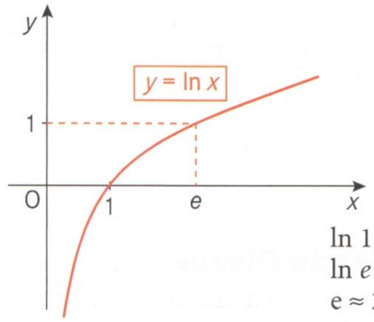
1 Fonction logarithme népérien

Définition. Courbe représentative

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$. Pour tout $x > 0$, si $f(x) = \ln x$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖	$+$	
$f(x) = \ln x$	‖ $-\infty$	0	$+\infty$



$\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$
$e \approx 2{,}71\,828$

Propriétés

Pour tout $a > 0$ et $b > 0$:

$\ln a\,b = \ln a + \ln b$; $\ln a^n = n \ln a$ (n entier relatif)

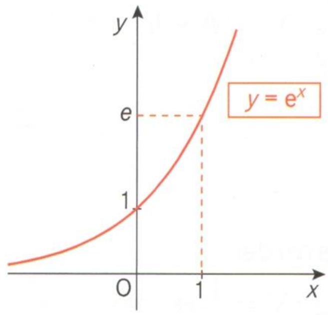
$\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$; $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

2 Fonction exponentielle

Définition. Courbe représentative

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel, si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x) = e^x$		$+$		
$f(x) = e^x$	0	1	e	$+\infty$



Propriétés

Pour a et b réels quelconques : $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^n = e^{na}$ (n entier relatif)

Pour $b > 0$: $e^a = b$ équivaut à $a = \ln b$.

Comment résoudre une équation ou une inéquation où figure la fonction logarithme ou la fonction exponentielle ?

On utilise :

– les résultats concernant « Équations et Inéquations » rappelés dans le Mémento page 302 ;

– les règles de calcul relatives à la fonction logarithme et à la fonction exponentielle rappelées dans le Mémento page 303 ;

– les propriétés du tableau suivant :

• l'équation $\ln x = a$ a pour solution : $x = e^a$.	• l'équation $e^x = a$, avec $a > 0$, a pour solution : $x = \ln a$.
• $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$.	• $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.
• $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.	• $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.

Exemple 1. Résoudre l'équation $e^{-0,5x+1} - 2 = 0$.

L'équation s'écrit : $e^{-0,5x+1} = 2$.

En prenant le logarithme népérien de chaque membre, on obtient : $-0,5x + 1 = \ln 2$,

d'où, successivement : $-0,5x = \ln 2 - 1$; $x = \dfrac{\ln 2 - 1}{-0,5} = 2(1 - \ln 2)$.

*L'équation proposée admet une solution : **$x = 2(1 - \ln 2)$; $x \approx 0,61$**.*

Exemple 2. Résoudre l'inéquation $2 \ln (x + 4) > \ln (2 - x)$

*On doit avoir $x + 4 > 0$ et $2 - x > 0$ soit **$-4 < x < 2$**.*

On écrit : $\ln (x + 4)^2 > \ln (2 - x)$ d'où $(x + 4)^2 > 2 - x$

c'est-à-dire : $x^2 + 8x + 16 > 2 - x$ d'où $x^2 + 9x + 14 > 0$.

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + 9x + 14 = 0$ a pour solutions : $x_1 = -7$; $x_2 = -2$.

Dans $\mathbb{R}$, on a $x^2 + 9x + 14 > 0$ pour x tel que $x < -7$ ou $x > -2$.

*On doit avoir $-4 < x < 2$, donc l'inéquation proposée a pour solutions **les réels x tels que $-2 < x < 2$**.*

Exemple 3. Résoudre l'équation $e^x - 10 = -3e^{2x}$.

L'équation s'écrit : $3e^{2x} + e^x - 10 = 0$ soit $3(e^x)^2 + e^x - 10 = 0$.

En posant $X = e^x$, on obtient l'équation du second degré $3X^2 + X - 10 = 0$.

