Ex 7

$$f(x) = \frac{x}{x^2+3} \qquad I = \mathbb{R}$$

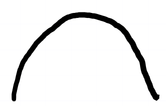
1. $$f(x) = \frac{u}{v} \qquad u = x \qquad v = x^2+3$$
$$u' = 1 \qquad v' = 2x$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1(x^2+3) - x(2x)}{(x^2+3)^2} =$$

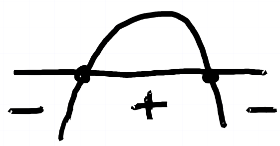
$$= \frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$$

Signe de f' :

Signe de $-x^2+3$ $\quad a = -1 \quad b = 0 \quad c = 3$



$$\Delta = 0^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 12 > 0$$



$$x_1 = \frac{-0-\sqrt{12}}{-2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-0+\sqrt{12}}{-2} = -\frac{\sqrt{12}}{2} = -\sqrt{3}$$

Tableau de signe pour $-x^2+3$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Signe de $(x^2+3)^2$ est positif.

Tableau de signe pour $(x^2+3)^2$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$(x^2+3)^2$		$+$	

Tableau de signe pour f' :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+3)^2$				$+$			
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tableau de variations pour f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(-\sqrt{3})$	$\nearrow$	$f(\sqrt{3})$	$\searrow$	

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2+3} = \frac{-\sqrt{3}}{3+3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2+3} = \frac{\sqrt{3}}{3+3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

2. Pour $x = -\sqrt{3} \Rightarrow f' = 0$ et $f = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

Pour $x < -\sqrt{3}$ f est décroissante

Pour $x > -\sqrt{3}$ f est croissante

Donc f admet un minimum sur $]-\infty; 0]$.

Le minimum est $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ atteint pour $x = -\sqrt{3}$.

Pour $x = \sqrt{3} \Rightarrow f' = 0$ et $f = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Pour $x < \sqrt{3} \Rightarrow$ f est croissante

Pour $x > \sqrt{3} \Rightarrow$ f est décroissante

Donc f admet un maximum sur $[0; +\infty[$.

Le maximum est $\frac{\sqrt{3}}{6}$ atteint pour $x = \sqrt{3}$.