1 Primitives d'une fonction

1. Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f. Pour tout nombre réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

2. Théorèmes

- **Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I.**
- **Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + C$ où C désigne un nombre réel arbitraire.**
- **Si f admet des primitives sur l'intervalle I, alors il existe une et une seule primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$; x_0 et y_0 donnés.**

3. Les résultats à connaître pour déterminer les primitives d'une fonction

- **Linéarité**

F et G sont des primitives respectives de f et g sur un intervalle I; k est un nombre réel. Alors, $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I et kF est une primitive de kf sur I.

- **Primitives usuelles**

Dans les tableaux suivants, C désigne un nombre réel arbitraire.

Fonction f	Primitives F
$f(x) = a$; a réel	$F(x) = ax + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$	$F(x) = \ln x + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = x^n$ (n entier relatif ; $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Fonction f	Primitives F
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \sin(ax + b)$ $(a \neq 0)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + C$
$f(x) = \cos(ax + b)$ $(a \neq 0)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + C$

Fonction f	Primitives F
$f(x) = (u(x))^n \times u'(x)$ (n entier relatif ; $n \neq -1$)	$F(x) = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ $(u(x) > 0)$	$F(x) = \ln(u(x)) + C$
$f(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$	$F(x) = e^{u(x)} + C$

▶ ▶ ▶

2 Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a\,;\,b]$

1. Définition

f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F est une primitive de f sur I, a et b sont deux nombres réels de I.

On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b) - F(a)$.

On le note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; on écrit : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

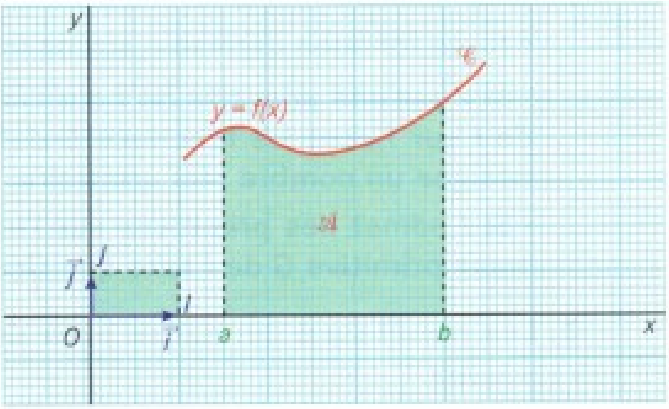
2. Interprétation géométrique dans le cas d'une fonction positive

L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés OI et OJ.

$\mathscr{A}$ est l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

En unités d'aire :

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Si f est négative, $\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Propriétés

f et g sont des fonctions dérivables sur l'intervalle I.

a, b et c sont des nombres de I.

- $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

  $\int_a^b k\,f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k réel)

- $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

- **On suppose $a < b$**
  - si sur $[a\,;\,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
  - si sur $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
  - si sur $[a\,;\,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors : $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

- **La valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ est le nombre :**

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Intégration par parties

u et v sont deux fonctions dont les dérivées u' et v' sont dérivables sur I ; a et b sont des nombres de I.

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

(formule dite d'intégration par parties)

Comment déterminer à la main les primitives d'une fonction ?

- Il suffit de déterminer une primitive de cette fonction.
- Pour déterminer une primitive F d'une fonction f, on utilise les tableaux de résultats et les règles concernant $f + g$ et kf donnés page 239.

Exemple 1. Déterminer les primitives de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 4x - 3e^x$.

• L'écriture de f(x) fait intervenir uniquement la somme et le produit par un nombre de fonctions données dans les tableaux page 241.

• On lit dans les tableaux :

Fonctions	x^3	x	e^x
Primitives	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^2}{2}$	e^x

• En multipliant par les nombres convenables, on obtient :

Fonctions	$2x^3$	$4x$	$-3e^x$
Primitives	$2\frac{x^4}{4}$	$4\frac{x^2}{2}$	$-3e^x$

• Par addition, on obtient donc une primitive F de f : $F(x) = \frac{x^4}{2} + 2x^2 - 3e^x$; donc les primitives de f sont les fonctions G définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{G(x) = \frac{x^4}{2} + 2x^2 - 3e^x + C}$.

Exemple 2. Déterminer les primitives de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{3x}$.

• On pense à écrire f(x) sous la forme $f(x) = ke^{u(x)} \times u'(x)$ avec k réel.

On pose $u(x) = 3x$ d'où $u'(x) = 3$.

$e^{u(x)} \times u'(x) = e^{3x} \times 3$ *; on écrit alors* $f(x) = 5 \times \frac{1}{3} \times e^{3x} \times 3$.

