Les lois de Descartes

René Descartes (1596-1650) exprime de façon quantitative la propagation de la lumière lorsque celle-ci rencontre un milieu différent.

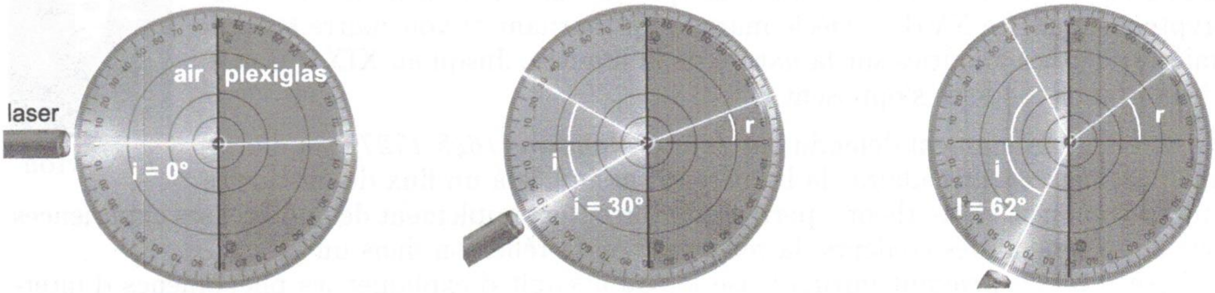
Le plan d'incidence

Lorsqu'un rayon lumineux aborde l'interface entre deux milieux homogènes, il donne naissance à deux rayons secondaires :

- le **rayon réfléchi** qui repart vers le milieu d'origine.
- le **rayon réfracté** qui poursuit sa progression dans le second milieu.

Ces trois rayons sont contenus dans un même plan : le **plan d'incidence**.

La droite perpendiculaire à la surface de séparation et passant par le point de contact du rayon incident sur l'interface est appelée **droite normale**. Elle joue un rôle particulièrement important puisque tous les angles sont définis par rapport à sa direction.



Réflexion et réfraction d'un faisceau laser dans un bloc de plexiglas

Loi de la réflexion

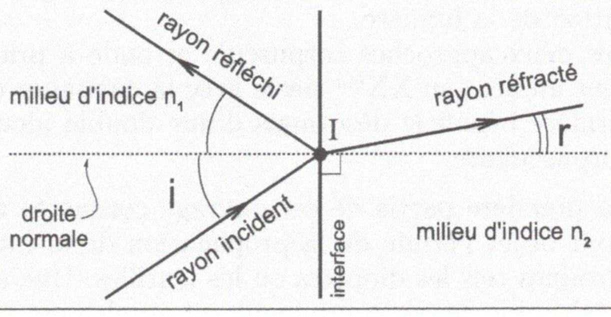
Les rayons incident et réfléchi sont symétriques par rapport à la droite normale à la surface de séparation. Les angles réfléchi et incident sont donc identiques.

Loi de la réfraction

Le rayon réfracté change de direction par rapport au rayon incident.

Les angles incident et réfracté sont liés par la relation de Snell-Descartes :

$$\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r} \qquad (1.1)$$



n_1 et n_2 désignent les **indices optiques** des milieux 1 et 2. Ils dépendent de la vitesse v de la lumière dans le milieu :

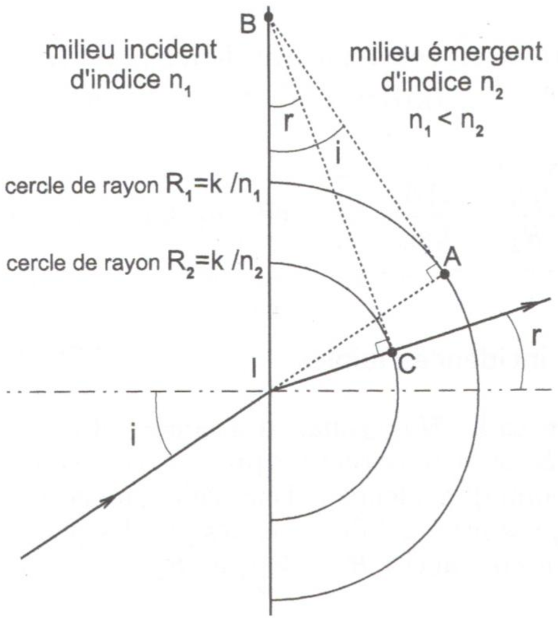
$$\boxed{n = \frac{c}{v}}$$

c désigne la célérité de la lumière dans le vide et v dans le milieu de propagation. L'indice optique n est un nombre sans unité, toujours supérieur à l'unité.

