Loi normale

Définition

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
La loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X est la **loi normale ou loi de Laplace-Gauss** de paramètres m et σ, notée $\mathcal{N}(m, \sigma)$, si la densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

Graphique de la fonction f pour $m=2$ et $\sigma=2$

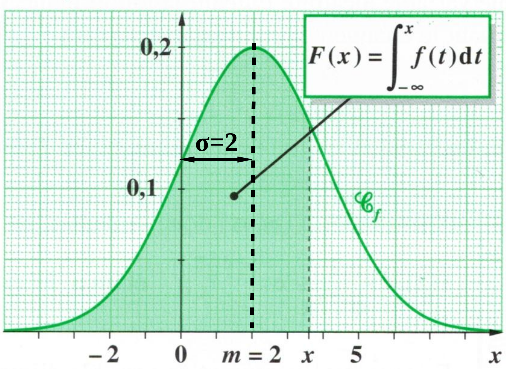
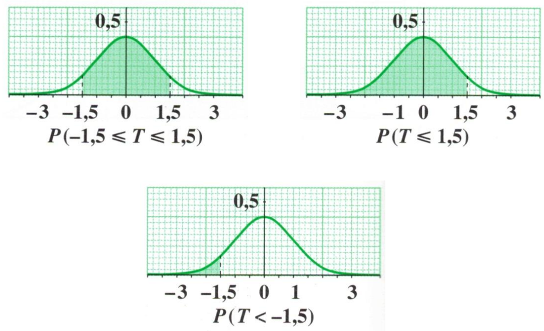


Illustration de probabilités



Les valeurs caractéristiques de la loi normale *N(m,σ)* : $E(X)=m \quad V(X)=\sigma^2 \quad \sigma(X)=\sigma$.
Si les paramètres sont m=0 et σ=1, alors ça s'appelle **loi normale centrée réduite**.

Calculer des probabilités dans le cadre de la loi normale avec une calculatrice

Exemple : X est une variable aléatoire qui suit la loi normale *N(1,5 ; 0,01)*.
1) Calculer les probabilités suivantes : a) $P(1{,}47 \leqslant X \leqslant 1{,}53)$ b) $P(X \leqslant 1{,}49)$ c) $P(X > 1{,}48)$.
2) Déterminer le réel *a* tel que $P(X < a) = 0{,}81$.

Avec la calculatrice casio Graph 35+

Pour obtenir le menu des distributions, dans MENU STAT [EXE], *on sélectionne* DIST *par* [F5].

***1. a)** Calcul de P(1,47 ⩽ X ⩽ 1,53)*

On sélectionne NORM *par* [F1], *puis* Ncd *par* [F2].

Sur la ligne DATA *on sélectionne* var *par* [F2].

Sur la deuxième ligne on tape 1.47 [EXE] 1.53 [EXE] 0.01 [EXE] 1.5 [EXE]

[EXE] *donne 0,9773…*

***b)** Calcul de P(X ⩽ 1,49)*

On sélectionne NORM *par* [F1], *puis* Ncd *par* [F2].

Sur la deuxième ligne on tape [(–)] [1] [×10ˣ] [9] [9] [EXE] 1.49 [EXE] 0.01 [EXE] 1.5 [EXE]

[EXE] *donne 0,15865525…*

***c)** Calcul de P(X > 1,48)*

On sélectionne NORM *par* [F1], *puis* Ncd *par* [F2].

Sur la deuxième ligne on tape 1.48 [EXE] [1] [×10ˣ] [9] [9] [EXE] 0.01 [EXE] 1.5 [EXE]

[EXE] *donne 0,977249…*

***2.** Dans* MENU *on sélectionne* STAT [EXE].

On sélectionne DIST *par* [F5].

On sélectionne NORM *par* [F1] *puis* InvN *par* [F3].

Sur la ligne DATA *on sélectionne* var *par* [F2].

Sur la ligne Tail *on sélectionne* LEFT *par* [F1].

Sur la ligne Area *on tape* 0.81 [EXE] 0.01 [EXE] 1.5 [EXE].

