Sommaire

Chapitre 3 : Intégration

Chapitre 4 : Séries numériques

Chapitre 1 : Limites continuité et dérivation

I. Connaissance de fonctions de référence

1. Fonction logarithme népérien (Neper 1550-1617)

a) Propriétés algébriques

- **ln(1) = 0** et il existe un unique réel noté e tel que **ln(e) = 1**, e ≈ 2,718. (Le nombre « e » vient du nom du mathématicien Euler 1707-1783)
- Pour tous réels a et b **strictement positifs** et pour tout réel α :

$$\ln(a\times b)=\ln a+\ln b,\ \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b\ ,\ \ln(a^{\alpha})=\alpha\ln a.$$

b) Propriétés analytiques

- La fonction logarithme népérien est dérivable et strictement croissante sur] 0 ; +∞ [, (ln$x$)'= $\frac{1}{x}$.
- $\boxed{\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty}$.

Valeurs approchées usuelles : ln(2) ≈ 0.69, ln(3) ≈ 1.10, ln(4) = 2ln2 ≈ 1.39, ln(1/2) = - ln(2) ≈ -0.69

2. Fonctions exponentielles

a) Propriétés algébriques

- Pour tous réels a et b,avec a strictement positif : ***b* = ln (*a*) ⇔ *a* = exp (*b*) .**
- **Autre notation** : posons a = e^x d'ou b = ln(e^x) = $x$lne = x donc a = exp (b)= exp(x) .
  Donc pour tout réel x : exp(x) = e^x .
- Pour tout réel x : ln(e^x) = x et pour tout réel x strictement positif : $e^{\ln x}=x$.
  On dit que les fonctions ln et exp sont deux fonctions réciproques.
- Pour tous réels a et b :

exp(0) = 1 , exp(1) = e , $\exp(a+b)=\exp a\times\exp b$, $\exp(a-b)=\dfrac{\exp a}{\exp b}$, $(\exp a)^b=\exp(a\times b)$.

Soit $e^0=1$, $e^1=e$, $e^{a+b}=e^a\times e^b$, $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$, $(e^a)^b=e^{ab}$.

Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle sont celles des puissances.

b) Propriétés analytiques et représentation graphique

- La fonction exponentielle est dérivable et strictement croissante sur IR, $(e^x)'=e^x$.
- $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\exp x=0^+}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\exp x=+\infty}$.

Valeurs numériques approchées usuelles : $e^{-1}\approx0.37$, $e^2\approx7.39$, $\sqrt{e}\approx1.65$.

c) Autres fonctions exponentielles

$\forall x\in IR$, $\forall a\in IR_+^*$ exp($x$ln$a$) = exp($\ln(a^x)=a^x$. La fonction $x\mapsto a^x$ est appelée fonction exponentielle de base a .

3. Fonction puissances

$\forall x\in IR_+^*$, $\forall\alpha\in IR$ $x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$. La fonction $x\mapsto x^{\alpha}$ est appelée fonction puissance.

4. Croissances comparées en +∞ de fonctions logarithmes, exponentielles et puissances.

- Lorsque x rend vers +∞, la fonction exponentielle l'emporte sur toute fonction puissance de x

qui elle même l'emporte sur la fonction logarithme népérien de x. Soit $\forall \alpha \in IR_+$:

(A) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty}$, (B) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty}$, (C) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0^+}$ D) $\forall a > 1,$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty}$

- Par exemple : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Exemple :

Etudions les limites de la fonction f : $x \mapsto x - \ln x$, aux bornes de son domaine de définition.

f est définie sur $]0;+\infty[$ on cherche donc $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim_{x\to 0} x = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0}(x - \ln x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, cette fois on ne peut donc pas conclure directement sur la limite de f en $+\infty$ car on n'est en présence d'une différence de deux infinis de même signe, on dit que l'on est en présence d'une forme indéterminée. Il convient alors de factoriser $f(x)$ pour faire apparaître une limite de référence.

$f(x) = x - \ln x = x \times \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ or $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

5. Fonction valeur absolue

La fonction f définie par $\forall x \in IR_+$: $f(x) = x$ et $\forall x \in IR_-$: $f(x) = -x$ est appelée fonction valeur absolue. On la note : $x \mapsto |x|$.

Propriétés :

- Par définition $\forall x \in IR$: $f(x) \geq 0$.
- $\forall x \in IR$, $|-x| = |x|$
- $\forall x \in IR$, $\forall a \in IR+$, $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $\forall x \in IR$, $-|x| \leq x \leq |x|$
- $\forall x \in IR$, $\forall a \in IR$, $|x - a| = d(x;a)$. Une valeur absolue représente une distance.
- On montrera que la fonction valeur absolue est continue en zéro mais non dérivable en zéro.

II. Limite d'une fonction

1. Limite infinie d'une fonction en l'infini.

On dit qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ pour exprimer que f(x) est aussi grand que l'on veut dès lors que x est suffisamment grand. On note : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

Définition (inégalités de Cauchy) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in IR+, \exists B \in IR+ / \forall x \in Df, x > B \Rightarrow f(x) > A.}$$

Df désignant le domaine de définition de f

On définit de même :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in IR-, \exists B \in IR+ / \forall x \in Df, x > B \Rightarrow f(x) < A.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in IR+, \exists B \in IR- / \forall x \in Df, x < B \Rightarrow f(x) > A.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in IR-, \exists B \in IR- / \forall x \in Df, x < B \Rightarrow f(x) < A.$$

2. Limite infinie d'une fonction en un réel a.

On dit qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a pour exprimer que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès lors que x est assez proche de a . On note : $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$.

Définition : $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in IR+, \exists \alpha \in IR+ / \forall x \in Df, |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A.}$

De même : $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in IR-, \exists \alpha \in IR+ / \forall x \in Df, |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) < A.$

3. Limite finie d'une fonction en l'infini.

On dit qu'une fonction f a pour limite un réel L quand x tend vers $+\infty$ pour exprimer que f(x) est aussi proche que l'on veut de L dès lors que x est suffisamment grand. On note : $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = L}$.

Définition : $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in IR+, \exists B \in IR+ / \forall x \in Df, x > B \Rightarrow |f(x) - L| \le \varepsilon.}$

De même : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in IR+, \exists B \in IR- / \forall x \in Df, x < B \Rightarrow |f(x) - L| \le \varepsilon.$

4. Limite finie d'une fonction en un réel a.

Soient a et L deux réels et f une fonction définie sur un intervalle contenant a.
On dit qu'une fonction f a pour limite L quand x tend vers a pour exprimer que f(x) est aussi proche que l'on veut de L dès lors que x est assez proche de a . On note : $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L}$.

Si f est définie en un réel a, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Définition : $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in IR+, \exists \alpha \in IR+ / \forall x \in Df, |x-a| \le \alpha \Rightarrow |f(x) - L| \le \varepsilon.}$

5. Opérations sur les limites

Il existe quatre types de **formes indéterminées :** $"\infty - \infty"$, $"0 \times \infty"$, $"\dfrac{0}{0}"$ et $"\dfrac{\infty}{\infty}"$

Inégalités : $\forall x \in I - \{a\}$, I désignant un intervalle voisinage de a.

$f(x) \ge 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \ge 0$ et $f(x) \ge g(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \ge \lim_{x\to a} g(x)$

Théorème des Gendarmes :

$\boxed{\forall x \in I - \{a\} \text{ tel que } f(x) \le g(x) \le h(x) . \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L}$

Composition :

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = L$ alors $\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = L$.

6. Interprétation graphique de limites.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) pour la courbe Cf .

Si $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = a$, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une asymptote (horizontale) pour la courbe Cf .

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ on dit que l'on est en présence d'une branche infinie que l'on étudie comme suit :

si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$, on dit que Cf présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.

si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$, on dit que Cf présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique pour Cf .

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=\pm\infty$,on dit que Cf présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$.

Exemples :

- Etudions les limites de la fonction $f:\ x\mapsto x-\ln x$, aux bornes de son domaine de définition.

f est définie sur $]0;+\infty[$ on cherche donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0} x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=-\infty$.

On en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe Cf .

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, cette fois on ne peut donc pas conclure directement sur la limite de *f* en $+\infty$ car on n'est en présence d'une différence de deux infinis de même signe, on dit que l'on est en présence d'une forme indéterminée du type "$\infty-\infty$" . Il convient alors de factoriser *f* (x) pour faire apparaître une limite de référence.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\times\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

Etudions cette branche infinie :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=1$, on étudie donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln x=-\infty$.

Cf présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

- Soit la fonction $f:\ x\mapsto 2x-\sqrt{x^2-4}$ définie sur $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=f(-2)=-4$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=4$, on dit que *f* est continue en -2 à gauche et en 2 à droite (voir paragraphe ci-après).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ présentent une F.I du type "$\infty-\infty$".pour lever cette indétermination nous introduisons l'expression conjuguée de $2x-\sqrt{x^2-4}$ à savoir $2x+\sqrt{x^2-4}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-\sqrt{x^2-4})(2x+\sqrt{x^2-4})}{2x+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(x^2-4)}{2x+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4}{2x+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x-x}=\lim_{x\to-\infty}3x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-\sqrt{x^2-4})(2x+\sqrt{x^2-4})}{2x+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-(x^2-4)}{2x+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4}{2x+|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x+x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

On étudie alors ces branches infinies :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}2-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}2+\frac{\sqrt{x^2-4}}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}2+\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}2+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}2-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}2-\frac{\sqrt{x^2-4}}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}2-\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}2-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}=1$$

On étudie alors :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-3x]=\lim_{x\to-\infty}(-x-\sqrt{x^2-4})=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x-\sqrt{x^2-4})(-x+\sqrt{x^2-4})}{-x+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2-4)}{-x+\sqrt{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-3x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{-x+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{-2x}=0$$

La droite d'équation $y = 3x$ est donc asymptote à la courbe Cf en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-4})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-4})(x+\sqrt{x^2-4})}{x+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2-4)}{x+\sqrt{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2x}=0$$

La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote à la courbe Cf en $+\infty$.

