Cours d'algèbre linéaire
Eléments de logique el langage ensembliste

Proposition Enoncé qui peut être Vrai ou Faux.

Prédicat Proposition quantifiée.

Axiome Proposition première ou vérité que l'on ne peut démontrer et sur laquelle se fonde un raisonement ou axiomatique.

Théorème Enoncé que l'on obtient à partir d'énoncés préalablement connus, axiomes ou théorèmes déjà démontrés.

Calcul propositionel
Connecteurs logiques

Le calcul propositionnel permet de combiner des propositions au moyen d'opérateurs appelés CONNECTEURS. La négation, la conjonction et la disjonction, permettent d'exprimer tous les autres.

Implication $P \Rightarrow Q$

Une implication est une relation entre deux propositions P et Q qui a la signification suivante :

Si P est vraie alors il en est de même pour Q, et on note : $P \Rightarrow Q$ que l'on pourra lire : " P entraine Q".

Pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie. Pour que P soit vraie il faut que Q soit vraie.

La suffisance porte sur P **(P est une condition suffisante de Q)**

La nécéssité porte sur Q **(Q est une condition nécéssaire de P**).

Une implication est toujours vraie sauf pour le "vrai" qui ne peut impliquer pas le "faux"

Equivalence $P \Leftrightarrow Q$

Deux propositions P et Q sont équivalentes si et seulement si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

Propositions associées à une implication

Implication	Réciproque	Contraposée	Inverse		
$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$	$\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P}\, ou Q)$

Lois de Morgan

$\overline{PetQ} \Leftrightarrow \overline{P} ou \overline{Q}$ et $\overline{PouQ} \Leftrightarrow \overline{P} et \overline{Q}$

Quantificateurs

L'affirmation: "L'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie, est E" est une proposition,

on la note: $\forall x \in E, \quad P(x)$

$\forall$ **: Quantificateur Universel signifiant " pour tout …" ou " quelque soit …"**

L'affirmation: "L'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie n'est pas vide" est également une proposition;

on la note: $\exists x \in E, \quad P(x)$

$\exists$ **: Quantificateur Existentiel signifiant " il existe au moins un …"**

$\exists$**! : Quantificateur Existentiel signifiant " il existe un et un seul…"**

Dans un prédicat contenant à lafois les quantificateurs universel et existentiel, il faut faire attention à l'ordre des quantificateurs : « $\forall x \in E$, $\exists y \in E$ tel que … » n'est pas équivalent à « $\exists y \in E$, $\forall x \in E$ tel que … »

Négation d'un prédicat

$\overline{\forall x \in E, \quad P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E, \quad \overline{P(x)}$ et $\overline{\exists x \in E, \quad P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \overline{P(x)}$.

Cours d'algèbre linéaire

Langage ensembliste

Appartenance

Si un élément x appartient à un ensemble E on note : $x \in E$ et dans le cas contraire on note : $x \notin E$.

Inclusion

Si deux ensembles E et F sont tels que tout élément de E est élément de F, on dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$. E est alors un sous-ensemble de F.

Egalité de deux ensembles

($E \subset F$ et $E \subset F$) $\Leftrightarrow E = F$

Ensemble des parties d'un ensemble

On désigne par *P(E)* l'ensemble des parties de E. $Y \in \mathrm{P}(E) \Leftrightarrow Y \subset E$.

$\varnothing \in P(E)$ mais $\varnothing \subset E$

Complémentaire d'un ensemble

A désignant une partie de E, l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A sont éléments de la partie complémentaire de A dans E.On note : $\overline{A}$ ou $C_E A$, le complémentaire de A dans E.

Réunion

$x \in E \cup F \Leftrightarrow x \in E$ ou $x \in F$.

Intersection

$x \in E \cap F \Leftrightarrow x \in E$ et $x \in F$.

Différence ensembliste

$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin B$. On note aussi : $A - B = A \setminus B$

Partition d'un ensemble

Soit un ensemble E et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n parties non vides de E. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une partition de E si et seulement si :

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$
- $\forall (i, j), i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ (les parties sont deux à deux disjointes).