[EXE] *donne 1,5087…*

Avec la calculatrice TI 82 stats.fr ou 83 Plus

***1.** On tape* [2nde] [var] *pour distrib.*

***a)** On sélectionne* 2:normalFRép [entrer]

On complète normalFRép (1.47, 1.53, 1.5, 0.01) [entrer] *et on obtient 0,997 43…*

***b)** On sélectionne* 2:normalFRép [entrer]

On complète normalFRép ([(–)] [2nde] [,] *(pour EE)* [9] [9], 1.49, 1.5, 0.01)

[entrer] *donne 0,1586552…*

Remarque :

on tape [(–)] [2nde] [,] [9] [9] *pour donner* -10^{99} *comme borne inférieure à l'intervalle.*

***c)** On sélectionne* 2:normalFRép [entrer]

On complète normalFRép (1.48, [2nde] [,] *(pour EE)* [9] [9], 1.5, 0.01)

[entrer] *on obtient 0,977249…*

Remarque :

on tape [2nde] [,] [9] [9] *pour donner* $+10^{99}$ *comme borne supérieure à l'intervalle*

***2.** On tape* [2nde] [var] *pour distrib.*

On sélectionne 3:FracNormale([entrer]

On complète FracNormale(0.81, 1.5, 0.01) [entrer] *on obtient a = 1,5087…*

Exercices : (On note $N(m,\sigma)$)

37 Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$. On note f la densité de probabilité de X.

1. Tracer la courbe représentative de f sur $[-4\,;4]$.

2. Hachurer sur cette représentation les régions dont l'aire correspond à :

a) $P(X \leqslant -2)$;
b) $P(-1 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$;
c) $P(X \geqslant 2{,}5)$.

38 C Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$. En utilisant le fait que $P(X \leqslant 1) = 0{,}841$, déterminer sans calculatrice :

a) $P(X < 1)$; **b)** $P(X \geqslant 1)$;
c) $P(X \leqslant -1)$; **d)** $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$.

39 C La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.
Calculer les probabilités suivantes :

a) $P(X \leqslant 1{,}35)$; **b)** $P(X < -0{,}76)$;
c) $P(X > 1{,}78)$; **d)** $P(X \geqslant -2{,}13)$;
e) $P(-0{,}5 < X < 1)$; **f)** $P(-1{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}75)$.

40 C La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(13\,;\,4)$. Calculer les probabilités suivantes :

a) $P(X \leqslant 15)$; **b)** $P(X > 11)$;
c) $P(X < 10)$; **d)** $P(X \geqslant 17)$;
e) $P(11 < X < 15)$.

41 R La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(5{,}3\,;\,0{,}2)$. Calculer les probabilités suivantes :

a) $P(X < 5{,}35)$; **b)** $P(X > 5{,}4)$;
c) $P(X > 5{,}28)$; **d)** $P(X \leqslant 5{,}7)$;
e) $P(5{,}4 < X < 5{,}5)$; **f)** $P(5{,}27 < X < 5{,}33)$.

42 C La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$.
Déterminer le réel a dans les cas suivants :

a) $P(X \leqslant a) = 0{,}8$;
b) $P(X \leqslant a) = 0{,}1$;
c) $P(X \geqslant a) = 0{,}05$;
d) $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0{,}95$.

43 C La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(10\,;\,2{,}5)$. Déterminer le réel a dans les cas suivants :

a) $P(X \leqslant a) = 0{,}90$;
b) $P(X \leqslant a) = 0{,}05$;
c) $P(X \geqslant a) = 0{,}01$;
d) $P(10 - a \leqslant X \leqslant 10 + a) = 0{,}9$.

44 C Une machine fabrique en grande série des pièces d'acier.
Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce choisie au hasard dans la production hebdomadaire, associe sa longueur en cm. On admet que X suit la loi normale $\mathcal{N}(10\,;\,0{,}02)$.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X \leqslant 10{,}03)$;
b) $P(X \leqslant 9{,}972)$;
c) $P(9{,}972 \leqslant X \leqslant 10{,}03)$.

