Les inéquations du 1^er^ degré

Par exemple, 2x-8<10 est une inéquation : il faut trouver **tous les nombres** x pour lesquels 2x-8 est plus petit que 10. 1 et 7 sont des exemples de solutions, mais il y en a beaucoup d'autres.

Méthode

Une inéquation se résout comme une équation, mais à la dernière étape, **si le nombre devant x est négatif** (et que l'on doit donc diviser par un nombre négatif) **il faut changer le sens de l'inégalité** : < devient >, et > devient <. En effet, on a par exemple 20 qui est plus petit que 30, donc 20<30, mais si on divise 20 et 30 par le nombre négatif -10, on obtient -2 et -3, et -2>-3. On observe un changement dans le sens de l'inégalité.

<u>Exemple</u>

Résolution de l'inéquation $3x-6 \leq 6x-12$.

	$3x-6 \leq 6x-12$	
1.	$3x-6x \leq -12+6$	On passe les "x" à gauche et les nombres à droite.
2.	$-3x \leq -6 \quad \Rightarrow$	On réduit les expressions obtenues.
3.	$x \geq (-6) \div (-3)$	On divise par le nombre qui est devant "x".
4.	$x \geq 2$	On obtient les solutions.

On écrit l'ensemble des solutions : $\boxed{S = [2;+\infty[}$

Exercice 1
Comment peut-on écrire l'ensemble des nombres x tels que x≤2?

Exercice 2
Quelles sont les solutions de l'inéquation 5x+15<25?

Exercice 3
Quelles sont les solutions de l'inéquation 2x+6<4x-2?

Exercice 4
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}>\frac{1}{2}x-1$?

Exercice 5
Quelles sont les solutions de l'inéquation 2(6-3x)>-1-x?

Exercice 6
Quelles sont les solutions de l'inéquation (x-2)(x+5)<(x-3)(x-2)?

Exercice 7
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(x+5)^2-(x-2)(x+2)>1$?

Exercice 8
Résous l'inéquation $(5-5x)^2>(1+5x)^2$ puis écris les solutions sous la forme $x<\frac{a}{b}$, avec $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible. Combien trouves-tu pour a et b ?

Inéquations et tableaux de signes

Résolution de l'inéquation (2x-2)(4x+16)>0.

Méthode

- **1. On étudie le signe** de 2x-2 en fonction de x et celui de 4x+16 en fonction de x.
  Pour cela, on cherche les valeurs de x pour lesquelles ces expressions sont positives.

$2x-2>0$	$4x+16>0$
$2x>2$	$4x>-16$
$x>1$	$x>-4$

  Donc 2x-2>0 lorsque x>1 et 4x+16>0 lorsque x>-4.

- **2. On dessine** un tableau comme ci-dessous en faisant apparaître les valeurs pour lesquelles les expressions 2x-2 et 4x+16 sont égales à zéro (-4 et 1).

valeurs de x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
signe de 2 x - 2							
signe de 4 x + 16							
signe de (2x-2)(4x+16)							

- **3. On complète les premières lignes** en inscrivant des "-" si l'expression est négative pour les valeurs de x qui figurent au-dessus, des "+" le cas échéant, et un zéro sur la barre verticale correspondant à la valeur qui annule l'expression.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
signe de 2 x - 2		−		−	0	+	
signe de 4 x + 16		−	0	+		+	
signe de (2x-2)(4x+16)							

- **4. On remplit la dernière ligne** en effectuant sur chaque colonne le produit des signes des deux expressions en respectant les règles des signes pour un produit.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
signe de 2 x - 2		−		−	0	+	
signe de 4 x + 16		−	0	+		+	
signe de (2x-2)(4x+16)		+	0	−	0	+	

- **5. On lit les solutions** en regardant la première et la dernière ligne du tableau.
  On cherchait les solutions de (2x-2)(4x+16)>0.
  (2x-2)(4x+16)>0 (+) lorsque x est strictement plus petit que -4 et lorsque x est strictement plus grand que 1.
  Les solutions sont donc : $\boxed{S =]-\infty;-4[\cup]1;+\infty[}$

Le cas des quotient

On utilise la même méthode que pour les produits, mais à l'étape 4, on place une double barre sur la dernière ligne pour les valeurs de x pour lesquelles il y a une division par zéro. Comme une division par zéro est impossible, il faudra retirer ces valeurs de l'ensemble des solutions.

Exemple :

$\frac{3x-9}{x+5} \leq 0$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
signe de 3 x - 9		$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de x + 5		$-$	0	$+$	|	$+$	
signe du quotient		$+$	||	$-$	0	$+$	

$\boxed{S =]-5;3]}$

Et avec encore plus de lignes !

Dernier exemple avec la résolution de l'inéquation $\frac{(-2x-2)(2x-10)}{-9x-81} \geq 0$

On utilise toujours la même méthode.

$-2x-2>0$	$2x-10>0$	$-9x-81>0$
$-2x>2$	$2x>10$	$-9x>81$
$\frac{-2x}{-2}<\frac{2}{-2}$	$\frac{2x}{2}>\frac{10}{2}$	$\frac{-9x}{-9}<\frac{81}{-9}$
$x<-1$	$x>5$	$x<-9$

x	$-\infty$		-9		-1		5		$+\infty$
- 2 x - 2		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
2 x - 10		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
- 9 x - 81		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$\frac{(-2x-2)(2x-10)}{-9x-81}$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{S =]-9;-1] \cup [5;+\infty[}$

Exercice 1
Quelles sont les solutions de l'inéquation (x-2)(x+4)≥0?
Exercice 2
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(x+4)(5-x)(-x+6) \geq 0$?
Exercice 3
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} > 2$?
Exercice 4
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{(x-1)(x-5)}{16-8x} \geq 0$?
Exercice 5
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{x^2-7}{x} \geq 0$?
Exercice 6
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(x-7)(x+1)+(x-7)(x-1) \geq 0$?
Exercice 7
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(x+2)^2-(x+2)(2x+9) \geq 0$?
Exercice 8
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2+x} \geq 0$?
Exercice 9
Quelles sont les solutions de l'inéquation $(3x-2)^2+2(3x-2) \leq x^2$?
Exercice 10
Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{x^2+4x+4}{x^2-9} \leq 0$?