

Sommaire

Chapitre 1 : Eléments de logique et langage ensembliste

I.	Calcul propositionnel	page 3
II.	Connecteurs logiques	page 3
III.	Prédicats et quantificateurs	page 5
IV.	Langage ensembliste	page 6
V.	Applications entre deux ensembles	page 7
	Image, image réciproque d'une partie d'un ensemble	
	Compositions de deux applications	
	Application injective, surjective, bijective	
	Application réciproque d'une application	

Chapitre 2 : Structures ensemblistes et applications linéaires

I.	Relations binaires	page 9
	Relation d'ordre.	
	Relation d'équivalence, classes d'équivalence	
II.	Structures ensemblistes	page 10
	Lois de composition interne	
	Structure de groupe	
	Structure de corps	
	Loi de composition externe	
	Structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R}	
	Sous-espaces vectoriels	
	Caractérisation d'un s.e.v	
III.	Applications linéaires	page 12
	Définition	
	Endomorphismes. Isomorphisme. Automorphisme	
	Noyau et Image d'une application linéaire	
	Base canonique de \mathbb{R}^n	
	Détermination d'une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n	

Chapitre 3 : Espaces vectoriels de dimension finie

I.	Famille génératrice	page 14
II.	Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs	page 14
III.	Famille libre	page 14
IV.	Base	page 15
V.	Dimension d'un espace vectoriel	page 15
VI.	Théorème de la dimension	page 16
VII.	Théorème de la base incomplète	page 16
VIII.	Dimension d'un sous-espace vectoriel	page 16
IX.	Caractérisation des isomorphismes	page 17
X.	Théorème du rang	page 18

Chapitre 4 : Calcul matriciel

I.	Ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes	page 19
II.	Correspondance entre matrices et applications linéaires de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n	page 19
III.	Structure d'espace vectoriel de $M_{n,p}(\mathbb{R})$	page 20
IV.	Produit matriciel	page 20
V.	Matrice transposée d'une matrice	page 21
VI.	Groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées inversibles	page 21

VII.	Inversion des matrices diagonales et triangulaires	page 22
VIII.	Déterminant d'ordre 1 et d'ordre 2 d'une matrice carrée	page 23
IX.	Sous matrice associée à une matrice carrée	page 23
X.	Déterminant d'ordre 3.	page 24
XI.	Règle de Sarrus	page 25
XII.	Déterminant d'ordre n	page 25
XIII.	Inversion d'une matrice carrée par la méthode des cofacteurs	page 27
XIV.	Résolution de système par la méthode de Cramer	page 27
XV.	Rang d'une matrice	page 30
XVI.	Matrice de passage et formule de changement de base	page 30
XVII.	Matrices équivalentes. Matrices semblables	page 31

Chapitre 5 : Algèbre de Boole

I.	Généralités	page 33
	Variables et fonctions booléennes	
	Opérateurs logiques-Table de vérité	
II.	Simplification d'une fonction booléenne	page 34
	Formes canoniques conjonctive ou disjonctives	
	Tableaux de Karnaugh.	

Chapitre 1 Éléments de Logique et Langage ensembliste

I. CALCUL PROPOSITIONNEL

La Logique s'applique exclusivement aux propositions; l'application des règles de la logique à des affirmations dépourvues d'une valeur de vérité peut conduire en effet à des situations contradictoires ou à des **paradoxes** comme le montre l'exemple suivant :

Au VI^e siècle avant notre ère, Epiménide, poète grec de la Crète, énonça sa fameuse remarque :
" Tous les Crétois sont des menteurs ".

Il n'apparaît pas qu'un tel jugement soit dangereux. Mais si nous considérons qu'Epiménide, est lui-même Crétois. Dans ce cas toutes les déclarations faites par Epiménide sont fausses. En particulier, lorsqu'il déclare que " Toutes les déclarations faites par des Crétois sont fausses ", sa déclaration est fausse, de sorte que toutes les déclarations faites par des Crétois ne sont pas fausses.

Les premières théories présentées en Mathématiques concernent l'étude d'une certaine collection appelée Référentiel. Les éléments de ce référentiel sont dit de même nature et on convient de leur donner un même nom (Entiers - Réels ...). Les propriétés des éléments du référentiel donnent lieu à des énoncés, ce sont **les Propositions**.

DEFINITION : Une Proposition est un énoncé qui pourra être Vrai ou Faux.

Parmi les énoncés d'une théorie on distingue :

- **les AXIOMES** : que l'on ne peut démontrer, pour la simple raison qu'ils sont les premiers.
- **les THEOREMES** : que l'on obtient à partir d'énoncés préalablement connus : axiomes ou théorèmes déjà démontrés.

Raisonnement c'est déterminer la valeur de vérité de propositions construites en combinant entre-elles des propositions dont les valeurs de vérité sont déjà connues. Les lois qui régissent ces combinaisons sont très précises et rappellent le calcul algébrique, c'est pourquoi on parle de **CALCUL PROPOSITIONNEL**.

II. CONNECTEURS LOGIQUES

Le calcul propositionnel permet de combiner des propositions au moyen d'opérateurs appelés **CONNECTEURS**. Les trois premiers que nous allons voir, la négation, la conjonction et la disjonction, sont les plus importants car tout autre connecteur peut se définir à partir de ces trois là.

1. LA NEGATION: \bar{P} ($\neg P$)

Etant donné une proposition P quelconque, il est toujours possible de former un autre énoncé, dit **NEGATION** de P, en écrivant : "Il est faux que ..." devant P. On obtient une nouvelle proposition caractérisée par la table de vérité suivante :

P	\bar{P}
V	F
F	V

2. LA CONJONCTION: P et Q

En liant deux propositions P et Q par le mot '**ET**' on constitue une nouvelle proposition nommée **conjonction** de P et Q. Cette proposition (P et Q) est vraie uniquement dans le cas où les deux propositions sont vraies.

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

F	F	F
---	---	---

3. LA DISJONCTION : $P \vee Q$

De même en liant deux propositions P et Q par le mot '**OU**' on constitue une nouvelle proposition nommée disjonction de P et Q . Cette proposition ($P \vee Q$) est fausse uniquement dans le cas où les deux propositions sont fausses.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. L'IMPLICATION : $P \Rightarrow Q$

Une implication est une relation entre deux propositions P et Q qui a la signification suivante :

Si P est vraie alors il en est de même pour Q , et on note : $P \Rightarrow Q$ que l'on pourra lire : " P entraîne Q ".

Remarque :

Pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie. Pour que P soit vraie il faut que Q soit vraie.

La suffisance porte sur P (**P est une condition suffisante de Q**)

La nécessité porte sur Q (**Q est une condition nécessaire de P**).

On remarque que dans le cas où la proposition P est fausse toute déduction est alors valide.

(Moyen mnémotechnique : l'implication est toujours vraie sauf pour le "vrai" qui n'implique pas le "faux")

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5. L'EQUIVALENCE : $P \Leftrightarrow Q$

Deux propositions P et Q sont dites logiquement équivalentes si elles possèdent des tables de vérité identiques. Ce que l'on peut traduire par la table suivante:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarques :

Certaines propositions composées peuvent ne contenir que des « V » dans leurs tables de vérité. De telles propositions sont appelées **TAUTOLOGIES**.

De même une proposition composée ne contenant que des « F » dans sa table de vérité est une **CONTRADICTION** ou **ANTILOGIE**.

Exemples :

Tautologie

P	\bar{P}	$P \vee \bar{P}$
---	-----------	------------------

Contradiction

P	\bar{P}	$P \wedge \bar{P}$
---	-----------	--------------------

V	F	V
F	V	V

V	F	F
F	V	F

Propositions associées à une implication :

Implication	Réciproque	Contraposée	Inverse
$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$	$\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$

Résultats à retenir : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ et $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \text{ ou } Q)$

P	Q	\bar{P}	\bar{Q}	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$	$\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$	$\bar{P} \vee Q$
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V

III. PREDICATS ET QUANTIFICATEURS

L'affirmation (n est pair) n'est pas une proposition car, ne sachant pas combien vaut n, on ne peut pas dire si elle est vraie ou fausse. Cependant si on remplace n par un nombre on obtient une proposition. Cette sorte d'affirmation, qui porte sur des symboles représentant des objets variables s'appelle un **prédicat**.

1. QUANTIFICATEURS .

Soit E un ensemble et P un prédicat. Comme ce prédicat permet de définir une proposition $P(x)$ pour chaque élément x de E, on peut trier les éléments de E en deux catégories : ceux pour lesquels $P(x)$ est vraie et ceux pour qui elle est fausse.

L'affirmation: "L'ensemble des x pour lesquels $P(x)$ est vraie, est E" est une proposition.
on la note: $\forall x \in E, P(x)$

\forall : **Quantificateur Universel** signifiant “ pour tout ... ” ou “ quelque soit ... ”

L'affirmation: "L'ensemble des x pour lesquels $P(x)$ est vraie n'est pas vide" est également une proposition;
on la note: $\exists x \in E, P(x)$

\exists : **Quantificateur Existentiel** signifiant “ il existe au moins un ... ”

$\exists!$: **Quantificateur Existentiel** signifiant “ il existe un et un seul...”

- Dans la proposition $P(x)$ on dit que la variable x est libre.
- Dans les prédicats « $\forall x \in E, P(x)$ » et « $\exists x \in E, P(x)$ » on dit que la variable est liée.

Soit $P(x,y,z)$ une proposition dont les variables libres sont x, y et z.

- Quand on lie y au moyen du quantificateur \exists , on obtient : $\exists y \in E, P(x,y,z)$ qui est un prédicat dont les variables libres sont x et z.
- Si ensuite on lie x au moyen du quantificateur \forall , on obtient: « $\forall x \in E, \exists y \in E, P(x,y,z)$ » qui est un prédicat dont la seule variable libre est z.