7. Fonctions équivalentes.

Soit f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a, que l'on notera V_a. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si et seulement si, il existe une fonction ε telle que $\forall x\in V_a$, $f(x)=\varepsilon(x)\times g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=1$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Remarque : si de plus f et g sont définies en a alors $f(a)=g(a)$.

Propriétés :

$f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$ alors $(f\times h) \underset{a}{\sim} (g\times k)$, $\frac{h}{f} \underset{a}{\sim} \frac{k}{g}$ mais : $(f+h)$ et $(g+k)$ de même que $h\circ f$ et $h\circ g$ ne sont pas nécessairement équivalentes.

Exemple :

Soit $f: x\mapsto x^2$, $g: x\mapsto x^2+x$, $k: x\mapsto -x^2$, $l: x\mapsto -x^2+1$ et $h: x\mapsto e^x$

On a $f \underset{\infty}{\sim} g$ et $k \underset{\infty}{\sim} l$ mais $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)+h(x)=0\neq \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)+k(x)=\pm\infty$

On a $f \underset{\infty}{\sim} g$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\neq 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty\neq 1$

III. Continuité

1. Continuité d'une fonction en un réel a, $a \in Df$.

On dit qu'une fonction *f* est continue en un réel *a* de son domaine de définition pour exprimer que *f*(x) est aussi proche que l'on veut de *f(a)* dès lors que *x* est assez proche de *a* . On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Soit : $\boxed{f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in IR+, \exists \alpha \in IR+ / \forall x \in Df, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.}$

2. Continuité sur un intervalle.

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si et seulement si elle est continue en tout réel *a* de I.

L'image d'un intervalle par une fonction continue, est un intervalle de même nature.

3. Opérations sur les fonctions continues.

- Toute fonction : polynôme, rationnelles, racine n-ième, logarithme, exponentielle, trigonométrique, valeur absolue, est continue sur son domaine de définition.
- La somme, le produit, le rapport de deux fonctions continues en un réel *a* , est continue en *a*.
- Si *f* est une fonction continue en *a* et *g* une fonction continue en *f(a)* alors la composée $g \circ f$ est continue en *a*.

4. Théorème des valeurs intermédiaires

Toute fonction continue sur un intervalle fermé *I* prend au moins une fois toutes les valeurs comprises entre ses bornes *m* et *M* avec $m = \underset{I}{Inf}\ f(x)$ et $M = \underset{I}{Sup}\ f(x)$.

Soit $\forall (x_1 ; x_2) \in I^2, f$ continue sur $I \Rightarrow \forall y \in \left] f(x_1); f(x_2) \right[, \exists x \in]x_1, x_2[/ y = f(x)$

5. Continuité et monotonie.

Théorème :

Soit *f* une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I de *IR*, alors *f* réalise une bijection de I sur l'intervalle J = *f*(I).

Démonstration :

Si *f* est continue sur I d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall y \in$ J, $\exists x \in$ I tel que $y = f(x)$ donc *f* est surjective. De plus si *f* est strictement monotone sur I alors $\forall (x_1 ; x_2) \in$ I², $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ et $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ donc $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. On en déduit que *f* est injective et donc bijective.

Théorème :

Si *f* réalise une bijection de I sur l'intervalle J = *f*(I) et admet une bijection réciproque f^{-1}, telle que $f^{-1} \circ f = Id_I$ et $f \circ f^{-1} = Id_J$. Si I = J , $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id$.(*Id* désigne la fonction $x \mapsto x$)

f^{-1} est continue et strictement monotone sur J à valeurs dans I .

Démonstration admise

Propriété :

Sur J, f^{-1} a le même sens de variation que *f* sur I.

Démonstration :

$\forall x \in \mathrm{I}-\{a\}$, considérons $T_a = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, le taux de variation de la fonction *f* en tout réel *a* de I .

Posons $y = f(x)$ et $b = f(a)$ soit $x = f^{-1}(y)$ et $a = f^{-1}(b)$ soit $T_a = \dfrac{y-b}{f^{-1}y) - f^{-1}(b)}$.

f étant strictement monotone, $x \neq a \Rightarrow f(x) \neq f(a)$ soit $y \neq b$. Donc $T_b = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b}$,

le taux de variation de la fonction f^{-1} en tout réel *b* de J existe .D'où $T_a = \dfrac{1}{T_b}$. Les deux taux de variations sont donc de même signe et les fonctions *f* et f^{-1} ont donc le même sens de variation sur leurs domaines de définition respectifs.

Propriété :
Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de *f* et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.
Démonstration :
Soit $M(x;y)$ un point de la courbe C_f, le point $M'(y;x)$ est donc un point de la courbe $C_{f^{-1}}$.

Pour tout segment $[MM']$ son milieu a pour coordonnées $\left(\dfrac{x+y}{2};\dfrac{y+x}{2}\right)$ c'est donc un point de la droite d'équation *y* = *x*.

Exemples :

- $f : x \mapsto \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur IR_+^* à valeurs dans *IR*. Elle réalise donc une bijection de IR_+^* à valeurs dans *IR*. Elle admet donc une fonction réciproque : la fonction exponentielle : $f^{-1} : x \mapsto e^x$, continue et strictement croissante sur *IR* à valeur dans IR_+^*.

- Soit *g* la restriction à IR_+ de la fonction $x \mapsto x^n$, $n \in IN$,*g* est continue et strictement croissante sur IR_+ , elle admet donc une fonction réciproque : la fonction racine n-ième $x \mapsto \sqrt[n]{x}$,continue strictement croissante sur IR_+ .

6. Prolongement par continuité d'une fonction en un réel *a*.

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle $I-\{a\}$et admettant une limite finie *L* en *a*. Alors la fonction g définie par $\forall x \in I-\{a\}, g(x) = f(x)$ et $g(a) = L$ est appelée prolongement par continuité de la fonction *f* en *a*.

Exemple :
Soit la fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$, *f* est définie continue sur IR_+^* comme produit de fonctions usuelles continues. Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$ présente une indétermination du type $"0 \times \infty"$; posons $X = \dfrac{1}{x}$.

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} \frac{-\ln X}{X} = 0^-$. La fonction *f* est onc prolongeable par continuité en 0 par la fonction *g* définie par $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = f(x)$ et $g(0) = 0$.

IV. Dérivation

1. Dérivabilité d'une fonction en un réel a. Nombre dérivé en a

Soit I un intervalle de IR et soit $a \in$ I. On dit que *f* est dérivable en *a* si et seulement si Il existe un réel *L* et une fonction ε définie sur I tel que :
$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(a) + L(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a)$ ou en posant $x = a+h$ tel que
$\forall h \in IR / a+h \in \mathrm{I}:\quad f(a+h) = f(a) + Lh + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

Conséquence : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$

Si le taux d'accroissement de *f* en *a* admet pour limite finie *L*, c'est à dire :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$$

***L* est appelé nombre dérivé de *f* en *a*, on le note *f* '(a).**

Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ ou si $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$ et $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L'$ avec $L \neq L'$, on dit que *f* n'est pas dérivable en *a*.

2. Interprétation du nombre dérivé

le nombre dérivé en *a* est le coefficient directeur de la tangente *T* à la courbe représentative C_f de *f* au point *A* de coordonnées (*a* ; *f*(*a*)) dont une équation est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Démonstration :

Soit $M(x; f(x))$ un point de la courbe C_f, la tangente *T* est la position limite de toute sécante *(AM)* à la courbe C_f. Le coefficient directeur de *(AM)* est $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. En *A*,*T* et *(AM)* sont confondues donc

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ d'où $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ *c.q.f.d*

Exemples usuels :

- La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.Sa courbe présente à l'origine une demi-tangente verticale. On parle alors d'un **point de rebroussement**.

Démonstration :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

- La fonction $u : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Sa courbe présente à l'origine deux demi-tangentes. On parle alors d'un **point anguleux**.

Démonstration :

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$, or $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$.

Le nombre dérivé à droite est différent du nombre dérivé à gauche.

La courbe C_f présente à droite en 0 une demi-tangente d'équation $y = x$

La courbe C_f présente à gauche en 0 une demi-tangente d'équation $y = -x$

3. Fonction dérivable sur un intervalle

On dit qu'une fonction *f* est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout réel *a* de I.
La fonction qui à tout réel *x* de l'intervalle I, lui associe son nombre dérivé *f'* (*x*) est appelée fonction dérivée de *f*.

4. Fonction dérivées des fonctions usuelles

Soit $a \in IR$

Fonction constante : $\forall x \in IR$, $f : x \mapsto k$, *k* réel

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{k - k}{x - a} = 0$. La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

Fonction polynôme du type : $\forall x \in IR$, $f : x \mapsto x^n$, $n \in IN^*$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + ... + a^{n-1})}{x - a} = \lim_{x \to a} \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i a^{n-i} = na^{n-1}.$$

Donc la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^n$ est la fonction $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.

Remarque : La démonstration se généralise pour les fonctions puissances : $\forall a \in IR_+^*$,
$\forall \alpha \in IR$ $f : x \mapsto x^\alpha$

Fonction logarithme népérien : $\forall x \in IR_+^*$ $f : x \mapsto \ln x$

La dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ est implicite puisqu'elle est définie comme étant l'unique fonction s'annulant en 1 et ayant pour dérivée $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On en déduit par contre un cas particulier établissant une limite de référence usuelle, à savoir :
La fonction étant dérivable en 1et son nombre dérivé étant 1alors

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$.