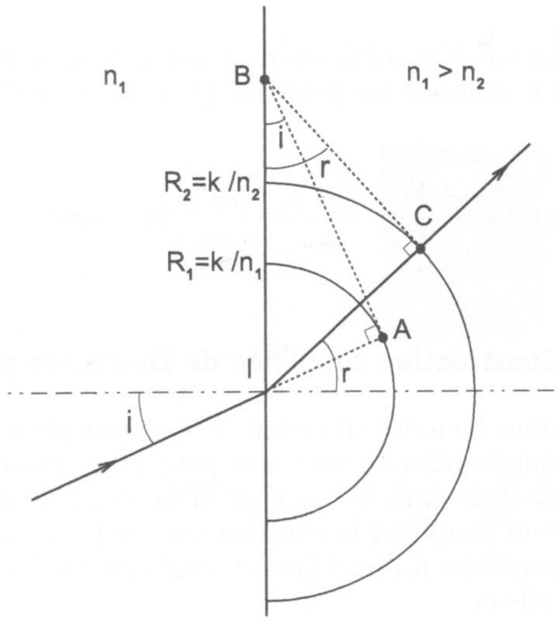
Construction graphique du rayon réfracté

Construction de Huygens

- On trace les cercles dont les rayons R_1 et R_2 sont inversement proportionnels aux indices des milieux incident et émergent : $R_1 = k/n_1$ et $R_2 = k/n_2$.
- Le prolongement du rayon incident dans le second milieu intercepte le cercle de rayon k/n_1 en un point A. La tangente en A à ce cercle coupe l'interface en B.
- La droite passant par B est tangente au cercle de rayon k/n_2 en un point C. Le rayon réfracté pointe alors vers le point C.



Construction de Huygens $n_1 < n_2$



Construction de Huygens $n_1 > n_2$

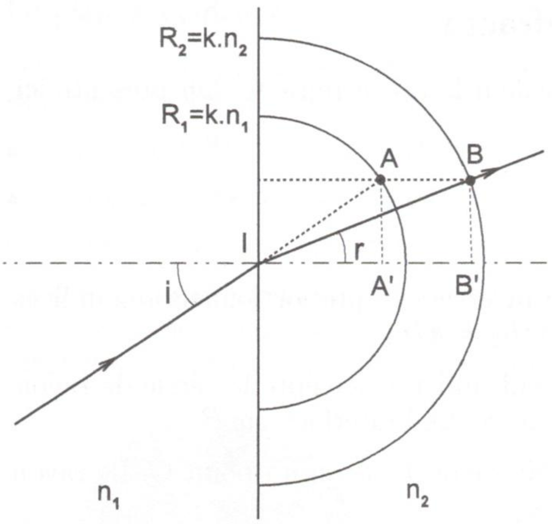
On vérifie facilement la cohérence de cette construction avec la loi de la réfraction, dans les triangles $(A\,I\,B)$ et $(B\,I\,C)$, on a respectivement :

$$\sin i = \frac{IA}{IB} = \frac{R_1}{IB} = \frac{k}{n_1.IB} \qquad \text{et} \qquad \sin r = \frac{IC}{IB} = \frac{R_2}{IB} = \frac{k}{n_2.IB}$$

