

Rapport de stage d'Insertion Professionnelle : Transcription de l'algorithme ENLSIP en Julia

Pierre Borie
ENAC

8 Juin 2020 -11 Septembre 2020

Résumé

J'ai effectué mon stage d'insertion professionnelle pour HydroQuebec transénergie, plus précisément la division de prévision de la demande, en collaboration avec Mr Fabian Bastin de l'Université de Montréal, qui était mon maître de stage. J'ai travaillé sur la transcription de l'algorithme d'optimisation ENLSIP. Cet algorithme, initialement codé en Fortran77, est utilisé en production afin de prédire la demande en électricité dans une période de 24 heures. Ce rapport illustre les résultats de mes travaux sur la compréhension du fonctionnement de l'algorithme et sur son implémentation en Julia. J'ai été en télétravail depuis la France durant la totalité de mon stage.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Présentation du problème à résoudre	2
1.2	Idée générale de la résolution	3
2	Calcul de la direction de descente	4
2.1	Méthode de Gauss-Newton	4
2.1.1	Modélisation du sous-problème	4
2.1.2	Factorisation QR	5
2.1.3	Décomposition en sous-systèmes	6
2.1.4	Résolution avec stabilisation	8
2.1.5	Résolution sans stabilisation	9
2.1.6	Solution du sous-problème	9

2.2	Méthode de Gauss-Newton avec rang plein	10
2.3	Méthode de Gauss-Newton avec minimisation de sous-espace	10
2.3.1	Principe général	10
2.3.2	Calcul de la dimension	10
2.3.3	Commentaires sur la méthode	11
2.4	Méthode de Newton	12
2.4.1	Problème à résoudre	12
2.4.2	Calcul de la direction de Newton	13
3	Mise à jour de l'espace de travail	14
3.1	Mise en situation	14
3.2	Critère de suppression d'une contrainte	15
3.3	Calcul des multiplicateurs de Lagrange	15
3.4	Commentaires	16
4	Calcul du pas	17
4.1	Principe général	17
4.2	Calcul des pénalités	17
4.2.1	Problème d'optimisation à résoudre	18
4.2.2	Résolution	19
4.3	Calcul de la longueur de pas	19
4.4	Commentaires sur le calcul du pas	20
5	Terminaison de l'algorithme	21
5.1	Critères de convergence	21
5.2	Critères d'arrêt anormaux	21
6	Résultats	21
6.1	Premier exemple	22
6.2	Second exemple	24

1 Introduction

1.1 Présentation du problème à résoudre

Pour la suite, q, l, m et n sont des entiers naturels tels que $q \leq l \leq n \leq m$.

On dispose de m observations réelles (t_i, y_i) et l'on souhaite ajuster un modèle h paramétré par $x \in \mathbb{R}^n$ qui approche au mieux nos observations, le tout en satisfaisant l

contraintes, dont q sont des contraintes d'égalité. Pour cela, on cherche le paramètre x^* qui minimise la somme des écarts entre prédictions et observations au carré, soit :^[1]

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m (h(t_i, x) - y_i)^2$$

Pour $i = 1, \dots, m$, $r_i : x \rightarrow y_i - h(t_i, x)$ est le i -ème résidu. L'algorithme sur lequel j'ai travaillé a pour finalité la résolution d'un problème d'optimisation de la forme :^[2]

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|r(x)\|^2 \\ \text{sous contraintes} \\ c_i(x) = 0 & i = 1, \dots, q \\ c_j(x) \geq 0 & j = q + 1, \dots, l \end{cases} \quad (1.1)$$

On a $r = (r_1, \dots, r_m) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ la multi-fonction vectorielle des résidus et $c = (c_1, \dots, c_l)^T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^l$ ^[3] multi-fonction des contraintes dont les q premières composantes sont des contraintes d'égalité et les $l - q$ suivantes sont des contraintes d'inégalité. On suppose les r_i et c_j deux fois continûment différentiables.

$f : x \mapsto \frac{1}{2} \|r(x)\|^2$ est la fonction objectif à minimiser.

1.2 Idée générale de la résolution

L'algorithme implémenté est un algorithme itératif où, partant d'un point x_0 , à une itération k , on calcule :

- $p_k \in \mathbb{R}^n$ une direction de descente
- $\alpha_k \in \mathbb{R}$ une longueur de pas

Et^[4] on met à jour le point courant par la relation :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (1.2)$$

-
1. From Fabian: Ne pas mettre d'espace avant le ':' en L^AT_EX, qui s'en chargera.
 2. From Fabian: Dans l'équation, il est préférable d'éviter l'environnement array, et privilégier align et la commande matrix.
 3. From Fabian: Pourquoi la transposition pour c mais pas pour r ?
 4. From Fabian: Ne pas commencer une phrase par 'Et'.

2 Calcul de la direction de descente

2.1 Méthode de Gauss-Newton

2.1.1 Modélisation du sous-problème

Les explications ci-dessous se basent sur celles fournies dans [?].

Soit \tilde{x} une approximation de la solution du problème 1.1. Dans un voisinage δx , à partir du développement de Taylor d'ordre 1, on a, pour $i = 1, \dots, m$, l'approximation suivante du i -ème résidu :

$$r_i(\tilde{x} + \delta x) \approx r_i(\tilde{x}) + \left(\frac{\partial r_i(\tilde{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial r_i(\tilde{x})}{\partial x_n} \right) \delta x \quad (2.1)$$

De même pour la j -ième contrainte, $j = 1, \dots, l$:

$$c_j(\tilde{x} + \delta x) \approx c_j(\tilde{x}) + \left(\frac{\partial c_j(\tilde{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial c_j(\tilde{x})}{\partial x_n} \right) \delta x \quad (2.2)$$

Ce qui, en notant J et A les matrices jacobiennes respectives des multi-fonctions r et c , donne les linéarisations :

$$r(\tilde{x} + \delta x) = J(\tilde{x})\delta x + r(\tilde{x}) \quad (2.3)$$

$$c(\tilde{x} + \delta x) = A(\tilde{x})\delta x + c(\tilde{x}) \quad (2.4)$$

Ces linéarisations seront injectées dans la formulation du problème 1.1 mais avant, nous allons nous intéresser à la considération des contraintes.

