Tableau de variation

- **1.** On écrit sur la première ligne les valeurs de x pour lesquelles le sens de variation change.
- **2.** En dessous, on symbolise par des flèches les variations de f.
- **3.** Aux extrémités des flèches, on écrit les valeurs prises par la fonction.

Exemple

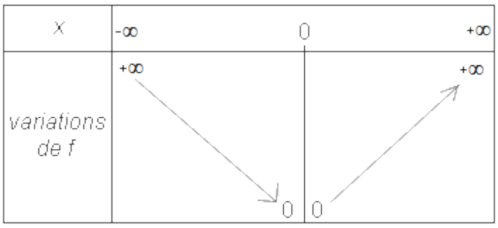
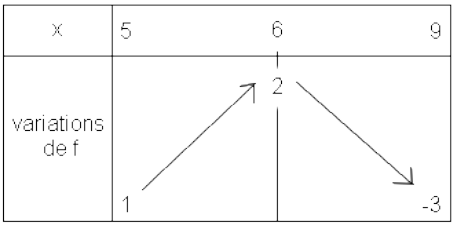
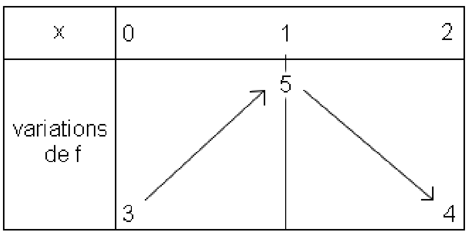


Tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2$.

Exercice 1 : Sur quel intervalle la fonction f est-elle croissante?



Exercice 2 : Quel est le maximum de la fonction f sur son ensemble de définition?

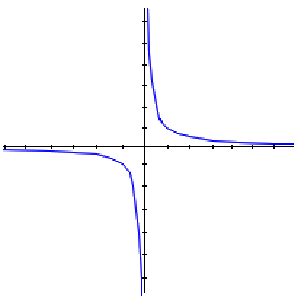


Exercice 3 : La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)=-2x+13 est-elle croissante ou décroissante?

Exercice 4 : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est la **fonction inverse**. Sa courbe est **une hyperbole**.

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$

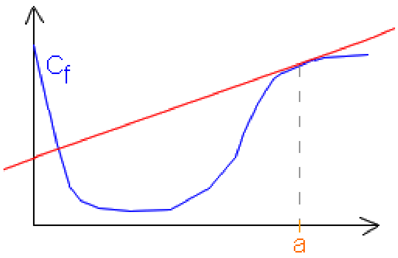
$D = \mathbb{R}^*$



Rédiger son tableau de variation.

Le nombre dérivé

On définit **le nombre dérivé d'une fonction en un point** comme **<u>le coefficient directeur de la tangente à la courbe de cette fonction en ce point</u>**.



La droite est la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse *a*.

Le nombre dérivé de *f* en *a* est le coefficient directeur de la droite.

Si le **nombre dérivé** est **positif**, le coefficient directeur de la tangente est positif, donc **la courbe monte**, et réciproquement s'il est **négatif**, **la courbe descend**.

Étudier les variations d'une fonction revient donc à étudier le signe de ses nombres dérivés en fonction de x. La fonction dérivée associe à tout nombre x le nombre f'(x).

Comment peut-on connaître l'expression de f'(x)? Il va falloir apprendre les formules !

$\boxed{\text{Si } f(x)=x^n \text{ alors } f'(x)=nx^{n-1}}$; $\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$; $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$; $\boxed{\text{Si } f(x)=kg(x) \text{ alors } f'(x)=kg'(x)}$

<u>Exemple</u>

Calcul de la dérivée de la fonction définie pour tout x≥0 par $f(x)=x\sqrt{x}$.

- **1.** On pose $u(x)=x$ et $v(x)=\sqrt{x}$
- **2.** On obtient $u'(x)=1$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x)=\underline{u'(x)}\,\underline{v(x)}+\underline{u(x)}\,\underline{v'(x)}$$

$$=\underset{u'}{1}\times\underset{v}{\sqrt{x}}+\underset{u}{x}\times\underset{v'}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Calcul de la dérivée de la fonction définie pour tout x par $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

- **1.** On pose $u(x)=x^2-1$ et $v(x)=x^2+1$
- **2.** On obtient u'(x)=2x et v'(x)=2x.

$$f'(x)=\frac{2x\times(x^2+1)-(x^2-1)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Pour étudier les variations d'une fonction :

- **1.** On calcule sa dérivée.
- **2.** On étudie le signe de la dérivée (avec une inéquation).
- **3.** On dessine un tableau comme ci-dessous :

x	
signe de f'(x)	
variations de f	

- **4.** On écrit sur la première ligne les valeurs de x pour lesquelles f'(x) change de signe.
- **5.** On remplit la deuxième ligne avec des + ou des -.
- **6.** On remplit la troisième ligne avec des flèches qui montent lorsque f'(x)>0 pour les valeurs de x situées sur la première ligne, ou qui descendent si f'(x)<0.

Étude des variations de $f(x) = 4x^3-60x^2+200x$.

1. $f'(x)=12x^2-120x+200$.

2. On doit résoudre l'inéquation $12x^2-120x+200>0$:

$12x^2-120x+20$ est positif (+) sur $\left]-\infty; 5-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right] \cup \left[5+\frac{5}{3}\sqrt{3}; +\infty\right[$ et négatif (-) sur $\left[5-\frac{5}{3}\sqrt{3}; 5+\frac{5}{3}\sqrt{3}\right]$.

3. 4. 5. et **6.**

x	$-\infty$		$5-\frac{5}{3}\sqrt{3}$ $\simeq 2{,}11$		$5+\frac{5}{3}\sqrt{3}$ $\simeq 7{,}89$		$+\infty$
Signe de f'(x)		+	0	—	0	+	
Variations de f		↗		↘		↗	

Exercice : Rédiger le tableau de variation des fonctions suivantes

$f(x)=x^7$; $f(x)=5x^5+3x^3+x$; $f(x)=9x^7+7x^5-24x$; $f(x)=x^2-2\sqrt{x}+2$; $f(x)=-\frac{1}{x}$; $f(x)=x^2\sqrt{x}$; $f(x)=\frac{x^2+x-3}{x^2-3}$; $f(x)=\frac{x^3-x}{x^4+2}$.