1 Loi exponentielle

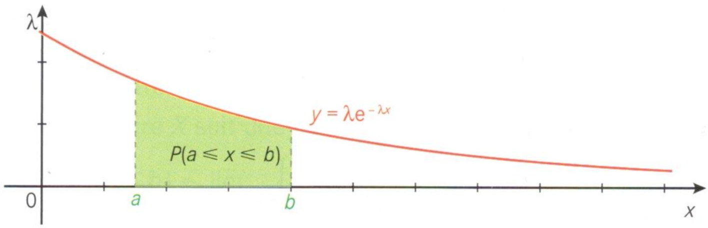
La loi exponentielle s'applique dans de nombreuses situations, notamment à la durée de fonctionnement des systèmes qui ne sont pas sujets à un phénomène d'usure.

1. Définition

Soit λ un réel strictement positif.
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Pour tout réel a et b de $[0\,;+\infty[$ avec $a \leqslant b$:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$



Remarque : comme pour les autres lois à densité, pour tout t : $P(x = t) = 0$; et donc,
$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$.

2. Propriétés

Si une variable aléatoire X suit une loin exponentielle de paramètre λ, alors :

1. Pour tout réel t : $P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $P(X > t) = e^{-\lambda t}$.

2. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

3. Vocabulaire de la fiabilité

- La variable aléatoire T qui à tout dispositif associe sa durée de vie est appelée **temps de bon fonctionnement** (noté T.B.F.).
- La fonction F définie par $F(t) = P(T \leqslant t)$ est appelée **fonction de défaillance**.
- La fonction R définie par $R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - F(t)$ est appelée **fonction de fiabilité du système**.
- L'espérance mathématique de T est **la durée de vie moyenne du système**, elle est notée M.T.B.F.

Dans le cas de la loi exponentielle ou durée de vie sans vieillissement, on a :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}\ ;\quad R(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad E(T) = \frac{1}{\lambda} = \text{M.T.B.F.}$$