L'idée est, à une itération donnée, d'estimer quelles sont les contraintes actives^[5] qui peuvent donc être traitées comme des égalités. L'ensemble de ces contraintes, aussi appelé ensemble de travail et noté \mathcal{W} , peut être vu comme une prédiction de l'ensemble actif final, i.e. toutes les contraintes nulles à la solution^[6]. Parmi ces contraintes on retrouve évidemment les contraintes d'égalité^[7], qui sont par définition actives, et certaines contraintes d'inégalité. Les autres contraintes ne sont pas prises en compte dans le calcul^[8].

La détermination de l'ensemble \mathcal{W} sera détaillée dans la section 3). Le lagrangien du

5. From Fabian: Les contraintes d'égalité sont, par définition, actives. Ce sont les contraintes d'inégalité qui posent problème.

6. From Fabian: Cela ne tient que si on a des qualifications de contraintes adéquates, probablement la LICQ, et aussi la complémentarité stricte. Quelles sont les hypothèses de l'article?

7. From Fabian: Cela devrait être dit avant.

8. From Fabian: Quel calcul?

problèmes'écrit comme

$$\mathcal{L} : (x, \lambda) \mapsto f(x) - \sum_{i \in \mathcal{W}} \lambda_i c_i(x) \quad (2.5)$$

Les composantes du vecteur λ désignent les multiplicateurs de Lagrange. C'est à partir de leurs valeurs, en particulier du signe des multiplicateurs associés aux inégalités, que l'ensemble \mathcal{W} est mis à jour au début de chaque nouvelle itération.

Finalement, tout cela implique que l'on réduit le nombre de contraintes considérées à t ($q \leq t \leq l$).

Parmi ces t contraintes, on retrouve :

- toutes les contraintes d'égalité
- les contraintes d'inégalité actives considérées comme des contraintes d'égalité. ^[9]

On note \hat{c} la restriction de c à t composantes et \hat{A} sa matrice jacobienne. La linéarisation 2.4 de c reste valable pour \hat{c} .

A l'itération k , le point courant x_k , les vecteurs $r(x_k)$ et $\hat{c}(x_k)$ ainsi que les matrices $J_k = J(x_k)$ et $\hat{A}_k = \hat{A}(x_k)$ sont fixés. On cherche alors la direction de descente p_k qui nous rapproche au mieux du minimum de la fonction objectif. En injectant les linéarisations de r et \hat{c} , on obtient le sous-problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{p \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|J_k p + r(x_k)\|^2 \\ \text{s.c.} \\ \hat{A}_k p + \hat{c}(x_k) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

C'est-à-dire un problème de moindres carrés linéaires sous contraintes d'égalité linéaires.

2.1.2 Factorisation QR

Le cœur de la résolution du problème 2.6 réside dans la factorisation QR de différentes matrices. On rappelle ci-dessous la factorisation QR d'une matrice disposant de plus de lignes que de colonnes.

Théorème (Factorisation QR). *Soit $M \in \mathcal{M}_{m \times n}$ avec m et n des entiers quelconques tel que $m \geq n$.*

Alors il existe Q une matrice orthogonale $m \times m$, R de taille $n \times n$ une matrice tri-

9. From Fabian: Je crois comprendre un peu mieux la distinction entre ensemble de travail et ensemble actif. L'ensemble actif reprend les contraintes actives au point courant, tandis que l'ensemble de travail ne contient que les contraintes qui vont rester actives.

angulaire supérieure et P une matrice de permutation $n \times n$ tel que :

$$MP = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $|r_{11}| \geq |r_{22}| \geq \dots \geq |r_{nn}|$ où les r_{ii} désignent les éléments diagonaux de R .

Cette factorisation n'est pas unique mais dispose de nombreux avantages pratiques pour les problèmes de moindres carrés, ce que nous verrons tout au long de ce [document](#). Notons d'ores et déjà que la décomposition ci-dessus est très facile à obtenir en Julia puisqu'il suffit d'appliquer la fonction `qr` du package `LinearAlgebra` à la matrice que l'on souhaite factoriser. Un argument optionnel permet même d'obtenir directement la matrice de permutation associée.

2.1.3 Décomposition en sous-systèmes

On souhaite d'abord factoriser la matrice \hat{A}_k de taille $t \times n$ mais comme $t \leq n$, on passe par la factorisation QR de \hat{A}_k^T :

$$\hat{A}_k^T P_1 = Q_1 \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

avec :

- Q_1 matrice orthogonale $n \times n$,
- R_1 matrice triangulaire supérieure $t \times t$ à éléments diagonaux décroissants en valeur absolue
- P_1 matrice de permutation $n \times n$

N.B. : Les matrices issues de la décomposition QR ci-dessus ne sont pas indexées par k par soucis de lisibilité mais sont bien dépendantes de l'itération en cours. Il en va de même pour les différentes factorisations QR présentées dans la suite de ce papier.

Par transposition et par le fait que $P_1 P_1^T = I_t$, on obtient :

$$\hat{A}_k = P_1 \begin{pmatrix} L_1 & 0 \end{pmatrix} Q_1^T \quad (2.8)$$

où $L_1 = R_1^T$ est une matrice triangulaire inférieure $t \times t$.

Injectons cette factorisation l'équation des contraintes du problème 2.6 :

$$\hat{A}_k p = -c(x_k) \iff P_1 \begin{pmatrix} L_1 & 0 \end{pmatrix} Q_1^T p = -c(x_k)$$

