EXERCICE 1 (10 points)

Une usine fabrique des montures de lunettes en acétate.
Lors d'une étape de la fabrication, les montures sont chauffées à 75 °C pour prendre la forme voulue puis on les laisse refroidir à l'air ambiant.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la température de la monture en acétate en fonction du temps lors du refroidissement.

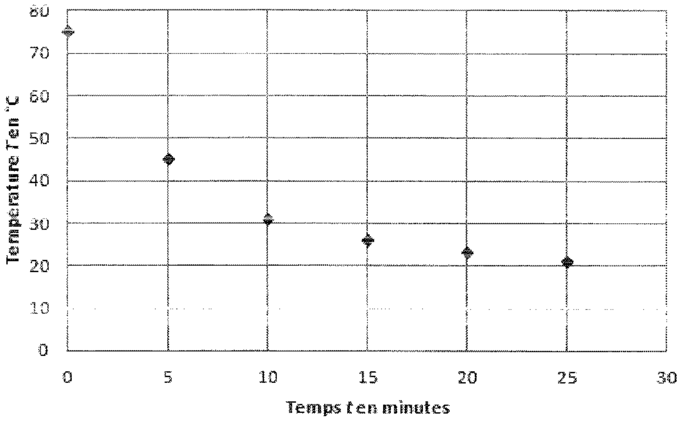
Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Étude expérimentale du refroidissement

Lors du refroidissement, on a mesuré la température des montures toutes les 5 minutes pendant 25 minutes. On a obtenu le tableau suivant :

Temps t (minutes)	0	5	10	15	20	25
Température des montures T (degrés Celsius)	75	45	31	26	23	21

Représentation de la série (t, T) :



Le coefficient de corrélation linéaire de la série (t, T) est $r_1 \approx -0,886$.

L'allure de la série conduit à procéder à un changement de variable, en posant :

$$z = \ln(T - 20).$$

On obtient le tableau de valeurs suivant (les résultats ont été arrondis à 10^{-3}).

Temps t (minutes)	0	5	10	15	20	25
$z = \ln(T - 20)$	4,007	3,219	2,398	1,792	1,099	0

1° Le coefficient de corrélation linéaire de cette nouvelle série (t, z) est $r_2 \approx -0,997$.
Expliquer pourquoi le changement de variable est pertinent.

2° Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de z en t selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$, où a et b sont arrondis au centième.

3° En déduire une expression de T en fonction de t de la forme $T = 20 + C_0\,e^{at}$, où C_0 est à arrondir à l'unité.

B. Étude théorique du refroidissement à l'aide d'une équation différentielle

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : « la vitesse de refroidissement d'un corps chaud inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant ».

Dans un atelier de l'usine où la température ambiante est 20 °C, on admet qu'en appliquant la loi de Newton, la fonction correspondant à la température (en °C) de la monture en acétate en fonction du temps t (en min) vérifie l'équation différentielle (E) :

$$y' = -0{,}15\,(y - 20),$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.

1° Montrer que l'équation (E) s'écrit aussi :

$$y' + 0{,}15\,y = 3.$$

2° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 0{,}15\,y = 0.$$

On fournit la formule suivante.

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$a\,y' + b\,y = 0$	$f(t) = k\,e^{-\frac{b}{a}t}$

3° Déterminer le nombre réel c tel que la fonction constante g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = c$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

4° En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

5° Dans un atelier de l'usine où la température ambiante est 20 °C, une monture en acétate est chauffée à 75 °C. À l'instant $t = 0$, elle est sortie du four et laissée à l'air ambiant pour refroidir.
Déterminer, dans ce cas, la fonction f donnant la température (en °C) de la monture en fonction du temps t (en min).