Produit cartésien

Un couple est une paire ordonnée. On note (x ,y) le couple formé par les deux éléments x et y. $\{x, y\} = \{y, x\}$ mais $(x, y) \neq (y, x)$ Le produit cartésien d'un ensemble E par un ensemble F est l'ensemble de tous les couples (x ,y) tels que $x \in E$ et $y \in F$ .Le produit cartésien est noté $E \times F$ ou E⊗F, $E \otimes F = \{(x, y) / x \in E, y \in F\}$

$E \times F \neq F \times E$.

$E^2 = E \times E$ et $\forall n \in IN^*$, $E^n = \overbrace{E \times E \times \ldots \times E}^{n fois}$.

Cours d'algèbre linéaire
Applications et relations binaires

Soit E, F,G des ensembles

Application de E dans F

Tout élément de *E* a une image unique dans *F c.a.d* : $\forall x \in E, \exists! y \in F$ tel que $y = f(x)$

Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G :

Image d'une partie d'un ensemble

Soit *A* un sous-ensemble de *E*. On appelle image de *A* et on note *f(A)* , l'ensemble des images des éléments de *A* par *f* dans *F* : *f(A)* = $\{y \in F)/ x \in A, y = f(x)\}$

Image réciproque d'une partie

On appelle image réciproque d'une partie *B* de *F* et on note $f^{-1}(B)$, l'ensemble des antécédents dans *E* de tous les éléments de *B* : $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

Composition de deux applications

Soit *f* une application de I vers J et *g* une applicationde K vers un troisième ensemble L avec J$\subset$ K. L'application notée *gof* , définie sur I et à valeurs dans L, est telle que $\forall x \in I$, *gof(x)* = *g*[f*(x)*] .

- La composition des applications est associative *(fog)oh* = *fo(goh)* mais non commutative: *fog* $\neq$ *gof*.

Application injective ou injection

Tout élément de *F* a au plus un antécédent dans *E c.a.d* : . $\forall(x_1, x_2) \in E^2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- Si *f* et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective et si $g \circ f$ est injective alors *f* est injective.

Application surjective ou surjection

Tout élément de *F* a au moins un antécédent dans *E. c.a.d* : $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

- Si *f* et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective et si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Application bijective ou bijection

Tout élément de *F* a un antécédent unique dans *E. c.a.d* : $\forall y \in F, \exists! x \in E$ tel que $y = f(x)$

f une bijection si et seulement si *f* est à la fois injective et surjective.

- Si *f* et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

Application réciproque d'une application bijective

Si *f* est une bijection de *E* dans *F*, il existe une unique bijection *g* de *F* dans *E* telle que :
$g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. *g* est l'application réciproque de *f* notée f^{-1}.

id_E désigne application identique ou identité de *E* , qui à tout élément de *E* associe lui-même : $x \mapsto x$

- Si $g \circ f$ est bijective alors $(g \circ f)^{-1}$ est définie et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Relations binaires

- Réflexivité $\forall a \in E$, aRa
- Symétrie $\forall(a,b) \in E^2$, $aRb \Rightarrow bRa$.
- Antisymétrie $\forall(a,b) \in E^2$, (aRb et bRa) $\Rightarrow a = b$.
- Transitivité $\forall(a,b,c) \in E^3$, (aRb et bRc) $\Rightarrow aRc$.
- Relation d'ordre Toute relation binaire à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.
- Relation d'équivalence Toute relation binaire à la fois réflexive, symétrique et transitive.
- Classe d'équivalence de *a* L'ensemble des éléments en relation avec *a*, soit $C_a = \{b \in E / aRb\}$.
- Ensemble quotient de *E* On note E / R l'ensemble des classes d'équivalence de tout élément *x*, soit $E / R = \{C_x / x \in E\}$.

Cours d'algèbre linéaire
Structures ensemblistes

Soit E un ensemble

Lois de composition interne

Toute application notée $*$, de $E \times E \to E$ telle que : $\forall(x,y) \in E^2$, $(x,y) \mapsto x * y$

Propriétés :