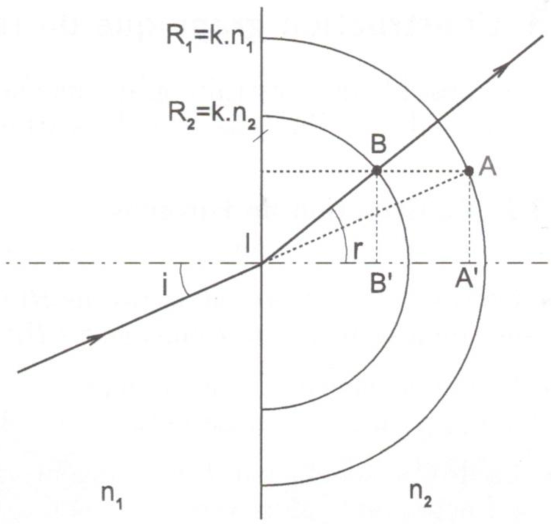
On retrouve bien l'égalité : $n_1.\sin i = n_2.\sin r$

Construction de Descartes

- On trace les cercles de rayons $R_1 = k.n_1$ et $R_2 = k.n_2$, respectivement proportionnels à n_1 et à n_2.
- Le point A est l'intersection du prolongement du rayon incident dans le second milieu avec le cercle de rayon $k.n_1$.
- La droite passant par A et perpendiculaire à l'interface, coupe le cercle de rayon $k.n_2$ en B. Le rayon réfracté pointe alors vers le point B.



Construction de Descartes $n_1 < n_2$



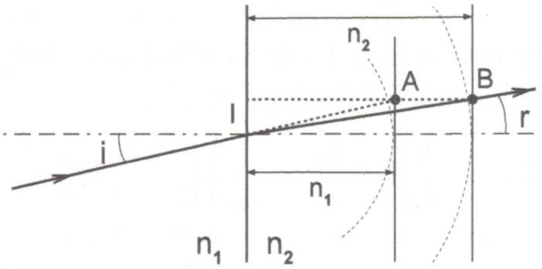
Construction de Descartes $n_1 > n_2$

Là aussi, la méthode de construction du rayon réfracté est cohérente avec la relation (1.1). En utilisant les triangles $(I\,A\,A')$ et $(I\,B\,B')$, on a :

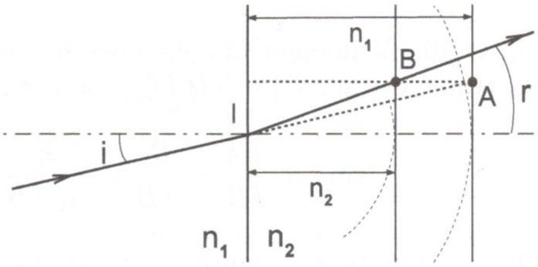
$$\sin i = \frac{AA'}{IA} = \frac{AA'}{R_1} = \frac{AA'}{k.n_1} \quad \text{et} \quad \sin r = \frac{BB'}{IB} = \frac{AA'}{R_2} = \frac{AA'}{k.n_2} \quad \text{et donc} \quad n_1.\sin i = n_2.\sin r$$

Construction simplifiée de Descartes pour des incidences faibles

Dans bien des situations (fréquemment rencontrées en ETSO), l'angle d'incidence et donc l'angle réfracté sont très petits. Les points A et B de la construction précédente restent localisés dans le voisinage de la droite normale au point d'incidence I. Dans ce voisinage, on peut simplifier la construction de Descartes en approximant les deux cercles par des plans parallèles à l'interface et situés respectivement à des distances $R_1 = k.n_1$ et $R_2 = k.n_2$ de celle-ci.



$n_1 < n_2$

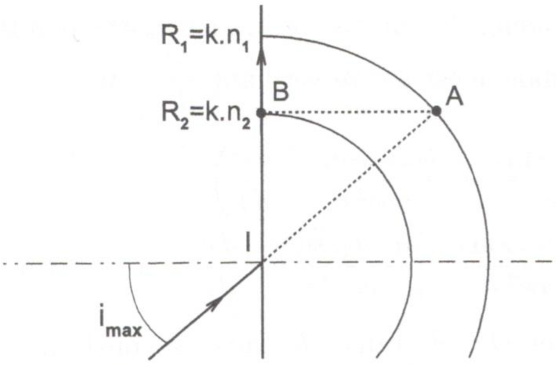


$n_1 > n_2$

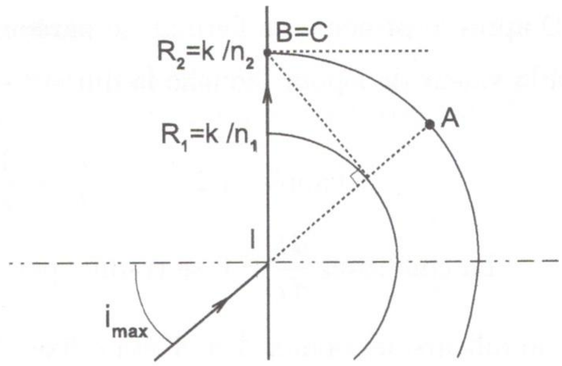
L'erreur relative induite par cette approximation est limitée à quelques % pour un angle incident inférieur à 15°.