Ainsi $f(x) = \frac{5}{3} e^{u(x)} \times u'(x)$ *d'où une primitive F de f :* $F(x) = \frac{5}{3} e^{u(x)} = \frac{5}{3} e^{3x}$.

• Primitives de f : les fonctions G définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{G(x) = \frac{5}{3} e^{3x} + C}$.

Exemple 3. Déterminer les primitives de f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{2x+1}$.

• On pense à écrire f(x) sous la forme $f(x) = k\frac{u'(x)}{u(x)}$ *avec k réel.*

On pose $u(x) = 2x + 1$ d'où $u'(x) = 2$.

$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{2x+1}$ *; on écrit alors* $f(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x+1}$.

Ainsi, $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ *; sur $[0\,;+\infty[$ on a $u(x) > 0$;*

d'où une primitive F de f : $F(x) = \frac{3}{2} \ln(u(x)) = \frac{3}{2} \ln(2x+1)$.

Primitives de f : les fonctions G définies sur $[0\,;+\infty[$ par $\mathbf{G(x) = \frac{3}{2} \ln(2x+1) + C}$.

Comment calculer à la main une intégrale ?

Pour calculer l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$:

1. On détermine une primitive F de f ;

2. On calcule le nombre $F(b) - F(a)$; $I = F(b) - F(a)$.

Exemple. Calculer $I = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} + e^{2x}\right) dx$.

1. On obtient facilement une primitive de f :

la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{1}{2}e^{2x}$.

2. $\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1)$; $\int_1^2 f(x)\,dx = \left(\frac{4}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2}e^4\right) - \left(\frac{1}{2} + \ln 1 + \frac{1}{2}e^2\right)$.

D'où $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} + e^{2x}\right) dx = \mathbf{\frac{3}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2}(e^4 - e^2)}$; $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} + e^{2x}\right) dx \approx \mathbf{25{,}8}$.

Comment calculer une intégrale en utilisant l'intégration par parties ?

Pour calculer l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$ en utilisant l'intégration par parties :

1. On écrit $f(x)$ sous la forme $f(x) = u(x) \times v'(x)$.
   Il faut choisir convenablement les expressions de $u(x)$ et $v'(x)$!
2. On calcule u' et on détermine une primitive v de v'.
3. On applique la formule d'intégration par parties.

Exemple 1. Calculer $\int_1^2 x \ln x\,dx$.

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$; on obtient $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

D'où $\int_1^2 x \ln x\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \dfrac{x}{2}\,dx = 2\ln 2 - \left[\dfrac{x^2}{4}\right]_1^2 = \mathbf{2\ln 2 - \dfrac{3}{4}}$.

Exemple 2. Calculer $\int_0^1 xe^x\,dx$.

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$; on obtient $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

D'où $\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = \mathbf{1}$.

Exercices :

1 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

a) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 4$; $f(x) = x^2 + 4x$.

b) $F(x) = 2e^x + \dfrac{1}{2}x^2$; $f(x) = 2e^x + x$.

c) $F(x) = e^{-2x} + 3e^x + 5$; $f(x) = 3e^x - 2e^{-2x}$.

2 Dans chacun des cas suivants, indiquer en justifiant la réponse si la fonction F est une primitive sur l'intervalle I de la fonction f.

a) $I = \mathbb{R}$; $F(x) = -\dfrac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 5x + 2$;
$f(x) = -4x^2 + 8x - 5$.

b) $I =]0 ; +\infty[$; $F(x) = 3\ln x + 5x^2 + 4$;
$f(x) = \dfrac{3}{x} + 10x$.

c) $I = \mathbb{R}$; $F(x) = 3e^{-2x} + 5e^x$;
$f(x) = e^{-2x} + 5e^x$.

d) $I =]0 ; +\infty[$; $F(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x}$;
$f(x) = -\dfrac{2}{x^3} + 3\ln x$.

Pour chacun des exercices 3 à 17, les fonctions f et g admettent sur l'intervalle I des primitives. Pour chacune d'elles, déterminer les primitives.

3 $I = \mathbb{R}$.
$f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = -2x^3 + 4x - 5$.

4 **R** $I = \mathbb{R}$.
$f(x) = 4e^x - 2x$; $g(x) = 3x^2 + 5e^x$.

5 $I =]0 ; +\infty[$.
$f(x) = \dfrac{1}{x} + 3x$; $g(x) = x^2 - \dfrac{2}{x^2}$.

6 **R** $I =]0 ; +\infty[$.
$f(x) = 3x^2 - \dfrac{4}{x^2}$; $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}$.

7 **R** $I =]0 ; +\infty[$.
$f(t) = t + \dfrac{2}{t}$; $g(t) = 3e^t + \dfrac{5}{t}$.