- Une partie *A* de *E* est dite **stable** pour la loi $*$ si et seulement si :
  $$\forall(a,b) \in A^2, a * b \in A$$
- Une loi $*$ sur *E* est dite **associative** si et seulement si :
  $$\forall(a,b,c) \in E^3, a*(b*c) = (a*b)*c$$
- Une loi $*$ sur *E* est dite **commutative** si et seulement si :
  $$\forall(a,b) \in E^2, a*b = b*a$$
- Un élément e de *E* est dit **élément neutre** de E pour la loi $*$ si et seulement si :
  $$\forall a \in E, \exists! e \in E / a*e = e*a = a$$
- Un élément x de *E* possède **un symétrique** dans E pour la loi $*$ si et seulement si :
  $$\exists y \in E, x*y = y*x = e$$
- Si *E* est muni des deux lois internes + et $*$, la loi $*$ est dite **distributive** par rapport à la loi + si et seulement si : $\forall(a,b,c) \in E^3, a*(b+c) = (a*b)+(a*c)$ et $(a+b)*c = (a*c)+(b*c)$

Structure de groupe

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi $*$ noté (G, $*$).
(G,$*$) a une structure de groupe si et seulement si :

- $*$ est interne dans G
- $*$ est associative
- G possède un élément neutre pour la loi $*$
- Tout élément de G est symétrisable dans G
- Si de plus la loi $*$ est commutative, on dit que (G, $*$) est un groupe commutatif ou abélien.

Structure de corps

Soit un ensemble E muni de deux lois internes $*$ et $\perp$, noté (E, $*$, $\perp$).
(E, $*$, $\perp$) a une structure de corps commutatif si et seulement si :

- (E, $*$)est un groupe commutatif
- $\perp$ est interne, associative et commutative dans E
- $\perp$ est distributive par rapport à $*$ dans E
- $\perp$ admet un unique élément neutre dans E
- Tout élément de E privé de son élément neutre est symétrisable pour la loi $\perp$

Loi de composition externe

Soit E un ensemble et λ un réel. On appelle **loi de composition externe** sur E, notée $\bullet$, toute application de IR × E $\to$ E telle que $\forall x \in E$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda \bullet x$

Cette loi s'appelle **multiplication par un scalaire**, les réels sont appelés scalaires et les éléments de E sont appelés **vecteurs.** *Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté* $\lambda \bullet x$ *est noté* $\lambda.x$

Structure d'espace vectoriel sur IR

On appelle espace vectoriel sur IR ou IR-espace vectoriel, tout ensemble *E* non vide muni :

- D'une loi interne notée + telle que (*E*,+) soit un groupe commutatif
- D'une loi externe notée **.** possédant les quatre propriétés suivantes :
  $\forall(\lambda,\mu) \in IR^2, \forall(x,y) \in E^2$
  - $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$ distributivité par rapport à l'addition des scalaires
  - $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda y$ distributivité par rapport à l'addition des vecteurs
  - $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$ associativité de la loi externe
  - $1.x = x$ existence d'un élément neutre pour la loi externe

Cours d'algèbre linéaire
Applications linéaires

Soit E et F deux ensembles

Définition

f est une application linéaire de *E* dans *F* si et seulement si :

$\forall (u,v) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in IR^2,\ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $L(E,F)$.
- $(L(E,F),+,.)$ est un espace vectoriel sur IR.
- Une application linéaire de E dans IR est appelée **forme linéaire** sur IR.
- L'ensemble des formes linéaires de E dans IR est appelé **espace vectoriel dual de E** on le note E^*.
- Si *f* est une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Morphismes

Endomorphisme Toute application linéaire de E dans E.
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $L(E)$.

- Si *f* et g sont deux endomorphismes de E alors $g \circ f$ est un endomorphisme de E.

Isomorphisme Toute application linéaire bijective de E dans F, E et F sont dits **isomorphes**

- Si *f* est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Automorphisme Tout endomorphisme bijectif E.
L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.
$(GL(E),\circ)$ a une structure de groupe et est appelé groupe linéaire de E.

Noyau d'une application linéaire

On appelle noyau de *f* et on note *Ker*(*f*), l'ensemble des vecteurs *u* de E tels que $f(u) = 0_F$, soit $Ker(f) = f^{-1}(\{0_F\})$.

- *Ker(f)* est un s.e.v de E et *f* injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}$.

Image d'une application linéaire

On appelle **Image** de *f* et on note *Im*(*f*), l'ensemble des vecteurs *v* de F image d'un vecteur *u* de E, c'est à dire tels que $f(u) = v$ .Soit $\mathrm{Im}(f) = f(E)$.