En posant le changement de variable, on obtient une autre limite de référence, à savoir :

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1}$$

Cela traduit que pour tout réel positif *h* suffisamment proche de 0 , $\ln(1+h) \approx h$.

Fonction exponentielle : $\forall x \in IR$ $f : x \mapsto e^x$

La dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto e^x$ est implicite puisqu'elle est définie sur *IR* comme étant l'unique fonction prenant la valeur 1en zéro et ayant pour dérivée elle-même.
On en déduit par contre un cas particulier établissant une limite de référence usuelle, à savoir :

La fonction étant dérivable en 0 et son nombre dérivé étant 1alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Cela traduit que pour tout réel *h* suffisamment proche de 0, $e^h \approx h + 1$.

5. Opérations sur les fonctions dérivées

Dérivées de fonctions composées

Théorème :

Soit $a \in$ I, si *u* est dérivable en *a* et *v* dérivable en *u(a)* alors la composée $v \circ u$ est dérivable en *a* et $(v \circ u)'(a) = v'[u(a)] \times u'(a) = (v' \circ u)(a) \times u'(a)$

Démonstration :

D'après la définition de la dérivabilité en page 1, si *u* est dérivable en *a* alors il existe une fonction ε telle que $\forall h \in IR / a+h \in$ I, $u(a+h) = u(a) + u'(a)h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

De même si *v* est dérivable en *u(a)*= *b* alors il existe une fonction φ telle que $\forall k \in IR / b+k \in u$ (I), $v(b+k) = v(b) + v'(b)k + k\varphi(k)$ avec $\lim_{k \to 0} \varphi(k) = 0$.

Soit $v(u(a)+k) = v[u(a)] + v'[u(a)]k + k\varphi(k)$

Posons $k = u(a+h) - u(a)$ donc $h \to 0 \Rightarrow k \to 0$ Soit par passage à la limite:

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times h = u'(a)h$$

$v(u(a)+k) = v[u(a+h)] = (v \circ u)(a) + [(v' \circ u)(a)] \times u'(a)h + u'(a)h\varphi[u'(a)h]$ d'où

$(v \circ u)(a+h) = (v \circ u)(a) + [(v' \circ u)(a)] \times u'(a)] \times h + h\psi(h)$ avec $\psi(h) = u'(a)\varphi[u'(a)h]$.

On vérifie que $\lim_{h \to 0} \psi(h) = u'(a) \lim_{h \to 0} \varphi[u'(a)h] = \lim_{k \to 0} \varphi(k) = 0$.

On a donc bien $(v \circ u)'(a) = (v' \circ u)(a)] \times u'(a)$.

Tableau récapitulatif des cas usuels :

u et *v* désignant des fonctions dérivables sur un intervalle I de *IR*

Fonctions du type :	Fonctions dérivées :
ku, $k \in IR$	ku'
$u+v$	$u'+v'$
$u \times v$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$, $u \neq 0$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$, $v \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^2	$2uu'$
u^n, $n \in IN$	$nu^{n-1}u'$
$\sqrt{u}$, $u > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u^n}$, $u \neq 0$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
$\ln\|u\|$, $u \neq 0$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
$v \circ u$	$(v' \circ u) \times u'$

6. Fonction dérivée et monotonie

Théorème :

Soit f une fonction définie dérivable sur un intervalle I de *IR*.
Si sa dérivée est nulle sur I alors *f* est constante sur I. Si sa dérivée est positive (resp. négative) sur I alors *f* est croissante(resp. décroissante) sur I.

Démonstration triviale en considérant la limite du taux d'accroissement de la fonction .

De plus , si I = $[a,b]$ et f dérivable sur $]a,b[$ tel que $f'>0$ sur $]a,b[$ (resp. $f'<0$) alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante).

Exemple :

$f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Extremum

Définition :

Soit $c \in$ I, on dit que f(c) est un maximum local pour f (resp. un minimum local) si il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $\forall x \in$ I : f(x) ≤ f(c) (resp. f(x) ≥ f(c)).

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de *IR* et $c \in$ I.
Si f admet un extremum local (maximum ou minimum) en c alors f'(c) = 0.
Si en c, f ' s'annule et change de signe alors f admet un extremum local en c.

Remarque: En un extremum la courbe Cf admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

7. Continuité et dérivabilité

Théorème :

Si une fonction est dérivable en un réel a, alors elle est continue en a. La réciproque est fausse.

Démonstration :

f dérivable en $a \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(a)+L(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)) = f(a)$ *c.q.f.d*

Réciproque fausse : par exemple $u : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

8. Dérivabilité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Théorème :

Soit $x_0 \in$ I , si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I alors f^{-1} est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable en $y_0 = f^{-1}(x_0)$ et $f'(y_0) \neq 0$.

Conséquence : $\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)} = \dfrac{1}{\left(f'\circ f^{-1}\right)(x_0)}$.

Démonstration :

f étant dérivable en y_0 $\lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} = f'(y_0)$.

f étant continue en x_0 , si $x \to x_0$ alors $y \to y_0$ donc :

$\lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x - x_0}{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)} = f'\left(f^{-1}(x_0)\right)$, soit :

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x - x_0}{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)} = \dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(x_0)} = \left((f'\circ f^{-1})(x_0)\right)$

d'où $\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \dfrac{1}{\left(f'\circ f^{-1}\right)(x_0)}$ *c.q.f.d*

Exemples :

- $f : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur IR_+^* et sa dérivée $f' : x \mapsto \frac{1}{x}$ ne s'annule pas sur IR_+^* donc sa réciproque $f^{-1} : x \mapsto e^x$ est dérivable et $\forall x \in IR$, $\left(e^x\right)' = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$.
- Soit la restriction de la fonction carrée IR_+ $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur IR_+ mais sa dérivée s'annule en 0 donc sa réciproque $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.
  La courbe C_f présentant dans un repère orthogonal, une demi- tangente horizontale en O, la courbe $C_{f^{-1}}$ présente une demi- tangente verticale en O.

9. Inégalité des accroissements finis

Théorème :

Soit a et b deux réels tel que $a \le b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Si $\exists (m, M) \in IR^2$ tel que $\forall x \in [a,b], m \le f'(x) \le M$ alors :

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$$

Cas particuliers :

si $m = -M$ et $M \ge 0$ alors $|f(b) - f(a)| \le M(b-a)$

si $x = b$ alors $\forall x \in [a,b]$, $m(x-a) \le f(x) - f(a) \le M(x-a)$

Démonstration :

Considérons la fonction φ définie par $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) = f(x) - mx$.

φ est dérivable sur $]a,b[$ et $\varphi'(x) = f'(x) - m \ge 0$. Donc φ est une fonction croissante sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b], a \le x \Rightarrow \varphi(a) \le \varphi(x)$ c'est à dire $f(a) - ma \le f(x) - mx$. Soit $m(x-a) \le f(x) - f(a)$

On établit de même la seconde inégalité en considérant une fonction ψ définie par $\forall x \in [a,b]$ $\psi(x) = f(x) - Mx$.

V. Fonction n fois dérivable

1. Dérivées successives d'une fonction

Soit k un entier naturel non nul, on définit la dérivée d'ordre k de f ou dérivée k-ième de f notée $f^{(k)}$ notation de Newton) ou $\frac{d^k f}{dx^k}$ notation de Leibniz) , par : $f^{(k)} = \left[f^{(k-1)}\right]'$ et $f^{(0)} = f$.

Remarques ; $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ et $\forall (h,k) \in IN^2$ $f^{(h+k)} = \left[f^{(h)}\right]^{(k)}$.

- Si $f^{(k)}(x_0)$ existe alors $f^{(k-1)}$ est continue en x_0. Plus généralement on dit que f est de **classe** C^k si elle admet une dérivée d'ordre k en x_0 qui est continue en x_0.
- Si f admet des dérivées de tout ordre en x_0, on dit que f est de **classe** C^∞.
- Si f est de classe C^n sur I et g de classe C^n sur f(I) alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.

2. Formule de Leibniz

Soit n un entier naturel non nul, si f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n sur un intervalle I de IR alors $f \times g$ l'est aussi et $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$

Démonstration admise

3. Fonctions convexes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de *IR*. On dit que f est convexe sur I si et seulement si : $\forall(x_1, x_2) \in \text{I}^2,\ \forall(\lambda_1, \lambda_2) \in IR_+^2$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

Si f est convexe sur un intervalle I on dit que $-f$ est **concave** sur I.

Caractérisation de fonctions convexes de classe C^1 sur un intervalle I de *IR* :

- f' est croissante sur I, c'est-à-dire que $\forall x \in \text{I},\ f''(x) \geq 0$.
- La région R du plan située au dessus de C_f est convexe, c'est-à-dire que $\forall(M_1, M_2) \in R^2,\ [M_1M_2] \subset R$.
- C_f est au dessus de chacune de ses tangentes sur I.

Exemple :
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur IR_+^*.
La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur *IR*.

Remarque :
Soit $\alpha \in IR$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0] \subset \text{I}$ et $[x_0, x_0 + \alpha[\subset \text{I}$. si f est concave $]x_0 - \alpha, x_0]$ sur et convexe sur $[x_0, x_0 + \alpha[$ ou réciproquement alors le point M_0 d'abscisse x_0 est appelé **point d'inflexion** de C_f.

En un point d'inflexion C_f traverse sa tangente.

Exemple :
La courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3$ présente un point d'inflexion en O. En effet $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.$f'(0) = 0$, la courbe C_f présente donc à l'origine une tangente d'équation $y = 0$.
De plus $\forall x \in IR_+,\ f''(x) \geq 0$, C_f est donc située au dessus de ses tangentes sur IR_+ et $\forall x \in IR_-,\ f''(x) \leq 0$, C_f est donc située en dessous de ses tangentes sur IR_-.