Il faut faire attention à l'ordre des quantificateurs :

Exemple :

La proposition : $\forall a, \exists b, (3a + b > 15)$ est vraie. Mais la proposition : $\exists b, \forall a, (3a + b > 15)$ est fausse.

2. NEGATION D'UN PREDICAT

La négation de « $\forall x \in E, P(x)$ » dit que l'ensemble des x pour lesquels la proposition $P(x)$ est vraie n'est pas E tout entier; elle dit donc qu'il existe au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est fausse (ou pour lequel $\text{non}(P(x))$ est vraie).

De même la négation de « $\exists x \in E, P(x)$ » dit que l'ensemble des x pour lesquels $P(x)$ est fausse est E (ou encore que $\text{non}(P(x))$ est vraie pour tout x).

En conclusion nous retiendrons : $\overline{\forall x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E, \overline{P(x)}$ et $\overline{\exists x \in E, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E, \overline{P(x)}$

Soit maintenant $Q(x)$ le prédicat: $\exists y, P(x, y)$

La négation de « $\forall x, Q(x)$ » est « $\exists x, \overline{Q(x)}$ ». D'où $\overline{\forall x \in E, \exists y \in E, P(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in E, \forall y \in E, \overline{P(x, y)}$

Pour écrire la négation d'une proposition obtenue en liant toutes les variables d'un prédicat, on remplace chacun des quantificateur \forall par \exists , chacun des quantificateur \exists par \forall et le prédicat par sa négation.

Propriétés :

- $\forall x, (P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\forall x, P) \text{ et } (\forall x, Q)$
- $\exists x, (P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\exists x, P) \text{ ou } (\exists x, Q)$
- $\exists x, (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\exists x, P) \text{ ou } (\exists x, \overline{Q})$
- $\forall x, \forall y, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x, P(x, y)$
- $\exists x, \exists y, P(x, y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y)$
- $\exists x, \forall y, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y, \exists x, P(x, y)$

IV. LANGAGE ENSEMBLISTE

Il y a deux manières de définir un ensemble :

- La première consiste à donner la liste de tous les éléments. $\{a, b, c, d, e, f\}$ Les éléments sont séparés par des virgules et donnés entre accolades $\{, \}$.

- La seconde consiste à énoncer une propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble.

Exemple : $\{x / x \in \mathbb{N}, x > 0\}$ Désigne l'ensemble des entiers strictement positifs. “/” signifie “ tel que”.

1. L'APPARTENANCE.

Un ensemble est composé d'éléments; on dit que ceux-ci appartiennent à l'ensemble.

Si un élément x appartient à un ensemble E on note : $x \in E$ et dans le cas contraire on note : $x \notin E$.

2. L'INCLUSION.

Si deux ensembles E et F sont tels que tout élément de E est élément de F , on dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$. E est alors un sous-ensemble de F .

3. EGALITE DE DEUX ENSEMBLES

Deux ensembles E et F sont égaux s'ils sont constitués des mêmes éléments. On note alors : $E = F$

La démonstration de l'égalité de deux ensembles E et F peut se faire à partir de deux implications :

$$x \in E \Rightarrow x \in F \text{ soit } E \subset F \text{ et } x \in F \Rightarrow x \in E \text{ soit } F \subset E$$

On retient : $\boxed{(E \subset F \text{ et } F \subset E) \Leftrightarrow E = F}$

4. ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Soit E un ensemble. On désigne par $P(E)$ l'ensemble des parties de E . $Y \in P(E) \Leftrightarrow Y \subset E$.

Par définition : $\emptyset \in P(E)$, $E \in P(E)$

Exemple : $E = \{a\} \Rightarrow P(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$, $E = \{a, b\} \Rightarrow P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$.

5. COMPLEMENTAIRE D'UN ENSEMBLE

Soit un ensemble E . A désignant une partie de E , l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A sont éléments de la partie complémentaire de A dans E . On note : \bar{A} ou $C_E A$, le complémentaire de A dans E .

6. REUNION

Soit E et F deux ensembles; on appelle réunion de E et F l'ensemble noté $E \cup F$ et défini de la manière suivante : $x \in E \cup F \Leftrightarrow x \in E$ ou $x \in F$.

7. INTERSECTION

On appelle intersection de E et F l'ensemble noté $E \cap F$ défini par : $x \in E \cap F \Leftrightarrow x \in E$ et $x \in F$.

8. DIFFERENCE ENSEMBLISTE

La différence $A - B$ ou $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais non à B .

$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin B$. On peut encore noter : $A - B = C_A(A \cap B)$

9. PARTITION D'UN ENSEMBLE

Soit un ensemble E et A_1, A_2, \dots, A_n n parties non vides de E . A_1, A_2, \dots, A_n est une partition de E si et seulement si :

- $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$
- $\forall (i, j), i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (les parties sont deux à deux disjointes).

10. PRODUIT CARTESIEN

Un couple est une paire ordonnée. On note (x, y) le couple formé par les deux éléments x et y .

Par définition $\{x, y\} = \{y, x\}$ mais $(x, y) \neq (y, x)$

Le produit cartésien d'un ensemble E par un ensemble F est l'ensemble de tous les couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. Le produit cartésien est noté $E \times F$ ou $E \otimes F$. $E \otimes F = \{(x, y) / x \in E, y \in F\}$

D'après les remarques faites sur les couples $E \times F \neq F \times E$.

$E^2 = E \times E$ désigne le produit cartésien de E par E , c'est l'ensemble des couples d'éléments de E .

Pour tout entier naturel non nul, $E^n = \overbrace{E \times E \times \dots \times E}^{n \text{ fois}}$

V. APPLICATION ENTRE DEUX ENSEMBLES

1. DEFINITION

Soit E et F deux ensembles, f est une application de E dans F si et seulement si :

$\forall x \in E, \exists ! y \in F$ tel que $y = f(x)$ c.a.d : Tout élément de E a une image unique dans F .

On appelle **application identique ou identité** de E et on note id_E l'application de E dans E qui à tout élément de E associe lui-même :

$$id_E : E \rightarrow E$$

$$x \mapsto x$$

2. IMAGE D'UNE PARTIE D'UN ENSEMBLE

Soit f une application de E vers F , et A un sous-ensemble de E . On appelle image de A et on note $f(A)$, l'ensemble des images des éléments de A par f dans F : $f(A) = \{y \in F / x \in A, y = f(x)\}$.

3. IMAGE RECIPROQUE D'UNE PARTIE

On appelle image réciproque d'une partie B de F et on note $f^{-1}(B)$, l'ensemble des antécédents dans E de tous les éléments de B . $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

4. COMPOSITION DE DEUX APPLICATIONS

Soit f une application de I vers J et g une application de K vers un troisième ensemble L avec $J \subset K$. L'application notée $g \circ f$, définie sur I et à valeurs dans L , est telle que $\forall x \in I, g \circ f(x) = g[f(x)]$.

Propriétés :

- La composition des applications est une opération associative : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
Par contre cette opération n'est pas commutative : $f \circ g \neq g \circ f$.

5. PROPRIETES D'UNE APPLICATION

INJECTION

Soit f une application de E dans F , f est une injection ou application injective si et seulement

si : $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

c.a.d : Tout élément de F a au plus un antécédent dans E .

Propriétés :

- Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G , si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G , si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

SURJECTION

Soit f une application de E dans F , f est une surjection ou application surjective si et seulement

si : $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

c.a.d : Tout élément de F a au moins un antécédent dans E .

Propriétés :

- Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G , si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G , si $g \circ f$ est surjective alors f est surjective.

BIJECTION

Soit f une application de E dans F , f est une bijection ou application bijective si et seulement si

f est à la fois injective et surjective : $\forall y \in F, \exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$

c.a.d : Tout élément de F a un antécédent unique dans E .

Propriété :

- Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G , si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

APPLICATION RECIPROQUE

Si f est une bijection de E dans F , il existe une unique bijection g de F dans E telle que :

$g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. g est l'application réciproque de f notée f^{-1} .

Remarque : $a \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a}$ mais $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$, ne pas confondre application réciproque et

fonction inverse.

Propriété :

- Si $g \circ f$ est bijective alors $(g \circ f)^{-1}$ est définie et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Chapitre 2 : Structures ensemblistes et applications linéaires

I. RELATIONS BINAIRES

1. Définition :

Soit E et F deux ensembles, On appelle relation binaire de E vers F , toute propriété R permettant d'examiner tous les couples $(a, b) \in E \times F$ et de dire si la proposition : « le couple (a, b) vérifie la propriété » est vraie ou fausse. Lorsqu'elle est vraie on écrit aRb .

On appelle **graphe** de R l'ensemble $G_R = \{(a, b) \in E \times F / aRb\}$, $G_R \subset E \times F$. La représentation graphique de G_R est appelée **diagramme sagittal**.

Dans la suite de ce paragraphe $E = F$

2. Définition :

On dit qu'une relation binaire R est **réflexive** si et seulement si :
 $\forall a \in E, aRa$.

On dit qu'une relation binaire R est **symétrique** si et seulement si :
 $\forall (a, b) \in E^2, aRb \Rightarrow bRa$.

On dit qu'une relation binaire R est **antisymétrique** si et seulement si :
 $\forall (a, b) \in E^2, (aRb \text{ et } bRa) \Rightarrow a = b$.

On dit qu'une relation binaire R est **transitive** si et seulement si :
 $\forall (a, b, c) \in E^3, (aRb \text{ et } bRc) \Rightarrow aRc$.