- *Im(f)* est un s.e.v de F et *f* surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.

Base canonique de IR^n

Désignons par e_i, $n \in IN^*$,le vecteur de IR^n dont toutes les coordonnées sont nulles à l'exception de la i-ième qui vaut 1. $e_i = (0,...,0,1,0,...0)$ .Le *n*-uplet de vecteurs, on dit aussi **la famille de vecteurs**, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est appelée base canonique de IR^n on la note $B_0 = (e_i)_{1 \le i \le n}$.

- Tout vecteur *u* de IR^n se décompose de manière unique dans la base canonique de IR^n.
  $\forall u \in IR^n, u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où x_i est la i-ième coordonnée de u dans la base canonique.

Détermination d'une application linéaire de IR^p dans IR^n

Soit $B_0 = (e_j)_{1 \le j \le p}$ la base canonique de IR^p et $(u_j)_{1 \le j \le p}$ une famille de vecteurs de IR^n.

Il existe une unique application linéaire *f* de IR^p dans IR^n telle que $\forall j \in \{1,..., p\}\ f(e_j) = u_j$.

On dit que *f* est entièrement déterminée par la connaissance des images des vecteurs de la base canonique de IR^p.

Cours d'algèbre linéaire
Sous-espaces vectoriels

Soit E *un espace vectoriel sur IR*

Sous-espaces vectoriels *(on écrira s.e.v)*

Toute partie F non vide de E qui soit :

- Stable pour l'addition de E, c.a.d : $\forall (x,y) \in F^2 \quad x+y \in F$
- Stable pour la multiplication par un scalaire, $\forall (\lambda, x) \in IR \times F$, $\lambda.x \in F$

Si F et G sont deux s.e.v de E alors $F \cap G$ est un s.e.v de E. En général $F \cup G$ n'est pas un s.e .v de E.

Caractérisation d'un s.e.v

F est un s.e.v de E si et seulement si :

- $F \subset$ E,
- $F \neq \varnothing$ et $0_E \in F$,
- F est **stable par combinaison linéaire**, c.a.d : $\forall (\lambda, \mu) \in IR^2, \forall (x,y) \in F^2, \ \lambda.x + \mu.y \in F$

Famille génératrice

Toute famille finie S de vecteurs de E , telle que tout vecteur de E s'écrive comme combinaison linéaire des vecteurs de S. On dit alors que ***S* engendre E** et E = *Vect(S)*.

- Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E, est une famille génératrice de E.

Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soit $S = (u_j)_{1 \le j \le p}$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E.L'ensemble des combinaisons linéaires des p vecteurs de S est un s.e.v de E appelé sous-espace vectoriel engendré par S et noté *Vect(S)* ou $Vect(u_1, u_2, ..., u_p)$.

- $Vect(u_1, u_2, ..., u_p) = Vect(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, ..., u_{\sigma(p)})$ pour toute permutation σ de $\{1,..., p\}$
- $Vect(u_1, u_2, ..., u_p, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i) = Vect(u_1, u_2, ..., u_p)$
- $Vect(u_1, u_2, ..., u_p, 0_E) = Vect(u_1, u_2, ..., u_p)$
- $Vect(u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i, u_2, ..., u_p) = Vect(u_1, u_2, ..., u_p)$

Famille libre

Soit $S = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille vecteurs de E, on dit que S est une famille libre si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1,..., p\}, \lambda_i = 0$$

On dit alors que les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_p$ sont des **vecteurs linéairement indépendants**.

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée** et ses vecteurs sont dits **linéairement dépendants**.

$S = (u_1, u_2, ..., u_p)$ est une famille liée si et seulement s' il existe au moins un vecteur de S qui soit combinaison linéaire des autres vecteurs de S.

- Soit $S = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille libre de E, $u \in Vect(u_1, u_2, ..., u_p) \Leftrightarrow S' = (u_1, u_2, ..., u_p, u)$ est liée.
- Toute famille contenue dans une famille libre est libre
- Toute famille qui contient une famille liée est liée
- Soit $S = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de IR^n.
  si S est libre alors $p \le n$ et si S est génératrice alors $p \ge n$.

Cours d'algèbre linéaire

Base

Toute famille de vecteurs de E à la fois libre et génératrice.