Chapitre 2 : Suites numériques

I. Généralités

1. Principe de récurrence (ou principe d'induction)

- **Récurrence simple**

Soit *P(n)* une propriété dépendant d'un entier naturel n et n_0 un entier naturel fixé.
Si $P(n_0)$ est vraie , on parle **d'initialisation**, et si la propriété est **héréditaire,** c'est à dire que pour tout entier n fixé tel que $n > n_0$, *P(n)* vraie entraine *P(n+1)* vraie, alors *P(n)* est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 .

Exemple : Application à la démonstration de sommes remarquables :

$$\forall n \in IN\ ,\ \boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}\ ,\ \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\ ,\ \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

- **Récurrence double**

Soit *P(n)* une propriété dépendant d'un entier naturel n et n_0 un entier naturel fixé.
Si $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies et que pour tout entier n fixé tel que $n > n_0$, $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies entrainent *P(n+2)* vraie, alors *P(n)* est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 .

Exemple :
Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = u_1 = -1$ et $\forall n \in IN$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Démontrer que $\forall n \in IN$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.
Démonstration :
Posons l'hypothèse de récurrence *P(n) :* $\forall n \in IN$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.
Initialisation : $u_0 = 3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1$, *P(0)* est vraie.
$u_1 = 3^1 - 2^{1+1} = 3 - 4 = -1$, *P(1)* est vraie.

Hérédité : Posons l'hypothèse de récurrence , pour un entier naturel n quelconque arbitrairement choisi, $n \geq 2$, *P(n)* et *P(n+1)* sont vraies. Montrons qu'alors *P(n+2)* est encore vraie.
Donc d'après cette hypothèse : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+2}) - 6(3^n - 2^{n+1})$;
Soit $u_{n+2} = 3^n[5\times 3 - 6] - 2^{n+1}[5\times 2 - 6] = 3^n \times 9 - 2^{n+1} \times 4 = 3^{n+2} - 2^{n+3}$ donc *P(n+2)* est encore vraie.
Conclusion : *P(n)* est vérifiée aux rangs initiaux et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in IN$.

- **Récurrence forte**

Soit *P(n)* une propriété dépendant d'un entier naturel n. Si $P(0)$ est vraie et que pour tout entier n fixé
n >0, tel que pour tout entier k compris entre 0 et n, *P(k)* vraie entraine *P(k+1)* vraie, alors *P(n)* est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 0.

Exemple :
Démontrer que $\forall n \in IN^*$, $\exists (p,q) \in IN^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$
Remarque :

Il est impossible de remplacer une récurrence double par une récurrence forte puisque on ne peut pas déduire l'existence de P(1) à partir de P(0).

2. Mode de définition d'une suite

- Une suite (u_n) est définie **par récurrence**, si le premier terme étant donné, il existe une fonction f telle que $\forall n \in IN$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Une suite (u_n) est définie **de façon explicite** si il existe une fonction f telle que $\forall n \in IN$, $u_n = f(n)$.

Remarque : Une problématique usuelle est de passer d'un mode de définition à l'autre.

3. Monotonie d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 (resp. décroissante), si $\forall n \in IN$, $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp . $u_n \geq u_{n+1}$). Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Méthodes pour étudier la monotonie d'une suite :

- Si $u_n > 0$ on compare le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u}$ à 1.
- On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Démonstration par récurrence si la suite est définie de façon récurrente. Une étude graphique préalable permet de conjecturer la monotonie et la convergence .
- Si la suite est définie de façon fonctionnelle par : $\forall n \in IN$, $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonction *f* sur $[0,+\infty[$.

4. Majorant, minorant d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) est majorée (resp. minorée), si $\exists M \in IR / \ \forall n \in IN$, $u_n \leq M$ (resp $u_n \geq m$).
Une suite majorée et minorée est **bornée.**

II. Convergence

1. Limite d'une suite

Etudier la limite d'une suite (u_n), c'est définir le comportement de u_n quand *n* tend vers $+\infty$.

Si u_n n'a pas de limite ou que celle-ci est infinie, on dit que la suite **diverge.** Dans le cas contraire, c'est à dire si u_n admet une limite finie, on dit que la suite **converge** vers cette limite.

- On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite un réel *L*, si tout intervalle ouvert contenant *L*, contient à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite.

  c.a.d : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in IR+, \exists n_0 \in IN / \forall n \in IN, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon.}$

- On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ (Resp. $-\infty$) si à partir d'un certain rang, tout intervalle du type [A, $+\infty$ [(Resp.] $-\infty$,A]), contient tous les termes de la suite.

  c.a.d : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in IR+, \exists n_0 \in IN / \forall n \in IN, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A.}$

2. Limites de suites de référence

Suites divergentes	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, α réel avec $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, si a réel, $a > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
Suites convergentes	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, α réel avec $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, si $0 < a < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$

3. Théorèmes de comparaison

Inégalité à partir d'un certain rang	**Comportement à l'infini**	**Conséquence**
$u_n \le v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$u_n \le v_n \le w_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, l **réel fini ou non.** **Théorème dit des gendarmes**
$\lvert u_n - l \rvert \le v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
$u_n \le v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$	$l \le l'$

4. Equivalence

On dit qu'une suite (u_n) est équivalente au voisinage de $+\infty$ à une suite (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) de limite 1 telle que à partir d'un certain rang, $u_n = \varepsilon_n \times v_n$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$.

5. Théorème de la convergence monotone

Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente .
Corollaire : Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

Démonstration admise

Exemple :

la suite de terme général $u_n = \sin(n)$ est bornée : $\forall n \in IN, -1 \le u_n \le 1$, mais (u_n) n'a pas de limite.

Théorème du point fixe :

Soit une suite (u_n) définie par : $\forall n \in IN$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0 donné. Si la suite (u_n) converge vers un réel L et si la fonction f est continue en L alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f(L)$ et donc L est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration :

Par hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ donc par passage à la limite : $u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ et

f continue en $L \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) = f(L)$.

Par définition d'une limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. Donc $u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow L = f(L)$ *c.q.f.d*

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in IN$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Etudier cette suite c'est déterminer pour quelles valeurs de *n* elle est définie, déterminer si elle est bornée, étudier sa monotonie et sa convergence.

- **Définition de la suite :**

Posons l'hypothèse de récurrence « $\forall n \in IN$, $u_n \geq 0$ »

La propriété est initialisée, démontrons quelle est héréditaire. Or $u_n \geq 0 \Rightarrow u_n + 2 \geq 0$ et donc $\sqrt{u_n + 2}$ est défini et par définition $\sqrt{u_n + 2} \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq 0$ *c.q.f.d.*

La propriété est vérifiée au rang initial et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in IN$

A l'aide du calcul des premiers termes, conjecturons la monotonie de cette suite et l'existence d'éventuelles bornes. Conjectures qu'il convient ensuite de démontrer par récurrence.

$u_1 = \sqrt{2} \approx 1{,}41$, $u_2 = \sqrt{\sqrt{2}+2} \approx 1{,}77$, $u_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2} = 1{,}94$ et $u_4 \approx 1{,}99$.

On peut donc conjecturer que la suite est croissante et majorée par 2.

Remarque :

Sans utiliser une calculatrice ou un tableur, on peut étudier graphiquement la suite pour émettre les mêmes conjectures. *(voir en TD)*

- **Existence d'un majorant :**

Posons l'hypothèse de récurrence « $\forall n \in IN$, $u_n \leq 2$ »

La propriété est initialisée, démontrons quelle est héréditaire. Or $u_n \leq 2 \Rightarrow u_n + 2 \leq 4$, soit $\sqrt{u_n + 2} \leq 2$ et donc $u_{n+1} \leq 2$ *c.q.f.d.*

La propriété est vérifiée au rang initial et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in IN$.

- **Monotonie de la suite :**

Posons l'hypothèse de récurrence « $\forall n \in IN$, $u_{n+1} \geq u_n$ »

$u_1 = \sqrt{2} \geq u_0$, la propriété est initialisée, démontrons quelle est héréditaire. Or la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ est une fonction croissante sur IR_+ donc $u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, soit $u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$ *c.q.f.d.*

La propriété est vérifiée au rang initial et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in IN$.

- **Convergence de la suite :**

Nous venons d'établir que la suite est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers un réel *L* et *f* étant continue, *L* est solution de l'équation $f(x) = x$ c'est-à-dire $L = \sqrt{L+2}$, soit $L^2 - L - 2 = 0$. $\Delta = 9$ donc l'équation admet deux solutions $L_1 = 2$ et $L_2 = -1$. Mais la suite est une suite de termes positifs, elle ne peut donc pas avoir une limite négative, sa limite est donc $L = 2$.

Remarque :

Il ne faut pas confondre majorant et limite, 3 est un majorant mais la suite ne converge pas vers 3.

6. Suites adjacentes

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : (u_n) est croissante (resp. décroissante), (v_n) décroissante (resp. croissante) et $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème :

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent et admettent la même limite L avec : $\forall n \in IN$, $u_n \le L \le v_n$.

Démonstration :

Une erreur d'analyse serait de croire que $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$ car cela supposerait ce que l'on veut démontrer à savoir que les deux suites sont convergentes et admettent la même limite.

Posons $w_n = v_n - u_n$ et revenons la définition d'une suite convergente vers 0, à savoir :

$\forall \varepsilon \in IR_+, \exists n_0 \in IN / \forall n \in IN, n \ge n_0 \Rightarrow |w_n - 0| \le \varepsilon$.

$|w_n - 0| \le \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \le w_n \le \varepsilon$ et $-\varepsilon \le v_n - u_n \le \varepsilon \Rightarrow u_n - \varepsilon \le v_n \le u_n + \varepsilon$

$\forall n \in IN$, $u_n - \varepsilon \le v_n \le u_n + \varepsilon \Rightarrow (v_n)$ est bornée.