3. Définition :

On appelle **relation d'ordre** toute relation binaire à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple : si $aRb \Leftrightarrow a \leq b$, l'inégalité entre éléments d'un même ensemble définit une relation d'ordre

4. Définition :

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Exemple : si $aRb \Leftrightarrow a = b$, l'égalité entre éléments d'un même ensemble définit une relation d'équivalence.

Dans la suite de ce paragraphe R est une relation d'équivalence.

5. Définition :

$\forall a \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de a et on note \dot{a} ou C_a l'ensemble des éléments en relation avec a . soit $C_a = \{b \in E / aRb\}$.

On appelle **ensemble quotient** de E par R et on note $\frac{E}{R}$ l'ensemble des classes

d'équivalence de tout élément x , soit $\frac{E}{R} = \{C_x / x \in E\}$.

II. STRUCTURES ENSEMBLISTES

1. Lois de composition interne

Définition :

Soit E un ensemble. On appelle loi de composition interne ou loi interne sur un ensemble E , notée $*$, toute application :

$$E \times E \rightarrow E$$

$$(x, y) \mapsto x * y$$

Par exemple les lois $+$ et \times sont des lois internes dans \mathbb{R} .

- Une partie A de E est dite **stable** pour la loi $*$ si et seulement si :

$$\forall (a, b) \in A^2, a * b \in A$$

\mathbb{N} est une partie stable de \mathbb{R} pour les lois $+$ et \times .

- Une loi $*$ sur E est dite **associative** si et seulement si :

$$\forall (a, b, c) \in E^3, a * (b * c) = (a * b) * c$$

- Une loi $*$ sur E est dite **commutative** si et seulement si :

$$\forall (a, b) \in E^2, a * b = b * a$$

- Un élément e de E est dit **élément neutre** de E pour la loi $*$ si et seulement si :

$$\forall a \in E, \exists ! e \in E / a * e = e * a = a$$

- Un élément x de E possède un **symétrique** dans E pour la loi $*$ si et seulement si :

$$\exists y \in E, x * y = y * x = e$$

Si la loi est $+$ (addition dans \mathbb{R}), $\text{sym}(x)$ est l'opposé de x et est noté $-x$.

Si la loi est \times (multiplication dans \mathbb{R} privé de 0), $\text{sym}(x)$ est l'inverse de x et est noté x^{-1} .

Propriétés :

- Si y existe et si la loi $*$ est associative, alors y est unique et est noté **sym(x)**.
On dit alors que x est **symétrisable** dans E .
- Soit E un ensemble muni d'une loi interne $*$ associative et possédant un élément neutre dans E , $y = \text{sym}(x) \Leftrightarrow x = \text{sym}(y)$.
- Si a et b sont deux éléments symétrisables de E , $a * b$ est symétrisable et $\text{sym}(a * b) = \text{sym}(b) * \text{sym}(a)$.
- Si E est muni des deux lois internes $+$ et $*$, la loi $*$ est dite **distributive** par rapport à la loi $+$ si et seulement si : $\forall (a, b, c) \in E^3, a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ et $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$.

2. Structure de groupe

Définition :

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi $*$ noté $(G, *)$.
On dit que $(G, *)$ a une structure de groupe si et seulement si :

- $*$ est interne dans G
- $*$ est associative
- G possède un élément neutre pour la loi $*$
- Tout élément de G est symétrisable dans G

Si de plus la loi $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif ou abélien, du nom du mathématicien Abel.

Exemple : $(\mathbb{R}, +)$ et (\mathbb{R}^*, \times) sont des groupes abéliens.

$(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car ses éléments hormis 0 ne sont pas symétrisables.

3. Structure de corps

Définition :

Soit un ensemble E muni de deux lois internes $*$ et \perp , noté $(E, *, \perp)$.

On dit que $(E, *, \perp)$ a une structure de corps commutatif si et seulement si :

- $(E, *)$ est un groupe commutatif
- \perp est interne, associative et commutative dans E
- \perp est distributive par rapport à $*$ dans E

- \perp admet un unique élément neutre dans E
 - Tout élément de E privé de son élément neutre est symétrisable pour la loi \perp
- Exemple : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif

4. Loi de composition externe

Définition :

Soit E un ensemble et λ un réel. On appelle **loi de composition externe** sur E , notée \bullet , toute application : $\mathbb{R} \times E \rightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda \bullet x$

Cette loi s'appelle **multiplication par un scalaire**, les réels sont appelés scalaires et les éléments de E sont appelés **vecteurs**.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté $\lambda \bullet x$ est noté $\lambda.x$

$\mathbb{R} \times E$ désigne le produit cartésien de \mathbb{R} et E dans cet ordre.

5. Structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R}

Définition :

On appelle espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{R} -espace vectoriel, tout ensemble E non vide muni :

- D'une loi interne notée $+$ telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif
- D'une loi externe notée \bullet possédant les quatre propriétés suivantes :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in E^2$$

- $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$ distributivité par rapport à l'addition des scalaires
- $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$ distributivité par rapport à l'addition des vecteurs
- $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$ associativité de la loi externe
- $1.x = x$ existence d'un élément neutre pour la loi externe

L'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace muni des opérations usuelles est un espace vectoriel. \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) est un espace vectoriel sur \mathbb{R} où les vecteurs sont des **n-uplets** (x_1, x_2, \dots, x_n) de réels.

6. Sous-espaces vectoriels

Définition :

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , on appelle sous-espace vectoriel de E (on écrira s.e.v de E) toute partie F non vide de E :

Stable pour l'addition de E , c.a.d : $\forall (x, y) \in F^2 \quad x + y \in F$

Stable pour la multiplication par un scalaire, $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times F, \lambda.x \in F$

Remarques :

- Soit 0_E l'élément neutre de E pour l'addition, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .
- Si F est un s.e.v de E alors $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
- En pratique pour démontrer que $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , on démontre que F est un s.e.v d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ connu.

7. Caractérisation d'un s.e.v

F est un s.e.v de E si et seulement si :

$F \subset E$, $F \neq \emptyset$ et $0_E \in F$,

F est **stable par combinaison linéaire**, c.a.d : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda.x + \mu.y \in F$

Exemple : Les droites et les plans vectoriels sont des s.e.v de l'espace vectoriel des vecteurs du plan ou de l'espace.

Propriété :

Si F et G sont deux s.e.v de E alors $F \cap G$ est un s.e.v de E . Attention, en général $F \cup G$ n'est pas un s.e.v de E .

III. APPLICATIONS LINEAIRES

1. Définition :

Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F . On dit que f est une application linéaire si et seulement si : $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

Cas particuliers :

$$f(0) = 0, f(u + v) = f(u) + f(v), f(u - v) = f(u) - f(v)$$

Remarques :

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $L(E, F)$.
- $(L(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
- Si f est une application linéaire de E dans \mathbb{R} on dit que f est une **forme linéaire** sur \mathbb{R} .
- L'ensemble des formes linéaires de E dans \mathbb{R} est appelé **espace vectoriel dual de E** , on le note E^* .

Propriété :

Si f est une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

2. Morphismes

Définition :

Si f est une application linéaire de E dans E , on dit que f est un **endomorphisme** de E .
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $L(E)$.

Propriétés :

Si f et g sont deux endomorphismes de E alors $g \circ f$ est un endomorphisme de E .

$(L(E), +, \cdot, \circ)$ a une structure d'algèbre sur \mathbb{R} .

Définition :

Si f est une application linéaire bijective de E dans F , on dit que f est un **isomorphisme** E et F sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F .

Propriété :

Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E .

Définition :

Si f est un endomorphisme bijectif E , on dit que f est un **automorphisme** de E . L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

Propriété :

$(GL(E), \circ)$ a une structure de groupe et est appelé groupe linéaire de E .

3. Noyau et Image d'une application linéaire

Définition :

Soit f une application linéaire de E dans F , on appelle **Noyau** de f et on note $\text{Ker}(f)$, l'ensemble des vecteurs u de E tels que $f(u) = 0_F$; soit $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\})$.

Propriété :

$\text{Ker}(f)$ est un s.e.v de E et f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Définition :

Soit f une application linéaire de E dans F , on appelle **Image** de f et on note $\text{Im}(f)$, l'ensemble des vecteurs v de F image d'un vecteur u de E , c'est à dire tels que $f(u) = v$. Soit $\text{Im}(f) = f(E)$.

Propriétés :

$\text{Im}(f)$ est un s.e.v de F et f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$.

4. Base canonique de \mathbb{R}^n

Définition :

Désignons par e_i , $n \in \mathbb{N}^*$, le vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les coordonnées sont nulles à l'exception de la i -ième qui vaut 1. $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Le n -uplet de vecteurs, on dit aussi **la famille de vecteurs**, (e_1, e_2, \dots, e_n) est appelée base canonique de \mathbb{R}^n on la note $B_0 = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Exemple :

Dans \mathbb{R}^3 : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

Propriété :

Tout vecteur u de \mathbb{R}^n se décompose de manière unique dans la base canonique de \mathbb{R}^n (l'écriture habituelle \vec{u} des vecteurs n'est pas nécessaire dans ce cours)

$\forall u \in \mathbb{R}^n, u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ où x_i est la i -ième coordonnée de u dans la base canonique.

5. Détermination d'une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n

Théorème

Soit $B_0 = (e_j)_{1 \leq j \leq p}$ la base canonique de \mathbb{R}^p et $(u_j)_{1 \leq j \leq p}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

Il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n telle que $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $f(e_j) = u_j$.

On dit que f est entièrement déterminée par la connaissance des images des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^p .

Démonstration admise

Exemple :

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 , soit f une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 . $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $u = (x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

Donc $f(u) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3)$.

La connaissance de $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ détermine donc bien f .