Posant $Q_1^T p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ avec $p_1 \in \mathbb{R}^t$ et $p_2 \in \mathbb{R}^{n-t}$, on a :

$$P_1 L_1 p_1 = -\hat{c}(x_k) \iff L_1 p_1 = -P_1^T \hat{c}(x_k) = b$$

On remarque que p_1 , soit les t premiers éléments de p , est totalement déterminé par les contraintes tandis que p_2 , soit les $n - t$ derniers éléments de p , peut être choisi librement. Cela se comprend en introduisant l'espace nul de \hat{A}_k . Notons Y le bloc des t premières colonnes de Q_1 et Z celui des $n - t$ dernières ; on a $AZ = 0$ d'où :

$$Ap = AQ_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = AYp_1$$

La stratégie va maintenant être de calculer p_1 par rapport aux contraintes puis, p_1 fixé, de calculer p_2 de sorte à minimiser la fonction objectif du problème [linéarisé \(2.6\)](#). En injectant p_1 et p_2 dans cette dernière, on peut alors décomposer notre problème en deux nouveaux sous-problèmes :

$$\begin{cases} L_1 p_1 = b \\ \min_{p_2} \frac{1}{2} \|J_2 p_2 + J_1 p_1 + r(x_k)\|^2 \end{cases}$$

en introduisant $JQ_1 = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \end{pmatrix}$, $J_1 \in \mathcal{M}_{m \times t}$ et $J_2 \in \mathcal{M}_{m \times (n-t)}$, puisque $Jp = JQ_1 Q_1^T p$. [Ne sépare pas les équations du texte avec des espaces.](#)

Avant d'entamer les calculs, calculons le rang de \hat{A}_k . Comme Q_1 et P_1 sont orthogonales, on a $\text{rang}(\hat{A}_k) = \text{rang}(L_1)$ et L_1 étant triangulaire d'éléments diagonaux décroissants en valeur absolue, on définit son rang comme étant :

$$\bar{t} = \max_{1 \leq j \leq t} \{j \mid |l_{jj}| \geq \varepsilon_{rank}\} \quad (2.9)$$

où ε_{rank} est la racine carrée de la précision relative et les l_{ii} sont les éléments diagonaux de L_1 .

Cette valeur sera comparée au nombre de contraintes actives t et modifiera la méthode de calcul de p_1 10.

10. From Fabian: [Expliqué dans une autre section ?](#)

2.1.4 Résolution avec stabilisation

Si $\bar{t} < t$, il faut réaliser ce qui est appelé dans [?] une stabilisation¹¹. Cela passe par la factorisation QR de L_1 :

$$L_1 P_2 = Q_2 R_2 \quad (2.10)$$

avec :

- Q_2 matrice orthogonale $t \times t$
- R_2 matrice triangulaire supérieure $t \times t$ à éléments diagonaux décroissants en valeur absolue
- P_2 matrice de permutation $t \times t$

Le système d'inconnue p_1 devient alors :

$$R_2 P_2^T p_1 = -Q_2^T P_1^T c(x_k) = b_1$$

Pour $\omega_1 \leq t$, on définit $R_2^{(\omega_1)}$ comme le bloc triangulaire supérieur composé des ω_1 premières lignes et colonnes de R_{11} et $b_1^{(\omega_1)}$ le vecteur des ω_1 premiers éléments de b_1 . Par suite, posant $\delta p_1^{(\omega_1)}$ solution du système d'inconnue $y \in \mathbb{R}^{\omega_1}$ $R_2 y = b_1^{(\omega_1)}$, on obtient :

$$p_1 = P_2 \begin{pmatrix} \delta p_1^{(\omega_1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

p_1 étant désormais calculé, il reste à résoudre pour p_2 $\min_{p_2} \frac{1}{2} \|J_2 p_2 + (J_1 P_2 p_1 + r(x_k))\|^2$.

On se sert alors de la factorisation QR de J_2 :

$$J_2 = Q_3 \begin{pmatrix} R_3 \\ 0 \end{pmatrix} P_3 \quad (2.12)$$

avec :

- Q_3 matrice orthogonale $m \times m$
- R_3 matrice triangulaire supérieure $(n-t) \times (n-t)$ à éléments diagonaux décroissants en valeur absolue
- P_3 matrice de permutation $(n-t) \times (n-t)$

On pose $d_1 = -Q_3^T (r(x_k) + J_1 P_2 p_1)$ et pour $\omega_2 \leq n-t$, on définit $R_3^{(\omega_2)}$ comme le bloc triangulaire supérieur composé des ω_2 premières lignes et colonnes de R_3 et $d_1^{(\omega_2)}$ le vecteur constitué des ω_2 premiers éléments de d_1 . Par suite, posant $\delta p_2^{(\omega_2)}$ solution

11. From Fabian: [Pourquoi?](#)

de $R_3^{(\omega_2)}y = d^{(\omega_2)}$, on obtient :

$$p_2 = P_3^T \begin{pmatrix} \delta p_2^{(\omega_2)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

2.1.5 Résolution sans stabilisation

Si $\bar{t} = t$, on résout directement le système $L_1 p_1 = b$ comme suit :

Pour $\omega_1 \leq t$, on définit $L_{11}^{(\omega_1)}$ comme le bloc triangulaire inférieur composé des ω_1 premières lignes et colonnes de L_1 et $b^{(\omega_1)} = (b_1, b_2, \dots, b_{\omega_1})^T$. Par suite, posant $\delta p_1^{(\omega_1)}$ comme étant la solution de $L_1^{(\omega_1)}y = b^{(\omega_1)}$, on obtient :

$$p_1 = \begin{pmatrix} \delta p_1^{(\omega_1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

p_1 étant désormais calculé, il reste à résoudre pour p_2 $\min_{p_2} \frac{1}{2} \|J_2 p_2 + (J_1 p_1 + r(x_k))\|^2$. On procède comme dans le cas avec stabilisation en se servant de la factorisation QR de J_2 : on pose $d = -Q_3^T(r(x_k) + J_1 p_1)$ et pour $\omega_2 \leq n - t$, on définit $R_3^{(\omega_2)}$ comme le bloc triangulaire supérieur composé des ω_2 premières lignes et colonnes de R_3 et $d^{(\omega_2)} = (d_1, d_2, \dots, d_{\omega_2})^T$. Par suite, posant $\delta p_2^{(\omega_2)}$ solution de $R_3^{(\omega_2)}y = d^{(\omega_2)}$, on obtient :

$$p_2 = P_3^T \begin{pmatrix} \delta p_2^{(\omega_2)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

2.1.6 Solution du sous-problème

Finalement, dans un cas comme dans l'autre, la solution du problème sous contraintes (2.6)^[12] de dimension (ω_1, ω_2) est donnée par :

$$p^{(\omega_1, \omega_2)} = Q_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Les valeurs^[13] sont déterminées avant d'appliquer la méthode décrite dans cette section 2.1 et de deux façons différentes. C'est l'objet des sections 2.2 et 2.3.