D'après le théorème de la convergence monotone elle est donc convergente vers un réel L.

De la même manière on établit que : $\forall n \in IN$, $v_n - \varepsilon \le u_n \le v_n + \varepsilon \Rightarrow (u_n)$ est bornée, elle converge donc vers un réel L', à ce stade on ne peut supposer que $L = L'$.Mais si L et L'existent alors l'implication $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$ est vraie et donc $L = L'$.

Théorème :

Si deux suites (u_n) et (v_n) extraites d'une suite (w_n) sont adjacentes et convergent vers un réel L alors pour tout entier naturel n, $\lim_{n\to+\infty} w_n = L$.

Démonstration admise

Exemple :

Soit une suite (u_n) décroissante et convergente vers 0 et soit la suite (v_n) définie par

$\forall n \in IN : v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$. Démontrer, en considérant les suites extraites (v_{2n}) des termes d'indices pairs et (v_{2n+1}) des termes d'indices impairs, que la suite (v_n) converge.

Démontrons que les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont adjacentes :

$$v_{2n+2} - v_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \le 0 \text{ car } (u_n) \text{ est décroissante.}$$

La suite (v_{2n}) est donc décroissante.

$$v_{2n+3} - v_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+3} \ge 0 \text{ car } (u_n) \text{ est décroissante.}$$

La suite (v_{2n+1}) est donc croissante.

De plus $\lim_{n\to+\infty}(v_{2n+1} - v_{2n}) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k\right) = \lim_{n\to+\infty}(-u_{2n+1}) = 0$ car (u_n) converge vers 0. $\lim_{n\to+\infty}(v_{2n+1} - v_{2n}) = 0$,

Les deux suites extraites sont adjacentes, elles ont une même limite L et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

III. Suites de référence

1. Suites arithmétiques

Soit $r \in IR^*$ et (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 (resp. u_1) et de raison r .

Définition récurrente	**Définition explicite**	**Somme des *n* premiers termes**	**Limite**
$u_{n+1} = u_n + r$ soit $u_{n+1} - u_n = r$	$u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_1 + (n-1)r$	$S_n = n \times \dfrac{u_0 + u_{n-1}}{2}$ ou $S_n = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2}$	Si r > 0, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ Si r < 0 , $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
Cette définition permet de comprendre la nature de la suite : la différence entre deux termes consécutifs est constante.	Cette définition permet d'obtenir le terme général, directement en fonction du premier terme et de la raison.	S_n est le produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique du premier et du dernier de ces termes.	On dit que la suite (u_n) est divergente.

2. Suites géométriques

Soit $q \in IR^* - \{1\}$ et (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 (resp. u_1) et de raison q .

Définition récurrente	**Définition explicite**	**Somme des *n* premiers termes ($q \neq 1$)**	**Limite**
$u_{n+1} = u_n \times q$ soit si $u_n \neq 0$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_1 \times q^{n-1}$	$S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$ ou $S_n = u_1 \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$	Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ Si $0 < \lvert q \rvert < 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ Si $q \leq$ -1 : pas de limite
Cette définition permet de comprendre la nature de la suite : le rapport de deux termes consécutifs est constant.	Cette définition permet d'obtenir le terme général, directement en fonction du premier terme et de la raison.	Au numérateur, l'exposant de q fait toujours référence au nombre de termes.	Dans le premier et dernier cas, la suite est divergente. Dans le second cas, la suite converge vers 0.

Sens de variation : Si le premier terme est positif (resp. négatif)

- Si $q > 1$, $\forall n \in IN$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante (resp. décroissante)
- Si $0 < q < 1$, $\forall n \in IN$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante (resp. croissante).
- Si $q < 0$ la suite est non monotone.

3. Suites arithmético-géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est arithmético-géométrique lorsqu'il existe un réel $a \in IR - \{0,1\}$ et un réel $b \neq 0$ tel que $\forall n \in IN$, $u_{n+1} = au_n + b$ avec u_0 donné.

Théorème :

Si (u_n) est une suite arithmético-géométrique alors il existe un réel α , solution de l'équation $\alpha = a\alpha + b$ tel que la suite (v_n) définie $\forall n \in IN$ par $v_n = u_n - \alpha$, soit une suite géométrique de raison a. De l'étude de la suite (v_n) on déduit l'étude de la suite (u_n).

Démonstration :

$\alpha = a\alpha + b \Rightarrow \alpha = \dfrac{b}{1-a}$ avec $a \neq 1$, posons $\forall n \in IN$, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

Soit $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{b}{1-a} = au_n + b - \dfrac{b}{1-a} = au_n + \dfrac{-ab}{1-a} = a\left[u_n - \dfrac{b}{1-a}\right] = av_n$.

$\forall n \in IN$, $v_{n+1} = av_n \Rightarrow (v_n)$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$. Donc $\forall n \in IN$, $v_n = a^n v_0$ et $u_n = a^n v_0 + \dfrac{b}{1-a}$

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in IN$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Résolvons l'équation $\alpha = 2\alpha + 3$ soit $\alpha = -3$. Posons $\forall n \in IN$, $v_n = u_n + 3$ soit $v_0 = 1 + 3 = 4$

Donc $\forall n \in IN$, $v_n = 4 \times 2^n$ et $u_n = 4 \times 2^n - 3$.

4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On dit qu'une suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, lorsqu'il existe deux réels non nuls a et b tel que $\forall n \in IN$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec u_0 et u_1 donnés.

Equation caractéristique :

Dans le but d'exprimer u_n en fonction de u_0, u_1 et n, on recherche d'éventuelles suites géométriques du type (r^n) avec $r \neq 0$, c'est-à-dire tel que $\forall n \in IN$, $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$.

Par division par r^n on obtient l'équation (E) : $r^2 - ar - b = 0$, appelée équation caractéristique de la suite. On étudie la suite (u_n) par résolution de cette équation du 2nd degré.

- Si $a^2 + 4b > 0$, (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2. On démontre alors par récurrence qu'il existe deux réels λ et μ tel que $\forall n \in IN$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et que l'on détermine en résolvant le système $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$
- Si $a^2 + 4b = 0$, (E) admet une racine double r_0. On démontre alors par récurrence qu'il existe deux réels λ et μ tel que $\forall n \in IN$, $u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n$ et que l'on détermine en résolvant le système $\begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda + \mu r_0 = u_1 \end{cases}$

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = u_1 = -1$ et $\forall n \in IN$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

$\forall r \in IR^*$ l'équation caractéristique de cette suite est : $r^2 - 5r + 6 = 0$. $\Delta = 1$ donc l'équation admet deux solutions $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.

Déterminons deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in IN$, $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$.

λ et μ sont solutions du système $\begin{cases} \lambda + \mu = -1 \\ 2\lambda + 3\mu = -1 \end{cases}$ soit $\lambda = -2$ et $\mu = 1$.

On retrouve donc le résultat : $\forall n \in IN$, $u_n = -2 \times 2^n + 3^n = 3^n - 2^{n+1}$.

Chapitre 3 : Intégration

I. Primitive d'une fonction continue

1. Définition :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de IR, F est une primitive de f sur l'intervalle I, si et seulement si, F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$. Par définition F est continue sur I.
On note $F(x) = \int f(x)dx$ une primitive quelconque de f.

Existence de primitives

Si f est continue sur un intervalle I de IR alors elle admet une infinité de primitives sur I.

Démonstration admise

Exemple de fonction n'admettant pas de primitive :
Soit la fonction f définie sur [0 ; 2] par : si $x \in [0;1[\cup]1,2]$; $f(x) = 0$ et $f(1) = 1$.
Supposons l'existence d'une primitive F de f sur [0 ; 2], $\exists(k,k') \in IR^2$ tel que si $x \in [0;1[$; $F(x) = k$ et si $x \in]1,2]$; $F(x) = k'$. F devant être continue sur [0 ; 2] et donc en 1, on a $k = k'$.
Mais dans ce cas F est constante et $F' = 0$ or f n'est pas la fonction nulle. D'où la contradiction.

Théorème :

Si f admet une primitive F sur un intervalle I de IR, alors elle en admet une infinité et G est une primitive de f sur I si et seulement il existe une réel k tel que : $\forall x \in I, G(x) = F(x) + k$.

Démonstration triviale

Remarque :
I doit impérativement être un intervalle comme le montre l'exemple ci-dessous :
Soit la fonction f définie par $\forall x \in IR$, $f(x) = 1$, f est continue sur IR. Soit les fonctions F et G définies sur IR^* par $F(x) = x$ et si x > 0, $G(x) = x$ et si $x < 0$, $G(x) = x + 1$.
F et G sont deux primitives sur de f mais cependant il n'existe pas de constante k telle que $\forall x \in IR^*$, $G(x) = F(x) + k$, d'où la contradiction.

Corollaire :

Si f admet une primitive F sur un intervalle I de IR, alors $\forall a \in I$ et $\forall A \in IR$, il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(a) = A$.

Démonstration par l'absurde immédiate.

2. Primitives usuelles

On démontre les résultats suivants par dérivation.
u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I de IR , $\alpha \in IR$ et k une constante réelle .

fonction	primitive
$u'u^{\alpha}, \alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$u'\sqrt{u}, u \geq 0$	$\frac{2u\sqrt{u}}{3} + k$
$u'e^u$	$e^u + k$
$\frac{u'}{u}, u \neq 0$	$\ln\lvert u\rvert + k$
$\frac{u'}{u^{\alpha}}, u \neq 0, \alpha \neq 1$	$\frac{-1}{(\alpha-1)u^{\alpha-1}} + k$

II. Intégrale d'une fonction continue

1. Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de IR et F une primitive de f sur l'intervalle I.
$\forall (a,b) \in I^2$, le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive choisie.

