Comment résoudre à la main une équation différentielle du premier ordre ?

Pour résoudre l'équation (1) $ay' + by = c(x)$:

1. On écrit l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre associée :

$$(2) \quad ay' + by = 0.$$

Ce sont les fonctions définies par $y_0(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x}$ (k réel quelconque).

2. On recherche une fonction f solution de l'équation (1) $ay' + by = c(x)$.
Dans les cas usuels :
– soit l'énoncé propose une fonction solution ; il suffit de vérifier ;
– soit l'énoncé fournit des indications ; on suit ces indications.

3. On écrit l'ensemble des solutions de l'équation (1), ce sont les fonctions définies par :

$$y(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}x} + f(x) \text{ ; } k \text{ réel quelconque.}$$

Exemple

Résoudre l'équation (1) $3y' + 2y = 4x$.

On vérifiera que la fonction $f : x \mapsto 2x - 3$ est une solution de l'équation (1).

__1.__ L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre associée (2) $3y' + 2y = 0$, est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y_0(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} \text{ avec } k \text{ réel quelconque.}$$

__2.__ On vérifie que la fonction f proposée est bien une solution de l'équation (1).
Si $f(x) = 2x - 3$ alors $f'(x) = 2$,
ainsi $3f'(x) + 2f(x) = 3 \times 2 + 2(2x - 3)$,
soit $3f'(x) + 2f(x) = 4x$.
La fonction f est bien une solution de l'équation (1).

__3.__ L'ensemble des solutions de l'équation (1) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} + 2x - 3 \text{ ; } k \text{ réel quelconque.}$$