12. From Fabian: [Pour les équations, utilise eqref plutôt que ref.](#)

13. From Fabian: [Quelles valeurs?](#)

2.2 Méthode de Gauss-Newton avec rang plein

14

15

Dans ce cas, on prend $\omega_1 = \text{rang}(\hat{A}_k)$ et $\omega_2 = \text{rang}(J_2)$. Le rang de J_2 peut être déterminé comme dans la relation (2.9) en se servant des éléments diagonaux de R_3 .

Cette variante de la méthode de Gauss-Newton est utilisée juste après avoir déterminé quel est l'ensemble de travail pour l'itération en cours et aboutit au calcul du vecteur noté p_{GN} pour la suite. Ce dernier constitue une première proposition de direction de descente. Il est ensuite examiné via différents critères décrits ci-après. Si ces critères ne sont pas respectés, l'algorithme réalise un nouveau calcul de direction de descente. Pour cela, on utilise soit une nouvelle variante de Gauss-Newton avec de nouvelles valeurs de ω_1 et ω_2 , soit une méthode de Newton (voir section 2.4).

2.3 Méthode de Gauss-Newton avec minimisation de sous-espace

2.3.1 Principe général

Cette méthode suit le schéma de résolution détaillé dans la section 2.1 avec des valeurs de ω_1 et ω_2 , calculées spécifiquement et inférieures à celles choisies dans la méthode Gauss-Newton rang plein. L'idée générale pour calculer ces entiers est de déterminer la dimension ω à utiliser pour résoudre un système triangulaire supérieur d'inconnue u et de second membre v de la forme :

$$Ru = v \quad (2.17)$$

Cela définit comment découper la matrice R afin de résoudre ce système comme en 2.14 ou 2.15.

Par suite, ω_1 est la dimension à utiliser pour résoudre le système d'inconnue $u = P_2^T p_1$:

$$R_1 u = -Q_2^T P_1^T c(x_k)$$

ω_2 est celle à utiliser pour résoudre celui d'inconnue p_2 :

$$R_3 p_2 = -Q_3^T (r(x_k) + J_1 P_2 p_1)$$

2.3.2 Calcul de la dimension

On se place dans le cadre du système $Ru = v$

On note $\bar{r} = \text{rang}(R)$ et on définit pour $1 \leq i \leq \bar{r}$:

14. From Fabian: [Ce serait bon d'avoir plus de détails dans cette section.](#)

15. From Fabian: [De quelle matrice mesure-t-on le rang?](#)

$$workset_i = \|v_1, \dots, v_i\| \text{ et } h_i = \left\| \frac{v_1}{R_{11}}, \dots, \frac{v_i}{R_{ii}} \right\|$$

$workset_i$ est la norme du second membre du système 2.17 en dimension i , tandis que h_i peut être vu comme une estimation de la norme de la solution de ce même sous-système. Ces grandeurs servent à déterminer la plus petite dimension à utiliser pour résoudre 2.17.

Celle-ci, notée $mindim$, est définie comme $\operatorname{argmax}_{1 \leq i \leq \bar{r}} h_i |R_{ii}|$.

On définit ensuite l'entier dim , déterminé de deux façons différentes selon la variante de Gauss-Newton utilisée à l'itération précédente.

Si c'était Gauss-Newton rang plein, on choisit :

$$dim = \max \{1 \leq k \leq \bar{r} \mid h_k < \gamma_h h_{\bar{r}} \text{ et } workset_k > \gamma_w workset_{\bar{r}}\}$$

où γ_h et γ_w sont des constantes pré-définies (respectivement 0.2 et 0.5 dans le code Fortran).

Au cas où cet indice ne serait pas défini, on prend $dim = \bar{r} - 1$.

Si la variante utilisée était la minimisation de sous-espace, on détermine d'abord par différents critères si l'itération précédente était satisfaisante ou pas (voir ces critères dans la fonction `subspace_minimization`). Si oui, on prend $dim = \omega^{(k-1)}$ où $\omega^{(k-1)}$ est la dimension utilisée à l'étape précédente. Sinon, on prend $dim = \max(1, \omega^{(k-1)} - 1)$.

Finalement, on renvoie

$$\omega = \max(mindim, dim)$$

.

Un des problèmes rencontrés vis-à-vis de cette partie est que je ne suis pas parvenu à trouver de justifications théoriques quand le calcul de ω et les différents critères évoqués. Pour l'implémentation, je me suis donc contenté de reprendre exactement ce qui était fait dans le code Fortran. Pour les détails d'implémentation, voir les fonctions `compute_solving_dim` et `subspace_dimension` du notebook.

2.3.3 Commentaires sur la méthode

Les indications du code Fortran (voir fonction `GNDCHK` du fichier `dblmod2nls.f`) semblent indiquer que cette méthode est utilisée dans le cas où on a ajouté une contrainte à l'ensemble de travail au début de l'itération, ou bien si un des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'inégalités actives est négatif. L'article [?] fait mention

page 7 que cette méthode permettrait de "stabiliser" la méthode de Gauss-Newton rang plein, puisque l'on fait une minimisation dans un sous-espace de \mathbb{R}^n .

On peut également supposer, compte tenu de l'époque du code, cette variante était utile pour réduire les erreurs numériques qui peuvent arriver dans la variante rang plein. Cela ne reste qu'une supposition mais diminuerait la pertinence de ce calcul de dimension.

2.4 Méthode de Newton

2.4.1 Problème à résoudre

La direction de Newton est calculée via la résolution du problème sous contraintes d'égalité linéaires :

$$\begin{cases} \min_{p \in \mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{2} p^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x_k, \lambda) p + \nabla f(x_k)^T p \right] \\ \text{s.c} \\ \hat{A}_k p = -\hat{c}(x_k) \end{cases}$$

$\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda)$ désigne la matrice hessienne du lagrangien introduit en 2.5 par rapport à la variable x , dont voici le détail de l'expression analytique :

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) &= \nabla f(x) - \sum_{i \in \mathcal{W}} \lambda_i \nabla \hat{c}_i(x) \\ &= J^T(x) r(x) - \sum_{i=1}^t \lambda_i \nabla \hat{c}_i(x) \\ \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x, \lambda) &= J^T(x) J(x) + \sum_{i=1}^m r_i(x) \nabla^2 r_i(x) - \sum_{i=1}^t \lambda_i \nabla^2 \hat{c}_i(x) \end{aligned}$$

où $\nabla^2 r_i$ (resp. $\nabla^2 \hat{c}_i$) désigne la matrice hessienne du i -ème résidu (resp. de la i -ème contrainte active). On posera $\Gamma = - \sum_{i=1}^t \lambda_i \nabla^2 \hat{c}_i(x_k) + \sum_{i=1}^m r_i(x_k) \nabla^2 r_i(x_k)$ pour la suite. On peut vérifier que Γ est symétrique comme combinaison linéaire de matrices symétriques.