On le note $[F(x)]_a^b$ ou $\int_a^b f(x)dx$. On dit que f est intégrable sur le segment $[a,b]$.

On retient : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Remarques :

- $\int_a^b f(x)dx$ peut aussi être notée par exemple : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$ .On dit que la x ou t ou u est une variable muette. Cependant on ne peut noter $\int_a^b f(a)da$ ou $\int_a^b f(b)db$ car a ou b, désigneraient à la fois une constante et une variable.

- dx est l'élément différentielle de l'intégrale. A ce stade il convient de considérer dx comme une notation, indiquant la variable suivant laquelle on intègre. Nous verrons dans un paragraphe ultérieur la notion de changement de variable.

Propriétés :

Par définition : $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

- **Interprétation géométrique :**

Si f est une fonction positive intégrable sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

- **Fonction définie par une intégrale**

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de IR contenant le réel a .La fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ est l'unique primitive sur I de f s'annulant en a.

Exemple : $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$

Remarque : On évitera la notation : $\int_a^x f(x)dx$.

2. Fonction intégrable sur un segment au sens de Riemann

(Mathématicien allemand 1826-1866)

- **Subdivision d'un intervalle**

On appelle subdivision de $[a,b]$ avec $a < b$, toute suite finie strictement croissante $(x_i)_{0 \le i \le n}$ de réels telle que : $a = x_0 < x_1 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b$, le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ avec $i \in \{1,...n\}$,avec est appelé **pas de la subdivision**.

- **Intégrale d'une fonction en escalier**

On dit que f est une fonction en escalier sur $[a,b]$ si il existe une subdivision $(x_i)_{0 \le i \le n}$ de $[a,b]$ telle que : $\forall i \in \{0,...,n-1\}, \forall x \in]x_i, x_{i+1}[\; \exists k_i \in IR / f(x) = k_i$.

Dans ce cas : $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(x_{i+1}-x_i)}$.

Exemple :
Soit la fonction définie sur $[0;2]$ par :

$\forall x \in [0;1[\ f(x)=2$, $\forall x \in \left[1,\frac{3}{2}\right[\ f(x)=-1$, $\forall x \in \left[\frac{3}{2},2\right] \ f(x)=1$.

$$\int_0^2 f(x)dx = 2(1-0)-1\left(\frac{3}{2}-1)\right)+1\left(2-\frac{3}{2}\right)=2$$

- **Intégrale d'une fonction continue par morceaux**

On dit qu'une fonction f est continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ si et seulement si elle est continue sur $[a,b]$, sauf en un nombre fini de points de cet intervalle, où elle admet une limite à gauche et une limité à droite, c'est-à-dire où **la restriction de *f*** à $]x_i, x_{i+1}[$ est prolongeable par continuité par une fonction φ définie par :

$\forall i \in \{0,...,n-1\}, \forall x \in]x_i, x_{i+1}[\ \varphi(x)=f(x), \varphi(x_i)=\lim_{x\to x_i^+} f(x), \varphi(x_{i+1})=\lim_{x\to x_{+1i}^-} f(x)$.

Dans ce cas : $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)dx}$.

Remarque : Une fonction en escalier sur $[a,b]$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Exemple :
Soit la fonction définie sur $[0;3]$ par :

$\forall x \in [0;1] \ f(x)=x^2$, $\forall x \in]1;2[\ f(x)=x$, $f(2)=0$ et $\forall x \in]2;3] \ f(x)=-2x+5$.

f n'est donc pas continue en 2 mais $\lim_{x\to 2^-} f(x)=2$ et $\lim_{x\to 2^+} f(x)=1$ donc :

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 xdx + \int_2^3(-x+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[-x^2+5x\right]_2^3 = \frac{11}{6}$$

- **Sommes de Riemann**

Soit une fonction bornée sur un intervalle $[a,b]$ et $(x_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle somme de Riemann associée à f relativement à la subdivision $(x_i)_{0\le i\le n}$, le réel R défini par :

$\forall i \in \{0,...,n-1\} \ R=\sum_{i=0}^{n-1} f(k_i)(x_{i+1}-x_i)$ avec $k_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, s'il existe un unique réel α tel que $\forall \varepsilon \in IR_+^*, \exists \eta \in IR_+^*$ tel que pour toute subdivision $(x_i)_{0\le i\le n}$ de pas inférieur à η et toute somme de Riemann R associée à f relativement à cette subdivision : $|R-\alpha| \le \varepsilon$.

Dans ce cas : $\int_a^b f(x)dx = \alpha$.

- **Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.**

Soit f une fonction continue positive sur $[a,b]$ et $(x_i)_{0\le i\le n}$ la subdivision de $[a,b]$ telle que

$\forall i \in \{0,...,n\}, \ x_i = a + i \times \frac{b-a}{n}$.

On observe que : $a = x_0, b = x_n$ et $\forall i \in \{1, n\}, x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ c'est-à-dire que le pas de cette subdivision est $\dfrac{b-a}{n}$. L'intervalle $[a,b]$ est donc subdivisé en n intervalles de même longueur.

Théorème :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx}$$

Démonstration admise

Remarque :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right)}$$

En effet :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right) + \frac{b-a}{n} f(b) \text{ or } \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} f(b) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right) - \frac{b-a}{n} f(a) \text{ or } \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} f(a) = 0$$

Posons : $R_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{b-a}{n} f(x_i)$ et $R_2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{b-a}{n} f(x_i)$, deux sommes de Riemann associées à f relativement à cette subdivision. On peut interpréter ces sommes comme des sommes d'aires de rectangles de même base $\dfrac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(x_i)$.

Si f est strictement croissante sur $[a,b]$, on a $R_1 \le \int_a^b f(x)dx \le R_2$

Si f est strictement décroissante sur $[a,b]$, on a $R_2 \le \int_a^b f(x)dx \le R_1$

R_1, R_2 et $\dfrac{R_1 + R_2}{2}$ sont des approximations de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode de rectangles.

L'approximation est d'autant meilleure que n est grand c'est-à-dire que le pas de la subdivision est petit.

Il existe d'autres méthodes d'approximation d'une intégrale plus performantes que la méthode des rectangles mais non abordées dans ce cours.

Exemple :

On se propose de calculer $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ en divisant l'intervalle $[0;1]$ en 5 intervalle de même longueur.

Soit $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ *(cette intégrale est d'une importance capitale en probabilités)*

La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ étant décroissante sur $[0;1]$ on a $R_2 \le \int_a^b f(x)dx \le R_1$ avec

$$R_1 = \frac{1}{5}\left[f(0) + f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8)\right] \approx 0{,}893$$

$$R_2 = \frac{1}{5}\left[f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8) + f(1)\right] \approx 0{,}814$$

$\frac{R_1 + R_2}{2} \approx 0{,}8535$. Sachant que $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0{,}8413$ à 10^{-4} près. $\frac{R_1 + R_2}{2}$ est une approximation à 10^{-1} près de cette intégrale. Avec n = 10 nous obtiendrions une approximation à 10^{-2} près.

- **Application au calcul de limites de suites**

Dans le cas où $a = 0$ et $b = 1$, d'après le théorème précédent on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx}$$

Exemple :

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \frac{1-0}{n}\sum_{k=à}^{n-1} \frac{k}{n} = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ en effet $\forall k \in \{0,...n-1\}$ $f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}$, f est donc la fonction identité.

On peut aussi ici retrouver ce résultat par un calcul direct de sommes, ce qui n'est pas toujours possible :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=à}^{n-1} k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

3. Propriétés de l'intégrale

- **Relation de Chasles**

Soit une fonction f définie continue sur un intervalle I de IR :

$$\forall (a,b,c) \in I^3 \ , \ \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Démonstration triviale

- **Linéarité**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de IR :

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall (\alpha,\beta) \in IR^2, \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

Démonstration triviale

- **Positivité**

Soit une fonction f définie continue sur un intervalle I de IR :

$\forall (a,b) \in I^2, \forall x \in I, f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$. La réciproque est fausse.

Démonstration :

Soit F une primitive de f définie sur I, $\forall x \in I$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow F$ croissante sur I.

Donc $a < b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$ soit $F(b) - F(a) \geq 0$ et $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Réciproque : Soit la restriction de la fonction cube à $[-1;2]$. $\int_{-1}^{2} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \frac{15}{4} > 0$ or la fonction $x \mapsto x^3$ est négative sur $[-1;0]$.

On établit de même : $f(x) \le 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le 0$.

- **Règle de comparaison**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de IR :

$\forall x \in I,\ f(x) \le g(x) \Rightarrow, \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Démonstration :

$f(x) - g(x) \le 0 \Rightarrow \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \le 0$ et par linéarité

$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ donc $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

- **Valeur absolue**

Soit une fonction f définie continue sur un intervalle I de IR :

f continue sur $I \Rightarrow |f|$ continue sur I donc $\int_a^b |f(x)|dx$ existe et alors : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

Démonstration :

$\forall x \in [a,b],\ -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ donc d'après la règle de comparaison et par linéarité :

$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$ soit $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

- **Inégalité de la moyenne. Valeur moyenne**

Soit une fonction f définie continue sur un intervalle I de IR. S'il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in [a,b], m \le f(x) \le M$ alors $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Démonstration :

$m \le f(x) \le M \Rightarrow m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$ soit $m[x]_a^b \le \int_a^b f(x)dx \le M[x]_a^b$ et

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Remarque : en considérant que $f = F'$, $m \le F'(x) \le M$ .on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à F sur l'intervalle $[a,b]$ à savoir : $m(b-a) \le F(b) - F(a) \le M(b-a)$.
On retrouve le même résultat ;

Remarque : Si $m = -M$ et $M \ge 0$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b-a)$.

Le réel $\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$ est appelé <u>valeur moyenne</u> de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$.

