Loi binomiale

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$.
On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X discrète est une loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n, p)$, si : $P(X = k) = \mathrm{C}_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

À savoir

Soit une épreuve à deux résultats possibles : succès ou échec.
Soit *n* le nombre de répétitions indépendantes de cette épreuve.
La variable aléatoire *X* mesurant le nombre de succès au cours de ces *n* épreuves suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*, *p* étant la probabilité de succès.

Exemple :
Une urne contient 2 boules rouges, 2 boules bleues et 2 boules vertes indiscernables au toucher.
On tire au hasard une boule que l'on remet dans l'urne après avoir noté sa couleur.
On effectue 6 tirages.

a. Quelle est la probabilité de tirer 4 boules rouges ?

Le tirage d'une boule avec remise est une épreuve. Pour chaque éprouve, il y a deux résultat possibles : la boule est rouge (R) ou la boule n'est pas rouge (N).
Les probabilités correspondants sont :

$P(R)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, appelée probabilité de **succès** et noté p et

$P(N)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, appelée probabilité d'**échec** et noté q $(q=1-p)$.

Cette épreuve est dite « **épreuve de Bernoulli de paramètre *p*** » .
On répète 6 fois cette éprouve de façon identique ($n=6$).
Notons (R,R,N,R,N,R) un résultat contenant 4 boules rouges. Les 6 épreuves sont indépendants, donc la probabilité d'obtenir cette suite est :

$$P(R,R,N,R,N,R)=P(R)\times P(R)\times P(N)\times P(R)\times P(N)\times P(R)=\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 .$$

Or le nombre de ces suites favorables est égal au nombre de parties de 4 éléments dans un ensemble de 6 éléments (par exemple (N,R,R,R,N,R) est une autre suite favorable). Le nombre de suites favorables est égal au nombre de combinaison C_6^4 .

Donc la probabilité de tirer 4 boules rouge est égale à $C_6^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

b. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de boules rouges tirées au cours des 6 épreuves.
Donner la loi de probabilité de X.

Les valeurs de la variable X sont : 0,1,2,3,4,5,6.
On peut, comme dans la partie **a**, calculer les probabilités associées à chacune des valeurs.
On obtient ainsi le tableau de probabilité de X.

Valeurs de x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\mathrm{C}_6^0\left(\frac{2}{3}\right)^6$	$\mathrm{C}_6^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5$	$\mathrm{C}_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\mathrm{C}_6^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\mathrm{C}_6^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\mathrm{C}_6^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\mathrm{C}_6^6\left(\frac{1}{3}\right)^6$

On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p avec $n=6$ et $p=1/3$.

Valeurs caractéristiques de la loi binomiale *B(n,p)*

À savoir

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$.
Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, $\mathcal{B}(n, p)$, alors :

- **$E(X) = np$.**
- **$V(X) = np(1-p)$.**
- **$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.**

Les valeurs caractéristiques de la variable aléatoire X de l'exemple précédant sont :

$$E(X)=np=6\times\frac{1}{3}=2 \qquad V(X)=np(1-p)=6\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3} \qquad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Comment justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale et comment effectuer des calculs avec cette loi ?

***Exemple :** une entreprise fabrique une grande quantité de tubes.*

Dans un lot de tubes, 3 % des tubes ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tubes de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 lots.

On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

***1.** Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.*

***2.** Calculer la probabilité $P(Z = 0)$.*

***3.** Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un tube ne soit pas conforme pour la longueur.*

1. Chaque prélèvement est constitué de 50 épreuves élémentaires indépendantes puisque le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Chaque épreuve élémentaire n'a que deux issues possibles :
– soit le succès lorsque le tube n'est pas conforme de probabilité $p = 0,03$;
– soit l'échec lorsque le tube est conforme, de probabilité $q = 1 - p = 0,97$.

La variable aléatoire Z mesurant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,03$.

2. Pour calculer P avec une calculatrice, on procède de la façon suivante :

Avec la calculatrice Casio Graph 35+

Dans MENU, on sélectionne STAT EXE, on tape F5 pour DIST.
On sélectionne BINM par F5, puis Bpd par F1.
Sur la 1re ligne on sélectionne Var par F2.
Sur la ligne x: on tape 0 EXE puis 50 EXE puis 0.03 EXE qui donne $P(Z = 0) \approx 0,218$.

Avec la calculatrice TI 82 stats.fr ou 83 Plus

On tape 2nde var pour distrib.
On sélectionne 0:binomFdp entrer
On complète binomFdp(50, 0.03, 0) entrer et on obtient $P(Z = 0) = 0,218$.

3. $P(Z \geqslant 1) = 1 - P(Z = 0) \approx 0,782$.

Exercices :

23 Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard, cinq fois de suite avec remise.
Le joueur gagne s'il tire une figure, c'est-à-dire un valet, une dame ou un roi.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de gains.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 5)$.

3. Calculer la probabilité de gagner au moins une fois.

24 **C** Dans une usine on utilise cinq machines identiques. La probabilité que l'une d'entre elles tombe en panne dans une semaine est 0,01. Les pannes étant indépendantes les unes des autres, déterminer la probabilité des événements suivants :
a) A : « Il s'est produit exactement une panne au cours de la semaine » ;
b) B : « Il s'est produit exactement deux pannes au cours de la semaine » ;
c) C : « Il ne s'est produit aucune panne au cours de la semaine » ;
d) D : « Il s'est produit au moins une panne au cours de la semaine ».