On peut alors reformuler le problème sous la forme :

$$\begin{cases} \min_{p \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} p^T [J_k^T J_k + \Gamma] p + [J_k^T r(x_k)]^T p \\ \text{s.c.} \\ \hat{A}_k p = -\hat{c}(x_k) \end{cases} \quad (2.18)$$

2.4.2 Calcul de la direction de Newton

Comme pour la méthode Gauss-Newton, on pose $Q_1^T p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $p_1 \in \mathbb{R}^t$, $p_2 \in \mathbb{R}^{n-t}$ et $J_k Q_1 = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \end{pmatrix}$. On va également calculer p_1 par rapport aux contraintes en premier, puis calculer p_2 par la fonction objectif.

Sont connues les factorisations QR des matrices \hat{A}_k , L_1 et J_2 , respectivement en 2.7, 2.10 et 2.12. On a également connaissance du rang de \hat{A}_k .

Si $\text{rang}(\hat{A}_k) = t$, soit $b = -P_1^T \hat{c}(x_k)$, l'équation des contraintes s'écrit alors $L_1 p_1 = b$. Etant de rang t , ce système triangulaire inférieur se résout directement.

Si $\text{rang}(\hat{A}_k) < t$, on injecte la factorisation QR de L_1 dans l'équation des contraintes. Le premier système à résoudre devient alors $R_2 P_2^T p_1 = b_1$ avec $b_1 = Q_2^T b$.

Soit ω_r le rang de R_2 , δp_1 la solution du système triangulaire supérieur $R_2^{(\omega_r)} \delta p_1 = b_1$, ce qui donne :

$$p_1 = P_2 \begin{pmatrix} \delta p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La suite est indépendante du rang de \hat{A}_k et p_1 est désormais fixé.

Puisque $Q_1 Q_1^T = I_n$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p^T [J_k^T J_k + \Gamma] p + [J_k^T r(x_k)]^T p \\ &= \frac{1}{2} p^T [Q_1 Q_1^T J_k^T J_k Q_1 Q_1^T + Q_1 Q_1^T \Gamma Q_1 Q_1^T] p + [J_k^T r(x_k)]^T Q_1 Q_1^T p \\ &= \frac{1}{2} (p_1^T \ p_2^T) [Q_1^T J_k^T J_k Q_1 + Q_1^T \Gamma Q_1] \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + [(J_k Q_1)^T r(x_k)]^T Q_1^T p \\ &= \frac{1}{2} (p_1^T \ p_2^T) W \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + h^T \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= \varphi(p_2) \end{aligned}$$

Avec $W = Q_1^T J_k^T J_k Q_1 + Q_1^T \Gamma Q_1$ matrice $n \times n$ qui est trivialement symétrique et $h = (J_1 \ J_2)^T r(x_k) \in \mathbb{R}^n$. p_1 étant fixé, on souhaite minimiser φ afin de trouver la solution du problème (cette fonction est introduite afin d'accentuer la dépendance à p_2 ^[16]).

On pose ensuite $E = Q_1^T J_k^T J_k Q_1 = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}$ avec :

— E_{11} bloc $t \times t$

16. From Fabian: [Pas clair. Normalement, Newton vs Gauss-Newton vient aussi de l'ignorance ou non des résidus. Voir notamment Dennis et Schnabel.](#)

- E_{12} bloc $t \times (n - t)$
- E_{21} bloc $(n - t) \times t$
- E_{22} bloc $(n - t) \times (n - t)$

On fait le même découpage pour W , soit $W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$.

Tous les blocs sont évidemment symétriques et on a $W_{12}^T = W_{21}$

On peut alors récrire, pour $v \in \mathbb{R}^{n-t}$:

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} [2v^T W_{21} p_1 + v^T W_{22} v] + v^T J_2 r(x_k) + K$$

avec K indépendant de v . Les blocs de W étant symétriques :

$$\begin{aligned} \nabla \varphi(v) &= W_{21} p_1 + W_{22} v + J_2 r(x_k) \\ \nabla^2 \varphi(v) &= W_{22} \end{aligned}$$

Si W_{22} est définie positive, le minimum de φ s'obtient en annulant son gradient. p_2 est alors donné par la résolution du système d'inconnue v :

$$W_{22} v = -W_{21} p_1 - J_2 r(x_k)$$

Encore une fois, si W_{22} est définie positive, on utilise la factorisation de Cholesky de W_{22} pour se ramener à la résolution de deux systèmes triangulaires consécutifs. Sinon, on renvoie une erreur et l'itération en cours est dite "en échec".

Si le calcul aboutit, la solution du problème 2.18, notée p_N pour Newton, est encore une fois donnée par :

$$p_N = Q_1 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

3 Mise à jour de l'espace de travail

3.1 Mise en situation

On suppose qu'à l'optimum x^* , solution du problème 1.1, on a un ensemble \mathcal{A} de contraintes saturées, i.e $\forall i \in \mathcal{A}, c_i(x^*) = 0$. A ces contraintes, on associe des multiplicateurs de Lagrange λ_i^* pour tout $i \in \mathcal{A}$.

Les vecteurs x^* et λ^* vérifient $\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$ soit :

$$\hat{A}(x^*) \lambda^* = \nabla f(x^*) \tag{3.1}$$

avec $\lambda_i^* \geq 0$ pour les contraintes d'inégalité.

L'idée est, à chaque itération, de travailler avec des contraintes d'inégalité susceptibles d'être actives à la solution afin de pouvoir les considérer comme des égalités. Cela permet d'utiliser les méthodes de calcul de direction de descente vues dans ce papier. Cette prédiction des contraintes actives est représentée par l'ensemble \mathcal{W} introduit plus tôt et que l'on met à jour à chaque itération.