Cette équation a pour solutions dans $\mathbb{R}$: $X_1 = -2$ et $X_2 = \dfrac{5}{3}$.

Il faut alors résoudre les équations d'inconnue x : $e^x = -2$; $e^x = \dfrac{5}{3}$.

– L'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution, car $e^x > 0$.

– L'équation $e^x = \dfrac{5}{3}$ a pour solution : $x = \ln \dfrac{5}{3}$.

*Donc l'équation proposée a une seule solution : **$x = \ln \dfrac{5}{3}$; $x \approx 0,51$**.*

Exercices :

Calculs ; équations et inéquations avec logarithmes ou exponentielles

Fiche méthode 1

1 Simplifier les expressions suivantes :

$\ln 3 + \ln \frac{1}{3}$; $\ln e^3 - \ln e$; $e^{-\ln 2}$.

2 **R** Simplifier les expressions suivantes :

$\ln \sqrt{e^5}$; $e^{\ln 5 - \ln 3}$; $\ln e^3 - e^{\ln 3}$.

***Pour chacun des exercices 3 à 7**, résoudre les équations proposées.*

3 **R** $\ln x + 2 = 0$; $\ln (x+1) - 3 = 0$.

4 **C** $\ln (x+2) = \ln (2x+1)$; $2 \ln x + \ln 3 = 0$.

5 $\ln x^2 = \ln 2 + \ln (x+1)$.

6 **R** $e^{2x} - 3 = 0$; $e^{2x} = e^{x+1}$.

7 **C** $e^{4x} - 2e^{3x} = 0$; $e^{0,2x} = 2e^{-0,2x}$.

8 **a)** Résoudre l'équation d'inconnue X :

$$X^2 - 2X - 3 = 0.$$

b) En déduire les solutions de l'équation d'inconnue x :

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0.$$

On posera $X = e^x$.

9 **a)** Résoudre l'équation d'inconnue X :

$$X^2 - 2X + 2 = 0.$$

b) En déduire les solutions de l'équation d'inconnue x :

$$e^{2x} - 2e^x + 2 = 0.$$

On posera $X = e^x$.

***Pour chacun des exercices 10 à 15**, résoudre les inéquations proposées.*

10 **C** $\ln (x+1) < 0$; $\ln (2-x) > \ln 3$.

11 $\ln \frac{x+1}{x-1} > 0$.

12 **C** $3 - 2e^{0,5x} > 0$.

13 $e^x(e^x - 2) > 0$.

14 $e^{2x} - 4e^x < 0$.

15 **R** $1 - e^{0,5x-1} < 0$.

16 **C** Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $(e^x + 1)(e^x - 3)$.

Variations de fonctions

Fiche méthode 6

***Pour chacun des exercices 84 à 98**, la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.*
Dans chaque cas :
– calculer f'(x) ;
– étudier le signe de f'(x) sur I ;
– dresser le tableau de variation de f.
L'étude des limites éventuelles de f n'est pas demandée ici.

84 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2x^2 - 8x - 3$.

85 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = -x^2 + 3x + 5$.

86 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

87 **R** $I = [0\,;+\infty[$; $f(x) = 2x^2 - 4e^{-x}$.

88 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

89 **R** $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = \ln x - x - 1$.

90 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$.

91 $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 3x^2 - 3x^3$.

92 $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

93 **R** $I = [0\,;10]$; $f(x) = x + 10 - 5\ln(x+2)$.

94 **R** $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = x^2 - 18\ln x + 18$.

95 **C** $I = \mathbb{R}$; $f(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$.

96 $I = [0\,;40]$; $f(x) = 45x^2 - x^3$.

97 **R** $I = [0\,;12]$; $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$.

98 **C** $I =]0\,;+\infty[$; $f(x) = 3 + 2\ln x - (\ln x)^2$.

