Les fonctions

Une **fonction** est une sorte de machine à laquelle on donne des nombres et qui en retourne d'autres.

Exemple de fonction

Considérons la fonction qui retourne $2x+7$ lorsqu'on lui donne x.
Si on lui donne 3, elle retourne 13, car $2\times3+7=13$.
Si on lui donne 5, elle retourne 17.

Nommage et notation

Une fonction se nomme avec une lettre minuscule. On utilise généralement la lettre f.
Appelons f la fonction ci-dessus. On écrit f de la manière suivante : $f:x\mapsto2x+7$.
Cela se lit : "fonction f qui à tout nombre x associe le nombre $2x+7$".

Image d'un nombre par une fonction

L'**image** d'un nombre n par une fonction f est le nombre retourné par f lorsqu'on lui donne n.

Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction, on remplace x par ce nombre dans l'expression de la fonction.
Par exemple, pour notre fonction $f:x\mapsto2x+7$, 13 est l'image de 3 par f et 17 est l'image de 5 par f.
On peut aussi dire que 3 a pour image 13 par f et que 5 a pour image 17 par f.

On note $f(3)=13$, ce qui se lit : "f de 3 égal 13".

Exercice 1
Quelle est l'image de 7 par la fonction $f:x\mapsto8x+9$?

Exercice 2
Quelle est l'image de 8 par la fonction $f:x\mapsto-8x+8$?

Exercice 3
On considère la fonction $f:x\mapsto-9x-3$.

Combien fait $f(7)$?

Exercice 4
Réduire l'expression $1x+2+3x+4+5x+6$ puis calcule l'image de 7 par $f:x\mapsto1x+2+3x+4+5x+6$.

Exercice 5
Trouver le nombre x qui a pour image 99 par la fonction $f:x\mapsto10x-1$.

Exercice 6
Trouver le nombre x qui a pour image -31 par la fonction $f:x\mapsto-2x+3-4x-4$.

Représentation graphique d'une fonction

Méthode

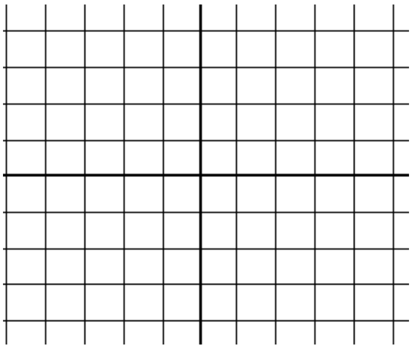
Pour tracer la représentation graphique d'une fonction :

- **1.** On dessine deux axes gradués perpendiculaires.
- **2.** On choisit des valeurs de x comme on veut et on calcule les images f(x) correspondantes.
- **3.** Pour chaque x choisi, on se positionne en x sur l'axe horizontal des abscisses et on place un point ou une croix à la hauteur f(x).
- **4.** On relie les points obtenus de manière harmonieuse.

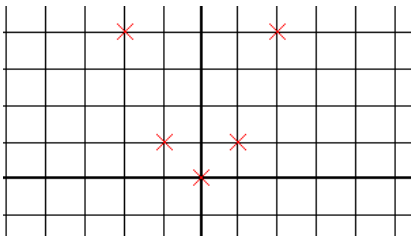
Exemple

Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$.

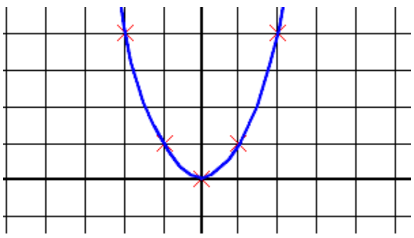
- **1.**



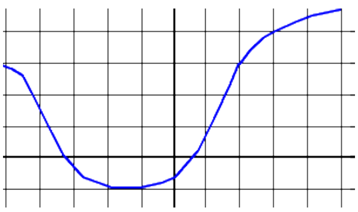
- **2.** Prenons les x de -2 à 2. On a f(-2)=4, f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1 et f(2)=4.
- **3.**



- **4.**



La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction *f*. Combien fait f(3) ?



Antécédent d'un nombre par une fonction

On doit trouver le nombre x pour lequel la fonction $f:x\mapsto 2x+7$ est égale à 67.
Nous devrons donc trouver le nombre ? tel que $2\times?+7=67$.
Ce nombre s'appelle un **antécédent** de 67 par f.

Un **antécédent** d'un nombre b par une fonction f est un nombre a tel que **$f(a)=b$**.

Remarques

Un nombre possède toujours **une seule image**, mais peut posséder **plusieurs antécédents**.
Par exemple, le nombre 9 possède deux antécédents par $f:x\mapsto x^2$. Ce sont 3 et -3.
Un nombre peut aussi ne pas posséder d'antécédent.
Pour cette même fonction $f:x\mapsto x^2$, le nombre -16 ne possède pas d'antécédent.

Calcul et lecture des antécédents

Pour connaître les antécédents d'un nombre b par une fonction f, on résout l'équation $f(x)=b$.

