \right)$

Ex 3 : f est définie sur $]2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{5}{x-2}$.

1. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2)$.

2. Préciser le signe de $(x-2)$ sur $]2; +\infty[$.

3. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$.

Ex 4 : f est définie sur l'intervalle $I =]-\infty; -1[$ par : $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Préciser le signe de $(x+1)$ sur I .
3. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$.

Ex 5 : f est définie sur $]3; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x)$.

Ex 6 : Déterminer les limites en 1 et en -1 de $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ définie sur $] -1; 1[$.

Cas d'indétermination

Ex 7 : Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

Indication : mettre $(x-1)$ en facteur au numérateur et au dénominateur.

Ex 8 : Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$.

Indication : mettre $(x-2)$ en facteur au numérateur et au dénominateur.

Ex 9 : f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x-1}{2e^x+1}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Indication : mettre e^x en facteur au numérateur et au dénominateur.

Ex 10 : f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^x - x$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Indication : mettre e^x en facteur.

Ex 11 : Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$.

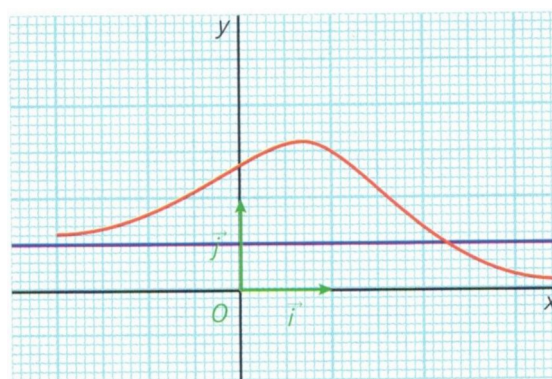
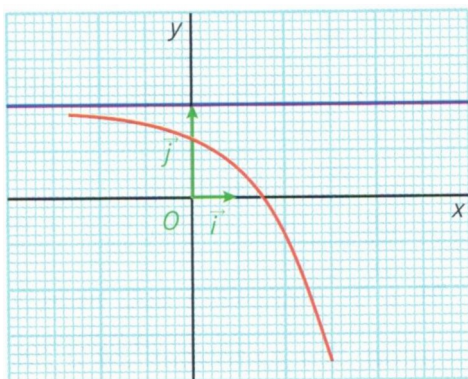
Indication : écrire $x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$.

Ex 12 : Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^2 + 1}$.

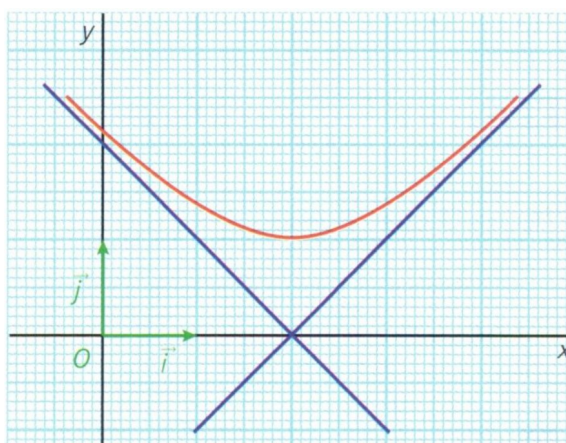
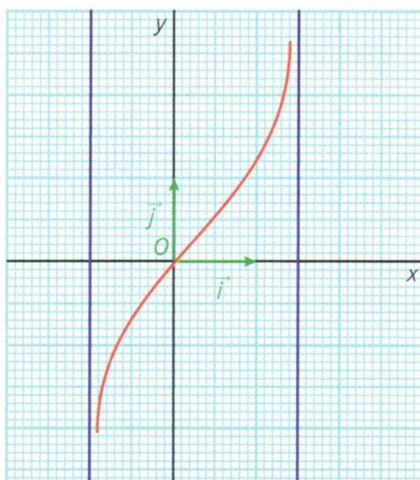
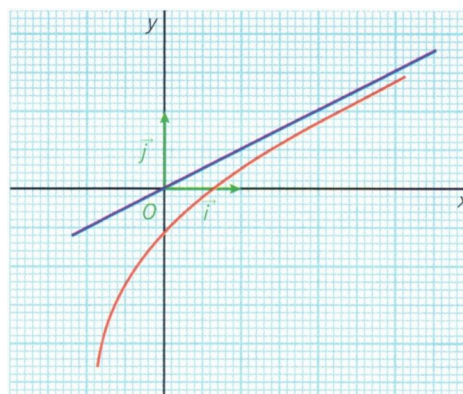
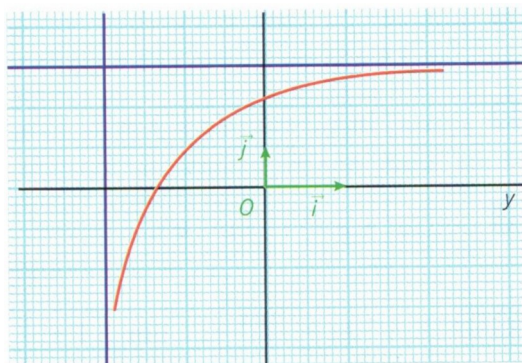
Indication : mettre e^x en facteur au numérateur et x^2 en facteur au dénominateur.

