

Primitives

La **primitive** d'une fonction f est une fonction F qui a pour [dérivée](#) f .

Les primitives servent à [calculer des intégrales](#).

Primitive d'une fonction

Une primitive d'une fonction f est une fonction F telle que $F' = f$.

On parle de **la** dérivée d'une fonction et d'**une** primitive d'une fonction, car une fonction admet toujours une infinité de primitives (on peut toujours ajouter des constantes).

Exemples

- Une primitive de $f : x \mapsto 3x^2$ est $F : x \mapsto x^3$.
- Une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $F : x \mapsto -\frac{1}{x}$.

Calcul de primitive

Le calcul des primitives nécessite une maîtrise parfaite des [formules de dérivation](#) et un peu d'entraînement.

Calculer une primitive de la fonction f définie pour tout x strictement positif par $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Propriétés

La primitive d'une somme de fonctions est la somme des primitives de ces fonctions et la primitive du produit d'un nombre par une fonction est le produit de ce nombre par la primitive de cette fonction.

Exemple : une primitive de $f : x \mapsto 2x+3$ est $F : x \mapsto x^2+3x$.

Primitive d'une fonction puissance

La primitive d'une fonction de la forme $f(x) = x^n$ est $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, où C peut être n'importe quel nombre.

Exemples

- Une primitive de la fonction $f(x) = x^8$ est $F(x) = \frac{1}{9} x^9$.
- Une primitive de la fonction $f(x) = 3x^4$ est $F(x) = \frac{3}{5} x^5 + 6$.

Écris sous la forme $\frac{a}{b}x^c + d$ une primitive de la fonction f définie pour tout x par $f'(x) = 8x^9$.

Primitive d'un quotient

Nous savons que pour toute fonction u positive, la dérivée de $\ln(u)$ est u'/u .
Une primitive de u'/u est donc $\ln(|u|)$, ou simplement $\ln(u)$ si u est positive.

Exemple

Une primitive de la fonction $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ est $F(x) = \ln(x^2+1)$.

Méthode

Pour calculer la primitive d'une fonction définie par un quotient :

- 1. On cherche à repérer la forme u'/u .
- 2. On transforme l'écriture de la fonction en faisant apparaître la forme u'/u .
- 3. On applique la formule.

Exemple

Calcul de la primitive de la fonction $f'(x) = \frac{2x^2}{x^3+3}$.

- 1. On pose $u(x)=x^3+3$. Comme $u'(x)=3x^2$, on cherche à faire apparaître $3x^2$.
- 2. $f'(x) = 2 \times \frac{x^2}{x^3+3} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{3x^2}{x^3+3} = \frac{2}{3} \times \frac{3x^2}{x^3+3}$
- 3. $F(x) = \frac{2}{3} \ln(|x^3+3|) + C$.

Écris sous la forme $F(x) = \frac{a}{b} \ln(u(x)) + c$ une primitive de la fonction f définie pour tout x par $f'(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$

Primitive avec composée de fonctions

Il est possible de calculer la primitive d'une fonction dans laquelle on reconnaît l'une des formules de [dérivée d'une fonction composée](#).

En inversant ces formules, nous avons :

- Une primitive de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ est \sqrt{u} .
- Une primitive de $mu'u^{n-1}$ est u^n .
- Une primitive de $u'e^u$ est e^u .
- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln u$.
- Une primitive de $f' \circ g \times g'$ est $f \circ g$.

La difficulté consiste à reconnaître la présence de l'une de ces formules puis de transformer l'écriture de la fonction pour faire apparaître une fonction u et sa dérivée u' .
On y arrive toutefois avec un peu d'entraînement.

Exemple

Primitive de $f(x)=x(x^2+3)^4$

On reconnaît la forme u^n .

Nous avons besoin de u^n et u' pour faire apparaître $nu'u^{n-1}$.

Posons $u(x)=x^2+3$. Alors $u'(x)=2x$.

On modifie l'écriture de f pour faire apparaître $2x$: $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x (x^2+3)^4 = \frac{1}{2} u' u^4$.

Donc $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} u^5 = \frac{(x^2+3)^5}{10}$.

Exercice 1

Détermine une primitive de la fonction $f(x) = 9x^8$ qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^k$.

Exercice 2

Détermine une primitive de la fonction $f(x) = x^6 + x^7$.

Exercice 3

Détermine une primitive de la fonction $f(x) = -\frac{3}{x^2}$.

Exercice 4

Détermine une primitive de la fonction $f(x) = 3x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 5

Détermine une primitive de la fonction $f(x) = \frac{10x+5}{x^2+x}$.

Exercice 6

Détermine une primitive de la fonction $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 7

Détermine une primitive de la fonction $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 8

Détermine une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{8} \times \frac{8x^3+6x^2}{x^4+x^3}$.

Exercice 10

Détermine une primitive de la fonction $f(x) = 3x^3(x^4+4)^4$.