Fiche TD n°4 Calcul intégral

EXERCICE 1°

Déterminer une primitive sur I des fonctions suivantes :

1° $f:\ x \mapsto x\left(x^2+3\right)^4$, I = IR 2° $f:\ x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\left(x^3+3x\right)^2}$, I = IR*, 3° $f:\ x \mapsto 2x\sqrt{x^2+4}$, I = IR

4° $f:\ x \mapsto \dfrac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}$, I = IR, 5° $f : x \mapsto (x-2)^2 + e^{\frac{1}{2}x+1}$ sur I = IR ,

6° $f : x \mapsto \dfrac{3}{1-x} + \dfrac{5}{(1-x)^3}$; I =] 1 ; + ∞ [.

EXERCICE 2°

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathrm{IR} - \{0,1\},\quad \frac{2x^2-5x+1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x}.$$

2) En déduire la primitive de la fonction $\mathrm{f} : \mathrm{x} \to \dfrac{2x^2-5x+1}{x(x-1)^2}$, qui s'annule pour $x = 2$.

EXERCICE 3°

Soit f la fonction définie sur IR par : $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}$.

1° Montrer que pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{IR}$, $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}$.

2° En déduire la primitive de la fonction f qui s'annule en ln 2.

3° En déduire une primitive G, de la fonction g définie sur IR par : $\mathrm{g(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}$.

EXERCICE 4°

On pose $I = \displaystyle\int_2^5 \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt$

1) En écrivant que $t = (t-1)+1$, montrer, par un calcul direct de primitives, que $I = \dfrac{20}{3}$.

2) Retrouver le résultat du 1) en faisant directement une intégration par parties sur I .

3) Retrouver le résultat du 1) en posant le changement de variable $x = \sqrt{t-1}$.

EXERCICE 5°

$\forall n \in IN$ on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx$, avec $\forall n \in IN^*$, $n! = (n-1)!$ et $0! = 1$.

1° En intégrant par parties, démontrer que $I_1 = \dfrac{1}{e}$.

2° En appliquant la règle de positivité de l'intégrale, justifier que : $\forall n \in IN$, $I_n \geq 0$.

3° En appliquant la règle de comparaison, justifier que : $\forall n \in IN$, $I_n \leq \dfrac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$.

4° En citant un théorème de comparaison, justifier que la suite (I_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE 6°

Calculer la limite des suites définies par : $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^3$ et $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\dfrac{2k}{n}}$.

EXERCICE 7°

$\forall n \in IN^*$, on pose $u_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$ et $u_0 = \int_1^e x^2 dx$.

1° Calculer u_0 et démontrer que pour tout entier n non nul, u_n est positif.

2° Par intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in IN^*$, $3\times u_{n+1} + (n+1)\times u_n = e^3$.

3° Déduire de la question précédente que : $\forall n \in IN^*$, $u_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 8°

Calculer les intégrales suivantes par parties ou changement de variable:

I = $\int_1^2 \ln(x+\sqrt{x^2-1})dx$, J = $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$, K = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\times\ln(1+x)dx$, on vérifiera que $x^2 = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1$

EXERCICE 9°

Etudier la nature des intégrales : I = $\int_2^{+\infty}\dfrac{dt}{t^3(\ln t)^4}$, J = $\int_0^1 e^{\frac{1}{1-t}}dt$, K = $\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{-1/x^2})dx$.

EXERCICE 10°

Calculer les limites suivantes : 1° $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}\int_1^x \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}dt$, 2° $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}dt$.

EXERCICE 11°

On se propose de déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$. Soit $f : t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$.

1° Justifier que *f* est localement intégrable sur $[0,+\infty[$.

2° Démontrer à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, que pour tout réel $x > 0$:
$\int_0^x e^{-\sqrt{t}}dt = \int_0^{\sqrt{x}} 2ue^{-u}du$.

3° A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\int_0^{\sqrt{x}} 2ue^{-u}du = 2\left(1-(1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}\right)$.

4° Calculer $\lim\limits_{x\leftarrow+\infty}\int_0^{\sqrt{x}} 2ue^{-u}du$, en déduire la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ et donner sa valeur.

Exercice 3 (5 points)

$\forall n \in IN^*$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ et $u_0 = \int_0^1 e^x dx$

1° Démontrer que u_0 = e – 1 et $u_1 = 1$

2° Par intégration par parties, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = e - nu_{n-1}$.

4° En déduire les valeurs exactes de u_2 et u_3.

5° Déterminer la monotonie de la suite (u_n)

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt$

1° Calculer u_1 et montrer que pour tout n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

2° Etudier la monotonie de la suite (u_n).

3° Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ;1] , $0 \leq \frac{t^n}{t+1} \leq t^n$, en déduire un encadrement de u_n ainsi que la convergence de la suite (u_n).