99 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2(e^x+1)}.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} + 3e^x + 2}{2(e^x+1)^2}.$$

3. Dresser le tableau de variation de f.

100 **R** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 7e^x + 5x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout x réel :

$$f'(x) = (e^x - 1)(2e^x - 5).$$

2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

101 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - 2x + e^{2x}.$$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Dresser le tableau de variation de f (on ne demande pas les limites en $-\infty$ et en $+\infty$).

3. En déduire que, pour tout réel x, on a $f(x) > 0$.

Correction :

2 $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{3}$; **0.**

3 • Solution : $\boldsymbol{x = \mathrm{e}^{-2}}$.

• Solution : $\boldsymbol{x = -1 + \mathrm{e}^3}$.

4 • On doit avoir $x > -2$ et $x > -\frac{1}{2}$

soit $x > -\frac{1}{2}$.

On obtient : $x + 2 = 2x + 1$.

D'où la solution : $\boldsymbol{x = 1}$.

• On doit avoir $x > 0$.

On obtient : $2 \ln x = -\ln 3$; $\ln x = -\frac{1}{2} \ln 3 = \ln \frac{1}{\sqrt{3}}$.

D'où la solution : $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$.

6 • $\frac{1}{2}$ **ln 3.**

• **1.**

7 • On écrit successivement :

$$\mathrm{e}^{4x} = 2\mathrm{e}^{3x} \;;\; \frac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{3x}} = 2 \;;\; \mathrm{e}^x = 2.$$

D'où la solution : $\boldsymbol{x = \ln 2}$.

• On écrit successivement :

$$\frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{\mathrm{e}^{-0,2x}} = 2 \;;\; \mathrm{e}^{0,4x} = 2 \;;\; 0,4x = \ln 2.$$

D'où la solution : $x = \boldsymbol{\frac{1}{0,4} \ln 2}$.

10 • On doit avoir $x > -1$.

On obtient : $x + 1 < 1$ soit $x < 0$

Ensemble des solutions : **]– 1 ; 0[**.

• On doit avoir $x < 2$.

On obtient : $2 - x > 3$ soit $x < -1$.

Ensemble des solutions : **]– ∞ ; – 1[**.

12 On obtient : $3 > 2\mathrm{e}^{0,5x}$ soit $\mathrm{e}^{0,5x} < \frac{3}{2}$.

D'où $0,5x < \ln \frac{3}{2}$; $\boldsymbol{x < 2 \ln \frac{3}{2}}$.

15 $\boldsymbol{x > 2}$.

16 Puisque $\mathrm{e}^x + 1 > 0$, le signe de $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 3)$ est celui de $\mathrm{e}^x - 3$ d'où les résultats suivants :

– si $x < \ln 3$, alors $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 3) < 0$;

– si $x > \ln 3$, alors $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 3) > 0$.

87 $f'(x) = 4x + 4\mathrm{e}^{-x}$; $f'(x) > 0$; f est **croissante.**

89 $f'(x) = \boldsymbol{\frac{1}{x} - 1}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	-2	↘	

93 $f'(x) = \boldsymbol{\frac{x-3}{x+2}}$.

x	0		3		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$10 - 5 \ln 2$	↘	m	↗	$20 - 5 \ln 12$

$m = 13 - 5 \ln 5$.

94 $\boldsymbol{f'(x) = 2\,\frac{(x-3)(x+3)}{x}}$.

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	m	↗	

m = $27 - 18 \ln 3$.

95 $\boldsymbol{f'(x) = \mathrm{e}^x(4\mathrm{e}^x - 5)}$; $f'(x)$ a le signe de $4\mathrm{e}^x - 5$.

x	$-\infty$		$\ln \frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\frac{9}{8}$	↗	

97 $f'(x) = \boldsymbol{3(x^2 - 16x + 48)}$.

x	0		4		12
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	256	↘	0

98 $f'(x) = \boldsymbol{\frac{2}{x}(1 - \ln x)}$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	4	↘	

100 **1.** $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 5 = \boldsymbol{(\mathrm{e}^x - 1)(2\mathrm{e}^x - 5)}$.

2.

x	$-\infty$		0		$\ln \frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-5	↘	m	↗	

$m \approx -5,7$.