- Si *f* est un isomorphisme de E dans F, *B* base de E $\Leftrightarrow$ *f(B)* base de F.
- Soit $S = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de IR^n. Si *S* est libre et *p* = *n*, alors *S* est une base de IR^n.
- Soit $S = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de IR^n. Si *S* est génératrice et *p* = *n*, alors *S* est une base de IR^n.
- Si E possède une base à *n* éléments alors E est isomorphe à IR^n.

Dimension d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel E est dit de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments.

Théorème d'existence de bases

Si E$\neq \{0\}$ et si E admet une famille génératrice *S*, alors il existe une base de E constituée d'éléments de *S*.

Théorème de la dimension

Toutes les bases d'un espace vectoriel E$\neq \{0\}$de dimension finie, ont le même nombre d'éléments.

Le nombre commun d'éléments à toutes les bases d'un espace vectoriel E$\neq \{0\}$s'appelle la dimension de E.

On le note **dimE.** Par convention dim$\{0\}$= 0

- En pratique pour montrer qu'une famille de *n* vecteurs est une base d'un espace vectoriel de dimension *n*, il suffit de prouver qu'elle est libre **ou** génératrice.

Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel admettant une base $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $S = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille libre de *p* vecteurs de E avec *p*<*n*. Alors S peut être complétée par *n – p* vecteurs de *B* pour former une base de E.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout s.e.v F de E est de dimension finie et dimF $\leq$ dimE.

- Si F et G sont deux s.e.v de dimension finie de E tel que F$\subset$G et dimF = dimG, alors F = G .

Caractérisation des isomorphismes

Si *f* est une application linéaire de E dans F, E$\neq \{0\}$, *f* est un isomorphisme si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle *f*($\mathcal{B}$) soit une base de F.

Conséquence :

Soit E et F deux espaces vectoriels de **dimension finie** sur IR et *f* une application linéaire de E dans F alors f bijective $\Leftrightarrow$ f surjective$\Leftrightarrow$ f injective

Théorème du rang :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E,F)$ alors : $\dim \mathrm{Im}(f) + \dim Ker(f) = \dim E$

Cours d'algèbre linéaire
Calcul matriciel

Ensemble $M_{n,p}(IR)$ des matrices à n lignes et p colonnes

On note $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ une matrice à n lignes et p colonnes. On dit que *A* est de format *(n,p)*

- $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ est une **matrice carrée d'ordre n** et ses éléments a_{ii} sont appelés éléments diagonaux.

  L'ensemble des matrices carrées d'ordre n d'éléments de IR est noté $M_n(IR)$.

- On appelle **matrice unité d'ordre n**, la matrice notée I_n de $M_n(IR)$ telle que :

  $$\forall i\in\{1,...,n\},\ a_{ii}=1 \text{ et } \forall (i,j)\in\{1,...,n\}^2, i\neq j\Rightarrow a_{ij}=1$$

- On appelle **matrice diagonale d'ordre n**, toute matrice dont les éléments non diagonaux sont nuls.
  Soit $D=(d_i)_{1\le i\le n}$ une telle matrice, on note $D_n(IR)$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.

Sous-matrices associées à une matrice carrée

Soit *A* une matrice non nulle de $M_n(IR)$, on note A^*_{ij} la sous matrice carrée d'ordre (n-1) de *A*, obtenue en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de *A* .

Correspondance entre matrices (n,p) et applications linéaires de IR^p dans IR^n

Soit $B_0=(e_i)_{1\le i\le p}$ et $\varepsilon_0=(\varepsilon_i)_{1\le i\le n}$ les bases canoniques respectives de IR^p et de IR^n.

La matrice A de la famille $f(B_0)$ est appelée **matrice de l'application linéaire *f***, on la note *mat(f)*.

$M_{n,p}(IR)$ **est un espace vectoriel sur IR isomorphe à** $L(IR^p, IR^n)$ **.**

Produit matriciel

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ une matrice de $M_{n,p}(IR)$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le q}}$ une matrice de $M_{p,q}(IR)$.

Le produit de A par B n'est défini que s'il y a compatibilité des formats de *A* et *B*, c'est-à-dire si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. $A\times B=C\Rightarrow C=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le q}}$ avec $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\times b_{kj}$.