Par exemple si
$$\begin{cases} f(e_1) = (1, 2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ f(e_2) = (3, 4) = 3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 \\ f(e_3) = (5, 0) = 5\varepsilon_1 \end{cases} \quad \text{alors}$$

$f(u) = x_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) + x_2(3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + x_3(5\varepsilon_1) = (x_1 + 3x_2 + 5x_3)\varepsilon_1 + (2x_1 + 4x_2)\varepsilon_2$

Posons $v = f(u) = (y_1, y_2)$ alors
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ y_2 = 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Chapitre 3 Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie

I. Famille génératrice

Définition :

On appelle famille génératrice de E , toute famille finie S de vecteurs de E , telle que tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de S .
On dit alors que S engendre E et $E = \text{Vect}(S)$.

Propriétés :

- Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E , est une famille génératrice de E .
- Si f est une application linéaire surjective de E dans F et S une famille génératrice de E , alors $f(S)$ est une famille génératrice de F .

II. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Théorème :

Soit $S = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E . L'ensemble des combinaisons linéaires des p vecteurs de S est un s.e.v de E appelé sous-espace vectoriel engendré par S et noté $\text{Vect}(S)$ ou $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Démonstration :

Par définition $\text{Vect}(S) \subset E$ et $0_E \in \text{Vect}(S)$. Soit u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n , λ et μ deux

scalaires tels que : $u = \sum_{j=1}^p \alpha_j u_j$ et $v = \sum_{j=1}^p \beta_j u_j$

$$\text{donc } \lambda u + \mu v = \sum_{j=1}^p (\lambda \alpha_j + \mu \beta_j) u_j \in \text{Vect}(S) \quad \text{c.q.f.d.}$$

Propriétés :

- $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(p)})$ pour toute permutation σ de $\{1, \dots, p\}$
- $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p, \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$
- $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p, 0_E) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$
- $\text{Vect}(u_1 + \sum_{i=2}^p \lambda_i u_i, u_2, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$

III. Famille libre

Définition :

Soit $S = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille vecteurs de E , on dit que S est une famille libre si et seulement si $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, p\}, \lambda_i = 0$, on dit alors que les vecteurs u_1, u_2, \dots, u_p sont des **vecteurs linéairement indépendants**.

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée** et ses vecteurs sont dits **linéairement dépendants**.

Propriétés :

- Si $S = (u, v)$ est une famille liée alors il existe un réel α tel que $u = \alpha v$ ou $v = \alpha u$.
Remarque : On retrouve la notion de colinéarité de deux vecteurs.
- $S = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille liée si et seulement s'il existe au moins un vecteur de S qui soit combinaison linéaire des autres vecteurs de S .
Conséquences : Les vecteurs d'une famille libre sont deux à deux distincts.

Toute famille qui contient le vecteur nul est liée.

- Soit $S = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille libre de E ,
 $u \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) \Leftrightarrow S' = (u_1, u_2, \dots, u_p, u)$ est liée.

Toute famille contenue dans une famille libre est libre

Toute famille qui contient une famille liée est liée

- Si f est une application linéaire injective de E dans F et S une famille libre de E , alors $f(S)$ est une famille libre de F .

Soit $S = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^n .

Si S est libre alors $p \leq n$.

Si S est génératrice alors $p \geq n$.

IV. Base

Définition :

On appelle base de E toute famille de vecteurs de E à la fois libre et génératrice.

Remarque : $B = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base de E et $u \in E$ tel que $u = \sum_{i=1}^p x_i u_i$, alors x_i est la i -ième coordonnée du vecteur u dans la base B .

Théorème de caractérisation des bases :

B est une base de E si et seulement si les vecteurs de B appartiennent à E et tout vecteur de E peut s'écrire d'une façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de B

Propriétés :

- Si f est un isomorphisme de E dans F , B base de $E \Leftrightarrow f(B)$ base de F .
- Soit $S = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^n . **Si S est libre et $p = n$,**
alors S est une base de \mathbb{R}^n .
- Soit $S = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^n . **Si S est génératrice et $p = n$,** alors S est une base de \mathbb{R}^n .

V. Dimension d'un espace vectoriel

Définition :

Un espace vectoriel E est dit de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments.

Exemple : \mathbb{R}^n est de dimension finie.

Théorème d'existence de bases :

Si $E \neq \{0\}$ c'est-à-dire non réduit au vecteur nul et si E admet une famille génératrice S , alors il existe une base de E constituée d'éléments de S .

Démonstration :

Soit $S = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille génératrice de E .

Si S est libre alors c'est une base.

Sinon l'un au moins des vecteurs de S , par exemple u_p est combinaison linéaire des autres vecteurs de S . Donc $E = \text{Vect}(S) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{p-1})$ et $(u_1, u_2, \dots, u_{p-1})$ est une famille génératrice de E .

On recommence le raisonnement et on obtient soit une base ayant au moins deux vecteurs, soit une famille génératrice à un élément différent du vecteur nul car $E \neq \{0\}$, on obtient donc une base de E .

Propriété :

- Si E possède une base à n éléments alors E est isomorphe à \mathbb{R}^n .

VI. Théorème de la dimension :

Toutes les bases d'un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ de dimension finie, ont le même nombre d'éléments.

Démonstration :

Si E admet une base à n éléments, il existe un isomorphisme f de E dans \mathbb{R}^n .

Soit B une base quelconque de E , $f(B)$ est une base de \mathbb{R}^n .

$f(B)$ est donc une famille à n éléments, soit B a n éléments.

Définition :

Le nombre commun d'éléments à toutes les bases d'un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ s'appelle la dimension de E . On le note **dimE**. Par convention $\dim\{0\} = 0$

Exemple :

$\dim \mathbb{R}^n = n$

Un espace vectoriel de dimension 1 (resp. 2) est appelé **droite vectorielle** (resp. **plan vectoriel**).

Propriétés :

- Dans un espace vectoriel de dimension n , $n \in \mathbb{N}^*$:
- Toute famille libre a au plus n éléments.
 - Toute famille libre de n éléments est une base.
 - Toute famille génératrice a au moins n éléments.
 - Toute famille génératrice à n éléments est une base.

Remarque : En pratique pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base d'un espace vectoriel de dimension n , il suffit de prouver qu'elle est libre **ou** génératrice.

- Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si E est isomorphe à F , alors $\dim E = \dim F$. Réciproquement deux espaces vectoriels de même dimension finie sont isomorphes.

VII. Théorème de la base incomplète :

Soit E un espace vectoriel admettant une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $S = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille libre de p vecteurs de E avec $p < n$. Alors S peut être complétée par $n - p$ vecteurs de B pour former une base de E .

Démonstration :

Il existe au moins un vecteur e_i de B qui n'appartient pas à $\text{Vect}(S)$ sinon $\text{Vect}(S) = E$, ce qui est impossible car S engendrerait E puisque $p < n$.

S étant libre, d'après P7, $S' = (u_1, u_2, \dots, u_p, e_i)$ est libre. Si $p + 1 = n$, S' est une base de E .

Sinon on recommence le raisonnement. Après $n - p$ étapes on obtient une base de E constituée de p vecteurs de S et de $n - p$ vecteurs de B .

VIII. Dimension d'un sous-espace vectoriel**Théorème :**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout s.e.v F de E est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

Démonstration :

Si $F = \{0\}$ $\dim F = 0$. Si $F \neq \{0\}$ il existe un vecteur non nul u_1 de F .

Si $F = \text{Vect}(u_1)$, (u_1) est une base de F et $\dim F = 1$.

Si $F \neq \text{Vect}(u_1)$, comme $\text{Vect}(u_1) \subset F$, il existe un vecteur non nul u_2 de F tel que $u_2 \notin \text{Vect}(u_1)$

donc (u_1, u_2) est libre et engendre F , c'est donc une base de F et $\dim F = 2$.

Sinon on recommence le raisonnement. Le processus s'arrêtera après au plus n étapes car il n'y a pas de familles libre dans E de plus de n vecteurs. Donc $\dim F \leq \dim E$.

Propriété :

- Si F et G sont deux s.e.v de dimension finie de E tel que $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

IX. Caractérisation des isomorphismes

- Si f est une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base de E ,
 $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$
- Si F admet pour base $\mathcal{C} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$, à toute application linéaire f de E dans F on associe la matrice A de la famille $f(\mathcal{B})$ dans la base \mathcal{C} on la note $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$
- Cas particulier : si f est un endomorphisme soit $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on dit que A est la matrice de f dans la base \mathcal{B} on la note $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Théorème :

Si f est une application linéaire de E dans F , $E \neq \{0\}$, f est un isomorphisme si et seulement si il existe une base \mathcal{B} de E telle $f(\mathcal{B})$ soit une base de F .

Démonstration :

Nous avons vu que si f est un isomorphisme de E dans F , \mathcal{B} base de $E \Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ base de F .

Réciproquement : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E , telle que $f(\mathcal{B})$ soit une base de F .

Montrons que f est un isomorphisme.

$$\forall y \in F, \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } y = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \text{ car } f(\mathcal{B}) \text{ engendre } F.$$

$$\text{Donc } y = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = f(x) \text{ avec } x \in E \text{ donc } f \text{ est surjective.}$$

$$\text{Soit } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, x_i = 0$$

Donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et f est injective c'est donc un isomorphisme.

Conséquence :

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{R} et f une application linéaire de E dans F alors f bijective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ injective

Démonstration par implications circulaires:

f bijective $\Rightarrow f$ surjective

f surjective $\Rightarrow f(\mathcal{B})$ engendre F car \mathcal{B} engendre E , $f(\mathcal{B})$ a donc n éléments et comme $\dim F = n$ alors $f(\mathcal{B})$ est une base de F . donc f est bijective et donc

f surjective $\Rightarrow f$ injective.

f injective $\Rightarrow f(\mathcal{B})$ est libre car \mathcal{B} est libre, $f(\mathcal{B})$ a donc n éléments et comme $\dim F = n$ alors $f(\mathcal{B})$ est une base de F . donc f est bijective.