9 **R** $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2e^{2x}$.

10 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = e^{-x}$.

11 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2e^{3x+1}$.

12 **R** $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x + 4e^{-3x}$.

13 **C** $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2x(e^{x^2})$.

14 $I =]2 ; +\infty[$; $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

15 $I =]-1 ; +\infty[$; $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

16 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x(x^2+1)^3$.

17 $I =]2 ; +\infty[$; $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Pour déterminer la primitive G d'une fonction f telle que $G(x_0) = y_0$:
– on détermine les primitives de f ;
– on calculer la constante C de manière que $G(x_0) = y_0$.

Pour chacun des exercices 18 à 24, *la fonction f est définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.*
Dans chaque cas, déterminer la primitive G qui satisfait à la condition donnée.

18 **C** $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 - x + 1$.
$G(1) = 0$.

19 $I =]0 ; +\infty[$; $f(x) = x - \dfrac{2}{x}$.
$G(1) = 0$.

20 $I =]0 ; +\infty[$; $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.
$G(2) = 0$.

21 **R** $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 4x + e^x$.
$G(0) = 2$.

22 $I =]0 ; +\infty[$; $f(x) = \dfrac{2}{x} + e^x$.
$G(1) = 0$.

Pour chacun des exercices 25 à 30, calculer les intégrales proposées.

25 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2+1)\,dx$; $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2+3x+5)\,dx$.

26 $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{3}{x}\,dx$; $\displaystyle\int_{1}^{4}\left(x - \frac{2}{x}\right) dx$.

27 $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(x + 2 + \frac{1}{x+2}\right) dx$.

28 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t}{t^2+1}\,dt$; $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} (e^t + e^{2t})\,dt$.

29 $\displaystyle\int_{-1}^{2} x(x^2+4)\,dx$; $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{xe^x+1}{x}\,dx$.

30 **C** $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} (e^x - e^{-x})\,dx$; $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

Pour les exercices 32 à 39, *la fonction f admet sur l'intervalle I des primitives.*
Dans chaque cas, déterminer les primitives de f à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

32 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 + 2e^{-2x}$.

33 $I =]-1 ; +\infty[$; $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

34 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = xe^{x^2+1}$.

35 **C** $I = \left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right[$; $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$.

36 $I =]0 ; +\infty[$; $f(x) = x + 3 - \dfrac{4}{x^3}$

37 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x(x^2+1)^2$.

38 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

Pour les exercices 40 à 45, *calculer à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul les intégrales proposées.*

40 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+1)^3\,dx$; $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(x^2 - 5 - \frac{4}{x^2}\right) dx$.

41 $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+1}$; $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$.

43 **R** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$; $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$.

45 $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{x+1}{(x-2)^2}\,dx$.

Pour chacun des exercices 46 à 51, *calculer les intégrales proposées.*

46 **C** $\displaystyle\int_{1}^{e} (x^2+1)\ln x\,dx$; $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{2x}\,dx$.

47 $\displaystyle\int_{0}^{2} xe^{-x}\,dx$; $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln x\,dx$.

48 **R** $\displaystyle\int_{0}^{1} 3xe^{-2x}\,dx$; $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln(2x)\,dx$.

49 $\displaystyle\int_{0}^{1} (x+2)e^{-x}\,dx$; $\displaystyle\int_{1}^{4} (x-1)\ln x\,dx$.

50 **R** $\displaystyle\int_{1}^{2} (t+1)\ln(3t)\,dt$; $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2t+1)e^{3t}\,dt$.

Calcul d'aires.

53 Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}.$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

2. Calculer l'aire, en cm^2, de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que :

$$1\leqslant x\leqslant 4 \quad\text{et}\quad 0\leqslant y\leqslant f(x).$$

On effectuera une intégration par parties.
Donner la valeur arrondie au mm^2 de cette aire.

54 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;1]$ par $f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x$.

1. Étudier les variations de f et donner l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que :

$$-1\leqslant x\leqslant 1 \quad\text{et}\quad f(x)\leqslant y\leqslant 0.$$

On effectuera une intégration par parties.
Donner la valeur arrondie au mm^2 de $\mathcal{A}$.

55 Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Tracer les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ qui représentent respectivement les fonctions f et g définies sur $[1\,;2]$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

2. On note $\mathscr{D}$ le domaine ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que :

$$1\leqslant x\leqslant 2 \quad\text{et}\quad \frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x^2.$$

a) Calculer, en unités d'aire, l'aire de $\mathscr{D}$.
b) Exprimer cette aire en cm^2.

