Pour les exercices 1 et 2, résoudre les équations.

1 **C** $2y' + 3y = 0$; $y' + 2y = 0$.

2 $4y' + 5y = 0$; $2y' - 3y = 0$.

Pour chacun des exercices 3 à 5, vérifier que la fonction f est une solution de l'équation proposée, puis résoudre l'équation.

3 $y' + 2y = 6$; $f(x) = 3$.

4 **C** $y' - y = x$; $f(x) = -x - 1$.

5 $2y' + y = e^x$; $f(x) = \frac{1}{3}e^x$.

6 On considère l'équation différentielle $y' + 3y = 5$.

1. Déterminer le réel a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a$ soit une solution de l'équation différentielle.

2. Résoudre l'équation.

Pour les exercices 7 et 8, déterminer la fonction f solution vérifiant la condition initiale donnée.

7 **C** $y' - 2y = 0$; $f(0) = 2$.

8 $y' + y = 0$; $f(-1) = 3$.

9 **R** On considère l'équation $5y' - y = x$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto -x - 5$ est une solution.

2. Déterminer la fonction g solution telle que $g(0) = 1$.

Première partie. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 2x - e^{-2x} \qquad (E)$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$y' + 2y = 0 \qquad (E')$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x - \frac{1}{2} - xe^{-2x}.$$

Démontrer que la fonction g est une solution de l'équation (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

Les verres sont ensuite ébauchés.
On admet qu'après cet usinage, 1 % des verres ont un défaut de courbure.
On prélève au hasard 500 verres ébauchés. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 500 verres.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque prélèvement de ce type, associe le nombre de verres qui ont un défaut de courbure.

1° a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer $P(X = 5)$.

c) Calculer la probabilité que le nombre de verres ayant un défaut de courbure soit strictement inférieur à 4 dans un tel prélèvement.

2° On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre μ de cette loi de Poisson.

b) On note Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre μ où μ est la valeur obtenue au a).
Calculer $P(Y \leq 3)$.

D. Événements indépendants

En fin de processus, les verres sont contrôlés.
On a contrôlé la qualité de la production d'une journée et on a constaté que 5 % des verres ont un défaut de diamètre et que 8 % des verres ont un défaut d'épaisseur.
On prélève un verre au hasard dans cette production.
On note D l'événement : « le verre prélevé présente un défaut de diamètre ».
On note E l'événement : « le verre prélevé présente un défaut d'épaisseur ».
On admet que $P(D) = 0{,}05$ et $P(E) = 0{,}08$ et que les événements D et E sont indépendants.

1° Calculer $P(D \cap E)$.

2° Calculer la probabilité que le verre contrôlé ait au moins un des deux défauts.

3° Calculer la probabilité que le verre contrôlé n'ait aucun des deux défauts.