- En général le produit matriciel n'est pas commutatif.
- Si AB = 0 on a pas nécessairement A = 0 ou B = 0.
- Si AB = AC , on a pas nécessairement B = C .

Formule du binôme :

Si A et B sont deux matrices de $M_n(IR)$ qui commutent, c'est-à-dire que *AB* = *BA*,

$$\forall p\in IN,\ (A+B)^n=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^{p-k}\times B^k=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^k\times B^{p-k}$$

Matrice transposée d'une matrice

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ une matrice de $M_{n,p}(IR)$, on appelle transposée de *A*, la matrice notée ${}^tA=(a_{ji})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n}}$.

Les éléments de la i-ième ligne de ${}^tA$ sont les éléments de la i-ième colonne de A.

- ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$; $\forall\lambda\in IR$, ${}^t(\lambda.A)=\lambda.{}^tA$; ${}^t({}^tA)=A$
- Soit A une matrice de $M_{n,p}(IR)$ et B une matrice de $M_{p,q}(IR)$, ${}^t(A\times B)={}^tB\times{}^tA$
- Soit $A\in M_n(IR)$, on dit que A est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) si et seulement si ${}^tA=A$ (resp. ${}^tA=-A$).

Cours d'algèbre linéaire

Groupe $GL_n(IR)$ des matrices carrées inversibles

Soit $A \in M_n(IR)$, on dit que A est inversible (ou régulière) si et seulement si il existe une matrice notée A^{-1} de $M_n(IR)$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. A^{-1} est appelée **matrice inverse** de A .

- Soit *A* et *B* deux matrices non nulles de $M_n(IR)$ telles que *AB* = *O*. Alors ni *A* ni *B* ne sont inversibles.
- Soit *A* une matrice inversible de $M_n(IR)$, ${}^tA$ est inversible $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
- Soit A et B deux matrices inversibles de $M_n(IR)$, AB est inversible $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.
- Soit *A* une matrice de $M_n(IR)$ et *f* l'endomorphisme de IR^n qui lui est canoniquement associé. A est inversible si et seulement si *f* est bijectif et $A^{-1} = mat(f^{-1})$.

Inversion des matrices diagonales et triangulaires

- Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.
- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

Rang d'une matrice

On appelle **rang de *f***, $f \in L(E,F)$ et on note rg(*f*), la dimension de Im(*f*) .

On appelle **rang de la matrice M** = mat(*f*), le rang de *f* et on note rg(M) = rg(*f*).

- Le rang d'une matrice M est le plus grand entier naturel r tel que l'on puisse extraire de M une matrice carrée d'ordre r de déterminant non nul.

Matrice de passage et formule de changement de bases

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie, on appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, on la désigne par *P*.

Soit $f \in L(E)$, $A = \underset{B}{mat}(f)$ et $A' = \underset{B'}{mat}(f)$ et on a : $A' = P^{-1}AP$

Matrices équivalentes

Soit $A \in M_{qp}(IR)$ et $B \in M_{qp}(IR)$, *A* et *B* sont équivalentes si et seulement si il existe une matrice $P \in GL_p(IR)$ et une matrice $Q \in GL_q(IR)$**,** tel que $A = Q \times B \times P$.

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont les matrices d'une même application linéaire relativement à deux bases différentes.
- Deux matrices sont équivalentes si elles ont le même rang.

Matrices semblables

Deux matrices carrées d'ordre n, *A* et *B* sont **semblables** si il existe une matrice *P* carrée d'ordre n inversible telle que : $B = P^{-1}AP$.

- Deux matrices semblables sont équivalentes. La réciproque est fausse.
- Deux matrices semblables ont le même rang.
- Si *A* et *B* sont deux matrices semblables de $M_n(IR)$, $\forall k \in IN$, A^k et B^k sont semblables.
- Soit *A* et *B* deux matrices semblables de $M_n(IR)$, si *A* est inversible *B* l'est aussi et $\forall k \in Z$, A^k et B^k sont semblables.

Cours d'algèbre linéaire
Déterminants

Déterminant d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(IR)$, on appelle déterminant de A le réel det*(A)* = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$

Déterminant d'ordre 3.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(IR)$, on appelle déterminant de A le réel det*(A)* = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Il y a six développements possibles pour calculer *det(A)*, trois développements suivant les lignes et trois suivant les colonnes.

