Loi de Poisson

On peut généraliser les définitions et propriétés d'une variable aléatoire discrète dans le cas où X prend une infinité dénombrable de valeurs. Par exemple $X(\Omega)=\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$.

Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si :

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Valeurs caractéristiques de la loi de Poisson

À savoir

Si une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, alors :

- **$E(X) = \lambda$.**
- **$V(X) = \lambda$.**
- **$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.**

Comment calculer des probabilités dans la cadre de la loi de Poisson avec une calculatrice ?

Exemple.

Soit une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre 2,8. calculer les probabilités suivantes :

a) *$P(X = 3)$* ***b)*** *$P(x \leqslant 3)$.*

Utilisation d'une calculatrice Casio Graph 35+

a) *On tape* MENU STAT EXE, *puis* F5 *pour* DIST .
On tape F6 *pour* ▶, *puis* F1 *pour* POISN *et* F1 *pour* Ppd .
On tape F2 *pour* Var .
On rentre 3 après x: EXE .
On rentre 2.8 après µ: EXE EXE *et on obtient l'écran suivant :*

```
Poisson P.D
     p=0.22248374
```

Soit $P(X = 3) = 0{,}22248\ldots$

b) *On tape* MENU STAT EXE, *puis* F5 *pour* DIST .
On tape F6 *pour* ▶, *puis* F1 *pour* POISN *et* F2 *pour* Pcd .
On tape F2 *pour* Var *.On tape la valeur 3 après* x: .
On rentre 2.8 après µ: EXE EXE *et on obtient l'écran suivant :*

```
Poisson C.D
     p=0.69193743
```

Soit $P(X \leqslant 3) = 0{,}69193\ldots$

Utilisation d'une calculatrice TI 82 stats.fr ou 83 Plus

a) *On tape* 2nde var *pour distrib.*
On sélectionne B:poissonFdp(entrer .
poissonFdp(2.8, 3) entrer *donne l'écran suivant :*

```
poissonFdp(2.8,3
)
      .2224837491
```

Soit : $P(X = 3) = 0{,}22248\ldots$

b) *On tape* 2nde var *pour distrib.*
On sélectionne C:poissonFRép(entrer .
poissonFréq(2.8, 3) entrer *donne l'écran suivant :*

```
poissonFRép(2.8,
3)
      .6919374328
```

Soit $P(X \leqslant 3) = 0{,}6919\ldots$

Exercices :

12 **C** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 3. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X = 0)$; **b)** $P(X = 1)$;
c) $P(X \leqslant 3)$; **d)** $P(X > 2)$.

13 **R** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 1,6. Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X = 3)$; **b)** $P(X \leqslant 2)$; **c)** $P(X \geqslant 1)$.

14 **C** Le service qui gère les commandes d'une entreprise de vente par correspondance a relevé pour les années passées une moyenne de 5 erreurs pour 100 commandes.
On suppose que la variable aléatoire qui mesure le nombre d'erreurs pour 100 commandes suit la loi de Poisson de paramètre 5.
Déterminer la probabilité des événements suivants :

a) A : « Il y a exactement 5 erreurs » ;
b) B : « Il y a moins de 5 erreurs » ;
c) C : « Il y a au moins 5 erreurs ».

15 **R** Un livre de 300 pages contient 225 fautes d'impression distribuées au hasard. Soit X la variable aléatoire qui mesure le nombre de fautes par page, on suppose que X suit une loi de Poisson.

1. Déterminer le paramètre de cette loi.

2. Déterminer la probabilité qu'une page donnée contienne :
a) deux fautes d'impression ;
b) moins de deux fautes d'impression ;
c) au moins trois fautes d'impression.

16 Une entreprise de location de bateaux s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, un été donné, aux bateaux de sa flotte. Soit X la variable aléatoire qui à tout bateau tiré au hasard dans la flotte, associe le nombre de sinistres survenant pendant l'été considéré ; on admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 0,28.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : « Un bateau tiré au hasard dans la flotte n'a aucun sinistre pendant l'été considéré ».

2. Calculer la probabilité de l'événement « Un bateau tiré au hasard dans la flotte a au plus deux sinistres pendant l'été considéré ».

17 **C** On note X la variable aléatoire qui, à toute période de 100 jours consécutifs tirés au hasard dans les jours ouvrables de l'année, associe le nombre de panne d'une machine. Une étude menée par le constructeur permet d'admettre que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}5$.
Déterminer :

a) $P(X \leqslant 2)$;
b) la probabilité de l'événement : « La machine a au plus quatre pannes pendant la période de 100 jours consécutifs » ;
c) le plus petit entier n tel que : $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}99$.

18 Une compagnie d'assurances assure un parc de 200 véhicules contre un risque qui a une probabilité égale à 0,5 % de survenir.
Chaque véhicule rapporte 160 € à la compagnie. La compagnie verse 10 000 € par sinistre.
On admet que la variable aléatoire qui à tout parc de 200 véhicules associe le nombre de sinistres suit la loi de Poisson de paramètre 1.
On appelle X la variable aléatoire qui au nombre de sinistres fait correspondre la somme acquise ou due par la compagnie.

1. Calculer $P(X = 2\ 000)$.

2. Quelle probabilité la compagnie a-t-elle de faire un bénéfice ?

3. Donner la loi de probabilité de X.

4. Quelle est l'espérance de gain ?