Comment déterminer une asymptote à la courbe représentative d'une fonction ?

On utilise les résultats donnés dans l'Essentiel page 234 au paragraphe 2 : Asymptotes à une courbe représentative.

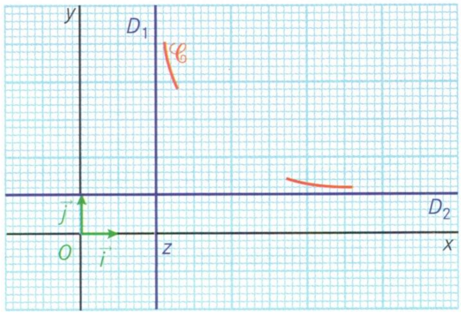
***Exemple 1.** f est définie sur]2 ; + ∞[par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.*

***1.** Étudier $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

***2.** Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; interpréter graphiquement le résultat obtenu.*

1. $\lim\limits_{x \to 2} (x+1) = 3$ et $\lim\limits_{x \to 2} (x-2) = 0$ d'où, puisque $x - 2 > 0$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet pour **asymptote la droite D_1 d'équation $x = 2$.**



2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$; $\mathscr{C}$ admet pour **asymptote la droite D_2 d'équation $y = 1$.**

La position de $\mathscr{C}$ par rapport à D_2 est donnée par le signe de $f(x) - 1$.

$f(x) - 1 = \dfrac{x+1}{x-2} - 1 = \dfrac{3}{x-2}$ donc, sur]2 ; + ∞[

$f(x) - 1 > 0$; **$\mathscr{C}$ est « au-dessus » de D_2.**

***Exemple 2.** f est définie sur [0 ; + ∞[par $f(x) = x + 2 - xe^{-x}$.*

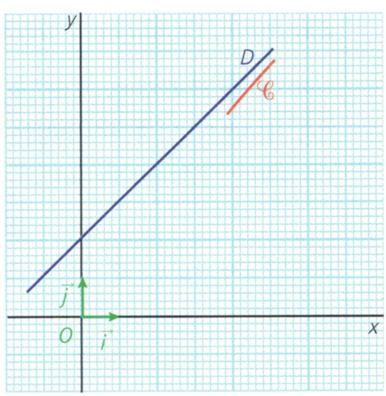
***1.** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$; en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.*

***2.** Justifier que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite D d'équation $y = x + 2$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$; on ne peut conclure directement pour $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$.

On écrit $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$; on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (voir formulaire) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$;

on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim (x+2) = +\infty$.



2. $f(x) - (x+2) = -xe^{-x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-xe^{-x}) = 0$ donc $\mathscr{C}$ admet pour **asymptote la droite D d'équation $y = x + 2$.**

$-xe^{-x} < 0$ donc **$\mathscr{C}$ est « au-dessous » de D.**