2. Déterminer le nombre réel positif a tel que :
$$P(10 - a \leqslant X \leqslant 10 + a) = 0{,}8.$$

45 R Lorsqu'un avion atterrit, il est aussitôt pris en charge par les services du contrôle technique et il fait l'objet d'un entretien dont la durée T, exprimée en minutes, est une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type 5.
À la fin de cet entretien, l'avion est prêt à décoller.
Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

1. Un avion atterrit. Calculer la probabilité pour que le délai d'attente soit supérieur à 55 minutes.

2. Calculer la probabilité pour qu'un avion soit prêt à décoller entre 40 et 60 minutes après son atterrissage.

3. Trouver le nombre t tel que la probabilité d'avoir un délai d'attente compris entre $50 - t$ et $50 + t$ soit au moins égal à 0,99.

46 R Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des pièces.
Une pièce est considérée comme bonne si sa longueur en centimètres est comprise entre 293,5 et 306,5. On note L la variable aléatoire qui à chaque pièce choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur. On suppose que L suit la loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.
Déterminer à 10^{-2} près, la probabilité qu'une pièce soit bonne.

47 Une enquête concernant les montants des tickets de caisse a été effectuée dans un supermarché. On note X la variable aléatoire égale au montant d'un ticket de caisse, exprimé en euros.
On admet que X suit la loi normale d'espérance mathématique $m = 50$ et d'écart type $\sigma = 20$.

1. Quelle est la probabilité p pour que le montant d'un ticket de caisse dépasse 40 € (on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près) ?

2. E est l'événement $(50 - a \leqslant X \leqslant 50 + a)$.
Déterminer le nombre réel a tel que la probabilité de E soit égale à 0,9 (on donnera une valeur de a arrondie à l'unité).

48 C Une usine fabrique des pièces cylindriques, la variable aléatoire D qui mesure le diamètre, suit la loi normale de moyenne $m = 15$ mm et d'écart type $\sigma = 0{,}35$ mm.

1. Le contrôle de la fabrication ne retient que les pièces dont le diamètre est compris entre 14,3 mm et 15,5 mm. On considère une production comprenant un très grand nombre de pièces. Quelle est dans cette production le pourcentage de pièces valables ?

2. Déterminer le réel positif h pour que le diamètre de 95 % de la production appartienne à l'intervalle $[m - h\,;\,m + h]$.

3. Un autre réglage de la machine fait apparaître la moyenne 14,9 mm. Quel devrait être l'écart type pour que 90 % des pièces soient conformes au contrôle tel qu'il est défini à la question **1.** ?

49 Une chaîne de supermarchés, spécialisée dans la vente du matériel de bricolage, vend des sacs aux clients pour le transport des achats.
D'après le fournisseur des sacs, la charge maximale, en kg, qu'un sac peut supporter est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type 4.

1. Calculer la probabilité de l'événement $X \geqslant 55$, puis celle de l'événement $48 \leqslant X \leqslant 52$, avec la précision permise par les tables.

2. Calculer le réel r tel que la probabilité de l'événement $X < r$ soit égale à 0,025. Donner l'entier le plus proche de r.

50 Une console de fixation de radiateur est percée d'un trou de forme oblongue pour permettre un réglage en hauteur en fonction du modèle à poser. Sa largeur doit en même temps être suffisante pour laisser glisser le boulon de fixation et assurer un appui convenable à la tête du boulon.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la largeur du trou de chaque console produite, exprimée en mm. On admet que X suit une loi normale d'espérance mathématique en $m = 5$ et d'écart type σ. Une largeur est correcte lorsqu'elle est comprise entre 4,54 mm et 5,46 mm.

1. On suppose que $\sigma = 0{,}25$. Calculer la probabilité qu'une largeur soit correcte.

2. On peut régler différemment la machine et changer l'écart type sans changer m. On veut que la probabilité d'avoir une largeur correcte soit égale à 0,97.
Quelle valeur faut-il donner à σ, si on ne change pas m ?

51 Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20\,;\,120]$.

a) Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.
b) Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.

2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minutes) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120,\,20)$.

a) Déterminer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire J.
b) Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.

6 Loi normale

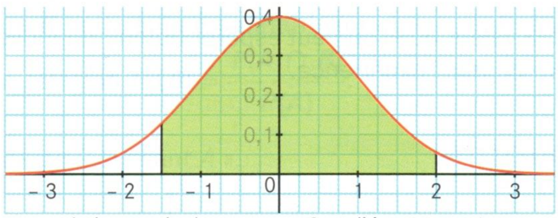
1. Définition

Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ, on note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Pour tout réel a, b on a : $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple :
La loi normale centrée réduite est la loi $\mathcal{N}(0, 1)$; sa fonction de densité est : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$;
sa courbe représentative est donnée ci-dessous.



Loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1

avec le logiciel Sine Qua Non on obtient : $P(-1{,}5 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}910442$.

Remarque : comme pour la loi uniforme, on a pour tout réel t, $P(X = t) = 0$
et donc $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$.

2. Propriété de la loi normale

1. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.
L'aire comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses vaut 1.

2. Si une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ, alors pour tout b de $\mathbb{R}$: $P(X \leqslant b) = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

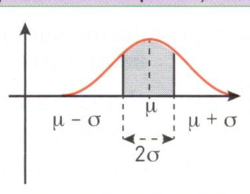
3. $P(X \geqslant \mu) = P(X \leqslant \mu) = 0{,}5$.

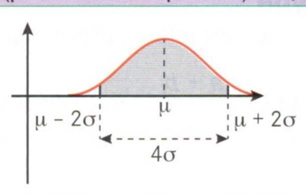
3. Propriété

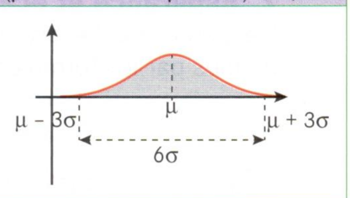
Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors la variable aléatoire $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

4. Intervalles de fluctuations d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}68$	$p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}95$	$p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$







Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, sa dispersion autour de μ dépend de σ de la façon suivante.
Ces valeurs remarquables sont à connaître.

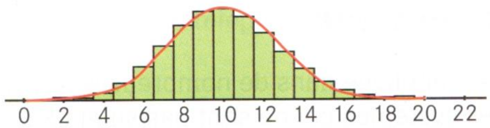
5. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

Lorsque le paramètre n est grand et que p n'est ni trop proche de zéro, ni trop proche de 1, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p, par la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où :

$$\mu = np \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Exemple :

Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(40 ; 0,25)$, la représentation graphique de la répartition des probabilités est :



La loi de X peut-être approchée par la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\mu = 40 \times 0,25 = 10$

et $\sigma = \sqrt{40 \times 0,25 \times 0,75} \approx 2,7386$.

Exercices : (On note $N(m,\sigma^2)$)

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Fiche l'Essentiel

52 **C** **1.** Une étude statistique a permis d'estimer que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la clientèle d'un certain supermarché effectue un achat au rayon crémerie est 0,45.
On observe 100 clients pris au hasard dans ce supermarché. On suppose que ces clients font leurs achats en toute indépendance. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de ces personnes qui achètent un article au rayon crémerie.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer l'espérance mathématique de X, puis la valeur arrondie à l'entier le plus proche de l'écart type de X.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par la loi normale $\mathcal{N}(45 ; 25)$.
Utiliser cette approximation pour :

a) calculer la probabilité qu'au moins 50 des 100 clients observés effectuent un achat au rayon crémerie, c'est-à-dire calculer la probabilité de l'événement « $X \geqslant 49,5$ » ;

b) calculer la probabilité de l'événement suivant : « parmi les 100 clients observés, le nombre de ceux qui effectuent un achat au rayon crémerie est strictement compris entre 30 et 60 », c'est-à-dire encore, calculer la probabilité de l'événement « $30,5 \leqslant X \leqslant 59,5$ ».

53 Dans une entreprise, un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de gestion a été suivi par 25 % du personnel. Ainsi, la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans l'entreprise ait suivi ce stage est $p = 0,25$.
On choisit au hasard n personnes de cette entreprise. On suppose l'effectif suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

1. Dans cette question, $n = 10$.
On note X la variable aléatoire qui, à tout ensemble de 10 personnes ainsi choisies, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Indiquer les paramètres de cette loi.

b) Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité des événements suivants :
E_1 : « Parmi 10 personnes choisies au hasard, exactement 2 personnes ont suivi le stage » ;
E_2 : « Parmi 10 personnes choisies au hasard, au plus une personne a suivi le stage ».

