Cours de M. CRESSINI **Durée 2 heures**

ESIAG

ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE APPLIQUÉE À LA GESTION

Epreuve d'Analyse L1

Janvier 2015

Aucun document autorisé – Calculatrice graphique non autorisée

Avertissement

« La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation de la copie : un commentaire rédigé en français devra justifier toute

Exercice 1 (6 points)

On considère la fonction f définie sur IR par : si $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ et $f(0) = 1$.

Soit C_f la courbe représentative de f.

1° a) Déterminer la limite de f en $-\infty$, que peut-on en déduire pour C_f ?

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$, que peut-on en déduire pour C_f ?

c) Démontrer que f est continue en 0. Peut-on en déduire que f est dérivable en 0 ?

2° a) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = xe^x - e^x + 1$.
Justifier que g est dérivable sur IR et déduire de l'étude de ses variations que : $\forall x \in IR,\ g(x) \geq 0$.

b) Démontrer que : $\forall x \in IR^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, en déduire la monotonie de la fonction f.

Exercice 2 (4 points)

On se propose de déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$. Soit $f : t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$.

1° Justifier que f est localement intégrable sur $[0,+\infty[$.

2° Démontrer à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, que pour tout réel $x > 0$:

$$\int_0^x e^{-\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{\sqrt{x}} 2ue^{-u}\,du.$$

3° A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\int_0^{\sqrt{x}} 2ue^{-u}\,du = 2\left(1 - (1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}\right)$.

4° Calculer $\lim\limits_{x \leftarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{x}} 2ue^{-u}\,du$, en déduire la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$ et donner sa valeur.

Exercice 3 (5 points)

$\forall n \in IN$ on pose $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$, avec $\forall n \in IN^*$, $n! = (n-1)!$ et $0! = 1$.

1° En intégrant par parties, démontrer que $I_1 = \frac{1}{e}$.

2° a) En appliquant la règle de positivité de l'intégrale, justifier que : $\forall n \in IN$, $I_n \geq 0$.

b) En appliquant la règle de comparaison des intégrales, justifier que :

$$\forall n \in IN \text{ , } I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x} dx .$$

3° a) Calculer $\int_0^1 e^{-x} dx$.

b) En citant un théorème de comparaison, justifier que la suite (I_n) est convergente et calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 4 (5 points) *Les deux questions sont indépendantes.*

1° Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ de terme général $u_n = \frac{1}{2^n + 1}$ En comparant la série $\sum u_n$ à une série géométrique , justifier qu'elle converge et calculer sa somme.

2° a) Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ de terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) Soit la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. Peut-on déduire de la question 1°, la nature de cette série ?

c) Calculer la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et montrer que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

d) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.