400 ménages pris au hasard et avec remise dans la population S, associe la proportion de ménages de cet échantillon qui préfèrent le modèle (1).

On note F_N la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 500 ménages pris au hasard et avec remise dans la population N, associe la proportion de ménages de cet échantillon qui préfèrent le modèle (1).

On suppose que la loi de la variable $D = F_S - F_N$ est approximativement une loi normale de moyenne $p_S - p_N$ inconnue et d'écart type 0,032 (p_S et p_N étant les pourcentages de préférence dans les populations S et N).

On se propose de construire un test bilatéral permettant de décider s'il y a une différence significative, au seuil de 5 %, entre les pourcentages issus des deux échantillons de l'enquête préalable.

1. Construction du test bilatéral

a) L'hypothèse H_0 est donnée par $p_S = p_N$; énoncer l'hypothèse alternative H_1.

b) Déterminer l'intervalle $[-a\ ;\ a]$ tel que, sous l'hypothèse $H_0 : P(-a \leqslant D \leqslant a) = 0{,}95$.

c) Énoncer la règle de décision du test.

2. Utilisation du test

Utiliser ce test avec les deux échantillons de l'énoncé et conclure.

47 Une entreprise fabrique des appareils de mesures qui doivent satisfaire à un cahier des charges.

L'entreprise met en place un nouveau dispositif censé améliorer la fiabilité des appareils produits. Deux chaînes de fabrication sont mises en service : la chaîne n° 1, sans nouveau dispositif et la chaîne n° 2 avec le nouveau dispositif. Afin de tester l'hypothèse selon laquelle le nouveau dispositif améliore de manière significative la fiabilité des appareils produits, on a prélevé de manière aléatoire 200 appareils à la sortie de chacune des deux chaînes de fabrication.

Un pourcentage p_1 (resp. p_2) d'appareils issus de la chaîne n° l (resp. n° 2) ont fonctionné parfaitement pendant les 3 premiers mois.

1. a) Expliquer pourquoi on met en place un test unilatéral.

b) On prend pour hypothèse nulle $H_0 : p_1 = p_2$. Préciser l'hypothèse H_1 alternative qui va être opposée à l'hypothèse H_0.

On note F_1 (resp. F_2) la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille 200 provenant de la chaîne n° 1 (resp. n° 2) associe la fréquence f_1 (resp. f_2) d'appareils ayant parfaitement fonctionné pendant 3 mois.

Sur les deux échantillons prélevés, on a obtenu des valeurs observées qui sont :

$$f_1 = 87\ \% \text{ et } f_2 = 93\ \%.$$

On note $D = F_2 - F_1$.

Sous l'hypothèse nulle, les deux chaînes sont censées produire le même pourcentage p d'appareils conformes et la loi suivie par D (celle que l'on adopte) est la loi normale :

$$\mathcal{N}\left(0\ ;\ \frac{p(1-p)}{200} + \frac{p(1-p)}{200}\right).$$

On prend $p = 0{,}9$ car $p = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$.

2. Préciser les paramètres de la loi suivie par D.

3. Si α est le seuil de risque, on désigne par h_α le réel positif tel que : $P(D \leqslant h_\alpha) = 1 - \alpha$.

a) On suppose dans cette question que $\alpha = 0{,}01$.

Déterminer la valeur arrondie au centième h_α.

Énoncer la règle de décision du test.

Conclure quant à l'efficacité présumée du nouveau dispositif au seuil de risque 0,01.

b) On suppose dans cette question que $\alpha = 0{,}05$.

Déterminer h_α.

Énoncer la règle de décision du test.

Conclure quant à l'efficacité présumée du nouveau dispositif au seuil de risque 0,05.