Lecture graphique

Ex 13 : Donner par lecture graphique la limite en $+\infty$ et en $-\infty$.



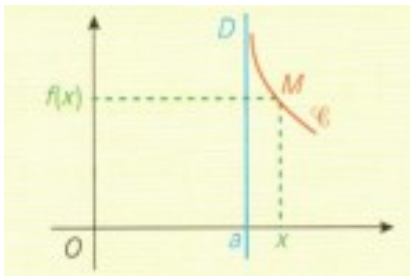
Ex 14 : Donner pour chaque fonction les équations des asymptotes à la courbe représentative.



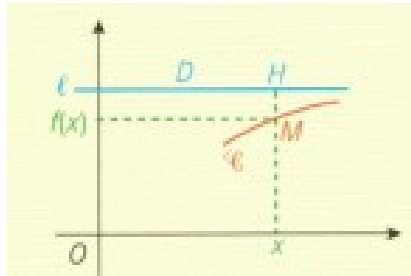
Asymptote à une courbe représentative

Définition

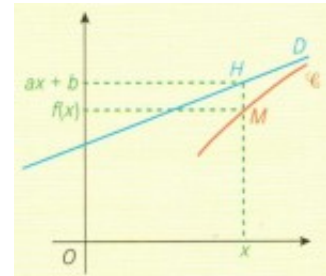
Une asymptote à une courbe est une droite telle que, lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, la distance de la courbe à la droite tend vers 0.



Asymptote verticale



Asymptote horizontale

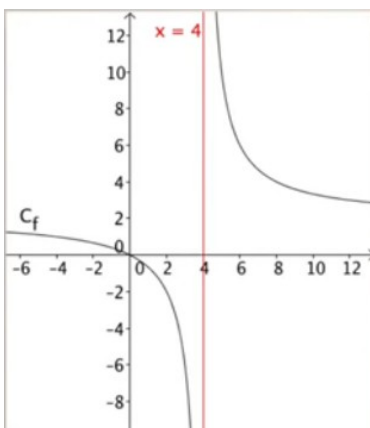


Asymptote oblique

Démontrer qu'une droite est asymptote verticale

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ par $f(x) = \frac{2x}{x-4}$. Démontrer que la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f .

Méthode graphique :



- La courbe se rapproche de plus en plus de la droite lorsque l'ordonnée tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
- 1^{er} cas : $x > 4$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f(x) = +\infty$.
- 2^{ème} cas : $x < 4$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f(x) = -\infty$.
- On peut conclure que la droite $x=4$ est bien asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f .

Par le calcul :

On pose : $u(x) = 2x$ et $v(x) = x-4$. Donc $\lim_{x \rightarrow 4} u(x) = 8$ et $\lim_{x \rightarrow 4} v(x) = 0$.

- 1^{er} cas : $x > 4 \Leftrightarrow x-4 > 0$. On en déduit : $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{2x}{x-4} = \frac{8}{0} = +\infty$.
- 2^{ème} cas : $x < 4 \Leftrightarrow x-4 < 0$. On en déduit : $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{2x}{x-4} = \frac{8}{0} = -\infty$.

