Developpement limité au point a de f à l'ordre $\underline{n}$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{Équation de la tangente au point d'abscisse } a.} + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \varepsilon(x)$$

$\hookrightarrow \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

$f(x) = \ln(1+x)$; au point $a = 0$; ordre 3

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \varepsilon(x) =$$

$$= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \varepsilon(x)$$

$f(x) = \ln(1+x)$

$f(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$

f	f'
$\ln(x)$	$1/x$
$\ln(u)$	u'/u

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$

f	f'
$\frac{1}{x}$	$-1/x^2$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
$\frac{1}{u^2}$	$-\frac{2u'}{u^3}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -\dfrac{1}{(1+0)^2} = -1$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = \dfrac{2}{(1+0)^3} = 2$

Donc

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \varepsilon(x) =$$

$$= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 + \varepsilon(x) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x)$$

1) Déterminer les coordonnées du point d'abscisse a

$f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} \qquad a = 0$

$f(0) = 0 - \dfrac{0^2}{2} + \dfrac{0^3}{3} = 0 \Rightarrow A(0;0)$

$\Rightarrow$ la courbe passe par le point $A(0;0)$

2) Déterminer la tangent au point A

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x} + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$\hookrightarrow T: \quad y = f(0) + f'(0)x$$

$$\Rightarrow y = 0 + x \Rightarrow \boxed{y = x}$$

3) Étudier la position relative de la function et la tangente au vaisinage du point A.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \qquad T: \ y = x$$

<u>Étudier le signe de</u> $f - T$

$$f(x) - T = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - (x) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Donc à l'ordre 2 :

$$f(x) - T = -\frac{x^2}{2}$$

$A(0;0) \rightarrow x_A = 0$

x		0	
$-\frac{x^2}{2}$	$-$	0	$-$

Donc $f - T \leq 0 \Rightarrow$ f est au dessous de T pour $x < 0$ et $x > 0$

f est égale à T pour $x = 0$