Théorème :

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{R} , de bases respectives \mathcal{B} et \mathcal{C} et f est une application linéaire de E dans F et soit $A = \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, f est bijective si et seulement si A est inversible.

X. Théorème du rang :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E, F)$ alors :

$$\dim \operatorname{Im}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim E$$

Démonstration :

Si $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, f est injective. Soit $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E , $\operatorname{Im}(f)$ est engendré par $f(B)$ qui est libre. Donc $\operatorname{Im}(f)$ est le s.e.v de F de base $f(B)$ donc $\dim \operatorname{Im}(f) = n$.
 Soit $\dim \operatorname{Im}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f) = n + 0 = \dim E$.

Si $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$,

Soit (u_1, u_2, \dots, u_k) une base de $\operatorname{Ker}(f)$ que l'on complète pour obtenir une base $B = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ de E , $\operatorname{Im}(f)$ est engendré par $f(B)$ donc par $C = (f(u_{k+1}), \dots, f(u_n))$ car $\forall 1 \leq i \leq k, f(u_i) = 0$.

C est libre. En effet $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i f(u_i) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i u_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=k+1}^n \lambda_i u_i \in \operatorname{Ker}(f)$.

Donc $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$ d'où $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i u_i - \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = 0$

et B étant libre $\forall k+1 \leq i \leq n, \lambda_i = 0$. C est donc une base de $\operatorname{Im}(f)$ et

$\dim \operatorname{Im}(f) = n - k$. Donc $\dim \operatorname{Im}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f) = n - k + k = n = \dim E$.

Chapitre 4

Calcul matriciel

I. Ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes

Définition :

Soit n et p deux entiers naturels, on appelle matrice à n lignes et p colonnes d'éléments de \mathbb{R} tout tableau à n lignes et p colonnes. On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. On dit que A est une matrice de

format (n,p) ou simplement matrice (n,p).

a_{ij} l'élément de la i-ième ligne et j-ième colonne, est appelé terme général de la matrice A.

L'ensemble des matrices (n,p) d'éléments de \mathbb{R} est noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Si n = 1 on dit que A est une **matrice ligne**.

Si p = 1 on dit que A est une **matrice colonne**.

Si n = p on dit que A est une **matrice carrée d'ordre n** et ses éléments a_{ii} sont appelés **éléments diagonaux**. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n d'éléments de \mathbb{R} est noté $M_n(\mathbb{R})$.

Matrices carrées remarquables :

- On appelle **matrice unité d'ordre n**, la matrice notée I_n de $M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ii} = 1 \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Exemples : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- On appelle **matrice diagonale d'ordre n**, toute matrice dont les éléments non diagonaux sont nuls. Soit $D = (d_i)_{1 \leq i \leq n}$ une telle matrice, on note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.
Si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i = \alpha$ alors $D = \alpha \cdot I_n$, la matrice D est appelée **matrice scalaire d'ordre n**.
- On appelle **matrice triangulaire supérieure**, toute matrice $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j < i \Rightarrow t_{ij} = 0$.
- On appelle **matrice triangulaire inférieure**, toute matrice $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i < j \Rightarrow t_{ij} = 0$.
- Une matrice est dite triangulaire si elle est triangulaire supérieure ou inférieure.
On note $T_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires.
On note $T_n^S(\mathbb{R})$ (resp. $T_n^I(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. Inférieures).

Egalité de deux matrices :

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ sont égales si et seulement si elles ont le même format (n,p) et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, a_{ij} = b_{ij}$

II. Correspondance entre matrices (n,p) et applications linéaires de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n

A tout vecteur $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de \mathbb{R}^n on associe la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On définit ainsi une bijection de \mathbb{R}^n dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$

Généralisation :

Soit $S = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$ une famille de p vecteurs de \mathbb{R}^n . $\forall j \in [1, p]$, $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$.

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est appelée matrice de la famille S dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

Soit $B_0 = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $\mathcal{E}_0 = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ les bases canoniques respectives de \mathbb{R}^p et de \mathbb{R}^n .

On a vu que toute application linéaire f , $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est entièrement déterminée par la famille de vecteurs $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ que l'on notera $f(B_0)$.

La matrice A de la famille $f(B_0)$ est appelée **matrice de l'application linéaire f** , on la note $mat(f)$. L'application $f \mapsto mat(f)$ de $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est bijective.

III. Structure d'espace vectoriel de $M_{n,p}(\mathbb{R})$

Définition :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle somme de A et B la matrice notée $A+B$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ de terme général $a_{ij} + b_{ij}$.

Définition :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle produit de la matrice A par le scalaire λ , la matrice notée $\lambda.A$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ de terme général $\lambda.a_{ij}$.

Propriétés :

- $\forall (f, g) \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $mat(\lambda f + \mu g) = \lambda.mat(f) + \mu.mat(g)$
- $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} isomorphe à $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
- L'élément neutre pour l'addition des matrices est la **matrice nulle notée 0**.
 $\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p]$, $a_{ij} = 0$

IV. Produit matriciel

Définition :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ une matrice de $M_{p,q}(\mathbb{R})$.

On appelle produit de A par B , la matrice $C = A \times B$ de $M_{n,q}(\mathbb{R})$ dont le terme de la i -ième

ligne et j -ième colonne est $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \times b_{kj}$.

Propriétés :

- Le produit de A par B n'est défini que s'il y a compatibilité des formats de A et B, c'est-à-dire si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
En résumé : $mat(n, p) \times mat(p, q) = mat(n, q)$
- La j-ième colonne de AB est le produit de A par la j-ième colonne de B
La i-ième ligne de AB est le produit de la i-ième ligne de A par B.
- En général le produit matriciel n'est pas commutatif.
Si $AB = 0$ on a pas nécessairement $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $AB = A$ et $BA = 0$.

- Si $AB = AC$, on a pas nécessairement $B = C$.

Formule du binôme :

Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$,

$$\forall p \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^{p-k} \times B^k = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k}$$

V. Matrice transposée d'une matrice

Définition :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle transposée de la matrice A, la matrice notée ${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$

Remarques :

- La transposée d'une matrice (n,p) est une matrice (p,n).
- Les éléments de la i-ième ligne de tA sont les éléments de la i-ième colonne de A.

Propriétés :

- Soit A et B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.
- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}, {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$; ${}^t({}^tA) = A$
- Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $M_{p,q}(\mathbb{R})$, ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que A est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) si et seulement si ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$).

VI. Groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées inversibles

Définition :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que A est inversible (ou régulière) si et seulement si il existe une matrice notée A^{-1} de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. A^{-1} est appelée **matrice inverse** de A.

Remarques :

- Les conditions d'inversion d'une matrice et le calcul général de la matrice inverse d'une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$, seront abordés dans un chapitre ultérieur.
- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $GL(\mathbb{R}^n)$, on le note $GL_n(\mathbb{R})$ et on l'appelle groupe linéaire d'ordre n sur \mathbb{R} .

Théorème :

Soit A et B deux matrices non nulles de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = O$. Alors ni A ni B ne sont inversibles.

Démonstration par l'absurde :

Supposons A inversible et soit A^{-1} sa matrice inverse, donc $A^{-1} \times AB = A^{-1} \times O$.

Soit $(A^{-1}A)B = O$ c'est-à-dire $I \times B = B = O$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Propriétés :

- Soit A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$, tA est inversible $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
- Soit A et B deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$, AB est inversible $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n qui lui est canoniquement associé. A est inversible si et seulement si f est bijectif et $A^{-1} = \text{mat}(f^{-1})$.

VII. Inversion des matrices diagonales et triangulaires

Théorème(1)

Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

Démonstration :

$D \in D_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $DX = Y$ possède

une unique solution. Or $DX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 x_1 = y_1 \\ \vdots \\ d_n x_n = y_n \end{cases}$; ce système a une solution unique si et

seulement si $\forall i \in [1, n]$, $d_i \neq 0$ et dans ce cas $DX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{d_1} \\ \vdots \\ x_n = \frac{y_n}{d_n} \end{cases}$

$$\text{Soit } D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & d_2^{-1} & \cdot & (0) \\ (0) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Propriétés :

- Soit $D \in D_n(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & d_2 & \cdot & (0) \\ (0) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_n \end{pmatrix}$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & d_2^k & \cdot & (0) \\ (0) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & d_n^k \end{pmatrix}$
- Si de plus $\forall i \in [1, n]$, $d_i \neq 0$ l'expression de D^k est encore valable pour tout k entier relatif.

Théorème(2)

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

Démonstration admise

Définition :

On appelle matrice unipotente inférieure (resp. supérieure), toute matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) dont les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Propriétés :

- Toute matrice unipotente est inversible et inverse d'une matrice unipotente.
- L'ensemble des matrices unipotentes inférieures (resp. supérieures) muni du produit matriciel a une structure de groupe.

VIII. Définition d'un déterminant d'ordre 1 et d'ordre 2

Définition :

Soit $A = (a_{11})$ une matrice de $M_1(\mathbb{R})$, on appelle déterminant de A le réel noté **det(A)** et défini par $\det(A) = a_{11}$. A est inversible si et seulement si $a_{11} \neq 0$

Définition :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$, on appelle déterminant de A le réel noté $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ et défini par : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$.

Théorème fondamental :

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Démonstration :

Supposons A inversible. Si A est nulle, A n'est pas inversible. A est donc non nulle, c'est-à-dire que l'un au moins des quatre coefficients $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ est différent de zéro.

Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$, B est donc aussi non nulle.

En calculant AB on vérifie que: $AB = \det(A) \times I_2$.