2. Dans cette question, $n = 500$. On note Y la variable aléatoire qui, à tout ensemble de 500 personnes ainsi choisies, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,25$.

a) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.
En donner une interprétation.
Déterminer une valeur approchée, arrondie à 10^{-1} près, de l'écart type de la variable aléatoire Y.

b) On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 125 et d'écart type 9,7.
On note Z une variable aléatoire suivant cette loi.
En utilisant cette approximation, calculer la probabilité qu'au plus 120 personnes, parmi les 500 choisies au hasard, aient suivi le stage, c'est-à-dire $P(Z \leqslant 120,5)$. Donner ce résultat à 10^{-2} près.

54 On lance un dé non truqué, la partie est gagnée si on obtient un 5 ou un 6. On joue 50 parties de suite.
Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Partie A. Loi binomiale

On considère la variable aléatoire X qui associe le nombre de parties gagnées au cours d'une suite de 50 parties.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité de l'évènement E : « on gagne 15 parties ».

3. Calculer la probabilité de l'évènement F : « on gagne 15, ou 16, ou 17 parties ».

Partie B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne $m = \frac{50}{3}$ et d'écart type $\sigma = \frac{10}{3}$.
On note Y une variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifier le choix des valeurs de m et de σ.

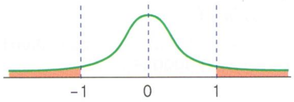
2. Justifier que $P(Y \geqslant 17,5)$ est une approximation de la probabilité de l'évènement : « le nombre de parties gagnées est au moins égal à 18 ».

3. Donner une valeur numérique de $P(Y \geqslant 17,5)$ arrondie à 10^{-2}.

4. En déduire une valeur approchée de la probabilité de l'évènement : « le nombre de parties gagnées est compris entre 15 et 17 ».

Correction :

38 On utilise les propriétés de la courbe représentant la fonction de densité.



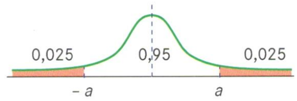
a) $P(X < 1) = P(X \leqslant 1) = \mathbf{0{,}841}$.
b) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = \mathbf{0{,}159}$.
c) $P(X \leqslant -1) = P(X \geqslant 1) = \mathbf{0{,}159}$.
d) $P(0 \leqslant X \leqslant 1) = P(X \leqslant 1) - 0{,}5 = \mathbf{0{,}341}$.

39 On utilise la calculatrice (fiche méthode 31).
X suit la loi $\mathcal{N}$ (0 ; 1).
La moyenne $\mu = 0$, l'écart type $\sigma = 1$.
a) $P(X \leqslant 1{,}35) = \mathbf{0{,}9115}$.
b) $P(X < -0{,}76) = \mathbf{0{,}2236}$.
c) $P(X > 1{,}78) = \mathbf{0{,}0375}$.
d) $P(X \geqslant -2{,}13) = \mathbf{0{,}9834}$.
e) $P(-0{,}5 \leqslant X < 1) = \mathbf{0{,}5328}$.
f) $P(-1{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}75) = \mathbf{0{,}7066}$.

40 X suit la loi $\mathcal{N}$ (13 ; 16).
La moyenne $\mu = 13$, l'écart type $\sigma = \sqrt{16} = 4$.
a) $P(X < 15) = \mathbf{0{,}6915}$.
b) $P(X > 11) = \mathbf{0{,}6915}$.
c) $P(X < 10) = \mathbf{0{,}2266}$.
d) $P(X \geqslant 17) = \mathbf{0{,}1587}$.
e) $P(11 < X < 15) = \mathbf{0{,}3829}$.

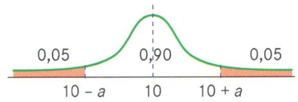
41 La moyenne est 5,3, l'écart type $\sigma = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$.
a) 0,5987. **b) 0,3085.** **c) 0,5398.**
d) 0,9772. **e) 0,1499.** **f) 0,1192.**

42 On utilise la calculatrice comme dans la fiche méthode 31 question 2, et les propriétés de la courbe.
a) $a = \mathbf{0{,}8416}$.
b) $a = \mathbf{-1{,}2816}$.
c) $P(X \geqslant a) = 0{,}05$ équivaut à : $1 - P(X < a) = 0{,}05$, soit $P(X < a) = 0{,}95$ d'où $a = \mathbf{1{,}6448}$.
d)



Les aires hachurées ont une aire totale égale à :
$1 - 0{,}95 = 0{,}05$, donc chacune des ces aires vaut 0,025.
$P(X < -a) = 0{,}025$ et $P(X > a) = 0{,}025$.
$P(X < a) = 0{,}975$ d'où $a = \mathbf{1{,}9599}$.