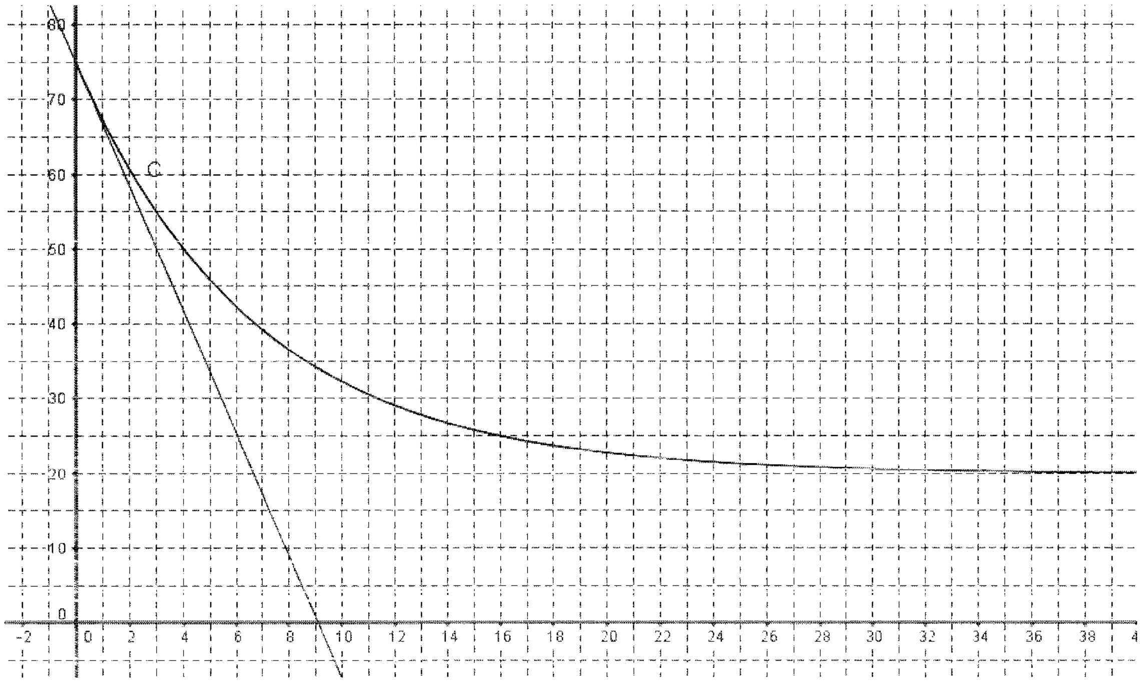
C. Exploitation du modèle précédent

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 20 + 55\,e^{-0{,}15\,t}$.
On admet que f correspond à la température (en °C) de la monture en acétate en fonction du temps t (en min).

Un tableau de valeurs de $f(t)$, arrondies au dixième, est donné ci-dessous.

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$f(t) \approx$	75	46,0	32,3	25,8	22,7	21,3	20,6	20,3	20,1

Un logiciel fournit ci-dessous la courbe C représentant la fonction f dans un repère, ainsi que la tangente à C au point d'abscisse zéro.



1° Donner la température de la monture au bout de 15 minutes (au °C près).

2° a) Déterminer une expression de $f'(t)$.

b) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3° a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

b) En déduire que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.

4° Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

Calcul formel

1	PolynômeTaylor[20+55*exp(-0.15*t), t,0, 2] → $75 - \frac{33}{4}\,t + \frac{99}{160}\,t^2$

Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est correcte. Indiquer sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification.
La réponse correcte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse zéro est :

$y = 75$	$y = 75 - \frac{33}{4}\,t$	$y = 75 - \frac{33}{4}\,t + \frac{99}{160}\,t^2$	$y = 75\,t - \frac{33}{4}$

5° L'objectif de cette question est de déterminer à partir de quel instant la température de la monture en acétate est inférieure à 24 °C.
On considère l'algorithme suivant.

Initialisation
t prend la valeur 15
Traitement
Tant que $f(t) > 24$
t prend la valeur $t + 1$
Fin de Tant que
Sortie
Afficher t

a) Faire tourner cet algorithme « à la main » en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

Étapes	Valeurs de t	Valeurs de $f(t)$	Condition $f(t) > 24$	Affichage
étape 1	15	$f(15) \approx 25{,}8$	VRAIE	aucun
étape 2	16	$f(16) \approx 25{,}0$	VRAIE	aucun
étape 3	17			

b) À partir de quel instant t_0, arrondi à la minute, la température de la monture est-elle inférieure à 24 °C ?

c) Proposer une modification de l'algorithme précédent afin qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de t_0 arrondie au dixième.