Si $\det(A) = 0$ alors d'après le théorème (1) A ne serait pas inversible donc contradictoire avec l'hypothèse. Soit $\det(A) \neq 0$

Réciproquement : supposons $\det(A) \neq 0$. Or dans ce cas

$AB = \det(A) \times I_2 \Leftrightarrow A \times \frac{B}{\det(A)} = I_2$ C'est-à-dire $\frac{B}{\det(A)} = A^{-1}$, A est donc inversible.

IX. Sous-matrices associées à une matrice carrée.

Définition :

Soit A une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{R})$, on note A_{ij}^* la sous matrice carrée d'ordre $(n-1)$ de A , obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $A_{11}^* = (4)$, $A_{12}^* = (-2)$, $A_{21}^* = (3)$ et $A_{22}^* = (1)$

Généralisation pour des matrices carrées d'ordre 2 :

$$A_{11}^* = (a_{22}), A_{12}^* = (a_{21}), A_{21}^* = (a_{12}) \text{ et } A_{22}^* = (a_{11}) \text{ et} \\ \det(A_{11}^*) = a_{22}, \det(A_{12}^*) = a_{21}, \det(A_{21}^*) = a_{12} \text{ et } \det(A_{22}^*) = a_{11}.$$

Il y a donc quatre écritures possibles pour calculer $\det(A)$:

$$\det(A) = a_{11} \times \det(A_{11}^*) - a_{12} \times \det(A_{12}^*) : \text{développement suivant la première ligne.}$$

$$\det(A) = -a_{21} \times \det(A_{21}^*) + a_{22} \times \det(A_{22}^*) : \text{développement suivant la deuxième ligne.}$$

$$\det(A) = a_{11} \times \det(A_{11}^*) - a_{21} \times \det(A_{21}^*) : \text{développement suivant la première colonne.}$$

$$\det(A) = -a_{12} \times \det(A_{12}^*) + a_{22} \times \det(A_{22}^*) : \text{développement suivant la deuxième colonne.}$$

Remarque : Gestion des signes

Les expressions précédées d'un signe « - » sont celles où la somme des indices est impaire.
Les expressions précédées d'un signe « + » sont celles où la somme des indices est paire.

X. Déterminant d'ordre 3.

Définition :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice de $M_3(\mathbb{R})$, on appelle déterminant de A le réel noté : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

En utilisant l'un des quatre développements possibles, par exemple suivant la première ligne, on obtient : $\det(A) = a_{11} \times \det(A_{11}^*) - a_{12} \times \det(A_{12}^*) + a_{13} \times \det(A_{13}^*)$

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \text{ donc } A_{11}^* = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, A_{12}^* = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } A_{13}^* = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (5 \times 9) - (8 \times 6) - 2 \times [(4 \times 9) - (6 \times 7)] + 3 \times [(4 \times 8) - (5 \times 7)] = 45 - 48 - 72 + 84 + 96 - 105$$

$$\det(A) = 0. \text{ (ah! les mystères des nombres } \odot)$$

Généralisation pour des matrices carrées d'ordre 3 :

Il y a six développements possibles pour calculer $\det(A)$, trois développements suivant les lignes et trois suivant les colonnes.

➤ Développement suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne, $\forall i \in \{1;2;3\}$:

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \times \det(A_{i1}^*) + (-1)^{i+2} a_{i2} \times \det(A_{i2}^*) + (-1)^{i+3} a_{i3} \times \det(A_{i3}^*)$$

➤ Développement suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne, $\forall j \in \{1;2;3\}$:

$$\det(A) = (-1)^{j+1} a_{1j} \times \det(A_{1j}^*) + (-1)^{j+2} a_{2j} \times \det(A_{2j}^*) + (-1)^{j+3} a_{3j} \times \det(A_{3j}^*)$$

Remarque :

Pour une matrice carrée d'ordre 3 on peut mémoriser la règle des signes par :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

En effectuant les six développements on constate qu'ils sont tous égaux à :

$$[a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{12} \times a_{23} \times a_{31} + a_{21} \times a_{32} \times a_{13}] - [a_{13} \times a_{22} \times a_{31} + a_{12} \times a_{21} \times a_{33} + a_{11} \times a_{23} \times a_{32}]$$

Nous allons déterminer une règle pratique pour mémoriser ce résultat.

XI. Règle de Sarrus (Pierre Sarrus 1798-1861)

On complète la matrice A en lui rajoutant deux lignes : $L_4 = L_1$ et $L_5 = L_2$

(ou deux colonnes $C_4 = C_1$ et $C_5 = C_2$)

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ Cela permet une visualisation des produits à effectuer.

On effectue alors la somme des produits des coefficients suivant les diagonales principales à laquelle on retranche la somme des produits des coefficients suivant les autres diagonales.

Attention : Cette règle est valable seulement pour les déterminants d'ordre 2 ou 3 .

Exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ on écrit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\text{Soit } \det(A) = [1 \times 5 \times 9 + 4 \times 8 \times 3 + 7 \times 2 \times 6] - [3 \times 5 \times 7 + 6 \times 8 \times 1 + 9 \times 2 \times 4]$$

$$\det(A) = [45 + 96 + 84] - [105 + 48 + 72] = 225 - 225 = 0.$$

XII. Déterminant d'ordre n

Définition :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. On appelle déterminant de A le réel

noté $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ et défini par l'une des formules de récurrence suivantes :

Développement suivant la $k^{\text{ème}}$ ligne, $1 \leq k \leq n$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} \times \det(A_{kj}^*)$$

Développement suivant la $k^{\text{ème}}$ colonne, $1 \leq k \leq n$: $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \times \det(A_{ik}^*)$

Le réel $\det(A_{ij}^*)$ s'appelle le **mineur du coefficient** a_{ij} de la matrice A .

Le réel $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}^*)$ s'appelle le **cofacteur du coefficient** a_{ij} .

Autre notation : $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ si L_1, L_2, \dots, L_n et C_1, C_2, \dots, C_n désignent les lignes et les colonnes de la matrice A , on note :

$$\det(A) = \det[C_1 \dots C_n] = |C_1 \dots C_n| \text{ ou } \det(A) = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}$$

Propriétés :

- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det({}^t A) = \det(A)$

Démonstration : La formule donnant le développement de $\det({}^t A)$ suivant la première colonne donne celle de $\det(A)$ en développant par rapport à la première ligne.

- Si A est une matrice triangulaire alors $\det(A)$ est égal au produit de ses termes diagonaux en particulier $\det(I_n) = 1$. *Démonstration par récurrence sur n .*
- $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R} \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\forall (A, B) \in M_n^2(\mathbb{R}), \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$ *démonstration admise*
 $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$:
Si une ligne ou une colonne de A est nulle alors $\det(A) = 0$
Si deux lignes ou deux colonnes de A sont égales alors $\det(A) = 0$
Si deux lignes ou deux colonnes de A sont proportionnelles alors $\det(A) = 0$
- $\forall i \in \{1; \dots; n\}, \forall j \in \{1; \dots; n\}$,
➤ Les opérations suivantes ne modifient pas $\det(A)$:

- pour $i \neq j$,
 $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
- $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j$

- Les opérations suivantes modifient $\det(A)$:

- $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe de $\det(A)$
- $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe de $\det(A)$
- $L_i \leftarrow \alpha L_i$ multiplie $\det(A)$ par α

- Si $C_j = D_j + \lambda E_j$ alors $|C_1 \dots D_j + \lambda E_j \dots C_n| = |C_1 \dots D_j \dots C_n| + \lambda |C_1 \dots E_j \dots C_n|$

$$\text{➤ Si } L_i = D_i + \lambda E_i \text{ alors } \begin{vmatrix} L_1 \\ \dots \\ D_i + \lambda E_i \\ \dots \\ L_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \dots \\ D_i \\ \dots \\ L_n \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} L_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ L_n \end{vmatrix}$$

Exemple : $\begin{vmatrix} a + \lambda a' & b \\ c + \lambda c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a + \lambda a' & b + \lambda b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$

XIII. Application : Règle d'inversion d'une matrice carrée.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ telle que $\det(A) \neq 0$. Pour calculer l'inverse $A^{-1} = (a'_{ij})$ on effectue les opérations suivantes :

- On écrit la transposée ${}^t A = (a_{ij})$
- On écrit la matrice ${}^t A_{ij}^* = (a_{ij}^*)$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^t A = (a_{ij})$.
- On calcule $\det({}^t A_{ij}^*)$ et on multiplie ce déterminant par -1 si $i + j$ est impair
- On obtient ainsi le cofacteur du coefficient a_{ij} .
- En divisant ce cofacteur par $\det(A)$ on obtient le coefficient a'_{ij} de A^{-1} .

Cas particulier : Si $A \in M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ si } ad - bc \neq 0 : A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple :

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. A est inversible puisque $\det(A) = 7$.

$${}^t A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad {}^t A_{11}^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \det({}^t A_{11}^*) = 1 \text{ donc } a'_{11} = \frac{1}{7}$$

$${}^t A_{12}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \det({}^t A_{12}^*) = -3, 1+2 = 3 \text{ impair donc } a'_{12} = \frac{3}{7}.$$

On procède de même pour les autres coefficients et on obtient : $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_3$.

XIV. Résolution de systèmes par la méthode de Cramer

1. Définition :

On appelle **système de Cramer**, tout système de n équations linéaires à n inconnues dont la matrice est inversible.

Remarques : Cette définition est donc indépendante des seconds membres des équations.

On se limitera dans ce cours à des déterminants d'ordre 2 ou 3.