Exemple

Pour trouver les antécédents de 10 par la fonction $f(x)=x^2+1$, on résout l'équation $x^2+1=10$.
On obtient d'abord $x^2=10-1$, puis $x^2=9$, puis $x^2-9=0$, puis $x^2-3^2=0$, puis $(x+3)(x-3)=0$, puis $x+3=0$ ou $x-3=0$. Donc $x=-3$ ou $x=3$. Les antécédents sont -3 et 3.

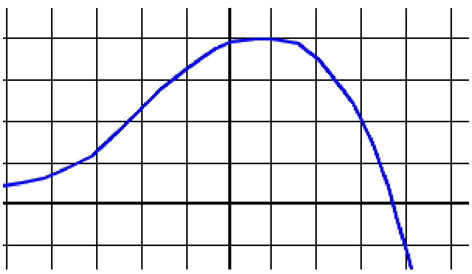
Lecture graphique des antécédents

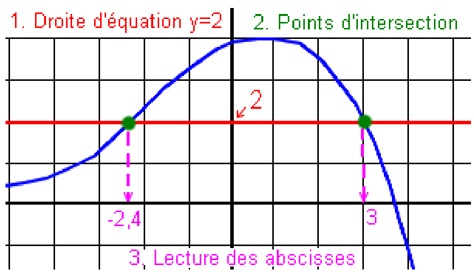
Si on ne connaît pas l'expression de la fonction mais qu'on connaît sa représentation graphique, on peut lire les antécédents d'un nombre b sur le graphique.

Pour cela :

1. On trace une droite horizontale à la hauteur b.
2. On repère les points où cette droite coupe la courbe de la fonction.
3. On lit les abscisses de ces points.

Exemple
Lecture des antécédents de 2 par la fonction représentée par la courbe bleue.





Les antécédents de 2 sont -2,4 et 3.

Exercice 1
Quelle est l'image de 5 par la fonction définie pour tout x par $f(x)=-3x+8$?

Exercice 2

Quelle est l'image de -4 par la fonction définie pour tout x par $f(x)=2x^2+3$?

Exercice 3

On considère la fonction définie pour tout x par $f(x)=-x-10$. Écrire sous la forme d'une fraction l'image de $\frac{1}{10}$ par f.

Exercice 4

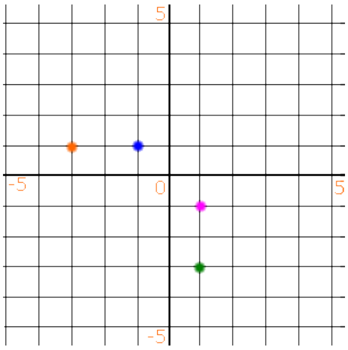
Quelle est l'image de 25 par la fonction $f:x\mapsto\sqrt{x}-50$?

Exercice 5

Quelle est l'image de -2 par la fonction définie pour tout x par $f(x)=x^3+x^2+x+1$?

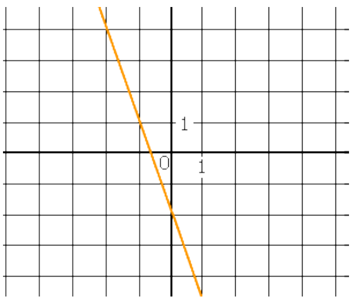
Exercice 6

On souhaite tracer la représentation graphique de la fonction $f:x\mapsto -2x+1$.
On commence par calculer f(1) et on place une petite croix sur le graphique. A quel endroit doit-on placer la croix?



Exercice 7

La droite orange est la représentation graphique d'une fonction f. Quelle est l'image de -2 par f ?



Exercice 8

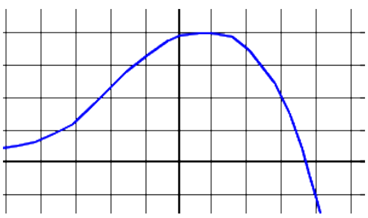
Quel est l'antécédent de 9 par la fonction $f:x\mapsto x-3$?

Exercice 9

Quel est l'antécédent de 99 par la fonction $f:x\mapsto 4x-1$?

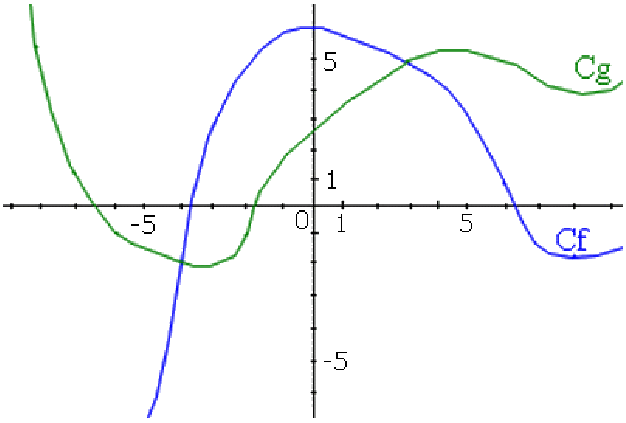
Exercice 10

La courbe bleue représente une fonction f. Quel est l'antécédent de 4 par f ?



Exercice 11

Quelles sont les solutions de g(x)<f(x)?



Exercice 12

Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{-2x-6}$?

Exercice 13

Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{x-3}$?