25 **R** Un petit artisan emploie trois ouvriers, la probabilité pour que l'un d'entre eux soit absent un jour donné est 0,05.
On suppose que les trois ouvriers s'absentent indépendamment les uns des autres.
Soit X la variable aléatoire qui à une journée associe le nombre d'ouvriers absents.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Donner la table des valeurs de X.

3. Calculer la probabilité d'avoir au moins un ouvrier présent.

26 Un tireur à la carabine touche le centre de la cible avec une probabilité égale à 0,7.

1. Quelle est la probabilité pour que sur 5 tirs il touche au moins une fois le centre de la cible ?

2. Combien de tirs doit-il effectuer pour que la probabilité qu'il touche au moins une fois le centre de la cible soit supérieure à 0,95 ?

27 **R** Un constructeur de composants électroniques fabrique des diodes.
La probabilité pour qu'une diode soit défectueuse est : 5×10^{-3}. On prélève au hasard un lot de 10 diodes dans la production d'une journée. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 diodes. Calculer à 10^{-4} près la probabilité d'avoir dans un lot de 10 diodes :
a) exactement une diode défectueuse ;
b) exactement deux diodes défectueuses ;
c) au moins deux diodes défectueuses ;
d) au plus deux diodes défectueuses.

28 **R** On a observé que 2 % des micro-ordinateurs d'un type donné tombaient en panne par mois d'utilisation. On suppose que les pannes de tels ordinateurs sont indépendantes.
On note X la variable aléatoire associant le nombre de pannes prévisibles à chaque parc de 150 ordinateurs (on assimilera le choix des 150 machines à un tirage avec remise).

1. Déterminer la loi de probabilité de X et ses paramètres.

2. Calculer à 10^{-3} près la probabilité des événements suivants :
a) « Le nombre mensuel de pannes est 5 » ;

b) « Le nombre mensuel de pannes est au moins égal à 2 ».

29 Une entreprise fabrique des tables de jardin en bois.
La fabrication d'une table nécessite 12 planches. La probabilité qu'une planche présente un nœud dans le bois, ce qui fragilise la table, est 0,04.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de planches fragiles par table à la sortie de la fabrication.
Une table est mise en vente au prix normal si elle possède au plus une planche fragile.
Elle n'est pas mise en vente si elle possède plus de trois planches fragiles. Elle est vendue en promotion dans les autres cas.

1. Donner, en justifiant, la loi de probabilité de X. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'une table soit vendue au prix normal.

3. Calculer la probabilité pour qu'une table soit vendue en promotion.

30 **R** Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique un certain type d'article électroménager.

On admet que chaque article de ce type peut présenter deux types de défauts :

- un défaut de soudure, noté défaut a ;
- un défaut sur un composant électronique, noté défaut b.

Première partie. Événements indépendants

On prélève un article au hasard dans la production d'une journée.

On note A l'événement « L'article présente le défaut a ».

On note B l'événement « L'article présente le défaut b ».

On admet que les probabilités des événements A et B sont $p(A) = 0{,}03$ et $p(B) = 0{,}02$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement E_1 « L'article présente le défaut a et le défaut b ».

2. Calculer la probabilité de l'événement E_2 « L'article présente au moins un des deux défauts ».

3. Calculer la probabilité de l'événement E_3 « L'article ne présente aucun défaut ».

4. Calculer la probabilité de l'événement E_4 « L'article présente un seul des deux défauts ». On admet que, si les deux événements sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants et les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Deuxième partie. Loi binomiale

Dans cette partie, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Les articles sont mis en place dans des petites surfaces de distribution par lot de 25.

On prélève au hasard un lot de 25 articles dans la production d'une journée.

On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 articles.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 25 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ces 25 articles.

On suppose que la probabilité de l'événement D : « L'article est défectueux » est $p(D) = 0{,}05$.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer $p(X = 0)$.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux articles défectueux.

4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux articles défectueux.

31 Une entreprise fabrique des conserves alimentaires dont l'étiquette annonce une masse de 250 grammes.

Les masses obtenues pour un échantillon de 500 conserves prises au hasard sont données dans le tableau suivant :

Masse (en g)	[235 ; 240[	[240 ; 245[	[245 ; 250[	[250 ; 255[	[255 ; 260[
Nombre de conserves	33	67	217	132	51

Partie A. Probabilités conditionnelles

1. a) À l'aide de la calculatrice, calculer, en utilisant les milieux des classes, la masse moyenne ainsi que l'écart type des conserves de cet échantillon.

On fournira les valeurs arrondies au dixième.

b) Calculer le pourcentage des conserves alimentaires ayant une masse comprise entre 240 et 255 grammes.

2. On prélève au hasard une conserve de l'échantillon. On considère les deux évènements suivants :

A : « la conserve a une masse strictement inférieure à 250 grammes » ;

B : « la conserve a une masse au moins égale à 240 grammes ».

a) Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

b) Déterminer $P_B(A)$. Arrondir au millième.

c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Partie B. Loi binomiale

Parmi l'échantillon de 500 conserves, on choisit successivement, au hasard et avec remise, 30 conserves. On note X la variable aléatoire qui à un tel prélèvement associe le nombre de conserves de masse strictement inférieure à 250 grammes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. a) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

b) Interpréter ce résultat par une phrase.

3. Calculer $P(X = 15)$ et $P(X = 20)$ (arrondir aumillième).

Interpréter à l'aide d'une phrase.