- On appelle **système homogène**, un système dont tous les seconds membres des équations sont nuls. $\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, b_i = 0$.
- Un système homogène comportant plus d'inconnues que d'équations admet au moins une solution autre que la solution nulle $(0,0,\dots,0)$.
- Un p -uplet (c_1, c_2, \dots, c_p) est dit solution d'un système si et seulement si il est solution des n équations le composant.
- Un système n'ayant aucune solution est dit **système impossible**.
- Un système ayant plusieurs solutions est dit **système indéterminé**.
- Deux **systèmes sont dits équivalents** s'ils ont le même ensemble de solution.
- Un système de Cramer possède une solution unique.
- Un système de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer, si et seulement si le système homogène associé a pour unique solution la solution nulle. C'est-à-dire :

soit $A \in M_n(\mathbb{R})$:

- Si $(AX = 0 \Rightarrow X = 0)$ alors A est inversible
- Si $(AX = 0 \Rightarrow X = 0)$ alors pour tout vecteur b de \mathbb{R}^n de matrice colonne B , l'équation matricielle $AX = B$ admet une solution unique.

2. Système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

- Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ l'unique solution du système (S) est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

La condition $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ revient à exprimer que la famille de vecteurs $\vec{U}_1 \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{vmatrix}$ et

$\vec{U}_2 \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{vmatrix}$ est une famille libre.

- Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, une condition nécessaire pour que le système (S) ait une solution est que :

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ sinon en considérant que la famille de vecteurs } \vec{U}_1 \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{vmatrix}$$

et $\vec{U}_2 \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{vmatrix}$ est une famille liée, cela revient à choisir arbitrairement l'un des deux

vecteurs. Le système (S) a donc une infinité de solutions.

3. Système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

▪ Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, l'unique solution du système (S) est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \text{ et } z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

▪ Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$, une condition nécessaire pour que le système (S) ait une

solution est que :

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Sinon en considérant que la famille de vecteurs $\vec{U}_1 \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{vmatrix}$, $\vec{U}_2 \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{vmatrix}$ et $\vec{U}_3 \begin{vmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{vmatrix}$ est une

famille liée, cela revient à choisir arbitrairement l'un des trois vecteurs.

Le système (S) a donc une infinité de solutions.

Exemple :

$$(S) : \begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 2 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 7 \text{ donc (S) admet un unique triplet solution.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{5}{7}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-9}{7}.$$

XV. Rang d'une matrice

Définition :

On appelle **rang d'une famille S de p vecteurs** et on note $\text{rg}(S)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par S. donc $\text{rg}(S) = \dim(\text{Vect}(S))$.

Remarque : Si S est une famille libre $\text{rg}(S) = p$.

Définition :

On appelle **rang de f**, $f \in L(E, F)$ et on note $\text{rg}(f)$, la dimension de $\text{Im}(f)$, par définition : $\text{rg}(f) \leq \dim E$ et $\text{rg}(f) \leq \dim F$.

Définition :

On appelle **rang de la matrice M**, avec $M = \text{mat}(f)$, le rang de f et on note $\text{rg}(M) = \text{rg}(f)$. Le rang d'une matrice M est le plus grand entier naturel r tel que l'on puisse extraire de M une matrice carrée d'ordre r de déterminant non nul.

On appelle *matrice extraite d'une matrice*, toute matrice obtenue en supprimant des lignes ou des colonnes.

XVI. Matrice de passage et formule de changement de bases

Définition :

Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie, on appelle **matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'** , la matrice de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} , on la désigne par P.

Remarque : Si P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} .

Théorème :

Soit E un espace vectoriel de bases B et B' et F un espace vectoriel de bases C et C'. Soit P et Q respectivement les matrices de passage de B à B' et C à C'. Soit $f \in L(E, F)$, $A = \text{mat}_{B,C}(f)$ et $A' = \text{mat}_{B',C'}(f)$. On a : $A' = Q^{-1}AP$

Cas particulier d'un endomorphisme :

Soit E un espace vectoriel de bases B et B'. Soit P la matrice de passage de B à B'. Soit $f \in L(E)$, $A = \text{mat}_B(f)$ et $A' = \text{mat}_{B'}(f)$. On a : $A' = P^{-1}AP$

Démonstration :

Soit $x \in E$, X la matrice de ses coordonnées dans la base B et X' la matrice de ses coordonnées dans la base B'. Donc $X = PX'$.

Soit $y \in F$, Y la matrice de ses coordonnées dans la base C et Y' la matrice de ses coordonnées dans la base C'. Donc $Y = QY'$.

Donc $y = f(x) \Leftrightarrow Y = AX \Leftrightarrow QY' = APX' \Leftrightarrow Y' = Q^{-1}APX' \Leftrightarrow Y' = (Q^{-1}AP)X'$. D'autre part $y = f(x) \Leftrightarrow Y' = A'X'$ donc d'après l'unicité de la matrice de f dans B' et C',

$A' = Q^{-1}AP$.

XVII. Matrices équivalentes- Matrices semblables

Définition :

Soit $A \in M_{qp}(IR)$ et $B \in M_{qp}(IR)$, on dit que A et B sont équivalentes si et seulement si il existe une matrice $P \in GL_p(IR)$ et une matrice $Q \in GL_q(IR)$, $GL_n(IR)$ désignant l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n , tel que $A = Q \times B \times P$.

Propriétés :

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont les matrices d'une même application linéaire relativement à deux bases différentes.
- Deux matrices sont équivalentes si elles ont le même rang.

Définition :

Deux matrices carrées d'ordre n , A et B sont dites **semblables** si il existe une matrice P carrée d'ordre n inversible telle que : $B = P^{-1}AP$.

Propriétés :

- **Deux matrices semblables sont équivalentes. La réciproque est fausse.**
- Soit $M \in M_n(IR)$ et $N \in M_n(IR)$, M et N sont semblables si et seulement si il existe une base B de IR^n telle l'endomorphisme canoniquement associé à M ait pour matrice N dans la base B .
- **Deux matrices semblables ont donc le même rang.**
- Soit A et B deux matrices semblables de $M_n(IR)$, $\forall k \in IN$, A^k et B^k sont semblables.
- Soit A et B deux matrices semblables de $M_n(IR)$, si A est inversible B l'est aussi et $\forall k \in Z$, A^k et B^k sont semblables.

Chapitre 5

Algèbre de Boole

I. GENERALITES

1. GRANDEURS LOGIQUES –GRANDEURS ANALOGIQUES

Une grandeur analogique est une grandeur qui suit les variations du critère mesuré. Elle peut présenter un nombre infini d'états.

Exemple : La mesure de la température par un thermomètre se fait de façon analogique. En effet l'écart entre deux températures peut être infime et il peut exister une infinité de ces écarts.

Une grandeur logique est une grandeur qui ne suit pas de façon continue les variations du critère mesuré, mais présente un nombre fini d'états fonction de cette grandeur

Exemple : Un feu de signalisation routière présente trois états logiques : vert, orange, rouge.
Une ampoule électrique présente deux états logiques : allumé ou éteint.

En informatique, on considère deux états logiques, tels que, succinctement, le courant passe ou ne passe pas dans les composants électroniques qui constituent l'ordinateur. On associe conventionnellement à ces deux états logiques les valeurs 0 et 1, principe de la numération binaire.

Exemple : Un transistor présentera un état logique 1 quand il laissera passer le courant (état dit saturé) et un état logique 0, quand il ne le laissera pas passer (état dit bloqué).

Les grandeurs logiques font l'objet d'une algèbre dont les bases furent établies par **George BOOLE** (1815-1864) et que l'on appelle communément algèbre de Boole. Les propositions formulées dans cette algèbre ne peuvent prendre que deux états logiques **vrai** ou **faux**.

2. VARIABLE BOOLEENNE SIMPLE

On appelle variable booléenne simple, toute variable logique ou donnée susceptible de prendre seulement deux valeurs désignées par les symboles 0 et 1.

3. FONCTION BOOLEENNE

On appelle fonction booléenne de n variables logiques définies dans un référentiel E et on note $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ou plus simplement f , toute partie de ce référentiel qui peut être exprimée par la **combinaison de ces variables** au moyen des **opérations logiques** de somme, produit et complémentation.

Exemple : $f(a, b, c) = a.\bar{b} + c$

4. CIRCUIT COMBINATOIRE

Un circuit combinatoire est un circuit logique dans lequel les sorties ne dépendent que des entrées et non du temps ou des états antérieurs. Si l'état de la grandeur de sortie **dépend uniquement** de l'état des grandeurs d'entrée et **est toujours le même, pour les mêmes grandeurs d'entrée**, on parle de logique combinatoire.

Exemple : L'ouverture d'un cadenas à chiffres n'est possible que si l'on arrive à la bonne combinaison.

Le problème est indépendant du temps et de l'ordre dans lequel on arrive à la solution.

Ainsi le circuit est clairement défini lorsque l'on a précisé :

- _ le nombre d'entrées,
- _ le nombre de sorties,
- _ l'état de chaque sortie en fonction de celui des entrées.

5. OPERATEURS LOGIQUES

Le passage d'états logiques d'entrée à l'état logique de sortie se fait à l'aide de circuits électroniques que l'on appelle **opérateurs logiques** ou **portes logiques**. Ce sont les composants (puces) que l'on rencontre sur les cartes qui sont dans un ordinateur et qui constituent des ensembles de portes logiques, soit des composants plus élaborés tels que microprocesseurs, mémoires, etc.

Un circuit logique est schématisé à partir d'opérateurs de base. Ils représentent les fonctions logiques à partir desquelles, il est possible de construire en les assemblant, des fonctions booléennes plus complexes.