3.2 Critère de suppression d'une contrainte

Au début de chaque itération de l'algorithme, on calcule une estimation des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de l'ensemble de travail de l'itération précédente. Suite à l'analyse de ces multiplicateurs, on décide ou non de retirer au plus une contrainte de \mathcal{W} .

Le critère de sélection des contraintes se base sur une approche dite EQP (Equality Quadratic Programming). Avec cette approche, développée dans [?], on suppose la direction de descente p_k toujours réalisable, i.e $A_k p_k + c(x_k) \geq 0$ pour toute itération k . En revanche, les multiplicateurs de Lagrange ne sont pas nécessairement réalisables, c'est-à-dire qu'il peut exister une contrainte d'inégalité d'indice s pour laquelle $\lambda_s < 0$.

Si notre estimation des multiplicateurs de Lagrange comporte une ou plusieurs composantes négatives, on décide alors de retirer une des contraintes associées à ces composantes. En l'occurrence, on choisit celle dont le multiplicateur est le plus petit, soit le plus grand en valeur absolue, parmi ceux qui sont strictement négatifs.

3.3 Calcul des multiplicateurs de Lagrange

On rappelle le contexte. Nous sommes en début d'itération k , l'ensemble de travail est inchangé par rapport à l'itération précédente.

La première estimation des multiplicateurs de Lagrange se fait en résolvant pour λ le système :

$$\hat{A}_k^T \lambda = \nabla f(x_k) \quad (3.2)$$

On résout ce système en utilisant la factorisation QR de \hat{A}_k^T afin récrire le système d'inconnue $v = P_1^T \lambda$:

$$R_1 v = Q_1^T \nabla f(x)$$

qui est un système triangulaire supérieur.

Notre première estimation des multiplicateurs de Lagrange est alors $\lambda = P_1 v$. On procède comme décrit en 3.2 afin de déterminer quelle contrainte retirer de \mathcal{W} . On parle de première estimation car dans le cas où celle-ci n'implique aucune suppression de contrainte, on effectue une deuxième estimation, supposée meilleure, afin d'appliquer à nouveau notre critère de sélection.

Avant de réaliser cette estimation, il nous faut calculer la direction de descente p_{GN} avec la méthode de Gauss-Newton rang plein (voir section 2.1) correspondant à l'ensemble de travail actuel.

La seconde estimation des multiplicateurs de Lagrange est alors la solution du système :

$$\hat{A}_k^T \lambda = J_k^T [J_k p_{GN} + r(x_k)] \quad (3.3)$$

On le résout de manière analogue à la première estimation.

Si aucune contrainte n'est à supprimer, on maintient l'ensemble de travail tel quel. Sinon, on retire la contrainte de \mathcal{W} et la ligne correspondant à cette contrainte de \hat{A}_k . Cette dernière matrice étant modifiée, toutes les décompositions QR qui en découlent le sont également, soit celles de \hat{A}_k^T , L_1 et J_2 . Il faut donc les calculer à nouveau afin de pouvoir les utiliser dans la suite de l'itération en cours. Ceci fait, on peut calculer alors à nouveau la direction de descente avec la méthode de Gauss-Newton rang plein, direction qu'on pourra alors analyser puis re-calculer si nécessaire.

3.4 Commentaires

Cette section ainsi que la précédente illustrent un point important sur la méthode de l'algorithme : il s'agit d'une approche primale. C'est-à-dire que les itérés ne sont calculés que par rapport au problème primal 1.1 et on ne prend jamais en compte les multiplicateurs de Lagrange impliqués dans le problème dual. Comme nous le verrons plus tard, ils ne sont pas non plus impliqués dans le calcul de la longueur de pas. C'est sûrement une des raisons qui expliquent pourquoi on suppose que seules les directions de descente sont réalisables. La mise en place d'une approche primal-dual, avec une prise en compte plus globale des multiplicateurs de Lagrange, pourrait se révéler intéressante.

Il est également à noter que je ne suis pas parvenu à vraiment comprendre de justification théorique du critère de sélection des contraintes et que j'ai simplement reformulé le fonctionnement de l'algorithme sur ce point.

4 Calcul du pas

4.1 Principe général

On considère que la direction de descente p_k a été calculée et on souhaite maintenant déterminer la longueur de pas.

On introduit alors la fonction de mérite :

$$\psi(x, w) = \frac{1}{2} \|r(x)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{W}} w_i c_i(x)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{I}} w_j \min(0, c_j(x))^2 \quad (4.1)$$

où $w \in \mathbb{R}^l$ désigne un vecteur de pénalités que l'on associe à chaque contrainte. \mathcal{I} fait référence aux contraintes "inactives", c'est-à-dire qui ne sont pas dans l'ensemble de travail.

A l'itération k , le point courant x_k , la direction de descente p_k et les pénalités (voir calcul section 4.2) $w^{(k)}$ sont fixés. La longueur de pas est alors définie comme :

$$\alpha_k = \min_{\alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]} \psi(x_k + \alpha p_k, w^{(k)}) \quad (4.2)$$

Avec $\alpha_{max} = \min_{i \in \mathcal{I}} \left\{ -\frac{c_i(x_k)}{\nabla c_i(x_k)^T p_k} \text{ pour } i \text{ tel que } \nabla c_i(x_k)^T p_k < 0 \right\}$.

Si un tel minimum n'existe pas, on prend $\alpha_{max} = 3$.

α_{min} vaut $\alpha_{max}/3000$.

On note $\phi : \alpha \mapsto \psi(x_k + \alpha p_k, w^{(k)})$ pour la suite.

4.2 Calcul des pénalités

Introduites à la section précédente dans la fonction de mérite, ces pénalités servent à diriger la recherche du pas optimal tout en se maintenant dans un espace où nos approximations linéaires des contraintes sont valables, puisque l'on calcule p_k par rapport à ces dernières. Cela permet également de rechercher le pas dans un espace où l'ensemble \mathcal{W} reste le plus possible réalisable.

