Loi binomiale

Définitions

On appelle **épreuve de Bernoulli**, toute éprouve aléatoire ne pouvant conduire qu'à deux résultats : « **succès** » ou « **échec** ».

Si la probabilité du succès est p , la probabilité de l'échec est $q=1-p$.

Une suite d'épreuves est un **schéma de Bernoulli** si :
- le nombre d'épreuves n est fixé à l'avance ;
- toutes les épreuves sont identiques et indépendantes ;
- la probabilité p d'obtenir un succès est constante d'une épreuve à l'autre.

Exemples : Suite de n tirages d'une boule dans une urne avec remise, lancers d'une pièce de monnaie …

Exemple : Une urne contient 2 boules rouges, 2 boules bleues et 2 boules vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule que l'on remet dans l'urne après avoir noté sa couleur.
On effectue 6 tirages. Quelle est la probabilité de tirer 4 boules rouges ?

Le tirage d'une boule avec remise est une épreuve. Pour chaque épreuve, il y a deux résultat possibles : la boule est rouge (*R*) ou la boule n'est pas rouge (*N*).
Les probabilités correspondants sont :

$P(R)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, appelée probabilité de **succès** et noté *p* et

$P(N)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, appelée probabilité d'**échec** et noté *q* (*q=1-p*) .

Cette épreuve est dite « **épreuve de Bernoulli de paramètre *p*** » .
On répète 6 fois cette éprouve de façon identique (*n=6*).
Notons (*R*,*R*,*N*,*R*,*N*,*R*) un résultat contenant 4 boules rouges. Les 6 épreuves sont indépendants, donc la probabilité d'obtenir cette suite est :

$$P(R,R,N,R,N,R)=P(R)\times P(R)\times P(N)\times P(R)\times P(N)\times P(R)=\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 .$$

Or le nombre de ces suites favorables est égal au nombre de chemins de l'arbre réalisant 4 succès lors de 6 répétitions (par exemple (*N*,*R*,*R*,*R*,*N*,*R*) est une autre suite favorable).

Donc la probabilité de tirer 4 boules rouge est égale à $15\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\approx 0{,}0823$.

Propriétés

Dans un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire X donnant le nombre de succès en n épreuves est notée $B(n;p)$, les nombres n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on a le résultat suivant :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad ; \quad 0\leq k\leq n .$$

$\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n » ; c'est le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors de n répétitions.

Remarque : ces formules n'ont pas à être mémorisées, tous les calculs seront effectués avec une calculatrice.

Espérance et écart type

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n;p)$, alors

$$E(X)=np \quad \text{et} \quad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}\ .$$

Interprétation : l'espérance est la valeur que l'on peut espérer obtenir en moyenne lorsque l'on reproduit un grand nombre de fois l'expérience.

Comment justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale et comment effectuer des calculs avec cette loi ?

Une entreprise fabrique une grande quantité de tubes. Dans un lot de tubes, 3 % des tubes ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tubes de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tubes.

On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. *Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.*
   - On considère une épreuve de Bernoulli, qui consiste à prélever un seul tube avec
     Succès : le tube prélevé n'est pas conforme, de probabilité $p=0{,}03$;
     Échec : l'événement contraire, de probabilité $q=1-p=0{,}97$.
   - On répète 50 fois cette épreuve de façon identique et indépendante car on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   - La variable aléatoire Z compte le nombre de succès obtenus.
   - Donc la variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0{,}03$.
2. *Calculer la probabilité $P(Z=0)$.*

   Avec une calculatrice : $P(Z=0)\approx 0{,}218$.
3. *Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un tube ne soit pas conforme pour la longueur.*

   $P(Z\geq 1)=1-P(Z=0)\approx 0{,}782$.

Exercices

Ex 1 : Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard, cinq fois de suite avec remise.
Le joueur gagne s'il tire une figure, c'est-à-dire un valet, une dame ou un roi.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de gains.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=5)$.
3. Calculer la probabilité de gagner au moins une fois.

Ex 2 : Dans une usine on utilise cinq machines identiques. La probabilité que l'une d'entre elles tombe en panne dans une semaine est 0,01.