Angle limite de réfraction

Lorsque l'indice optique du milieu incident est supérieur à celui du milieu émergent, le rayon réfracté s'écarte de la droite normale. Il existe un angle limite i_{max} pour lequel le rayon réfracté devient tangent à l'interface entre les deux milieux. Au delà de i_{max}, la réfraction devient impossible, la totalité du faisceau incident est réfléchie.



Angle limite : méthode de Descartes



Angle limite : méthode de Huygens

La relation (1.1) donne une expression de cet angle limite en fonction des indices :

$$n_1 . \sin i_{max} = n_2 \quad (r = 90°) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\sin i_{max} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Le principe de Fermat *- Pierre de Fermat (1605-1665) -*

« La nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples »

En d'autres termes, lorsque la lumière se propage, elle suit toujours le chemin le plus rapide.

Propagation rectiligne dans un milieu isotrope et homogène

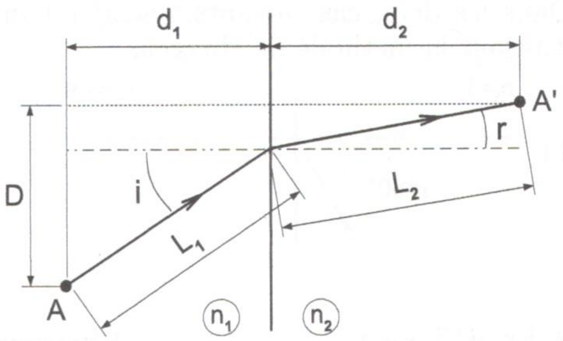
Lorsque la lumière se propage dans un milieu isotrope et homogène, le chemin le plus rapide est également le plus court géométriquement. Le principe de Fermat est donc cohérent avec le déplacement rectiligne de la lumière dans les milieux isotropes et homogènes.

Principe de Fermat et réfraction

Le principe de Fermat permet également de retrouver la loi de la réfraction.

Considérons deux points A et A' situés de part et d'autre de l'interface entre deux milieux homogènes d'indices n_1 et n_2. La célérité de la lumière dans les deux milieux vaut respectivement $v_1 = \dfrac{c}{n_1}$ et $v_2 = \dfrac{c}{n_2}$.

On note d_1 et d_2 les distances séparant A et A' de l'interface et D la distance entre les deux points, mesurée parallèlement à l'interface. Un rayon issu de A subit une réfraction à l'interface avant d'atteindre le point A'.



La durée t du parcours de la lumière de A jusqu'en A' s'écrit :

$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{1}{c}(L_1.n_1 + L_2.n_2) \qquad \text{avec} \quad L_1 = \frac{d_1}{\cos i} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{d_2}{\cos r}$$

$$\text{on obtient donc :} \quad t = \frac{1}{c}\left(\frac{d_1.n_1}{\cos i} + \frac{d_2.n_2}{\cos r}\right) \tag{1.2}$$

D'après le principe de Fermat, le parcours réellement effectué par la lumière correspond à la valeur de i pour laquelle la durée t est minimale, c'est à dire vérifiant $\dfrac{dt}{di} = 0$.

$$\text{D'après (1.2) :} \qquad \frac{dt}{di} = \frac{1}{c}\left(\frac{d_1.n_1.\sin i}{\cos^2 i} + \frac{d_2.n_2.\sin r}{\cos^2 r}\cdot\frac{dr}{di}\right)$$

$$\text{La condition } \frac{dt}{di} = 0 \text{ se traduit par :} \qquad \frac{d_1.n_1.\sin i}{\cos^2 i} + \frac{d_2.n_2.\sin r}{\cos^2 r}\cdot\frac{dr}{di} = 0 \tag{1.3}$$