Le calcul des pénalités est réalisé à chaque itération avant de démarrer celui du pas et fait l'objet d'un problème d'optimisation à part. Mais avant de s'attarder à ce problème, définissons quelques grandeurs utiles pour la suite.

κ est une collection de ξ vecteurs de \mathbb{R}^l ($\xi = 4$ dans le code Fortran). La i -ème ligne de κ correspond aux 4 plus petites pénalités jusqu'alors calculées pour la contrainte i rangées par ordre décroissant.

$w^{(old)}$ est le dernier élément de κ , i.e. le vecteur contenant les plus petites pénalités calculées au cours des 4 itérations précédentes. ($\hat{w}^{(old)}$ contient les plus petites pénalités associées aux contraintes actives.)

On définit également le vecteur

$$z = [(\nabla \hat{c}_i(x_k)^T p_k)^2]_{1 \leq i \leq t}$$

ainsi que le réel

$$\mu = \left\lceil \frac{|(J_k p_k)^T r(x_k) + \|J_k p_k\|^2|}{\delta} - \|J_k p_k\|^2 \right\rceil$$

où δ est un réel valant 0.25 dans le code Fortran.

$w^{(old)}$, z et μ servent à paramétrer le problème d'optimisation à résoudre pour calculer w_k .

4.2.1 Problème d'optimisation à résoudre

w_k est définie comme la solution du problème :

$$\begin{cases} \min_{w \in \mathbb{R}^l} \|w\| \\ \text{s.c.} \\ y^T \hat{w} \geq \tau \text{ ou } y^T \hat{w} = \tau \\ w_i \geq w_i^{(old)}, \text{ pour } 1 \leq i \leq l \end{cases} \quad (4.3)$$

\hat{w} désigne les poids associés aux contraintes actives, y et τ sont définis ci-dessous selon différents cas.

1. Si $z^T \hat{w}^{(old)} \geq \mu$ et $\omega_1 \neq t$ (ω_1 est la dimension définie en 2.14)

$$\tau = 0$$

for $i = 1 : t$ **do**

$$e = \nabla \hat{c}_i(x_k)^T p_k (\nabla \hat{c}_i(x_k)^T p_k + \hat{c}_i(x_k))$$

if $e > 0$ **then**

$$y_i = e$$

else

$$\tau = \tau - e * \hat{w}_i^{(old)}, y_i = 0$$

end if

end for

Et la première contrainte est une contrainte d'inégalité.

2. Si $z^T \hat{w}^{(old)} < \mu$ et $\omega_1 \neq t$

```

 $\tau = \mu$ 
for  $i = 1 : t$  do
   $e = -\nabla \hat{c}_i(x_k)^T p_k * \hat{c}_i(x_k)$ 
  if  $e > 0$  then
     $y_i = e$ 
  else
     $\tau = \tau - e * \hat{w}_i^{(old)}, y_i = 0$ 
  end if
end for

```

Et la première contrainte est une contrainte d'inégalité.

3. Si $z^T \hat{w}^{(old)} < \mu$ et $\omega_1 = t$

$y = z$ et $\tau = \mu$ et la première contrainte est une contrainte d'égalité.

4.2.2 Résolution

Dans le cas où la première contrainte est une inégalité :

Pour $i \in \mathcal{W}$, $w_i^{(k)} = \max(\frac{\tau}{\|y\|^2} y_i, w_i^{(old)})$ (ce qui assure $y^T \hat{w}^{(k)} \geq \tau$)

Pour $i \in \mathcal{I}$, $w_i^{(k)} = w_i^{(old)}$.

Pour le cas où la contrainte est une égalité, l'idée est la même (voir la fonction `minimize_euclidean_norm` du notebook pour les spécificités).

4.3 Calcul de la longueur de pas

On rappelle que l'on cherche le minimum de $\phi : \alpha \mapsto \psi(x_k + \alpha p_k, w^{(k)})$ sur l'intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$

L'idée pour le calcul de α_k est, au lieu de calculer directement le minimum de ϕ , de calculer le minimum d'approximations polynomiales successives de ϕ l'interpolant en deux ou trois points.

La méthode de calcul de pas est expliquée dans l'article [?], en particulier aux pages 290-291, pour le cas d'un problème initial sans contraintes. Après analyse du code Fortran (fonction LINEC du fichier `dblreduns.f`) j'ai remarqué que le déroulement du calcul dans le cas avec contraintes est exactement le même. C'est pour cette raison que je ne détaillerai pas la méthode dans ce papier, les explications théoriques étant déjà fournies.

Les seules spécificités concernent le cas où l'on approche ϕ par un polynôme l'interpolant en deux points 0 et α_i prédéfini. En effet, les coefficients du polynôme interpolateur changent lorsque l'on ajoute des contraintes.

$$\text{Soit } P(\alpha) = \frac{1}{2} \|v_2 \alpha^2 + v_1 \alpha + v_0\|^2$$

Avec v_0, v_1 et v_2 dans \mathbb{R}^{m+t} qui s'expriment par :

$$\begin{aligned} \text{Notant } F(\alpha) &= [r_1(x_k + \alpha p_k), \dots, r_m(x_k + \alpha p_k), \sqrt{\hat{w}_1} \hat{c}_1(x_k + \alpha p_k), \dots, \sqrt{\hat{w}_t} \hat{c}_t(x_k + \alpha p_k)]^T \\ v_0 &= F(0) \\ v_1 &= [\nabla r_1(x_k)^T p_k, \dots, \nabla r_m(x_k)^T p_k, \sqrt{\hat{w}_1} \nabla \hat{c}_1(x_k)^T p_k, \dots, \sqrt{\hat{w}_t} \nabla \hat{c}_t(x_k)^T p_k]^T \\ v_2 &= \left[\frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{F_i(\alpha_i) - v_0^{(i)}}{\alpha_i} - v_1^{(i)} \right) \right]_{1 \leq i \leq m+t}^T \end{aligned}$$

Le polynôme P ainsi formé avec les coefficients ci-dessus interpole trivialement ϕ en 0 et α_i .

On explicitera également une méthode d'Armijo-Goldstein utilisée dans le cas où les approximations polynomiales de ϕ ne fourniraient pas un résultat satisfaisant (trop petit par exemple). Cette méthode et surtout les paramètres utilisés sont sans doute spécifiques à l'algorithme.