- Développement suivant la $i^{ème}$ ligne, $\forall i \in \{1;2;3\}$:
  $\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} \times \det(A^*_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \times \det(A^*_{i2}) + (-1)^{i+3} a_{i3} \times \det(A^*_{i3})$
- Développement suivant la $j^{ème}$ colonne, $\forall j \in \{1;2;3\}$:
  $\det(A) = (-1)^{j+1} a_{1j} \times \det(A^*_{1j}) + (-1)^{j+2} a_{2j} \times \det(A^*_{2j}) + (-1)^{j+3} a_{3j} \times \det(A^*_{3j})$

Règle de Sarrus (*valable seulement pour les déterminants d'ordre 2 ou 3)*

On complète la matrice A en lui rajoutant deux lignes : $L_4 = L_1$ et $L_5 = L_2$ (ou deux colonnes $C_4 = C_1$ et $C_5 = C_2$). On effectue alors la somme des produits des coefficients suivant les diagonales principales à laquelle on retranche la somme des produits des coefficients suivant les autres diagonales.

Déterminant d'ordre n

Le réel $\det(A^*_{ij})$ s'appelle **le mineur du coefficient** a_{ij} de la matrice *A*.

Le réel $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^*_{ij})$ s'appelle **le cofacteur du coefficient** a_{ij} **.**

Propriétés $\forall (A,B) \in M_n^2(IR)$

- $\det({}^tA) = \det(A)$
- $\forall \lambda \in IR \ \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$ mais $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
- Si une ligne ou une colonne de A est nulle alors det(A) = 0
  Si deux lignes ou deux colonnes de A sont égales alors det(A) = 0
  Si deux lignes ou deux colonnes de A sont proportionnelles alors det(A) = 0
- $\forall i \in \{1;...;n\}, \forall j \in \{1;...;n\}$,

  Les opérations suivantes ne modifient pas det(*A*) :
  - pour $i \neq j$, $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
  - $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j$

  Les opérations suivantes modifient det(*A*) :
  - $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe de det(*A*)
  - $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe de det(*A*)
  - $L_i \leftarrow \alpha L_i$ multiplie det(*A*) par α
- S i $C_j = D_j + \lambda E_j$ alors $|C_1 ... D_j + \lambda E_j ... C_n| = |C_1 ... D_j ... C_n| + \lambda |C_1 ... E_j ... C_n|$

Règle d'inversion d'une matrice carrée.

Soit $A \in M_n(IR)$, $A = (a_{ij})$ telle que det(A) $\neq 0$.Pour calculer l'inverse $A^{-1} = (a'_{ij})$ on effectue les opérations suivantes :

- On écrit la transposée ${}^tA = (\alpha_{ij})$
- On écrit la matrice ${}^tA^*_{ij} = (\alpha^*{}_{ij})$ obtenue en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de ${}^tA = (\alpha_{ij})$.
- On calcule $\det({}^tA^*_{ij})$ et on multiplie ce déterminant par -1 si i + j est impair
- On obtient ainsi le cofacteur du coefficient a_{ij}.
- En divisant ce cofacteur par det(A) on obtient le coefficient a'_{ij} de A^{-1}.

Résolution de systèmes par la méthode de Cramer

On appelle **système de Cramer**, tout système de n équations linéaires à n inconnues dont la matrice est inversible.

- On appelle **système homogène**, un système dont tous les seconds membres des équations sont nuls. $\forall i \in IN, 1 \le i \le n,\ b_i = 0$.
- Un système homogène comportant plus d'inconnues que d'équations admet au moins une solution autre que la solution nulle ($0,0,...,0$).
- Un système n'ayant aucune solution est dit **système impossible**.
- Un système ayant plusieurs solutions est dit **système indéterminé**.
- Deux **systèmes sont dits équivalents** s'ils ont le même ensemble de solution.
- Un système de Cramer possède une solution unique.

Système linéaire de deux équations à deux inconnues (S) : $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$,l'unique solution du système (S) est donnée par $x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, le système (S) a donc une infinité de solutions.

Système linéaire de trois équations à trois inconnues (S) $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, l'unique solution du système (S) est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \text{ et } z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Si le déterminant est nul, le système (S) a donc une infinité de solutions.