Les pannes étant indépendantes les une des autres, déterminer la probabilité des événements suivants :

a) A : « Il s'est produit exactement une panne au cours de la semaine » ;
b) B : « Il s'est produit exactement deux pannes au cours de la semaine » ;
c) C : « Il ne s'est produit aucune panne au cours de la semaine » ;
d) D : « In s'est produits au moins une panne au cours de la semaine ».

Ex 3 : Un petit artisan emploie trois ouvriers, la probabilité pour que l'un d'entre eux soit absent un jour donné est 0,05.
On suppose que les trois ouvriers s'absentent indépendamment les uns des autres.
Soit X la variable aléatoire qui à une journée associe le nombre d'ouvriers absents.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la table des valeurs de X.
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins un ouvrier présent.

Ex 4 : Un tireur à la carabine touche le centre de la cible avec une probabilité égale à 0,7.

1. Quelle est la probabilité pour que sur 5 tirs il touche au moins une fois le centre de la cible ?
2. Combien de tirs doit-il effectuer pour que la probabilité qu'il touche au moins une fois le centre de la cible soit supérieure à 0,95 ?

Ex 5 : Un constructeur de composants électroniques fabrique des diodes. La probabilité pour qu'une diode soit défectueuse est 5×10^{-3}. On prélève au hasard un lot de 10 diodes dans la production d'une journée. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 diodes.

Calculer à 10^{-4} près la probabilité d'avoir dans un lot de 10 diodes :

a) exactement une diode défectueuse ;
b) exactement deux diodes défectueuses ;
c) au moins deux diodes défectueuses ;
d) au plus deux diodes défectueuses.

Ex 6 : On a observé que 2 % des micro-ordinateurs d'un type donné tombaient en panne par mois d'utilisation. On suppose que les pannes de tels ordinateurs sont indépendantes.
On note X la variable aléatoire associant le nombre de pannes prévisibles à chaque parc de 150 ordinateurs (on assimilera le choix des 150 machines à un tirage avec remise).

1. Déterminer la loi de probabilité de X et ses paramètres.
2. Calculer à 10^{-3} près la probabilité des événements suivants :
   a) « Le nombre mensuel de pannes est 5 » ;
   b) « Le nombre mensuel de pannes est au moins égale à 2 ».

Ex 7 : Une entreprise fabrique des tables de jardin en bois. La fabrication d'une table nécessite 12 planches.
La probabilité qu'une planche présente un nœud dans le bois, ce qui fragilise la table, est 0,04.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de planches fragiles par table à la sortie de la fabrication.
Une table est mise en vente au prix normal si elle possède au plus une planche fragile.
Elle n'est pas mise en vente si elle possède plus de trois planches fragiles. Elle est vendue en promotion dans les autres cas.

1. Donner, en justifiant, la loi de probabilité de X. Préciser les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'une table soit vendue au prix normal.
3. Calculer la probabilité pour qu'une table soit vendue en promotion.

Ex 8 : Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Une entreprise fabrique un certain type d'article électroménager. On admet que chaque article de ce type peut présenter deux type de défauts :

- un défaut de soudure, noté défaut *a ;*
- un défaut sur un composant électronique, noté défaut *b*.

Première partie. Événements indépendants

On prélève un article au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'événement « L'article présente le défaut *a* ».
On note B l'événement « L'article présente le défaut *b* ».
On admet que $p(A)=0{,}03$ et $p(B)=0{,}02$ et on suppose que A et B sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'événement E_1 « L'article présente le défaut *a* et le défaut *b* ».
2. Calculer la probabilité de l'événement E_2 « L'article présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'événement E_3 « L'article ne présente aucun défaut ».
4. Calculer la probabilité de l'événement E_4 « L'article présente un seul des deux défauts ».

Deuxième partie. Loi binomiale

Dans cette partie, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.
Les articles sont mis en place dans des petites surfaces de distribution par lot de 25.
On prélève au hasard un lot de 25 articles dans la production d'une journée.
On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 25 articles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 25 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ces 25 articles.
On suppose que la probabilité de l'événement D : « L'article est défectueux » est $p(D)=0{,}05$.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $p(X=0)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux articles défectueux.
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux articles défectueux.