Par ailleurs, les points A et A' étant fixes, la distance $D = d_1.\tan i + d_2.\tan r$ est constante :

$$\frac{dD}{di} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{d_1}{\cos^2 i} + \frac{d_2}{\cos^2 r}.\frac{dr}{di} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{d_2}{\cos^2 r}.\frac{dr}{di} = -\frac{d_1}{\cos^2 i}$$

En reportant dans l'équation (1.3), on obtient :

$$\frac{d_1}{\cos^2 i}.\big(n_1.\sin i - n_2.\sin r\big) = 0 \qquad \text{d'où l'on tire effectivement :} \quad n_1.\sin i = n_2.\sin r$$

Retour inverse de la lumière

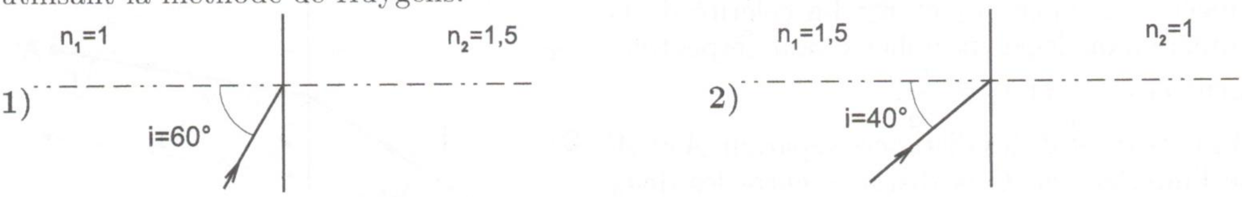
Supposons que l'on inverse le rôles entre *A* et *A'* : *A'* devient le point objet. Le chemin suivi par la lumière en sens inverse est identique, seul le sens de propagation est inversé.

Ex 1 : Indice de réfraction

La célérité de la lumière dans le vide est $c = 3,0.10^8\, m.s^{-1}$. Calculer la célérité d'un faisceau lumineux lorsqu'il pénètre dans le bloc de verre d'indice optique $n_{\text{verre}} = 1,5$.

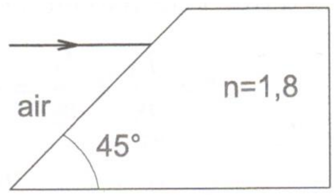
Ex 2 : Construction graphique du rayon réfracté

Dans les deux cas suivants, calculer l'angle de réfraction et tracer le rayon réfracté en utilisant la méthode de Huygens.



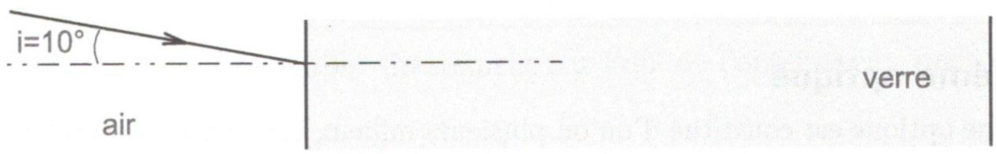
Ex 3 : Réfraction dans un prisme

Un prisme isocèle (face inclinée à 45°) est taillé dans un verre d'indice optique $n = 1,8$.
Construire graphiquement la marche du rayon incident au travers du prisme en utilisant la méthode de Descartes.



Ex 4 : Lame à faces parallèles

Construire la marche d'un rayon abordant, sous une incidence de 10°, la face d'entrée d'une plaque en verre à faces parallèles d'épaisseur $20\,mm$. L'indice du verre vaut $1,5$. (échelle horizontale : 4/1)



Ex 5 : Réfraction, angle limite

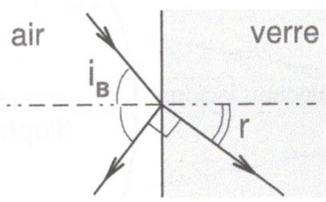
Un faisceau lumineux passe de l'eau d'indice optique $n_{eau} = 1,3$ à l'air ($n_{air} = 1,0$).