Les opérateurs logiques de base sont :

- NON (NOT) opérateur qui à toute variable a fait correspondre sa négation \bar{a} .
- ET (AND) opérateur qui réalise le produit logique de deux variables a et b : $a.b$
- OU (OR) opérateur qui réalise la somme logique de deux variables a et b : $a + b$

Nous avons vu que toute fonction booléenne de n variables, peut être exprimée par la combinaison de ces variables au moyen des opérateurs de base. C'est pourquoi on dit que cet ensemble d'opérateurs constitue un **groupe logique complet**.

Cependant il est possible de réaliser un groupe logique complet à partir de deux opérateurs ou d'un seul opérateur.

Cette propriété est largement utilisée pour réaliser des circuits à partir d'un nombre minimum d'opérateurs.

Les opérateurs dérivés des opérateurs de base sont :

- NON-ET (NAND) $a \text{ NAND } b = \overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$ *Attention !! $\overline{a.b} \neq \bar{a}.\bar{b}$*
- NON-OU (NOR) $a \text{ NOR } b = \overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$
- OU EXCLUSIF (XOR) $a \text{ XOR } b = a \oplus b = \bar{a}.b + a.\bar{b}$
- NON-OU EXCLUSIF (XNOR) $a \text{ XNOR } b = \overline{a \oplus b} = \bar{a}.\bar{b} + a.b$

6. TABLE DE VERITE D'UNE FONCTION BOOLEENNE

Nous avons vu que l'on peut schématiser un circuit à partir d'opérateurs de base.

La fonction booléenne qui résulte de la combinaison de ces opérateurs peut elle même être schématisée par une **table de vérité**, dans laquelle les entrées et les sorties sont exprimées par des variables booléennes.

Chaque ligne de la table correspond à un cas possible et pour une fonction de n variables, il y a 2^n lignes.

Exemple : $f(a, b) = a + \bar{b}$
La table de vérité de f est :

a	b	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

II. SIMPLIFICATION D'UNE FONCTION BOOLEENNE

1. MINTERMS

Soit f une fonction booléenne de n variables indépendantes.

On appelle **minterm** et l'on désigne par m , l'un quelconque des produits logiques des n variables ou de leur négation.

Exemple : $f(a, b, c) = \bar{a}.b + c.(a + b)$, $\bar{a}.b$, $c.a$ et $c.b$ sont des minterms.

Pour une fonction f de n variables, il existe 2^n **minterms** différents pouvant entrer dans l'écriture de f .

Exemple : pour deux variables a et b : $\bar{a}b$, $\bar{a}\bar{b}$, $a\bar{b}$, ab

2. MAXTERMS

Soit f une fonction booléenne de n variables indépendantes.

On appelle **maxterm** et l'on désigne par **M**, l'une quelconque des sommes logiques des n variables ou de leur négation.

Exemple : $f(a, b, c, d) = \bar{a} + b + c.(d + b)$, $\bar{a} + b$ et $d + b$ sont des maxterms.

Pour une fonction f de n variables, il existe 2^n **maxterms** différents pouvant entrer dans l'écriture de f .

Exemple : pour deux variables a et b : $\bar{a} + b$, $\bar{a} + \bar{b}$, $a + \bar{b}$, $a + b$.

3. FORME CANONIQUE D'UNE FONCTION BOOLEENNE

On appelle **forme canonique** d'une fonction booléenne de n variables, la représentation de cette fonction soit par :

- Une **somme de minterms** de ces n variables et l'on parle alors de **forme canonique disjonctive**,
- Un **produit de maxterms** de ces n variables et l'on parle alors de **forme canonique conjonctive**

Exemple : $f(a, b, c) = \bar{a}b + c.b$ est une forme canonique disjonctive de f .

$f(a, b, c) = (\bar{a} + b)(a + c)$ est une forme canonique conjonctive de f .

La forme canonique disjonctive d'une fonction booléenne se déduit immédiatement de sa table de vérité en faisant la somme des minterms pour lesquels la fonction prend la valeur 1.

Exemple : $f(a, b) = a + \bar{b}$

La table de vérité de f est :

a	b	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

La forme canonique disjonctive de f est : $f = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} + ab$.

Ces deux écritures de f , en apparence différentes, sont égales. La première écriture est une **écriture simplifiée** de la seconde.

4. PASSAGE D'UNE FORME CANONIQUE A UNE AUTRE

Pour trouver la forme canonique conjonctive d'une fonction f à partir de sa forme canonique disjonctive, il faut trouver \bar{f} , qui est la somme des minterms qui ne figurent pas dans la forme canonique disjonctive, puis compléter le résultat.

Exemple : $f(a, b, c) = \bar{a}b.c + a\bar{b}.\bar{c} + a.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c$ est la forme canonique disjonctive de f .

Il existe $2^3 = 8$ minterms possibles, donc $\bar{f} = \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.c$

Soit en complétant et à l'aide des lois de Morgan :

$$\bar{f} = (a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + b + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + c)$$

Or $\bar{\bar{f}} = f$, on a donc obtenu la forme canonique conjonctive de f .

Pour trouver la forme canonique disjonctive d'une fonction f à partir de sa forme canonique conjonctive, il faut trouver \overline{f} , qui est le produit des maxterms qui ne figurent pas dans la forme canonique conjonctive, puis compléter le résultat.

5. SIMPLIFICATION PAR UNE METHODE ALGEBRIQUE

➤ Si la fonction est peu « compliquée », on peut la simplifier en utilisant les règles de calcul de l'algèbre de Boole.

Exemple : $f = a.b.c + a.\overline{b}.\overline{c} + a.b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$
 $f = a.b.(c + \overline{c}) + \overline{b}.\overline{c}.(a + \overline{a})$
 $f = a.b + \overline{b}.\overline{c}$

➤ Si l'expression de f dans l'une des formes canoniques contient un nombre de termes proche de 2^n , il est avantageux d'écrire f en passant à l'autre forme canonique.

Exemple : $f = \overline{a}b.c + a.\overline{b}.\overline{c} + a.b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c} + \overline{a}b.\overline{c} + \overline{a}b.c$
 Donc $\overline{f} = a.b.c + a.\overline{b}.\overline{c}$. Soit $\overline{\overline{f}} = f = (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}).(\overline{a} + b + \overline{c})$

Cette méthode présente des inconvénients :

- Elle est difficile à utiliser si le nombre de variables est supérieur à 3,
- Elle fait appel à une démarche intuitive dans la recherche des termes complémentaires,
- On n'est pas certain d'obtenir l'écriture simplifiée la meilleure.

6. TABLEAUX DE KARNAUGH

Un tableau de Karnaugh est une **représentation plus parlante** que la table de vérité.

Dans une table de vérité, le nombre de variables détermine le nombre de lignes (2^n), tandis qu'il détermine le nombre de cases (2^n) dans un tableau de Karnaugh car il s'agit d'un tableau à double entrée.

Règle de présentation :

Une fonction f étant écrite sous forme canonique disjonctive, à chaque case du tableau de Karnaugh correspond un minterm possible. Si le minterm figure dans la forme canonique de f , on marque la case d'un 1 sinon d'un 0.

Exemple : $f = \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.b + a.b$

Tableau de Karnaugh

	\overline{b}	b
\overline{a}	1	1
a	0	1

Table de vérité :

a	b	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A partir de 3 variables, les cases d'un tableau de Karnaugh ne peuvent plus être placées dans un ordre aléatoire.

Il est nécessaire que le passage d'une case à une case adjacente, se traduise par le changement d'état d'une seule variable.

On présente conventionnellement en ligne une variable et sa négation et en colonne les produits logiques des deux autres variables ou de leurs négations.

Les cases des premières et dernières colonnes sont considérées comme adjacentes. En effet on considère que l'on pourrait présenter le tableau enroulé sur un cylindre vertical.

Exemple : $f = a.b.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}$

Tableau de Karnaugh

f	$\bar{a}.\bar{b}$	$\bar{a}.b$	$a.b$	$a.\bar{b}$
\bar{c}	1	0	1	1
c	0	0	1	0

7.SIMPLIFICATION A L'AIDE D'UN TABLEAU DE KARNAUGH

- Les cases marquées d'un 0, donnent directement la forme canonique disjonctive de \bar{f}

Exemple : Si $f = \bar{a}.\bar{b} + \bar{a}.b + a.b$ alors le tableau de Karnaugh de \bar{f} est :

\bar{f}	\bar{b}	b
\bar{a}	0	0
a	1	0

donc $\bar{f} = a.\bar{b}$ soit $\bar{\bar{f}} = f = \bar{a} + b$ Cette deuxième écriture est l'écriture simplifiée de f.

■ Règles de simplification :

- Lorsque deux cases adjacentes contiennent chacune un 1, une simplification peut s'opérer en ne conservant dans l'écriture de la fonction que les variables ou produits de variables ne changeant pas d'état.
- On peut regrouper les cases adjacentes marquées d'un 1 par puissance de 2. (par 2, 4, 8, etc.)
- Une même case peut être utilisée pour des regroupements différents.
- On peut faire autant de regroupements que nécessaires pour prendre en compte le maximum de cases marquées d'un 1.

Exemple :

f	$\bar{a}.\bar{b}$	$\bar{a}.b$	$a.b$	$a.\bar{b}$
\bar{c}	1	0	1	1
c	0	0	1	0

$$f = a.b + a.\bar{c} + \bar{b}.\bar{c}$$

On obtient l'écriture simplifiée de la fonction f

Conseil de rédaction : indiquer le lien entre chaque regroupement de cases adjacentes et le minterm retenu.

Exemple :

f	$\bar{a}.\bar{b}$	$\bar{a}.b$	$a.b$	$a.\bar{b}$
\bar{c}	1	0	1	1
c	0	1	1	0

$$f = a.b + a.\bar{c} + \bar{b}.\bar{c} + b.c$$

Attention : Le minterm $a.b$ est pris en compte dans deux regroupements, ce qui est inutile.
Une écriture simplifiée de f est donc