56 **R** Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=\mathrm{e}^x$ et g la fonction définie sur $]0\,;1]$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 4 cm, tracer les représentations graphiques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de f et de g.

2. Soit α l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

On appelle E la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.
a) Calculer, en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en cm^2, de E.
b) On admet qu'une valeur approchée à 10^{-2} de α est 0,57.
Donner la valeur arrondie à 10^{-2} de $\mathcal{A}$.

Correction :

4 $F(x) = 4e^x - x^2 + C$.
$G(x) = x^3 + 5e^x + C$.

6 $F(x) = x^3 + \dfrac{4}{x} + C$.

$G(x) = x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{3x^3} + C$.

7 $F(t) = \dfrac{t^2}{2} + 2\ln t + C$.

$G(t) = 3e^t + 5\ln t + C$.

9 $F(x) = e^{2x} + C$.

12 $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{4}{3}e^{-3x} + C$.

13 On a $f = e^u \times u'$ avec $u(x) = x^2$
d'où $F(x) = e^{u(x)} + C = e^{x^2} + C$.

18 Les primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

De $G(1) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + 1 + C = 0$ on déduit $C = -\dfrac{5}{6}$.

$G(x) = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{5}{6}$.

21 $G(x) = 2x^2 + e^x + 1$.

30 • $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x})\,dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^{\ln 2}$;

$I = (e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}) - (2) = \left(2 + \dfrac{1}{2}\right) - 2 = \dfrac{1}{2}$.

• $J = \displaystyle\int_e^{e^2} \dfrac{1}{x\ln x}\,dx$;

$\dfrac{1}{x\ln x}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$. Sur $[e\,;\,e^2]$, on a $\ln x > 0$, donc la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$. Ainsi $J = \left[\ln(\ln x)\right]_e^{e^2} = \ln 2$.

35 $G(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{\ln(1-2x)}{8} + C$.

43 $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x + 1}\,dx = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$

$\displaystyle\int_0^{\ln 2} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dt = \ln\dfrac{5}{4}$.

```
1 int((exp(x)/(exp(x)+1),x,0,1))
                                  -ln(2)+ln(exp(1)+1)
2 int((exp(x)-exp(-x))/(exp(x)+exp(-x)),x,0,ln(2))
                                  -ln(2)+ln(5/2)
```

46 • $I = \displaystyle\int_1^e (x^2 + 1)\ln x\,dx$.

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 + 1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^3}{3} + x \end{cases}$

Ainsi, $I = \left[\left(\dfrac{x^3}{3} + x\right)\ln x\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \left(\dfrac{x^2}{3} + 1\right)dx$;

$I = \dfrac{e^3}{3} + e - \left[\dfrac{x^3}{9} + x\right]_1^e = \dfrac{2e^3}{9} + \dfrac{10}{9}$.

• $J = \displaystyle\int_0^1 x e^{2x}\,dx$.

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Ainsi, $J = \left[\dfrac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$J = \dfrac{1}{2}e^2 - \left[\dfrac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}e^2 - \left(\dfrac{1}{4}e^2 - \dfrac{1}{4}\right)$

$J = \dfrac{1}{4}e^2 + \dfrac{1}{4}$.

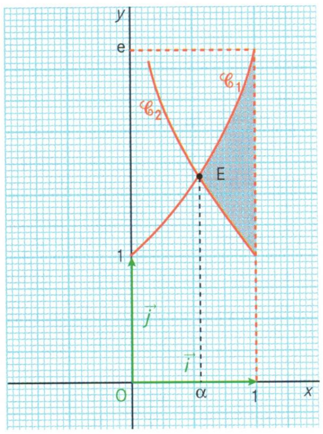
48 $\displaystyle\int_0^1 3xe^{-2x}\,dx = \dfrac{3}{4}(1 - 3e^{-2})$.

$\displaystyle\int_1^e \ln(2x)\,dx = (\ln 2)(e - 1) + 1$.

50 $\displaystyle\int_1^2 (t+1)\ln(3t)\,dt = \dfrac{\ln 62\,208}{2} - \dfrac{7}{4}$.

$\displaystyle\int_{-1}^0 (2t+1)e^{3t}\,dt = \dfrac{5e^{-3}}{9} + \dfrac{1}{9}$.

56 **1.** La figure obtenue est représentée ci-dessous à l'échelle $\dfrac{1}{2}$.



2. a) L'unité d'aire est 16 cm² ; $\mathcal{A} = 16\displaystyle\int_\alpha^1 \left(e^x - \dfrac{1}{x}\right)dx$.

$\mathcal{A} = 16\,(e - e^\alpha + \ln\alpha)$.
b) $\mathcal{A} \approx 6{,}21$ cm².