43 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}$ (10 ; 6,25), sa moyenne est $\mu = 10$, son écart type $\sigma = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.
a) $a = \mathbf{13{,}203}$.
b) $a = \mathbf{5{,}8879}$.
c) $P(X \geqslant a) = 0{,}01$ équivaut à : $1 - P(X < a) = 0{,}01$ soit $P(X < a) = 0{,}99$ d'où $a = \mathbf{15{,}8159}$.
d)



Les aires hachurées ont une aire totale égale à :
$1 - 0{,}9 = 0{,}1$, donc chacune des ces aires vaut 0,05.
$P(X < 10 - a) = 0{,}05$ et $P(X > 10 + a) = 0{,}05$ donc $P(X < 10 + a) = 0{,}95$.
$10 + a = 14{,}1121$ donc $a = \mathbf{4{,}1121}$.

44 X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (10 ; 0,0004), sa moyenne $\mu = 10$, son écart type $\sigma = \sqrt{0{,}0004} = 0{,}02$.
1. a) $P(X \leqslant 10{,}03) = \mathbf{0{,}9332}$.
b) $P(X \leqslant 9{,}972) = \mathbf{0{,}0808}$.
c) $P(9{,}972 \leqslant X \leqslant 10{,}03) = \mathbf{0{,}8524}$.
2. $P(10 - a \leqslant X \leqslant 10 + a) = \mathbf{0{,}8}$ équivaut à :
$P(X \leqslant 10 + a) = 0{,}9$.
$a = \mathbf{0{,}0256}$.

45 **1. 0,16.** **2. 0,95.** **3. 12,88.**

46 **0,97.**

48 **1.** $P(14{,}3 \leqslant D \leqslant 15{,}5) = 0{,}9007$.
Le pourcentage de pièces valables est : 90,07 %.
2. $P(m - h \leqslant D \leqslant m + h) = 0{,}95$ équivaut à $P(D \leqslant m + h) = 0{,}975$
$m + h = 15{,}686$; $h = 0{,}686$.
3. La variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne $\mu = 14{,}9$ et d'écart type σ.

La variable $T = \dfrac{D - 14{,}9}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}$ (0 ; 1).

On veut : $P(14{,}3 \leqslant D \leqslant 15{,}5) = 0{,}9$ ce qui équivaut à :

$$P\left(\frac{14{,}3 - 14{,}9}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{15{,}5 - 14{,}9}{\sigma}\right) = 0{,}9$$

soit $P\left(\dfrac{-0{,}6}{\sigma} < T \leqslant \dfrac{0{,}6}{\sigma}\right) = 0{,}9$

d'où $P\left(T \leqslant \dfrac{0{,}6}{\sigma}\right) = 0{,}95$.

On a donc : $\dfrac{0{,}6}{\sigma} = 1{,}645$

$\sigma = \dfrac{0{,}6}{1{,}645}$; $\sigma = \mathbf{0{,}365}$.

52 **1. a)** Pour chaque client, il y a deux issues : le succès « Le client achète » a pour probabilité 0,45, l'échec « Le client n'achète pas» a pour probabilité 0,55.
L'épreuve est répétée 100 fois de façon identique et indépendante.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (100 ; 0,45).
b) $E(X) = np = 100 \times 0{,}45 = \mathbf{45}$.
$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}45 \times 0{,}55}$; $\boldsymbol{\sigma(X) = 5}$.
2. a) X suit approximativement la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5.
En utilisant cette loi, on obtient $P(X \geqslant 49{,}5) = \mathbf{0{,}1841}$.
Remarque : on a remplacé $X < 50$ par $X < 50 - 0{,}5$ car on approche une loi discrète par une loi continue, c'est la correction de continuité, utilisée aussi dans la question suivante.
b) $P(30{,}5 \leqslant X \leqslant 59{,}5) = \mathbf{0{,}9963}$.