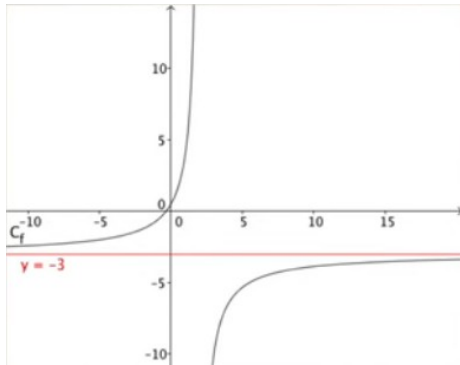
On peut conclure que la droite $x=4$ est bien asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f .

En général : La droite d'équation $x=A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$.

Démontrer qu'une droite est asymptote horizontale

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{3x+1}{2-x}$. Démontrer que la droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

Méthode graphique :



- La courbe se rapproche de plus en plus de la droite lorsque l'abscisse tend vers $+\infty$.
- On observe : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$.
- On peut conclure que la droite $y = -3$ est bien asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

Par le calcul :

On calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{-x} = -3$.

On peut conclure que la droite $y = -3$ est bien asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

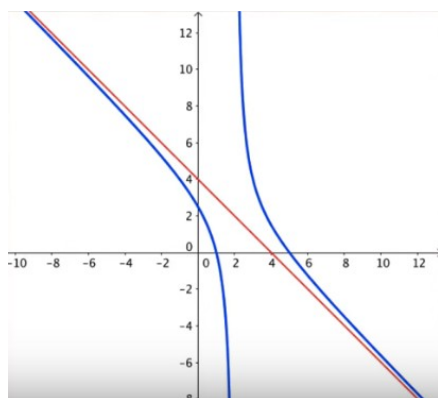
En général :

- La droite d'équation $y = A$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.
- La droite d'équation $y = A$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Démontrer qu'une droite est asymptote oblique

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{-x^2+6x-5}{x-2}$. Démontrer que la droite D d'équation $y = -x + 4$ est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

Méthode graphique :



- La courbe se rapproche de plus en plus de la droite lorsque l'abscisse tend vers $+\infty$.
- On observe que la distance de la courbe à la droite tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. On exprime analytiquement cette condition sous la forme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f - D) = 0$$

- Le signe de $f - D$ détermine la position de f par rapport à D . f est au-dessus de D pour $x \rightarrow +\infty$.

Par le calcul :

- On calcule la distance de la courbe à la droite:

$$f(x) - (-x+4) = \frac{-x^2+6x-5}{x-2} + x-4 = \frac{-x^2+6x-5+(x-4)(x-2)}{x-2} = \frac{3}{x-2} .$$

- On calcule la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-2} = 0 .$$

On peut conclure que la droite $y = -x+4$ est bien asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

- On étudie le signe :

$$\frac{3}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2 .$$

On peut conclure que la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de la droite d'équation $y = -x+4$ en $+\infty$.

En général :

- La droite d'équation $y = ax+b$ est **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.
- La droite d'équation $y = ax+b$ est **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.
- Le signe de $f(x) - (ax+b)$ détermine la position de la courbe par rapport à la droite.

Exercices

Pour chacun des exercices suivants, on note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

Dans chaque cas, on illustrera par un graphique la situation rencontrée.

Ex 1 : f est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 - \frac{1}{x} .$$

- Étudier $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à C .
- Montrer que la droite D d'équation $y = x-2$ est asymptote à C .
- Étudier la position de C par rapport à D .

Ex 2 : f est définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} .$$

- Étudier $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à C .

2. Vérifier que, pour $x > 1$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

En déduire que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à C .

3. Étudier la position de C par rapport à D .

Ex 3 : f est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2 \frac{\ln x}{x}.$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à C .
2. Prouver que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à C .
3. Étudier la position de C par rapport à D .

Ex 4 : f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + e^{2x}$.

1. Étudier $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à C .
3. Étudier la position de C par rapport à D .

Ex 5 : f est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2 + x e^{-2x}.$$

1. Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Prouver que la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à C .

Indication : écrire $x e^{-2x} = \frac{x}{e^{2x}}$.

3. Étudier la position de C par rapport à D .