4. Intégration par parties

Pour calculer de nombreuses intégrales, il suffit de voir que la fonction à intégrer est le plus souvent à un facteur constant près, la dérivée d'une fonction connue. C'est ce que l'on appelle l'intégration à vue. C'est la méthode pratiquée en lycée.

Exemple :

Considérons l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x}\ln x dx$, on reconnait une expression du type $u'u$ avec $u(x)=\ln x$ et $u'(x)=\frac{1}{x}$, une primitive de $u'u$ est $\frac{u^2}{2}+k; k\in IR$, on a donc

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\ln x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

Considérons maintenant l'intégrale $\int_1^2 x\ln x dx$ en apparence plus simple que la précédente, cependant on ne reconnait aucune expression de primitives usuelles.

Théorème :

Soit *u* et *v* deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$, $\int_a^b u'(x)v(x)xdx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Ou $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)xdx$.

L'objectif est de faire apparaitre une intégrale plus simple que l'on peut intégrer à vue.
Parfois il faut appliquer deux fois de suite cette démarche, on parle de double intégration par parties.

Démonstration :

$(u(x)\times v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ soit $\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$,

D'où $\int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (u(x)v(x))'dx - \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Exemple :

Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \ln x$ sont de classe C^1 sur $[1,2]$, il existe donc deux fonctions *u* et *v* telles que l'on puisse poser : $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x$ soit $v(x)=\frac{x^2}{2}$ et $u'(x)=\frac{1}{x}$ donc

$$\int_1^2 x\ln x dx = \left[\ln x\times\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}dx = \left[\ln x\times\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx$$

$$\int_1^2 x\ln x dx = \left[\ln x\times\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \left(2-\frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

Remarque : Il n'est pas nécessaire qu'un produit soit visible pour intégrer par parties.

Exemple : Considérons l'intégrale $\int_1^2 \ln x dx$.

Les fonctions $x\mapsto 1$ et $x\mapsto \ln x$ sont de classe C^1 sur $[1,2]$, il existe donc deux fonctions *u* et *v* telles que l'on puisse poser : $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=1$ soit $v(x)=x$ et $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ donc

$$\int_1^2 \ln x dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\times x dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx == [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Remarque : $\boxed{\text{Une primitive de la fonction } x\mapsto \ln x \text{ est la fonction } x\mapsto x\ln x - x + k}$

5. Intégration par changement de variable

Soit une fonction f définie continue sur un intervalle I de IR contenant a et b.
Soit u une fonction de classe C^1 sur un intervalle J de IR contenant les réels α et β tels que $u(\alpha)=a$ et $u(\beta)=b$ et telle que $\forall x\in J$ avec x compris entre α et β, $u(x)\in I$,

alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(x)]\times u'(x)dx$

Posons $t=u(x)$ alors $\dfrac{dt}{dx}=u'(x)$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f[u(x)]\times u'(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

Démonstration :

$$\int_\alpha^\beta f[u(x)]\times u'(x)dx = [(F\circ u)(x)]_\alpha^\beta = F[u(\beta)] - F[u(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple :

Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 x\sqrt{x-1}dx$.

Une intégration à vue est impossible et une intégration par parties serait longue.
Posons $\forall x\in[2;3]$, $t=u(x)=x-1$ soit :

$t+1=x$, $u(2)=1$, $u(3)=2$ et $\dfrac{dt}{dx}=1$ soit $dt=dx$ d'où $\displaystyle\int_2^3 x\sqrt{x-1}dx = \int_1^2 (t+1)\sqrt{t}dt$

$$\int_1^2 (t+1)\sqrt{t}dt = \int_1^2 t\sqrt{t}dt + \int_1^2 \sqrt{t}dt = \int_1^2 t^{3/2}dt + \int_1^2 t^{1/2}dt = \left[\frac{2}{5}t^{5/2}\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^2 \qquad \int_1^2 (t+1)\sqrt{t}dt =$$

$$\left[\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^2 = \frac{8\sqrt{2}-2}{5} + \frac{4\sqrt{2}-2}{3} = \frac{44\sqrt{2}-16}{15}$$

Application au cas de fonctions paires, impaires ou périodiques :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de IR contenant a et $-a$.
Théorème :

Si f est paire sur I : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\times\int_0^a f(x)dx$

Si f est impaire sur I : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Si f est T-périodique sur I : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

Démonstration :

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$. Posons $t = -x$, $dt = -dx$ donc :

$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt$.

Si f est paire : $\int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$ et si f est impaire $\int_{0}^{a} f(-t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt$ d'où la réponse.

$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{a+T} f(x)dx$.

Posons maintenant $t = x - T$, $dt = dx$ donc $\int_{T}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t+T)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$

D'où $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx - \int_{a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(x)dx$

III. Intégrales impropres

1. Fonctions localement intégrables

On dit qu'une fonction est localement intégrable sur un intervalle I de IR si et seulement si elle est intégrable sur tout segment inclus dans I.

Par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur IR^*, elle est par exemple localement intégrable sur $[1,+\infty[$.

2. Définition d'une intégrale impropre ou généralisée

Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $I = [a,b[$.

On dit que l'intégrale $\int_{a}^{b} f(x)dx$ converge si $\lim_{x\to b^-} \int_{a}^{x} f(t)dt$ existe dans le cas contraire on dit qu'elle diverge. Si l'intégrale est convergente on pose alors $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to b^-} \int_{a}^{x} f(t)dt$.

Autrement dit, si f est localement intégrable sur un intervalle $I = [a,b[$ et prolongeable par continuité en b alors $\int_{a}^{b} f(x)dx$ converge.

3. Nature d'une intégrale impropre

Etudier la nature d'une intégrale impropre c'est déterminer si elle est convergente ou divergente. On dit que deux intégrales impropres sont de même nature si elles sont toutes deux convergentes ou divergentes.

Sous réserve d'existence des limites on peut aussi poser :

si $I = [a,+\infty[$, $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt$.

si $I =]a,b]$, $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to a^+} \int_{x}^{b} f(t)dt$.

si $I =]-\infty, b]$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{b} f(t)dt$.

Exemple :

- $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente et $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} e^{-t}dt$.

  $\int_{0}^{x} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}$ donc $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = 1$

- $\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$ donc $\int_{0}^{1} x\ln x dx$ est convergente et $\int_{0}^{1} x\ln x dx = \lim_{x\to0^+} \int_{x}^{1} t\ln t dt$.

  $\int_{x}^{1} t\ln t dt = \left[\frac{t^2}{2}\left(\ln t - \frac{1}{2}\right)\right]_x^1 = \frac{-1}{2} - \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$ Et $\lim_{x\to0^+} x^2 \ln x = 0$ donc

  $\int_{0}^{1} x\ln x dx = \frac{-1}{2}$

4. Intégrales de référence ou de Riemann

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et $\alpha \in IR$. On s'intéresse aux intégrales du type :

- $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ et cas particuliers $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ ou $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.
- $\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ ou $\int_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ et cas particulier $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Posons $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, f est continue donc localement intégrable sur $[a, +\infty[$.

Si $\alpha \neq 1, \forall x \in [a, +\infty[$, $\int_{a}^{x} \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^x = \frac{x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Si $\alpha > 1$ $\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^x = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ et $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

Si $\alpha < 1$ $\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha = 1, \forall x \in [a, +\infty[$, $\int_{a}^{x} \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^x = \ln x - \ln a$ donc $\lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} \frac{dx}{x} = +\infty$ et $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge.

> On retient : Si $a > 0$, $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et alors $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

Conséquence : $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge et $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$

On démontre de même que si $\alpha < 1$, $\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\int_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ et $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ convergent et

$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$.

5. Intégrale doublement impropre

Soit *f* une fonction localement intégrable sur *IR*.

On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\exists c \in IR$ tel que $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ et $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ convergent. On pose alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$.

Si $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ ou $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ diverge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

On définit de même la convergence de $\int_{a}^{b} f(x)dx$ pour *f* localement intégrable sur $I =]a,b[$.

6. Opérations sur les intégrales impropres.

a désigne ici un réel ou $-\infty$, *b* désigne ici un réel ou $+\infty$,

- **Relation de Chasles**

$\forall c \in [a,b[$, les intégrales $\int_{a}^{b} f(x)dx$ et $\int_{c}^{b} f(x)dx$ sont de même nature.

$\forall c \in]a,b]$, les intégrales $\int_{a}^{b} f(x)dx$ et $\int_{a}^{c} f(x)dx$ sont de même nature.

En cas de convergence : $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$.

- **Linéarité**

Soit $\lambda \in IR^*$, $\int_{a}^{b} f(x)dx$ et $\int_{a}^{b} \lambda f(x)dx$ sont de même nature .

En cas de convergence : $\int_{a}^{b} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{a}^{b} f(x)dx$.

- Si $\int_{a}^{b} f(x)dx$ et $\int_{a}^{b} g(x)dx$ convergent alors $\int_{a}^{b} (f(x)+g(x))dx$ converge et $\int_{a}^{b} (f(x)+g(x))dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx$.
- Si $\int_{a}^{b} f(x)dx$ converge et $\int_{a}^{b} g(x)dx$ diverge alors $\int_{a}^{b} (f(x)+g(x))dx$ diverge.
- Attention : Si $\int_{a}^{b} f(x)dx$ et $\int_{a}^{b} g(x)dx$ divergent alors on ne peut rien conclure sur la nature de $\int_{a}^{b} (f(x)+g(x))dx$.

Exemple : $\int_0^{+\infty} xdx$ et $\int_0^{+\infty} -xdx$ divergent mais $\int_0^{+\infty}(x-x)dx$ converge.