1. Calculer l'angle de réfraction lorsque l'angle d'incidence vaut $i = 45°$.
2. Calculer la valeur de l'angle limite de réfraction.

Ex 6 : Angle de Brewster

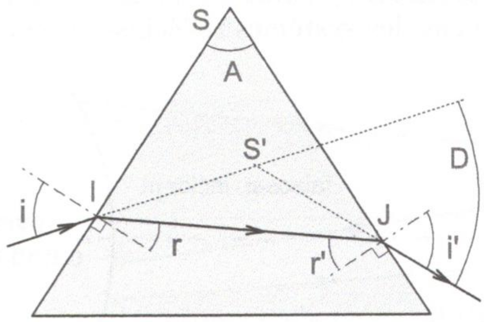
On appelle angle de Brewster la valeur particulière de l'angle d'incidence pour laquelle les rayons réfléchi et réfracté sont perpendiculaires.

Un faisceau incident provenant de l'air pénètre dans une lame de verre d'indice $n = 1,5$.
Calculer l'angle de Brewster correspondant.



Ex 7 : Prisme

Un prisme en verre dont la base est un triangle équilatéral ($A = 60°$) est taillé dans un verre d'indice $n = 1,5$.



1. En utilisant les triangles (I, J, S) et (I, J, S'), écrire deux relations liant les angles A, r, r', i, i' et D.
2. *Le maximum de déviation est obtenu lorsque* $i' = 90°$. Calculer la valeur i_0 de l'angle incident correspondant.
3. En déduire la valeur $D_{\max}$ de la déviation maximale du faisceau par le prisme.

SOLUTIONS

Ex 1 : Indice de réfraction

$$n_{\text{verre}} = \frac{c}{v_{\text{verre}}} \qquad \text{donc} \qquad v_{\text{verre}} = \frac{c}{n_{\text{verre}}} \qquad \boxed{v_{\text{verre}} = 2,0.10^8\, m.s^{-1}}$$

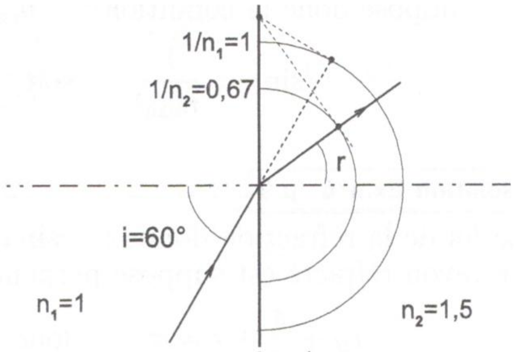
Ex 2 : Construction graphique du rayon réfracté

1. **Premier cas**
   Calcul de l'angle de réfraction :

$$n_1.\sin i = n_2.\sin r$$

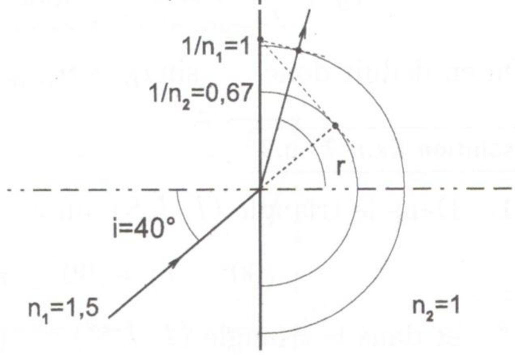
$$\text{donc} \quad \sin r = \frac{n_1.\sin i}{n_2}$$

$$\boxed{r = 35,3°}$$

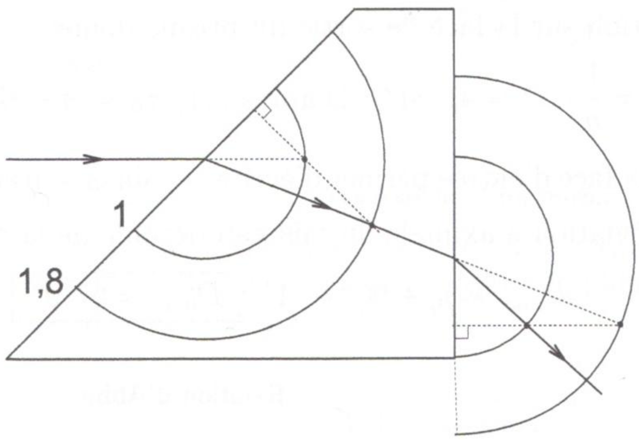


2. **Second cas**
   Le second milieu est cette fois moins réfringent que le premier, le rayon s'éloigne donc de la droite normale, le calcul donne :

