Description analytique du modèle

Lois du modèle

$$\mu \sim \mathcal{N}(0,4)\sigma^2 \sim \mathcal{U}(0,4)\theta_i \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)Y_i \sim \mathcal{N}(\theta_i,\sigma_i^2)$$

On cherche à obtenir $\mathbb{P}(\mu|\theta)$. On a par le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}(\mu,\theta|Y) = \frac{\mathbb{P}(\mu)}{\mathbb{P}(Y)}\mathbb{P}(\mu,\theta|Y)$$

En intégrant sur θ on obtient la quantité recherchée :

$$\mathbb{P}(\mu|Y) = \int^{\Theta} \mathbb{P}(\mu,\theta|Y)d\theta = \int^{\Theta} \frac{\mathbb{P}(\mu,\theta)}{\mathbb{P}(Y)}\mathbb{P}(Y|\mu,\theta)d\theta$$

On décompose le problème pour retrouver les trois quantités $\mathbb{P}(\mu,\theta|Y)$, $\mathbb{P}(\mu,\theta)$ et $\mathbb{P}(Y)$:

Pour $\mathbb{P}(Y|\mu,\theta)$:

$$\mathbb{P}(Y|\mu,\theta) = \prod_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(Y_i-\theta_i)^2}\right]$$

Pour $\mathbb{P}(\mu,\theta)$:

$$\mathbb{P}(\mu,\theta) = \int_0^4 \mathbb{P}(\mu,\theta,\sigma^2)d\sigma^2 = \int_0^4 \mathbb{P}(\theta|\mu,\sigma^2)\mathbb{P}(\mu,\sigma^2)d\sigma^2 = \int_0^4 \mathbb{P}(\theta|\mu,\sigma^2)\mathbb{P}(\mu)\mathbb{P}(\sigma^2)d\sigma^2$$

$$= \mathbb{P}(\mu)\int_0^4 \mathbb{P}(\theta|\mu,\sigma^2)\mathbb{P}(\sigma^2)d\sigma^2$$

$$= \mathbb{P}(\mu)\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta_i-\mu)^2}\frac{1}{4}\nVdash_{\sigma^2\in[0;4]}d\sigma^2$$

Pour $\mathbb{P}(Y)$:

$$\mathbb{P}(Y,\theta,\mu,\sigma^2) = \mathbb{P}(Y|\theta,\mu,\sigma^2)\times\mathbb{P}(\theta|\mu,\sigma^2)\times\mathbb{P}(\mu,\sigma^2) = \mathbb{P}(Y|\theta)\times\mathbb{P}(\theta|\mu,\sigma^2)\times\mathbb{P}(\mu)\times\mathbb{P}(\sigma^2)$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(Y) = \int^{\Theta}\int^{\mu}\int_0^4 \mathbb{P}(Y,\theta,\mu,\sigma^2)d\theta d\mu d\sigma^2 = \int^{\Theta}\int^{\mu}\int^{\sigma^2} \mathbb{P}(Y|\theta)\times\mathbb{P}(\theta|\mu,\sigma^2)\times\mathbb{P}(\mu)\times\mathbb{P}(\sigma^2)d\theta d\mu d\sigma^2$$

Au total :

$$\mathbb{P}(\mu|\theta) = \int^{\Theta}\frac{\mathbb{P}(\mu)\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta_i-\mu)^2}\frac{1}{4}\nVdash_{\sigma^2\in[0;4]}d\sigma^2}{\int^{\Theta}\int^{\mu}\int^{\sigma^2}\mathbb{P}(Y|\theta)\times\mathbb{P}(\theta|\mu,\sigma^2)\times\mathbb{P}(\mu)\times\mathbb{P}(\sigma^2)d\theta d\mu d\sigma^2}\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(Y_i-\theta_i)^2}\right]d\theta$$