- **Parité**
  - Si f est une fonction paire $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_{-b}^{-a} f(x)dx$ sont de même nature et en cas de convergence $\int_a^b f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$.
  - Si f est une fonction impaire $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_{-b}^{-a} f(x)dx$ sont de même nature et en cas de convergence $\int_a^b f(x)dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)dx$.

7. Intégrales impropres de fonctions positives

Soit f une fonction positive localement intégrable sur un intervalle $I=[a,b[$, b désignant un réel ou $+\infty$.

Théorème :

$\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ est majorée sur *I*.

Démonstration :

$\forall (x,x')\in I^2, \varphi(x)-\varphi(x')=\int_{x'}^{x} f(t)dt$ et $\forall x\in[a,b[$, $f(x)\geq 0$ donc par positivité de l'intégrale $x\geq x' \Rightarrow \varphi(x)-\varphi(x')=\int_{x'}^{x} f(t)dt \geq 0$, donc φ est croissante sur I.

Par conséquent $\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$ existe si et seulement si φ est majorée c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx$ convergente.

8. Règles de comparaison

Soit f et g deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $I=[a,b[$, b désignant un réel ou $+\infty$,telles que $\forall x\in[a,b[, 0\leq f(x)\leq g(x)$.

Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

Si $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge.

Si $\int_a^b f(x)dx$ converge ou $\int_a^b g(x)dx$ diverge on ne peut rien conclure sur la nature de l'autre intégrale.

Démonstration :

Posons $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ et $\psi(x)=\int_a^x g(t)dt$ alors $\forall x\in[a,b[, \varphi(x)\leq\psi(x)$.

Si $\int_a^b g(x)dx$ converge , d'après le théorème précédent, ψ est majorée et donc φ est majorée et $\int_a^b f(x)dx$ converge. Par contraposée , si $\int_a^b f(x)dx$ diverge φ n'est pas majorée donc ψ non plus et $\int_a^b g(x)dx$ diverge.

Exemple :

Déterminons la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$

Posons $f(x)=e^{-x^2/2}$, f est positive et continue donc localement intégrable sur IR,

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}=0$ donc $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ converge et f est paire donc $\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-x^2}{2}}dx+\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ est convergente.

On admet que: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dt=\sqrt{2\pi}$, résultat fondamental en probabilités

9. Absolue convergence

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite absolument convergente si et seulement si $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.

Théorème :

Une intégrale absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.
Une intégrale convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.

Démonstration admise

Exemple :

On démontre que $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ est absolument convergente et $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ est semi-convergente.

10. Exemple de synthèse : La fonction Gamma

On appelle fonction Gamma, la fonction définie sur IR_+^* par : $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

Démontrer que $\Gamma(x)$ est convergente, on distinguera deux cas $x\geq 1$ et $0<x<1$.

Démontrer que $\forall x\in IR_+^*$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, en déduire $\Gamma(n)$ pour $n\in IN^*$.

Chapitre 4 : Séries numériques

I. Généralités

1. Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique réelle et $(s_n)_{n\geq n_0}$ la suite de terme général $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

La suite $(s_n)_{n\geq n_0}$ est appelée série de terme général u_n ,on la note $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou simplement $\sum u_n$ et s_n est appelée <u>somme partielle</u> de rang n de la série.

2. Nature d'une série

Etudier la nature d'une série c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.
On dit que deux séries sont de même nature si elles sont toutes deux convergentes ou divergentes.
Etudier la nature de la série de terme général u_n c'est étudier la nature de la suite de terme général $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

La série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est convergente si la suite $(s_n)_{n\geq n_0}$ est convergente.
Dans le cas contraire on dit que la série est divergente.
Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est convergente $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est appelée <u>somme de la série</u> et est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_k$.

Propriétés :

- Si $n_1 > n_0$ alors $\sum_{n\geq n_1} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature ce qui justifie la notation $\sum u_n$.
- Si $\exists n_2 \geq Max(n_0, n_1)$ tel que $\forall n > n_2$, $u_n = v_n$ alors les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de même nature mais en cas de convergence leurs sommes sont en général différentes.

Théorème :

Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La réciproque est fausse.

Contraposée : si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors $\sum u_n$ diverge .

Démonstration :
Par définition $u_n = s_n - s_{n-1}$ et par hypothèse $\lim_{n\to+\infty} s_n = l$, $l \in IR$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Réciproque : si $u_n = \frac{1}{n}$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ mais $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (voir les séries de Riemann)

Attention aux calculatrices : si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, à partir d'un certain rang les calculatrices arrondissent u_n à 0 et $(s_n)_{n\geq n_0}$ devient donc stationnaire donc systématiquement convergente.

3. Opérations sur les séries

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et λ un réel.

- Si $\sum u_n$ converge, $\sum \lambda u_n$ converge et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_k$
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_k + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_k$$

- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ divergent alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure sur $\sum (u_n + v_n)$

4. Séries à termes positifs

- **Théorème :**

Si $\forall n \geq n_0, u_n \geq 0$,
$\sum u_n$ converge si et seulement si (s_n) est majorée.
$\sum u_n$ diverge si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$.

Démonstration :
$\forall n \geq n_0, s_{n+1} - s_n = u_{n+1} \geq 0$ donc (s_n) est croissante et convergente si et seulement si elle est majorée. Par contraposée on établit le second résultat.

- **Règle de comparaison entre deux séries à termes positifs**

Si $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$,
Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge
Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge

Démonstration :
Posons $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $t_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k$, par hypothèse $s_n \leq t_n$.
Si $\sum v_n$ converge alors (t_n) est majorée et donc (s_n) aussi, d'où $\sum u_n$.
Par contraposée on établit le second résultat.

- **Comparaison à une intégrale**

Soit $a \in IR$ et f une fonction continue positive décroissante localement intégrable sur $[a, +\infty[$, alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Démonstration admise

- **Critère de d'Alembert** *(Mathématicien et philosophe français 1717-1783)*

Soit la série à termes positifs, de terme général u_n, tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$, $L \in IR - \{1\}$.
Si $L < 1$ alors $\sum u_n$ converge et si $L > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration admise

5. Série alternée

On appelle série alternée, une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

Théorème :

Soit $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite décroissante telle que $\forall n \geq n_0, v_n \geq 0$ et soit la suite de terme général $u_n = (-1)^n v_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors la série alternée $\sum u_n$ est convergente.

Démonstration :

Considérons les suites extraites de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$:

$S_{2p} = -v_1 + v_2 - v_3 + ... + v_{2p}$ et $S_{2p+1} = -v_1 + v_2 - v_3 + ... + v_{2p} - v_{2p+1}$.

Montrons qu'elles convergent vers une même limite auquel cas $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente.

$S_{2p+3} - S_{2p+1} = v_{2p+2} - v_{2p+3} \geq 0$ car $(v_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante,

de plus $S_{2p+1} = -(v_1 - v_2) - (v_3 - v_4) - ... - v_{2p+1} \leq 0$.

La suite $(S_{2p+1})_{2p+1\geq n_0}$ est donc croissante et majorée par 0 elle est donc convergente. Soit L sa limite.

$S_{2p} = S_{2p+1} + v_{2p+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2p} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2p+1} = L$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

$(u_n)_{n\geq n_0}$ étant convergente alors $\sum u_n$ est convergente.

6. Séries absolument convergentes

La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Une série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.
Une série convergente non absolument convergente est dite semi-convergente.

Exemple :

$\forall n > 0$, considérons la série $\sum u_n = \sum\limits_{n\geq1} \frac{(-1)^n}{n}$ **appelée série harmonique**.

$\sum |u_n| = \sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{n}$. Cette série diverge (voir ci-après les séries de Riemann).

Donc $\sum |u_n|$ n'est pas absolument convergente mais la série harmonique est, d'après le paragraphe précédent, une série alternée convergente. Elle est donc semi-convergente .

II. Séries de références

1. Série géométrique

On appelle série géométrique, la série $\sum x^n$, $n \in IN$, $x \in IR$.

On appelle **dérivée de la série géométrique**, la série $\sum\limits_{n\geq1} nx^{n-1}$, $n \in IN^*$, $x \in IR$.

Théorème :

Si $|x| \geq 1$ alors $\sum x^n$ diverge

Si $|x| < 1$ alors $\sum x^n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Démonstration :

Si $|x| \geq 1$ alors (x^n) ne converge pas vers 0 et donc $\sum x^n$ diverge.

Si $|x| < 1$ alors $s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Théorème :

Si $|x| \geq 1$ alors $\sum nx^{n-1}$ diverge

Si $|x| < 1$ alors $\sum nx^{n-1}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Démonstration :

Si $|x| \geq 1$ alors $|nx^{n-1}| \geq n$ donc (nx^{n-1}) ne converge pas vers 0 et $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ diverge.

Si $|x| < 1$ alors $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{nx^n(x-1) - x^n + 1}{(1-x)^2}$.

$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ mais $\lim_{n\to+\infty} nx^n$ présente une indétermination. posons $X = \frac{1}{x}$ soit $|X| \geq 1$.

$\lim_{n\to+\infty} nx^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{X^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{(\ln n - n\ln X)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{\ln n}{n} - \ln X\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n\ln X} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{X^n} = 0$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ soit $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2. Série exponentielle

On appelle série exponentielle la série $\sum \frac{x^n}{n!}$, $n \in IN$, $x \in IR$.

Théorème : *Démonstration admise*

$\forall x \in IR$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

3. Série de Riemann

On appelle série de Riemann toute série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $n \in IN^*$, $\alpha \in IR$.

Théorème :

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Démonstration :

Posons $\forall x \in IR_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ et $\forall n \in IN^*$ $u_n = f(n)$.

Si $\alpha > 0$, f est positive continue décroissante sur $[1,+\infty[$, donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont de même nature *(voir paragraphe 4)* et nous avons vu que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $\alpha \leq 0$ la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ne converge pas vers 0 et donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.