$$\boxed{r = 74,6°}$$

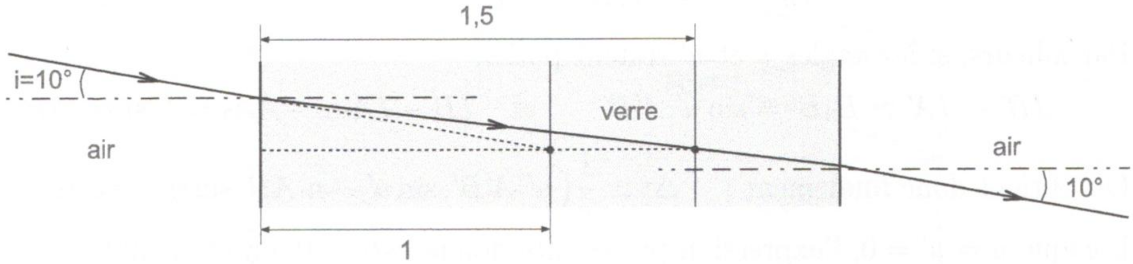


Ex 3 : Réfraction dans un prisme



Ex 4 : Lame à faces parallèles

L'angle d'incidence est suffisamment faible pour utiliser la construction de Descartes en assimilant les cercles de rayons 1 et $1,5$ à des plans.



Le rayon aborde la seconde face avec un angle incident égal à l'angle de réfraction lors du passage air/verre. Il émerge donc de la lame sous un angle de 10°.

Ex 5 : Réfraction, angle limite

1. L'application directe de la loi de la réfraction donne :

$$n_{\text{eau}}.\sin i = \sin r \qquad \text{donc} \qquad \sin r = 0,919 \qquad \boxed{r = 66,8°}$$

2. Le sinus d'un angle doit toujours être inférieur à 1, la relation $n_{\text{eau}}.\sin i = \sin r$ impose donc la condition : $n_{\text{eau}}.\sin i < 1$ Cette condition conduit à :

$$\sin i < \frac{1}{n_{\text{eau}}} \qquad \text{soit} \quad i_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{eau}}}\right) \qquad \boxed{i_{max} = 50,3°}$$

Ex 6 : Angle de Brewster

La loi de la réfraction donne : $\sin i_B = n_{\text{verre}} \cdot \sin r$
Le rayon réfracté est supposé perpendiculaire au rayon réfléchi :

$$i_B + \frac{\pi}{2} + r = \pi \qquad \text{donc} \quad r = \frac{\pi}{2} - i_B \qquad \text{et donc} \quad \sin r = \cos i_B$$

On en déduit donc : $\sin i_B = n_{\text{verre}} \cdot \cos i_B$ soit $\tan i_B = n_{\text{verre}}$ $\boxed{i_B = 56,3°}$

Ex 7 : Prisme

1. Dans le triangle (I, J, S), on a :

$$(90° - r) + (90° - r') + A = 180° \qquad \text{donc} \quad \boxed{A = r + r'} \qquad (1)$$

et dans le triangle (I, J, S') : $(i - r) + (i' - r') + (180° - D) = 180°$

$$\text{soit, en utilisant (1) :} \quad \boxed{D = i + i' - A} \qquad (2)$$

2. $i' = 90°$, la réfraction sur la face de sortie du prisme donne :

$$\sin r'_0 = \frac{1}{n} \quad r'_0 = 41,81° \quad \text{D'après (1) : } r_0 = A - r'_0 = 18,19°$$

La réfraction sur la face d'entrée permet d'écrire : $\sin i_0 = n \sin r_0$ $\boxed{i_0 = 27,92°}$

3. La valeur de la déviation maximale du faisceau découle de la relation (2) :

$$D_{\max} = i_0 + 90° - A \qquad \boxed{D_{\max} = 57,9°}$$