ε_{rel} désigne la racine carrée de la précision relative sur les double et $\gamma = 0.25$ dans le code Fortran. On part de $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

```

α = α₀
while φ(α) ≥ φ(0) + γ * α * φ'(0) and (α || pₖ || > εrel or α > αmin) do
    α = α/2
end while
return α

```

Les critères de la conditionnelle **or** assurent que l'on ne renvoie pas une valeur de pas trop petite.

4.4 Commentaires sur le calcul du pas

Tout d'abord, cela n'est pas illustré dans ce papier, mais la méthode de calcul du pas ressemble fortement à une méthode de régions de confiance, encore peu développées à l'époque où a été codé l'algorithme ENLSIP. Leur utilisation pourrait s'avérer intéressante pour une amélioration de l'algorithme, non seulement pour la longueur de pas mais aussi pour le calcul de la direction de descente.

On remarque également que les pénalités ne rentrent en ligne compte que dans la fonction de mérite. Un ajout de pénalités dans le calcul de la direction de descente, notamment via l'utilisation du Lagrangien augmenté, peut également être une piste d'amélioration.

Enfin, cette section montre aussi que l'on ne prend pas en compte les multiplicateurs de Lagrange qui confirme l'approche primal de l'algorithme.

5 Terminaison de l'algorithme

5.1 Critères de convergence

A la fin de chaque itération, on teste différents critères afin de savoir si l'on peut stopper l'algorithme et renvoyer la valeur de minimum trouvée. On se place en fin de l'itération k avec x_k le nouvel itéré.

On teste d'abord les conditions nécessaires suivantes :

1. $\|\hat{c}(x_k)\| < \varepsilon_h$ et les contraintes inactives doivent être strictement positives
2. $\|\hat{A}_k^T \lambda - \nabla f(x_k)\| < \sqrt{\varepsilon_{rel}} (1 + \|\nabla f(x_k)\|)$
3. $\min_{i \in \mathcal{I}} \{\lambda_i \mid \lambda_i > 0\} \geq \varepsilon_{rel} \max_{1 \leq j \leq t} |\lambda_j|$
ou $\min_{i \in \mathcal{I}} \{\lambda_i \mid \lambda_i > 0\} \geq \varepsilon_{rel} (1 + \|r(x_k)\|^2)$ s'il n'y a qu'une seule inégalité

Si ces trois conditions sont vérifiées, on vérifie ensuite si parmi ces conditions suffisantes, l'une d'elles est vérifiée :

1. $\|d\|^2 \leq \varepsilon_{rel}^2 \|r(x_k)\|^2$
2. $\|r(x_k)\|^2 \leq \varepsilon_{abs}^2$
3. $\|x_{k-1} - x_k\| < \varepsilon_x \|x_k\|$
4. $\frac{\sqrt{\varepsilon_{rel}}}{\|p_k\|} > 0.25$

Les réels ε_{rel} , ε_x , ε_{abs} et ε_h désignent des précisions relatives définies par l'utilisateur de l'algorithme. Par défaut, ils ont tous la même valeur qui est la racine carrée de la précision machine sur les double flottants.

5.2 Critères d'arrêt anormaux

Ce sont des critères non mathématiques. Je n'ai implémenté qu'un seul d'entre eux : l'algorithme ne doit pas dépasser un nombre donné d'itérations. Les autres critères correspondent à la gestion d'erreur, ce que je n'ai pas eu le temps de traiter en profondeur.

6 Résultats

Cette partie illustre différents résultats obtenus avec mon implémentation de l'algorithme en Julia dans le cas où il n'y a que des contraintes d'égalité. Par manque de temps, je n'ai pas pu finir le cas avec contraintes d'inégalités.

Pour réaliser mes tests, je suis parti de données générées par un modèle à paramètres fixés à l'avance. J'ai ensuite perturbé ces données avec un bruit gaussien. Enfin, j'ai

appliqué mon algorithme en prenant ces données perturbées comme données initiales afin de retrouver les paramètres du modèle d'origine.

6.1 Premier exemple

Vraie fonction $t \mapsto (t - 2)(t - 6)(t - 10)$

Modèle à ajuster :

$$g : (t, x_1, x_2, x_3) \mapsto (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3)$$

s.c.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

$$x_1 x_2 x_3 = 120$$

Il s'agit d'un polynôme dont on souhaite chercher les racines avec les relations coefficients-racines comme contraintes.

Point de départ : $x_0 = [1, 0, 0]$

En 13 itérations, on trouve $x^* = \begin{pmatrix} 5,99202 \\ 10,00665 \\ 2,00133 \end{pmatrix}$

FIGURE 1 – Illustration graphique

Ci-dessus, la courbe orange représente le modèle à partir duquel on a généré les données. La courbe bleue, qui colle quasiment parfaitement à l'orange, montre les prédictions du modèle avec x^* comme paramètre. Les points verts sont les données perturbées.

Dans ce cas-ci, on voit que l'on a trouvé les paramètres optimaux.

6.2 Second exemple

Vraie fonction $t \mapsto 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$

Modèle à ajuster :

$$g : (t, x_1, x_2) \mapsto 1 + x_1 t^2 + x_2^3 \frac{t^4}{3}$$

s.c.

$$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}$$

On cherche $[-0.5, 0.5]$ comme minimum.

Point de départ : $x_0 = [1, 0]$

En 9 itérations, on trouve $x^* = \begin{pmatrix} 0.71843 \\ -0.10921 \end{pmatrix}$

FIGURE 2 – Illustration graphique

Ici, la courbe bleue ne correspond pas bien à la courbe orange. Cela illustre le fait que le point trouvé est un minimum local, qui satisfait bien les critères de convergence mais ne correspond pas bien à nos données.

En changeant le point de départ par $x_0 = [-0.2, 0.1]$, on trouve en 10 itérations :

$$x^* = \begin{pmatrix} -0.499987 \\ 0.50882 \end{pmatrix}$$

Ce résultat, comme le montre l'illustration graphique ci-dessous, est bien plus proche du résultat que l'on souhaite obtenir. Il montre également, bien que le modèle soit simple, la sensibilité au point de départ.

FIGURE 3 – Illustration graphique

17

17. From Fabian: [Fournir les sources BibTeX.](#)